Veronika Svobodová
Historie pravidelných mnohostěnů

In: Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. IV. (Czech). Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. pp. 7–66.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401053

HISTORIE PRAVIDELNÝCH MNOHOSTĚNŮ

Veronika Svobodová

Úvod

Ten, kdo se vydává po stopách konkrétní myšlenky otiskující se v běhu věků v různých podobách, může zažít neobyčejné putování. Tato práce si klade za cíl provést čtenáře jednou z těchto cest — tou, kterou v evropských dějinách zanechaly pravidelné mnohostěny.

Nejprve se zastavíme v Řecku, kde krása a elegance pravidelných mnohostěnů udivovala a inspirovala nemálo filosofů, a kde také byla tato tělesa poprvé matematicky popsána. Překročíme období středověku, neboť toto nemá k našemu tématu mnoho co říci. Znovu objevenou krásu mnohostěnů uvidíme v nových pohledech renesančních umělců. Navštívíme Johannese Keplera a podíváme se, jak se v jeho díle odrazila fascinace pravidelnými mnohostěny. Za přelom starého a nového myšlení budeme brát okamžik, kdy začnou matematikové hledat obecné zákonitosti, seznámíme se tedy s mnohostěnnou tvorbou Descartesovou a Eulerovou. Nahlédneme také, že dávné přání nalézt pravidelné mnohostěny ve stvořeném světě bylo splněno s objevy v mikrosvětě.

Pokusíme se čtenáři přiblížit všechny významné zastávky na cestě dlážděné pravidelnými mnohostěny až do počátku 20. stol. Dynamický rozvoj matematiky v tomto století umožňuje začlenit mnohostěny do širokého kontextu struktur a operací. Toto poslední období by jistě samo dalo dostatek podkladů k sepsání práce podobného rozsahu, nejedná se však již o objevy v trojrozměrné geometrii, proto naše cesta končí právě zde.

Věřím, že čtenář v práci uvidí geometrii v celé její harmonii, matematické i estetické.

1. Starověk — krása a elegance

Pátrání po historických prvenstvích v objevech pravidelných mnohostěnů je spojeno s určitou mírou nejistoty a spekulací. Nemůžeme

Obr. 1: Kamenné mnohostěny ze Skotska

vědět, kdo sestrojil tato tělesa poprvé, či zda nebylo více učenců, kteří by je v přibližně stejné době popsali.

V této kapitole se nejprve budeme věnovat nejstarším nálezům pravidelných mnohostěnů a uvedeme, kteří myslitelé již pravidelné mnohostěny znali. Dále zmíníme Platónovo filosofické bádání, které úzce souviselo s pravidelnými mnohostěny. Rozebereme první systematické pojednání o pravidelných mnohostěnech obsažené v díle *Elementa*. V závěru kapitoly zmíníme, kdy se poprvé objevují některé z polopravidelných mnohostěnů.

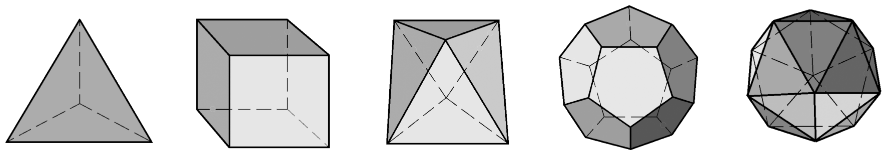
1.1. Definice. *Pravidelným mnohostěnem* (nebo též *platónským tělesem*) rozumíme konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky, kterých se sbíhá v každém vrcholu stejný počet.

1.1 První zmínka o pravidelných mnohostěnech

Považujeme-li za první zmínky i nálezy modelů připomínajících pravidelné mnohostěny, bude historie sledované problematiky sahat hluboko před náš letopočet, přibližně do doby 2000 let př. Kr., ze které pochází kamenné modely ze Skotska na obrázku 1.[1]

Pět pravidelných mnohostěnů (obr. 2) — *čtyřstěn*, *šestistěn*, *osmistěn*, *dvanáctistěn* a *dvacetistěn* (nazvaných podle počtu stěn, které tvoří jejich povrchy) — bylo velmi pravděpodobně známo již pýthagorejcům.[2]

[1] [wwwGe]
[2] [He81a] str. 158.



Obr. 2: Pět pravidelných mnohostěnů

Jak říká Proclus (411–485 př. Kr.), pýthagorejci zastávali názor, že geometrie, která si zasluhuje být studována, je ta, která povznáší duši (namísto té, která se jen snaží usnadnit život). Pýthagorás ze Sámu (569–475 př. Kr.) už definuje pojmy kvůli matematickému charakteru zkoumaných objektů, utváří tedy první kroky k systematizaci geometrie.[3]

Nevíme, zda pýthagorejci znali pravidelný dvanáctistěn, pravděpodobné je, že byl objeven z pravidelných mnohostěnů nejpozději. Povrch dvanáctistěnu je totiž tvořen pravidelnými pětiúhelníky, jejichž konstrukce je nejsložitější a dvanáctistěnu také nebyl přiřazen žádný živel (viz odstavec 1.2).

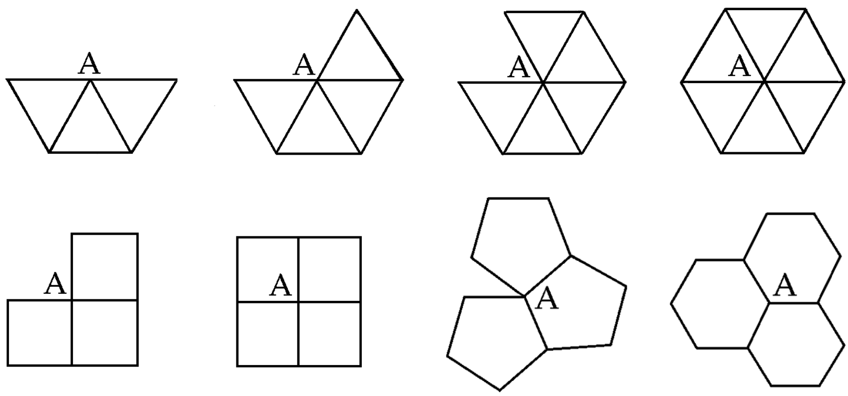
Těleso ve tvaru tohoto mnohostěnu však bylo zkonstruováno již okolo roku 500 př. Kr. Z této doby pochází kamenná etruská hračka ve tvaru pravidelného dvanáctistěnu (obr. 3).[4] Její nález byl učiněn v roce 1885 v Monte Loffa poblíž Padovy. Existuje ještě dalších minimálně dvacet šest předmětů ve tvaru dvanáctistěnu, které jsou keltského původu. Je proto možné, že Pýthagorás nebo jeho následovníci viděli nějaký takový dvanáctistěn a pak se jej snažili matematicky popsat a včlenit do systému, který budovali.[5]

Historikové se domnívají, že pýthagorejcům nebyla známa konstrukce pravidelných mnohostěnů v té míře, v jaké je později uváděna v Eukleidových *Základech* a pokládají za pravděpodobné, že prvním, kdo ji provedl, byl Theaitétos z Athén (asi 417–369 př. Kr.).[6] Tato konstrukce pravidelných mnohostěnů vychází z diskuse o počtu shodných pravidelných mnohoúhelníků sbíhajících se v jednom vrcholu.

Myšlenka diskuse spočívá v tom, že probíráme všechny možnosti konfigurací v jednom vrcholu, aby nám vznikl prostorový úhel. Je zřejmé, že ve vrcholu musí být minimálně tři pravidelné mnohoúhelníky. Vychází

[3] [He81a] str. 158–162.
[4] [wwwGe], [Cox48] str. 13.
[5] [He81a] str. 160.
[6] [He81a] str. 209, 212.

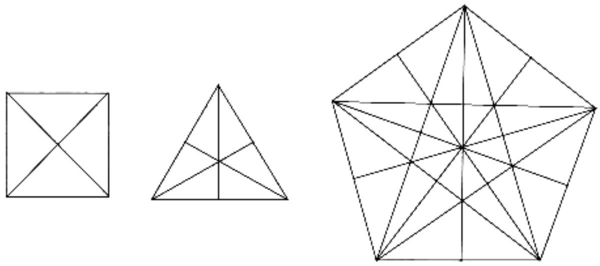
Obr. 3: Etruská hračka



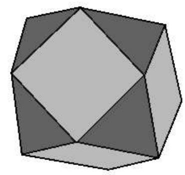
Obr. 4: Konfigurace ve vrcholu

nám pět možností (obr. 4).

Pro rovnostranný trojúhelník získáme možnosti se třemi, čtyřmi nebo pěti trojúhelníky v jednom vrcholu (šest již netvoří prostorový vrchol). Pro čtverec máme možnost se třemi mnohoúhelníky v jednom vrcholu a stejně tak pro pravidelný pětiúhelník (více čtyřúhelníků, resp. pětiúhelníků netvoří prostorový vrchol). Další mnohoúhelníky nemá smysl uvažovat, protože jejich vnitřní úhly jsou větší nebo rovny třetině plného úhlu. To, že ke každé možnosti skutečně existuje pravidelný mnohostěn, dokazuje jejich přímá konstrukce: tři trojúhelníky ve vrcholu vedou na pravidelný čtyřstěn, čtyři na pravidelný osmistěn a pět na pravidelný dvacetistěn. Tři čtverce v každém vrcholu nám vytvoří krychli a pět pravidelných pětiúhelníků dá vzniknout pravidelnému dvanáctistěnu. Této diskusi je věnována část třinácté knihy Eukleidových *Základů* (viz odstavec 1.3).



Obr. 5: Platónovo dělení pravidelných mnohoúhelníků



Obr. 6: Kuboktaedr

Theaitétos znal také poměry délek hran pravidelných mnohostěnů k poloměrům jim opsaných koulí (také tato problematika bude více přiblížena v odstavci 1.3, který je věnován Eukleidovi a jeho *Základům*).

1.2 Pravidelné mnohostěny u řeckých filosofů

Krása a elegance pravidelných mnohostěnů ponoukala mnoho starověkých filosofů k tomu, aby je hledali v řádu světa. Jedním z nich byl Platón (427–347 př. Kr.), který ve svém díle *Tímaios* popisuje konstrukci pěti pravidelných mnohostěnů klasickým způsobem, tedy „přikládá“ k sobě jednotlivé mnohoúhelníky (viz odstavec 1.1). Přichází dále na to, že stěny lze rozložit do trojúhelníků, z nichž každý je složen ze dvou pravoúhlých trojúhelníků (obr. 5).[7]

Platón znal jistě také jeden z polopravidelných mnohostěnů — kuboktaedr (těleso, jehož stěnami je osm rovnostranných trojúhelníků a šest čtverců — obr. 6).[8]

Z filosofického hlediska je významná jeho atomická teorie hmoty taktéž uvedená v díle *Tímaios*. Platón navazuje na Empedoclovu (asi 492 – asi 432 př. Kr.) teorii o existenci čtyř základních živlů — země, ohně, vody a vzduchu. Platón usuzuje, že jsou složeny z nepatrných částic, které mají tvar pravidelných mnohostěnů, protože svět přece musí být složen z dokonalých částic. Zemi, jako nejstabilnějšímu živlu přiřkne za stavební jednotku krychli. Oheň jako nejzářivější a nejostřejší živel musí být tvořen pravidelnými čtyřstěny. Voda je složena z pravidelných dvacetistěnů, neboť tento mnohostěn má nejlepší předpoklady pro „valení se“, tedy pro pohyblivost vodě příznačnou. Vzduchu přiřazuje atomy tvaru pravidelných osmistěnů a problém s nedostatkem živlů řeší tím,

[7] [He81a] str. 296.
[8] [He81a] str. 295.

že prohlásí, že vesmír má tvar pravidelného dvanáctistěnu.[9]

Dnes nám bádání tohoto typu bude připadat pravděpodobně úsměvné. Ve své době však mělo velký význam a přispívalo v neposlední řadě i k rozvoji exaktních disciplín. Propojování geometrie a filosofie však není časově omezeno jen na starověk. Jak uvidíme později, podobným teoriím se věnoval na konci 16. stol. kupříkladu Johannes Kepler, jehož vědecký přínos astronomii, fyzice a matematice je nepopiratelný. Právě od Keplera pochází dobová ilustrace k Platónově atomické teorii (obr. 19 — vpravo uprostřed).

1.3 Pravidelné mnohostěny v *Základech*

Jak je vidět z předcházejících odstavců, poznatky o pravidelných mnohostěnech, a geometrii obecně, ve starověkém Řecku nebyly nijak uceleny, neexistovalo žádné dílo, které by podávalo alespoň jejich základní souhrn. Tato potřeba vytvoření přehledu soudobého matematického poznání vedla EUKLEIDA (asi 325 – asi 265 př. Kr.) k sepsání díla *Elementa* (tj. *Základy*).

Eukleidovy *Základy* můžeme pokládat za systematickou učebnici nejen tehdejší geometrie, ale také teorie čísel a elementární algebry. Někteří matematikové dokonce tvrdí,[10] že Eukleidovým cílem bylo popsat vlastnosti právě pravidelných mnohostěnů, k čemuž musel přidat obsáhlý „úvod“ do dané problematiky. Pravdou je, že konstrukci platónských těles věnoval Eukleidés poslední, tj. třináctou knihu svých *Základů*. První až šestá kniha jsou věnovány poznatkům z rovinné geometrie, sedmá až devátá kniha se zabývají studiem přirozených čísel a desátá kniha zkoumá tzv. nesouměřitelné veličiny, v dnešní terminologii čísla iracionální.

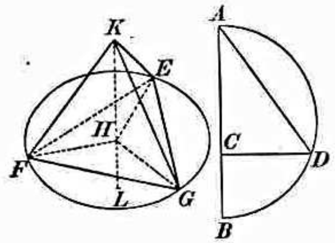
Zbývající tři knihy jsou již zaměřeny na geometrii prostoru. Jedenáctá kniha nejprve popisuje některé základní polohové vlastnosti přímek a rovin a posléze zkoumá rovnoběžnostěny. Kniha dvanáctá shrnuje poznatky o jehlanech, kuželech a koulích. Kniha třináctá nejprve zmiňuje zlatý řez v pravidelném pětiúhelníku, dále pak opisuje všem pravidelným mnohostěnům kulovou plochu a zjišťuje vztah mezi délkou hrany mnohostěnu a poloměrem kulové plochy. Závěr je věnován důkazu neexistence jiného pravidelného mnohostěnu, než zmíněných (viz odstavec 1.1).

[9] [Dev02] str. 156.
[10] [Lev91] str. 38, 39.

XIII.

Sestroj jehlan a opiš danou kulí a dokaž, že čtverec kulového průměru jest půldruhakrát větší nežli čtverec jehlanové strany (hrany).

Průměrem dané koule budiž AB a buď rozdělen v bodě C tak, aby bylo $AC = 2\,CB$; a narýsujme na AB polokruh ADB a zřiďme v bodě C na AB kolmici CD a veďme spojnici DA; mějme též kruh EFG poloměru stejného s DC a vpišme do kruhu EFG stejnostranný $\triangle EFG$ a za střed kruhu vezměme H a veďme spojnice EH, HF, HG; i vztyčme v bodě H na rovině kruhu EFG kolmici HK a odřízněme od HK úsečku HK stejnou s AC a veďme spojnice KE, KF, KG[6]. A ježto HK jest na rovině kruhu EFG kolmo, tedy také se všemi přímkami s ní se stýkajícími a jsoucími v rovině kruhu EFG bude činiti úhly pravé. Stýkají však se s ní HE, HF, HG; pročež HK jest na HE, HF, HG kolmo. A ježto $HK = AC$ a $HE = CD$ a svírají pravé úhly, tedy základna $KE = DA$. Z téže příčiny ovšem i $KF = DA$ i $KG = DA$; tedy $KE = KF = KG$. A ježto $AC = 2\,CB$, tedy $AB = 3\,BC$. Avšak $AB : BC = AD^2 : DC^2$, jakož ihned potom bude dokázáno (výt.). Pročež $AD^2 = 3\,DC^2$. Jest pak i $FE^2 = 3\,EH^2$ (XIII. XII.) a $DC = EH$; tedy $DA = EF$. Avšak bylo dokázáno, že $DA = KE = KF = KG$; pročež EF, FG, GE jsou stejné s KE, KF, KG. Tedy čtyři trojúhelníky EFG, KEF, KFG, KEG jsou stejnostranné. Pročež jehlan sestaven je ze čtyř stejnostranných trojúhelníkův a základnou jeho jest $\triangle EFG$ a temenem bod K.



Má se ovšem též opsati danou kulí a dokázati, že čtverec kulového průměru jest půldruhakrát větší nežli čtverec strany jehlanové.

Nuže prodlužme přímku KH přímým směrem, aby vznikla HL, a budiž $HL = CB$. A ježto $AC : CD = CD : CB$ a $AC = KH$, $CD = HE$ a $CB = HL$, tedy $KH : HE = EH : HL$; pročež $KH \times HL = EH^2$. A $\sphericalangle KHE$ i EHL jsou pravé; tedy polokruh rýsovaný na KL půjde i bodem E [ježto právě spojením E s L tvoří se pravý $\sphericalangle LEK$ tím, že vzniká $\triangle ELK$ s $\triangle ELH$, EHK stejnoúhlý[7])]. Když pak se kolem pevné osy KL polokruh otočí, až se opět vrátí do téhož postavení, odkud se počal otáčeti, bude procházeti i body F, G, a spojnicemi FL, LG podobně také vznikají při F, G úhly pravé; i bude jehlan danou kulí opsán. Neboť průměr kulový KL je stejný s průměrem AB koule dané, ježto právě za pravdu vzato, že $KH = AC$ a $CB = HL$.

Pravím, již, že čtverec kulového průměru jest půldruhakrát větší nežli čtverec strany jehlanové.

Neboť, ježto $AC = 2\,CB$, tedy $AB = 3\,BC$; pročež zvratně $BA = \frac{3}{2}\,AC$. A $BA : AC = BA^2 : AD^2$ [ježto právě, spojíme-li D s B, $BA : AD = DA : AC$ pro podobnost $\triangle DAB$ a DAC a proto, že první veličina má se ke třetí jako čtverec z první ke čtverci z druhé (V. vým. 9. pozn. 4.)[7])]. Tedy též $AB^2 = \frac{3}{2}\,AD^2$[8]) A BA jest průměr dané koule, AD pak rovná se straně toho jehlanu.

Tedy čtverec průměru kulového jest půldruhakrát větší nežli čtverec strany jehlanové; což právě bylo dokázati.

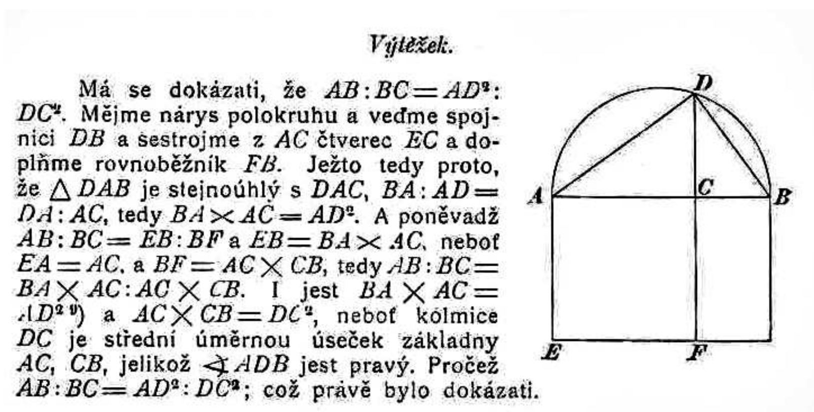
Obr. 7: Ukázka ze *Základů* (1)

Jak Eukleidés postupoval v případě důkazu vztahu mezi délkou hrany pravidelného čtyřstěnu a průměrem kulové plochy mu opsané, je vidět v následující ukázce (obr. 7 a 8).[11]

Zmíněná ukázka je v následujících odstavcích přepsána pomocí dnešní matematické symboliky tak, aby byla srozumitelná středoškolským studentům.

1.1. Věta. *Buď AB úsečka nenulové délky a C její vnitřní bod takový, že platí: $|AC| = 2 \cdot |CB|$. Dále buď k polokružnice sestrojená nad úsečkou AB a D bod polokružnice k takový, že leží na kolmici k úsečce AB vedené bodem C (obr. 8). Potom platí:*

$$|AB| : |BC| = |AD|^2 : |DC|^2 \tag{1}$$



Výtěžek.

Má se dokázati, že $AB : BC = AD^2 : DC^2$. Mějme nárys polokruhu a veďme spojnici DB a sestrojme z AC čtverec EC a doplňme rovnoběžník FB. Ježto tedy proto, že $\triangle DAB$ je stejnoúhlý s DAC, $BA : AD = DA : AC$, tedy $BA \times AC = AD^2$. A poněvadž $AB : BC = EB : BF$ a $EB = BA \times AC$, neboť $EA = AC$, a $BF = AC \times CB$, tedy $AB : BC = BA \times AC : AC \times CB$. I jest $BA \times AC = AD^2$ [1]) a $AC \times CB = DC^2$, neboť kolmice DC je střední úměrnou úseček základny AC, CB, jelikož $\sphericalangle ADB$ jest pravý. Pročež $AB : BC = AD^2 : DC^2$; což právě bylo dokázati.

Obr. 8: Ukázka ze *Základů* (2)

Důkaz. Trojúhelník ADB je podobný trojúhelníku ACD. Proto platí:

$$|BA| : |AD| = |DA| : |AC| \tag{2}$$

Proto:

$$|BA| \cdot |AC| = |AD|^2 \tag{3}$$

Trojúhelník ACD je podobný trojúhelníku DCB. Proto platí:

$$|AC| : |CD| = |CD| : |CB| \tag{4}$$

[11] [Euk07] str. 294, 295.

Proto:

$$|AC| \cdot |CB| = |CD|^2 \tag{5}$$

Použitím rovností 3 a 5 dostáváme:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AC| \cdot |AB|}{|AC| \cdot |CB|} = \frac{|AD|^2}{|CD|^2} \tag{6}$$

QED.

1.2. Věta. *Mezi hranou pravidelného čtyřstěnu a a průměrem kulové plochy mu opsané d platí vztah:*

$$d^2 = 1,5 \cdot a^2 \tag{7}$$

Důkaz. Je veden konstrukcí — sestrojíme čtyřstěn vepsaný do dané kulové plochy a ukážeme, že je pravidelný. Na závěr odvodíme vztah mezi d a a. Buď AB průměr kulové plochy a bod C jeho vnitřní bod takový, že platí: $|AC| = 2 \cdot |CB|$. Dále buď D bod kulové plochy takový, že CD je kolmá na AB. Sestrojme rovnostranný trojúhelník DEF v rovině kolmé na průměr AB, jehož středem je bod C. Z kolmosti je zřejmé, že platí:

$$|AD| = |AE| = |AF| \tag{8}$$

V libovolném rovnostranném trojúhelníku DEF se středem C (odkaz na tvrzení, které Eukleidés dokázal již dříve) platí:

$$|DE|^2 = 3 \cdot |CD|^2 \tag{9}$$

Z tvrzení 1 plyne, že:

$$|AD|^2 = 3 \cdot |CD|^2 \tag{10}$$

Z posledních tří uvedených tvrzení a z kolmosti průměru na trojúhelník zřejmě plyne:

$$|AD| = |AE| = |AF| = |DE| = |EF| = |FD|\,, \tag{11}$$

proto je čtyřstěn $ADEF$ vepsaný do kulové plochy s průměrem AB pravidelný. Zbývá ukázat platnost vztahu 7.

Z podobnosti trojúhelníků ABD a ADC plyne:

$$|AB| : |AD| = |AD| : |AC| \tag{12}$$

Proto:

$$|AB| \cdot |AC| = |AD|^2 \tag{13}$$

Použitím tohoto vztahu snadno nalédneme, že platí:

$$\frac{3}{2} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AB| \cdot |AB|}{|AC| \cdot |AB|} = \frac{|AB|^2}{|AD|^2} = \frac{d^2}{a^2} \tag{14}$$

Porovnáním začátku a konce právě uvedené rovnosti získáme dokazované tvrzení 7.

QED.

Sepsání *Základů* se tak stalo vskutku monumentálním počinem, jednalo se o vůbec první rozsáhlé dílo, které matematicky definovalo, tvrdilo a dokazovalo (což byla v období „dialogů“ naprosto nevídaná forma).

1.4 První zmínka o polopravidelných mnohostěnech

Vypustíme-li z definice pravidelných mnohostěnů požadavek shodnosti pravidelných mnohoúhelníků a budeme-li nadále požadovat zaměnitelnost vrcholů mezi sebou,[12] získáme definici polopravidelného mnohostěnu, který má smysl uvažovat už jen proto, že lze získat vhodným „osekáním“ pravidelného mnohostěnu.

1.2. Definice. Řekneme, že dva *vrcholy* konvexního mnohostěnu jsou *shodné*, jestliže se v nich sbíhá stejný počet pravidelných mnohoúhelníků jistého typu a tyto mnohoúhelníky „obíhají“ vrchol v určitém pořadí a jestliže vrcholy lze vzájemně převádět jeden na druhý. Někdy také říkáme, že *vrcholové mnohoúhelníky jsou shodné.* (Vrcholový mnohoúhelník si můžeme představit jako stěnu vzniklou vhodným odříznutím vrcholu.)

[12] U pravidelných mnohostěnů nám tato vlastnost implicitně plynula ze shodnosti pravidelných mnohoúhelníků.

1.3. Definice. *Polopravidelným mnohostěnem* rozumíme konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky a jehož vrcholy jsou navzájem shodné, přičemž vylučujeme platónská tělesa.

Poprvé tato tělesa popisuje Archimédés ze Syrakús (287–212 př. Kr.). Archimédovo dílo se nedochovalo,[13] víme však, že znal všech třináct těles (prismy[14] a antiprismy[15] v této době nejsou považovány za polopravidelné mnohostěny). Diskusi o počtu polopravidelných mnohostěnů (obr. 20), uvádí až Kepler na počátku 17. stol. v díle *Harmonices mundi* (viz odstavec 2.2.4).

Následující období je pro evropskou matematiku, resp. pro geometrii, obdobím útlumu (snad jen vyjma astronomie), díla v této době vznikající jsou spíše nevalné úrovně. Z této šedi potom jasně vystupuje Pappus z Alexandrie (asi 290 – asi 350). Vzhledem k našemu tématu je z jeho odkazu nejzajímavější, že v páté knize svého díla *Synagogae* diskutuje 13 polopravidelných mnohostěnů (jedná se o první dochovanou zmínku o polopravidelných mnohostěnech).[16]

Pappus dále ukazuje, že uvážíme-li kouli a pět pravidelných mnohostěnů — všechna tělesa se stejným povrchem, potom koule z nich bude největší (rozuměj: bude mít největší objem).[17] Důkaz provádí následujícím způsobem. Nechť P je libovolný pravidelný mnohostěn a S sféra, která má stejný povrch jako P. Vepišme do mnohostěnu sféru s. Označme R poloměr S a označme r poloměr s. Jistě platí: $R > r$. Porovnejme nyní objemy S a P. Objem S je stejný jako objem kužele, jehož základna má stejný obsah jako S má povrch a výška je rovna R. Naproti tomu objem P je stejný jako objem kužele, jehož základna má stejný obsah jako S povrch a výška je rovna r. Jelikož $R > r$, musí být objem S větší než objem P.

V období středověku nenacházíme nic podstatného, co by se zapsalo do historie popisující mnohostěny.

[13] [He81b] str. 98.

[14] Prismy jsou hranoly s podstavami pravidelných mnohoúhelníků, jejichž bočními stěnami jsou čtverce.

[15] Antiprismy vzniknou z n-bokého hranolu pootočením jedné z podstav o úhel $\frac{180°}{n}$ a následnou úpravou výšky tělesa tak, aby bočními stěnami byly místo čtverců rovnostranné trojúhelníky.

[16] [He81b] str. 98.

[17] [He81a] str. 394.

2. Mnohostěny v období renesance

V této kapitole se zaměříme na období, ve kterém nejen geometrie prochází znovuzrozením. Nahlédneme do děl, která souvisí s mnohostěny a která vznikala v rozmezí od počátku 15. až do počátku 17. stol. Zahrneme sem Keplerovo geometrické bádání, jež stylem navazuje na starověké Řeky. Zmíníme také některá umělecká díla inspirovaná mnohostěny.

Ačkoli dobově lze pokládat Descarta za Keplerova současníka, myšlenkově se spíše řadí k Eulerovi, pročež ho zmíníme až v následující kapitole.

2.1 Mnohostěny v Keplerově filosofickém bádání

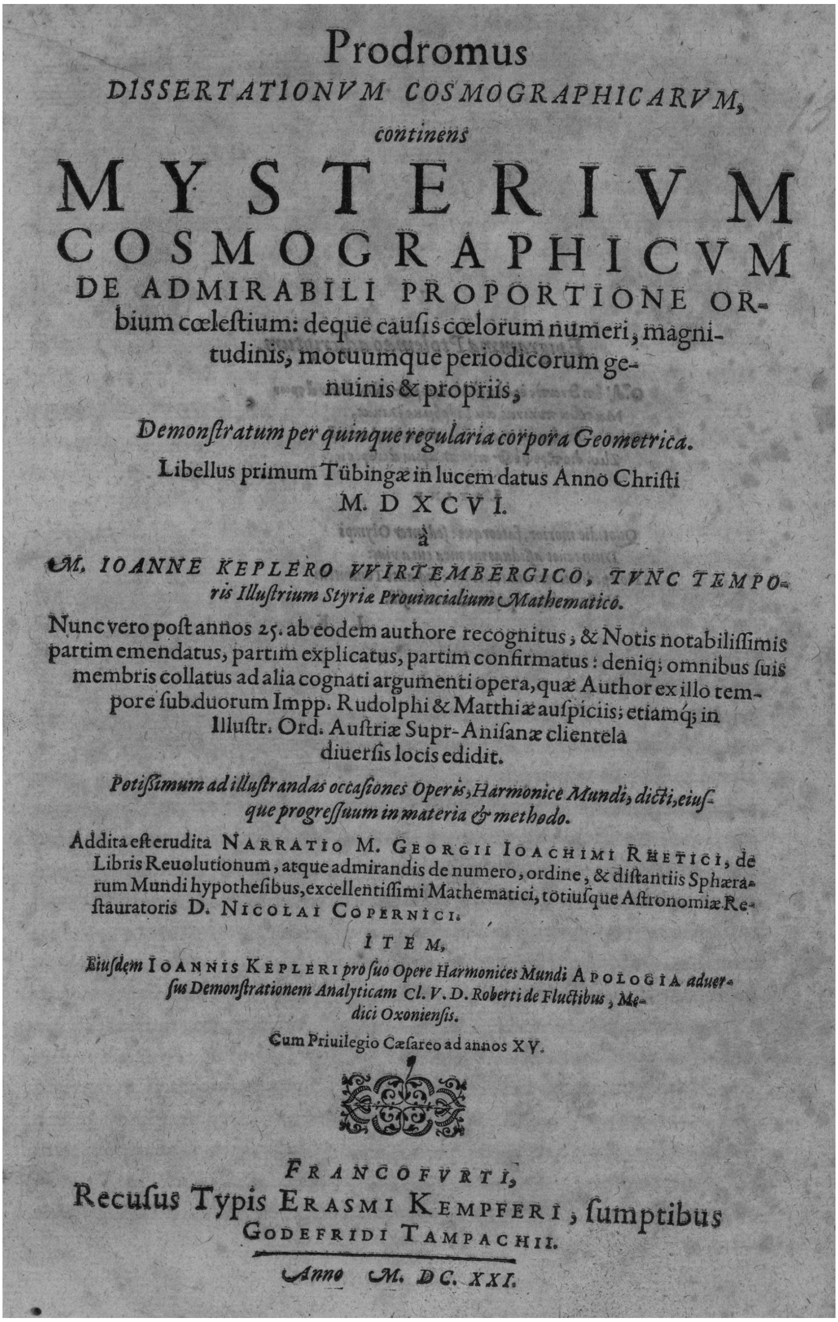
Po dlouhé přestávce od posledního objevu ve světě pravidelných mnohostěnů se opět v této tématice začíná psát historie a nepíše ji nikdo jiný než německý astronom, matematik a fyzik JOHANNES KEPLER (1571–1630). Naším cílem není zkoumat všechny oblasti Keplerova vědeckého zájmu, omezíme se pouze na ty, které se nesmazatelně vryly do historie pravidelných mnohostěnů.

Možná překvapivě je u Keplera počáteční zájem o pravidelné mnohostěny spojen s jistou vznosnou mystikou. Zastává podobný názor jako před ním například Platón, že dokonalost pravidelných mnohostěnů se musela projevit v řádu světa.

Roku 1596 Kepler publikuje dílo *Mysterium cosmographicum* (obr. 9), ve kterém se pokouší využít platónská tělesa pro své astrogeometrické bádání. Když Kepler objevuje základní zákony, jimiž se řídí pohyb planet v Sluneční soustavě, pokládá si otázku, proč jsou planety právě v takových vzdálenostech od Slunce. A zde se projevuje Keplerova náklonnost k čisté geometrii: „*Jsou-li nebeské pohyby výtvorem rozumu, mohli bychom podloženě tvrdit, že dráhy planet jsou dokonalými kruhy. Sám Bůh, který je příliš vznešený na to, aby zůstal nečinný, rozehrál hru symbolů a ukazuje světu svoji podobu. Osměluji se proto domnívat, že celá příroda i požehnané nebe jsou popsány jazykem geometrie.*“[18]

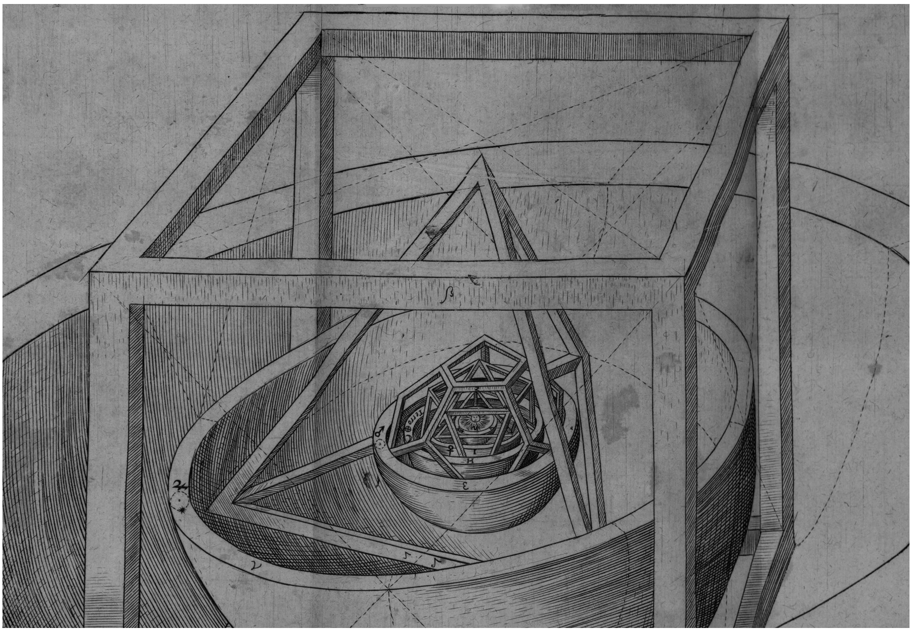
Na počátku 17. stol. bylo známo šest planet: Merkur, Venuše, Země, Mars, Jupiter a Saturn. Kepler, ovlivněný teorií MIKULÁŠE KOPERNÍKA (1473–1543) o pohybu planet okolo Slunce, se snažil najít numerický vztah, který by vysvětlil, proč existuje právě šest planet a co udává

[18] [Lev91] str. 43.



Prodromus
DISSERTATIONVM COSMOGRAPHICARVM,
continens
MYSTERIVM
COSMOGRAPHICVM
DE ADMIRABILI PROPORTIONE ORbium cœlestium: deque causis cœlorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis & propriis,
Demonstratum per quinque regularia corpora Geometrica.
Libellus primum Tübingæ in lucem datus Anno Christi M. D XCVI.
à
M. IOANNE KEPLERO VVIRTEMBERGICO, TVNC TEMPOris Illustrium Styriæ Prouincialium Mathematico.
Nunc vero post annos 25. ab eodem authore recognitus, & Notis notabilissimis partim emendatus, partim explicatus, partim confirmatus: deniq; omnibus suis membris collatus ad alia cognati argumenti opera, quæ Author ex illo tempore sub duorum Impp. Rudolphi & Matthiæ auspiciis; etiamq; in Illustr. Ord. Austriæ Supr-Anisanæ clientela diuersis locis edidit.
Potissimum ad illustrandas occasiones Operis, Harmonice Mundi, dicti, eiusque progressuum in materia & methodo.
Addita est erudita NARRATIO M. GEORGII IOACHIMI RHETICI, de Libris Reuolutionum, atque admirandis de numero, ordine, & distantiis Sphærarum Mundi hypothesibus, excellentissimi Mathematici, totiusque Astronomiæ Restauratoris D. NICOLAI COPERNICI.
ITEM,
Eiusdem IOANNIS KEPLERI pro suo Opere Harmonices Mundi APOLOGIA aduersus Demonstrationem Analyticam Cl. V. D. Roberti de Fluctibus, Medici Oxoniensis.
Cum Priuilegio Cæsareo ad annos XV.
FRANCOFVRTI,
Recusus Typis ERASMI KEMPFERI, sumptibus GODEFRIDI TAMPACHII.
Anno M. DC. XXI.

Obr. 9: Titulní strana díla *Mysterium cosmographicum*



Obr. 10: Model sluneční soustavy dle Keplera (1)

jejich vzdálenost od Slunce. Nakonec usoudil, že se jedná spíše o geometrický než numerický vztah a začal do kruhů vpisovat pravidelné mnohoúhelníky. Nenacházel však žádnou analogii s rozmístěním planet na obloze.

Po určité době však Keplera napadlo, že geometrický vzor by mohl být prostorový. Vždyť planet je šest a mezer mezi nimi pět, stejně jako pravidelných mnohostěnů, které reprezentují krásu prostoru. Kepler tedy začal vkládat jeden pravidelný mnohostěn do druhého a vepisovat a opisovat jim kulové plochy. K našemu velkému překvapení se jeho výpočty přibližně shodují se situací na obloze, jak se v té době astronomům jevila. Keplerův model vypadal takto: po největší kulové ploše se středem ve Slunci se pohybuje Saturn. Do ní je vepsána krychle a do té pak kulová plocha určující dráhu Jupitera. Když do menší kulové plochy vepíšeme čtyřstěn a do něj zase kulovou plochu, dostaneme dráhu Marsu. Analogicky mezi Marsem a Zemí je dvanáctistěn, mezi Zemí a Venuší dvacetistěn a Venuši dělí od Merkuru osmistěn. Kepler nedostal rozměry drah přesně a vysvětloval to tím, že mezi myšleným kruhem a skutečnou dráhou planety je určitý rozdíl, neboť „*nebeské pohyby nejsou dílem ro-*

zumu, ale přírody".[19] Svůj model musel proto trochu upravit — kulové plochy mají různou tloušťku (obr. 10 a obr. 11).

Koncepce pravidelného vesmíru ovšem padla objevem dalších planet, který pochopitelně nebyl doprovázen nalezením dalších pravidelných mnohostěnů. Skončila tak etapa poměrně dobrodružného odhalování zákonů, jimiž se řídilo stvoření světa.

2.2 Keplerovy mnohostěnné objevy

Keplerův zájem o mnohostěny však nebyl čistě filosofický. Zkoumal je i z matematického hlediska, což je patrné v díle *Harmonices mundi* (obr. 12), vydaném roku 1619, ve kterém nacházíme mnoho do té doby neznámých poznatků. Následující odstavce budou věnovány právě těmto Keplerovým objevům.

2.2.1 Hvězdicové mnohostěny

Kepler objevuje dva hvězdicové mnohostěny — *malý hvězdicový dvanáctistěn* a *velký hvězdicový dvanáctistěn* (na obr. 19 jsou vlevo dole). Tyto mnohostěny jsou pravidelné ve smyslu definice pravidelných mnohostěnů, pouze dovolíme, že se stěny mohou protínat a mohou jimi být i *hvězdy*, přičemž vyloučíme *složené mnohostěny*.[20] V dalším textu budeme složený mnohostěn nazývat *složenina* a budeme za něj považovat mnohostěny tvořené pronikajícími se platónskými tělesy stejného typu, které zachovávají souměrnosti původního mnohostěnu.[21]

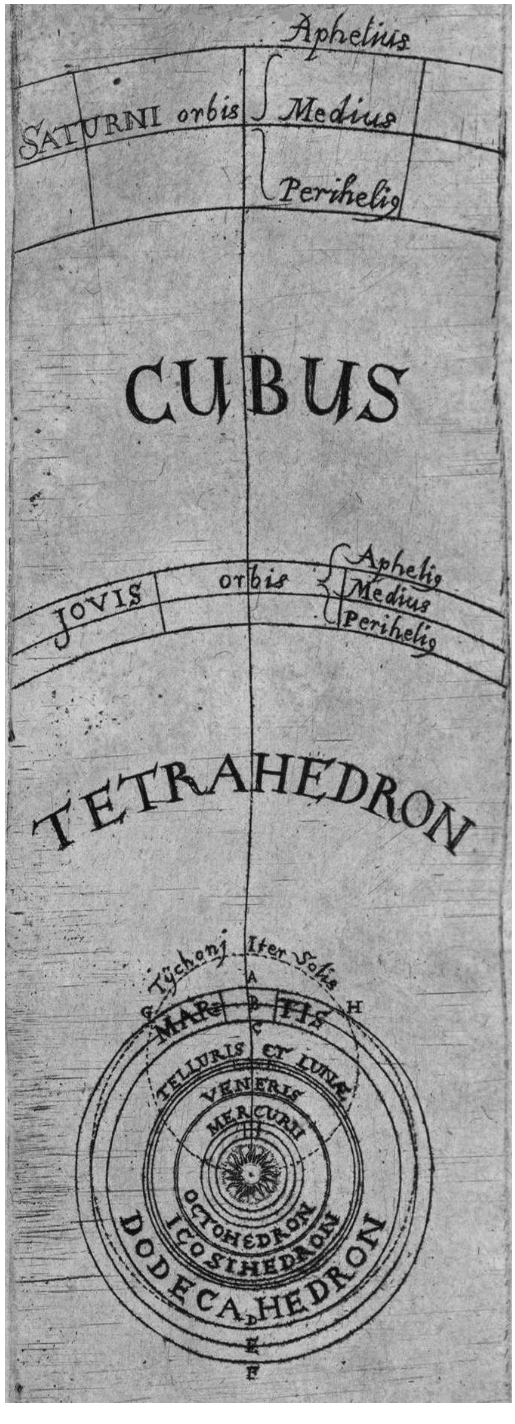
2.1. Definice. *Hvězdicovým mnohostěnem* nebo též *kepler — poinsotovým tělesem* rozumíme jednoduchý mnohostěn, který získáme ohvězdováním platónského tělesa (protažením jeho stěn, až se protnou).

Je pochopitelné, že fakt, že by tato tělesa mohla být počítána mezi mnohostěny, vyvolal vlnu pobouření a to nejen kvůli nekonvexnosti, ale

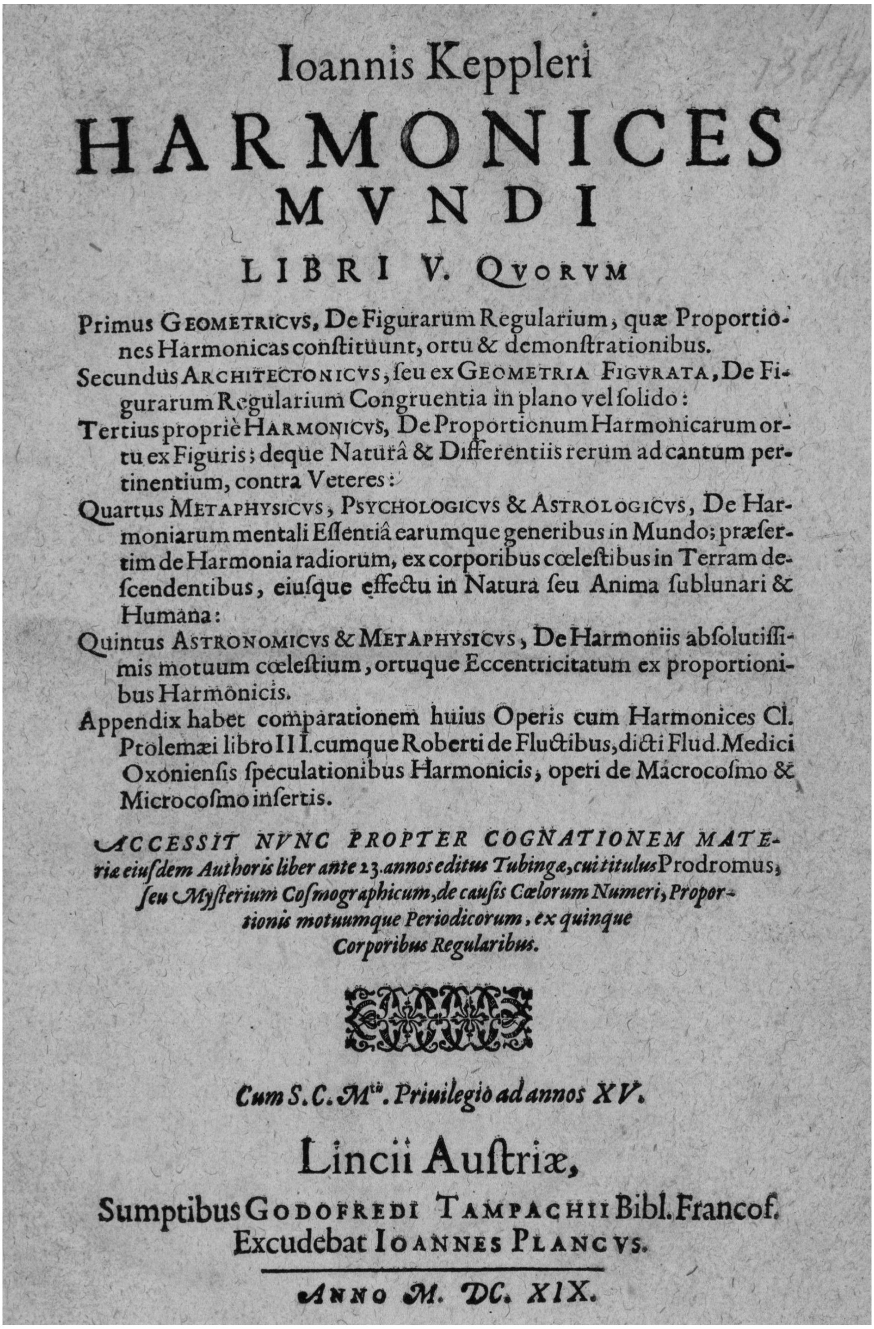
[19] [Lev91] str. 44.

[20] V anglicky psané literatuře se setkáváme s termínem *compound polyhedron*, krátce *compound*.

[21] [Cox48] str. 47.



Obr. 11: Model sluneční soustavy dle Keplera (2)



Ioannis Keppleri
HARMONICES
MVNDI
LIBRI V. QVORVM

Primus GEOMETRICVS, De Figurarum Regularium, quæ Proportiones Harmonicas conſtituunt, ortu & demonſtrationibus.
Secundus ARCHITECTONICVS, ſeu ex GEOMETRIA FIGVRATA, De Figurarum Regularium Congruentia in plano vel ſolido:
Tertius propriè HARMONICVS, De Proportionum Harmonicarum ortu ex Figuris; deque Naturâ & Differentiis rerum ad cantum pertinentium, contra Veteres:
Quartus METAPHYSICVS, PSYCHOLOGICVS & ASTROLOGICVS, De Harmoniarum mentali Eſſentiâ earumque generibus in Mundo; præſertim de Harmonia radiorum, ex corporibus cœleſtibus in Terram deſcendentibus, eiuſque effectu in Natura ſeu Anima ſublunari & Humana:
Quintus ASTRONOMICVS & METAPHYSICVS, De Harmoniis abſolutiſſimis motuum cœleſtium, ortuque Eccentricitatum ex proportionibus Harmonicis.
Appendix habet comparationem huius Operis cum Harmonices Cl. Ptolemæi libro III. cumque Roberti de Fluctibus, dicti Flud. Medici Oxonienſis ſpeculationibus Harmonicis, operi de Macrocoſmo & Microcoſmo inſertis.

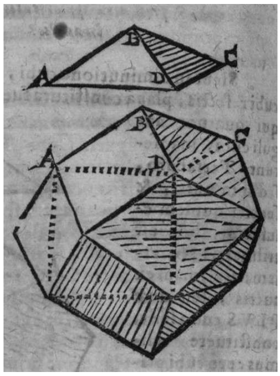
ACCESSIT NVNC PROPTER COGNATIONEM MATERIÆ eiuſdem Authoris liber ante 23. annos editus Tubingæ, cui titulus Prodromus, *ſeu Myſterium Coſmographicum, de cauſis Cœlorum Numeri, Proportionis motuumque Periodicorum, ex quinque Corporibus Regularibus.*

Cum S. C. Mtis. Priuilegio ad annos XV.

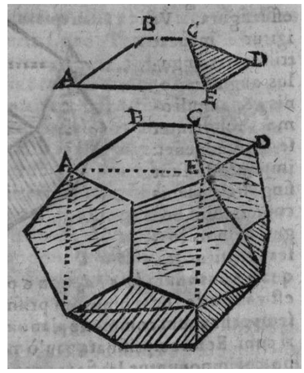
Lincii Auſtriæ,
Sumptibus GODOFREDI TAMPACHII Bibl. Francof.
Excudebat IOANNES PLANCVS.

ANNO M. DC. XIX.

Obr. 12: Titulní strana díla *Harmonices mundi*



Obr. 13: Souvislost šestistěnu a kosočtverečného dvanáctistěnu



Obr. 14: Souvislost šestistěnu a dvanáctistěnu

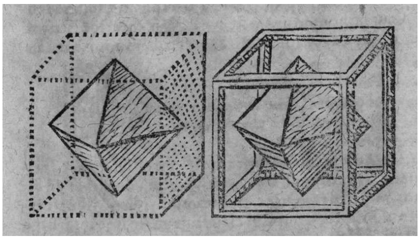
později také kvůli tomu, že evidentně nesplňovala vztah mezi počtem vrcholů v, hran h a stěn s: $v + s = h + 2$ (tzv. *Eulerovu větu*, které se budeme blíže věnovat v následující kapitole na str. 45).

Problém s údajnou neplatností *Eulerovy věty* tkvěl v pohledu na prvky mnohostěnu. Vezmeme-li např. malý hvězdicový dvanáctistěn (na obr. 19 dole, první zleva), tak z tehdejšího pohledu byly stěnami tohoto tělesa pravidelné pěticípé hvězdy, kterých bylo dvanáct. Za vrcholy byly počítány jen ty vrcholy, které tvořily ostny hvězd, v případě popisovaného tělesa jich tedy bylo také dvanáct. Za hranu byla považována spojnice dvou nesousedních vrcholů (uvažováno v rámci hvězdy), těch tedy bylo třicet (v každé stěně pět, každá hrana takto započítána dvakrát). Dosadíme-li do *Eulerova vztahu*, rozhodně nezískáme platnou rovnost. Kde je tedy chyba?

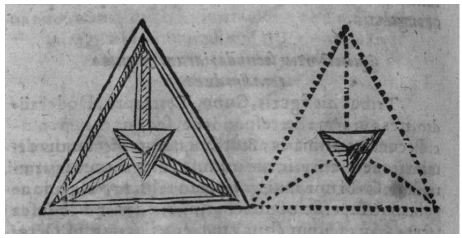
V *Eulerově vztahu* rozumíme pod pojmem stěna něco jiného, než co bylo zvykem pod tímto označením chápat. Každá stěna je ohraničena jinými stěnami, nepřipouštíme tedy, že by se stěny mohly protínat, v případě malého hvězdicového dvanáctistěnu je stěnou rovnoramenný trojúhelník tvořený cípem pravidelné hvězdy. Je pak zcela jednoduché ověřit platnost vztahu: vrcholů je 32, hran 90 a stěn 60.

2.2.2 Souvislosti mezi pravidelnými mnohostěny

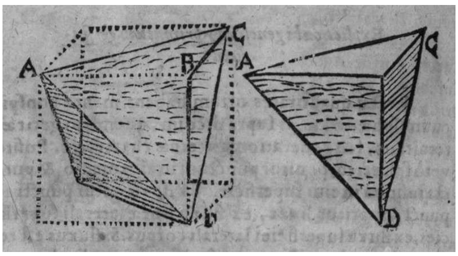
Kepler dále popisuje konstrukci pravidelných mnohostěnů. Vychází z krychle a ukazuje, jak s ní souvisí pravidelný čtyřstěn (obr. 17) — vhodným zvolením čtyř vrcholů krychle získáme vrcholy čtyřstěnu. Potom ukazuje jak spolu souvisí krychle a pravidelný dvanáctistěn (obr. 14) — postavíme-li na stěny krychle vhodné „stříšky“, získáme právě dva-



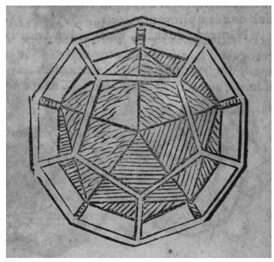
Obr. 15: Dualita šestistěnu a osmistěnu



Obr. 16: Dualita čtyřstěnu



Obr. 17: Souvislost čtyřstěnu a šestistěnu



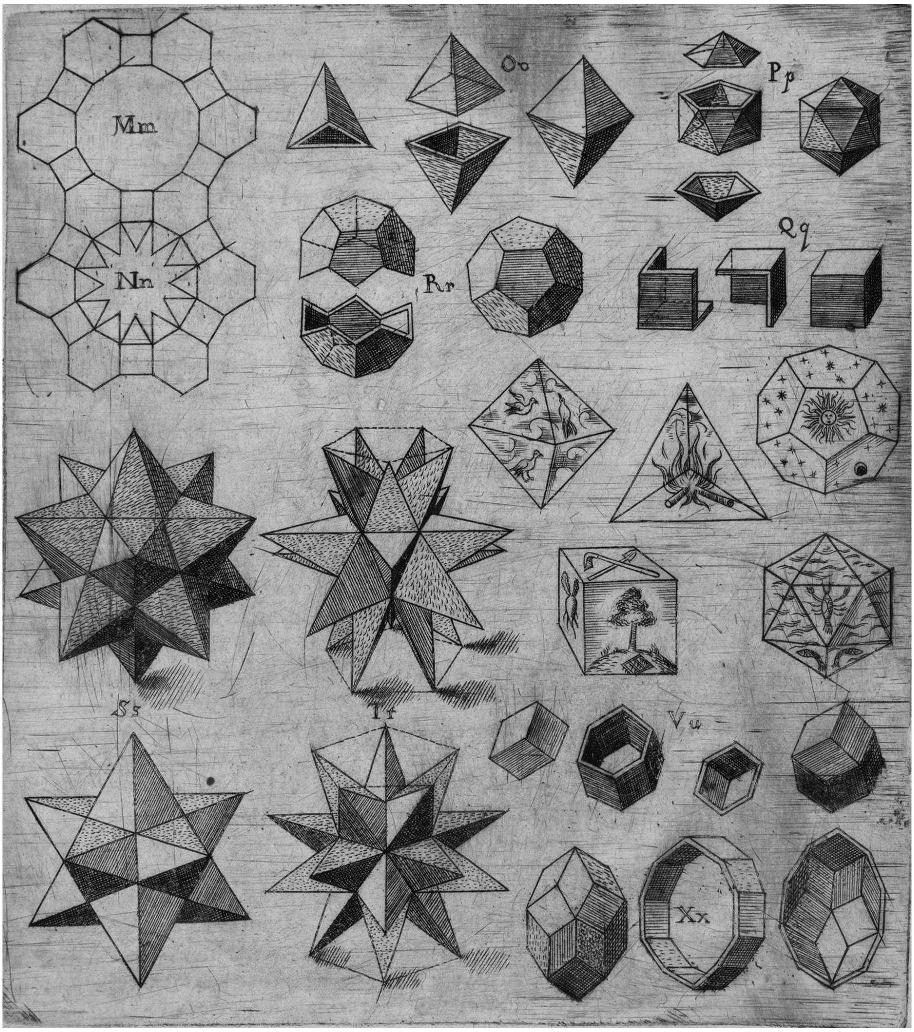
Obr. 18: Dualita dvanáctistěnu a dvacetistěnu

náctistěn. A nebo naopak — vybereme-li vhodně šest vrcholů z dvaceti vrcholů dvanáctistěnu, získáme krychli.

Pravidelný osmistěn a dvacetistěn Kepler získá postupným vepsáním do šestistěnu a dvanáctistěnu (obr. 18 a obr. 15), čímž vlastně nepřímo definuje *dualitu.* Vrcholy duálního mnohostěnu budou ležet ve středech stěn původního mnohostěnu. Kepler také upozorňuje právě na projev duálnosti, na fakt, že stejným způsobem můžeme vepsat mnohostěn také do osmistěnu, resp. dvacetistěnu a získáme tím šestistěn, resp. dvanáctistěn. Ukazuje také, že čtyřstěn je duální sám se sebou (obr. 16).

2.2.3 Kosočtverečné mnohostěny

V díle *Harmonices mundi* Kepler také jako první zmiňuje dva kosočtverečné mnohostěny (na obr. 19 vpravo dole). U těchto těles si všímá toho, že mají dva různé typy vrcholů — u kosočtverečného dvanáctistěnu je to šest vrcholů, ze kterých vychází po čtyřech hranách a osm vrcholů, ze kterých vychází po třech hranách. U kosočtverečného třicetistěnu je to dvanáct vrcholů, ze kterých vychází po pěti hranách a dvacet vrcholů, ze kterých vychází po třech hranách. Navíc Kepler ukazuje, jak získat kosočtverečný dvanáctistěn z krychle (obr. 13).



Obr. 19: Ukázka z *Harmonices mundi*

2.2.4 Polopravidelné mnohostěny

Abychom se lépe orientovali v Keplerově práci týkající polopravidelných mnohostěnů (jejich definice je na str. 17), zavedeme si pojem vrcholové posloupnosti v polopravidelném mnohostěnu.

2.2. Definice. Každý polopravidelný mnohostěn bude jednoznačně určen posloupností

$$(p_1, p_2, \dots, p_k),$$

která vyjadřuje, že v každém vrcholu mnohostěnu pro $i \in \{1, 2, \dots, k-$ $-1\}$ sousedí p_i–úhelník s p_{i+1}–úhelníkem a p_1–úhelník s p_k–úhelníkem. Tato posloupnost se nazývá *vrcholová.* Je zvykem (pokud tím nezměníme vrcholový mnohoúhelník) psát posloupnost tak, aby pro co nejvíce p_i platilo:

$$p_i \leq p_{i+1}$$

pozn.: např. místo $(4, 3, 4, 3)$ budeme psát $(3, 4, 3, 4)$.

Kepler provádí důkaz[22] existence právě 13 polopravidelných mnohostěnů (jedná se o ty, které znal již Archimédés). Postupuje stejně jako Theaitétos ve 4. st. př. Kr. při důkazu existence právě pěti pravidelných mnohostěnů. Probírá všechny přípustné konfigurace mnohoúhelníků ve vrcholu. Rozebereme si nyní, jak Kepler v důkazu postupoval, a poukážeme na některé nekorektnosti, kterých se dopustil.

Celý postup důkazu je shrnutý v tabulkách na stranách **??** a 29. Kepler probírá konfigurace v tom pořadí, ve kterém jsou uvedeny, a komentuje, zda vyhovují, či nikoli.

V případě vyhovující množiny vrcholů odkáže čtenáře na obrázek, na němž je mnohostěn vyobrazen (obr. 20). Jedná se tedy o důkaz konstrukcí. Zde se Kepler dopouští první významné chyby, protože předpokládá, že k libovolné množině mnohoúhelníků sbíhajících se v jednom vrcholu existuje právě jedna vrcholová posloupnost. Zkonstruuje např. mnohostěn s posloupností $(3, 4, 3, 4)$ a nenapadne ho, zda nemůže existovat mnohostěn s posloupností $(3, 3, 4, 4)$. Tento sice neexistuje, ale v důkazu je třeba zdůvodnit, proč tomu tak je.[23] Procházíme-li dále Keplerův výčet možností, zjistíme, že opomenul ještě jednu posloupnost[24] — $(3, 3, q)$, $q \geq 6$.

V případě nevyhovující množiny vrcholů odkáže čtenáře na větu nebo definici v předchozím textu, která nevhodnost konfigurace zdůvodní.

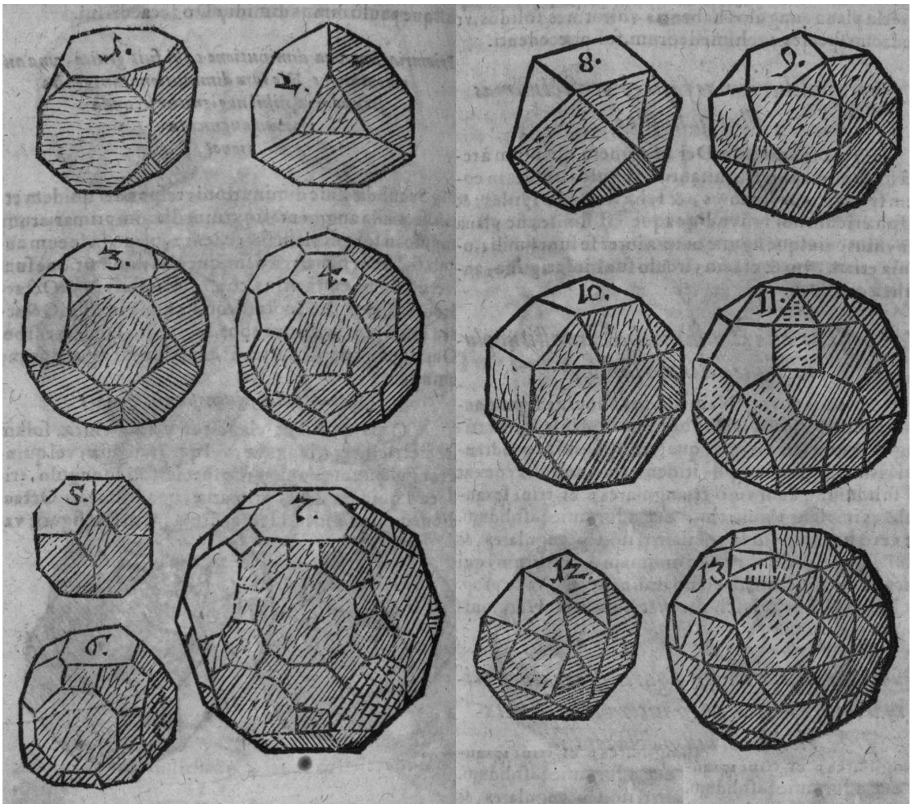
Zajímavostí zůstává, že Kepler nepovažuje prismy a antiprismy[25] za

[22][Kep19], Liber I., str. 61–65.

[23]Stejně je opomenuta vrcholová posloupnost $(3, 3, 5, 5)$.

[24]Tato posloupnost také nevede na žádný mnohostěn.

[25]Kepler je zřejmě prvním, kdo zmiňuje antiprismu, viz [He81a], str. 14.



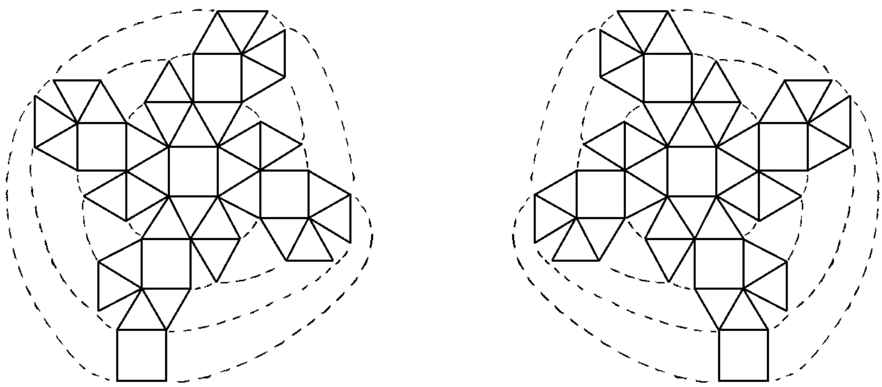
Obr. 20: Polopravidelné mnohostěny v Keplerově ilustraci

polopravidelné mnohostěny.[26]

Můžeme se oprávněně domnívat, že v Keplerově době nebyl v definici polopravidelného mnohostěnu kladen nárok na zachování symetrií. Proto lze za významné pochybení v Keplerově důkazu také pokládat předpoklad, že k libovolné vrcholové posloupnosti existuje nejvýše jeden mnohostěn. K této myšlenkové redukci skutečně dochází, Kepler po nalezení polopravidelného mnohostěnu s hledanou vrcholovou posloupností začíná vyšetřovat jinou posloupnost. Proto mu unikne, že vrcholová posloupnost $(3, 4, 4, 4)$ určuje dva navzájem různé konvexní mnohostěny.

[26] Ve výčtu je uvádí mezi nevyhovujícími konfiguracemi $/3, 3, 3, 5/$ a $/4, 4, p/$.

vhodné konfigurace		**nevhodné konfigurace**	
konfigurace	číslo	konfigurace	důvod
		$/3,3,4/$	propositio IX
		$/3,3,3,4/$	propositio IX
		$/3,4,4/$	propositio IX
$(3,3,3,3,4)$	12		
		$/3,3,3,3,3,4/$	propositio XVI
		$/3,3,3,3,4,4/$	součet úhlů $> 4R$
		$/3,3,3,4,4/$	součet úhlů $= 4R$
$(3,4,3,4)$	8		
$(3,4,4,4)$	10		
		$/3,3,4,4,4/$	součet úhlů $> 4R$
		$/3,3,3,3,3,5/$	nevyhovuje ani $/3,3,3,3,3,4/$
$(3,3,3,3,5)$	13		
		$/3,3,3,5/$	definitio IX
		$/3,3,5/$	různá mocnost vrcholů
		$/3,3,3,5,5/$	součet úhlů $> 4R$
konfigurace	číslo	konfigurace	důvod
$(3,5,3,5)$	9		
		$/3,5,5,5/$	součet úhlů $> 4R$
		$/3,5,5/$	propositio XXIII
		$/3,3,3,3,6/$	součet úhlů $= 4R$
		$/3,3,6,6/$	součet úhlů $= 4R$
		$/3,3,3,6,6/$	součet úhlů $> 4R$
$(3,6,6)$	2		
		$/3,3,3,3,p/p > 6$	součet úhlů $> 4R$
		$/3,3,6,p/p > 6$	součet úhlů $> 4R$
		$/3,7,7/$	propositio XXIII
$(3,8,8)$	1		
		$/3,p,q/p,q > 11$	součet úhlů $\geq 4R$
$(3,10,10)$	3		
		$/4,4,4,p/p > 4$	součet úhlů $> 4R$
		$/4,4,p/p > 4$	definitio IX
		$/4,5,5/$	propositio XXIII
$(4,6,6)$	5		
		$/4,7,7/p > 4$	propositio XXIII
		$/4,p,p/p > 7$	součet úhlů $\geq 4R$
		$/5,5,p/p > 5$	propositio XXIII
$(5,6,6)$	4		
		$/5,7,7/$	součet úhlů $> 4R$
		$/6,p,p/p > 5$	součet úhlů $\geq 4R$
		$/3,3,p,q/p > 3, q > 4$	propositio XXIII
$(3,4,4,5)$	11		
		$/3,4,p,p/p > 4$	součet úhlů $> 4R$
		$/p,q,r/p \vee q \vee r$ je liché	propositio XXIX
$(4,6,8)$	6		
$(4,6,10)$	7		
		$/4,6,p/p \geq 12$	součet úhlů $\geq 4R$
		$/4,p,10/p \geq 8$	součet úhlů $> 4R$



Obr. 21: Sítě $(3,3,3,3,4)$

Keplerův postup se z dnešního pohledu může jevit jako nepříliš logicky uspořádaný. V následujících odstavcích ukážeme, jak bychom tento důkaz podali dnešním studentům. Projdeme postupně všechny možnosti vrcholových posloupností a ke každé z nich se pokusíme sestrojit síť, která z ní nutně vyplývá. V případě, že budeme muset při tvorbě sítě volit, kam umístíme následující mnohoúhelník, rozlišíme všechny možnosti. V případě, že další mnohoúhelník nepůjde umístit (libovolné místo vyvolává spor), řekneme, že mnohostěn k dané vrcholové posloupnosti neexistuje.

V závislosti na počtu a typu pravidelných mnohoúhelníků sbíhajících se v jednom vrcholu budeme vyžadovat, aby byla splněna tato podmínka: mnohoúhelníky sbíhající se v jednom vrcholu musí mít součet vnitřních úhlů u tohoto vrcholu menší než čtyři pravé úhly (v opačném případě bychom nezkonstruovali prostorový úhel).

V jednom vrcholu mnohostěnu se může sbíhat k pravidelných mnohoúhelníků, kde $k \in \{3,4,5\}$, což je zřejmé. Začneme rozebírat možnosti pro $k = 5$. Z první podmínky získáme dvě vrcholové konfigurace:

1. v každém vrcholu jsou čtyři trojúhelníky a jeden čtverec – budeme značit $/3,3,3,3,4/$;

2. v každém vrcholu jsou čtyři trojúhelníky a pětiúhelník – budeme značit $/3,3,3,3,5/$.

Je důležité si uvědomit, že symbol $/p_1,p_2,p_3,p_4,p_5/$ značí *množinu* p_i – úhelníků v každém vrcholu, narozdíl od symbolu (p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) značícího *posloupnost* p_i – úhelníků v každém vrcholu.

Pokusme se sestrojit mnohostěnnou síť pro variantu (1). Z obrázku 21 je vidět, že takové mnohostěny budou existovat dva a že budou mít stejnou strukturu ve smyslu zachování „sousedských“ vztahů mezi stěnami. Tělesa vzniklá z těchto sítí jsou zrcadlově obrácená. Proto hovoříme o jednom typu polopravidelného mnohostěnu s vrcholovou posloupností $(3, 3, 3, 3, 4)$.

Mnohostěnné sítě pro variantu (2) jsou na obrázku 22. Opět vidíme, že možnosti sestrojení máme dvě. Protože se jedná o zrcadlovost, tělesa ztotožníme a získáme polopravidelný mnohostěn $(3, 3, 3, 3, 5)$. V dalším textu budeme „zrcadlové“ varianty považovat za sítě generující tentýž mnohostěn.

Pro $k = 4$ máme z první podmínky následující možnosti vrcholových konfigurací:

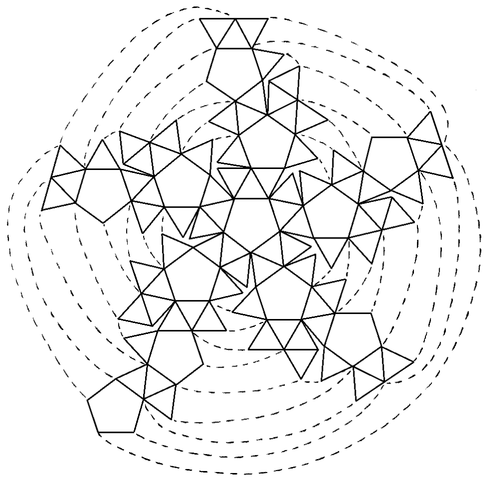
3. $/3, 3, 3, q/$
4. $/3, 3, 4, 4/$
5. $/3, 3, 4, 5/$
6. $/3, 3, 4, 6/$
7. $/3, 3, 4, 7/$
8. $/3, 3, 4, 8/$
9. $/3, 3, 4, 9/$
10. $/3, 3, 4, 10/$
11. $/3, 3, 4, 11/$
12. $/3, 3, 5, 5/$
13. $/3, 3, 5, 6/$
14. $/3, 3, 5, 7/$
15. $/3, 4, 4, 4/$
16. $/3, 4, 4, 5/$

Síť varianty (3) pro $q \geq 4$, $q \in \mathbb{N}$ je sítí příslušné *antiprismy* $(3, 3, 3, q)$. Varianta (4) nám dává dvě možnosti poskládání v jednom vrcholu (obr. 25). První možnost z obrázku 25 nás dovede ke sporu při tvorbě sítě (obr. 26). Z druhé sestrojíme síť (obr. 23) a vzniklé těleso označíme posloupností $(3, 4, 3, 4)$.

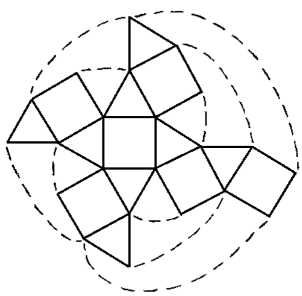
Varianta (5) ukazuje dvě možnosti posloupností (obr. 27), tentokrát však síť neutvoříme ani z jedné (obr. 28). Síť konfigurací (6) — (11) je naprosto analogická s (5), stačí si místo pětiúhelníku představit odpovídající mnohoúhelník a uvědomit si, že to na řešení nemá žádný vliv. Další polopravidelné těleso nám tudíž nepřibylo.

Varianta (12) má dva typy uspořádání ve vrcholu (obr. 29). Druhá nás záhy dovede ke sporu (obr. 30). Z první získáme síť na obrázku 24 a z ní mnohostěn $(3, 5, 3, 5)$.

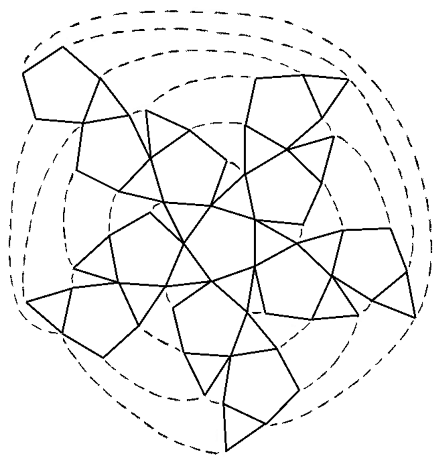
Body (13) a (14) nebudou vyhovovat ze stejného důvodu jako bod (5). Varianta (15) nám dává dvě možnosti výběru. Buď pro všechny trojúhelníky platí, že incidence se stranou čtverce vyvolává incidenci jiného



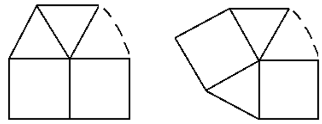
Obr. 22: Sítě (3, 3, 3, 3, 5)



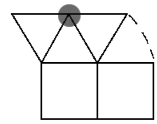
Obr. 23: Síť (3, 4, 3, 4)



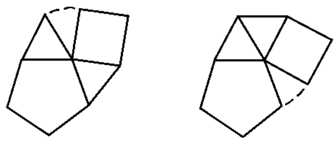
Obr. 24: Síť (3, 5, 3, 5)



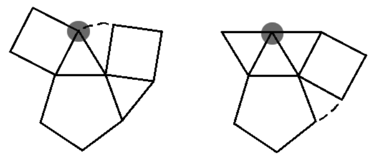
Obr. 25: /3, 3, 4, 4/



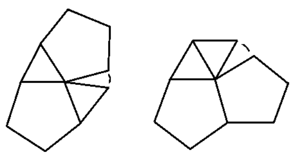
Obr. 26: Spor (3, 3, 4, 4)



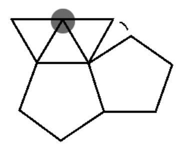
Obr. 27: /3, 3, 4, 5/



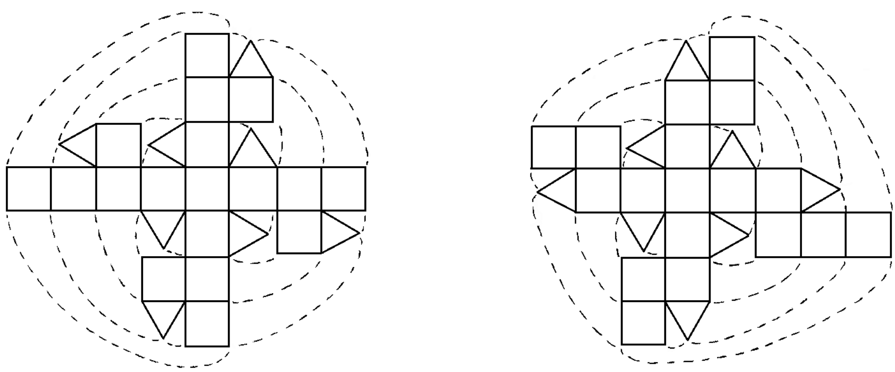
Obr. 28: Spor /3, 3, 4, 5/



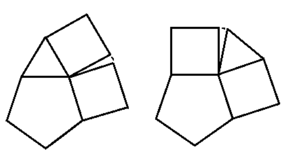
Obr. 29: /3, 3, 5, 5/



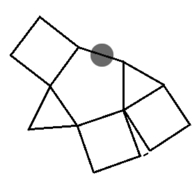
Obr. 30: Spor (3, 3, 5, 5)



Obr. 31: Sítě (3, 4, 4, 4)



Obr. 32: /3, 4, 4, 5/



Obr. 33: Spor (3, 4, 4, 5)

trojúhelníku s opačnou stranou čtverce, nebo se vyskytuje alespoň jeden čtverec, který sousedí s právě jedním trojúhelníkem (obr. 31). Získáváme dva různé mnohostěny (jeden nejde převést v druhý jako tomu bylo u bodů (1) a (2) s toutéž vrcholovou posloupností $(3, 4, 4, 4)$. Důležité je ovšem si uvědomit, že druhý mnohostěn (nazvaný *pseudorombokuboktaedr* — obr. 67) tím, že má dva různé typy vrcholů, nesplňuje definiční podmínku na str. 17, neboť nejde převádět vrcholy jeden na druhý.[27] Zajímavostí zůstává, že toto těleso bylo objeveno až ve dvacátém století (viz odstavec 3.7).

Zbývá nám poslední varianta pro $k = 4$ a sice (16). Máme dva způsoby uspořádání ve vrcholu — čtverce umístíme vedle sebe nebo naproti sobě (obr. 32). První povede ke sporu (obr. 33) a druhý na mnohostěnnou síť (obr. 34) a na mnohostěn $(3, 4, 5, 4)$.

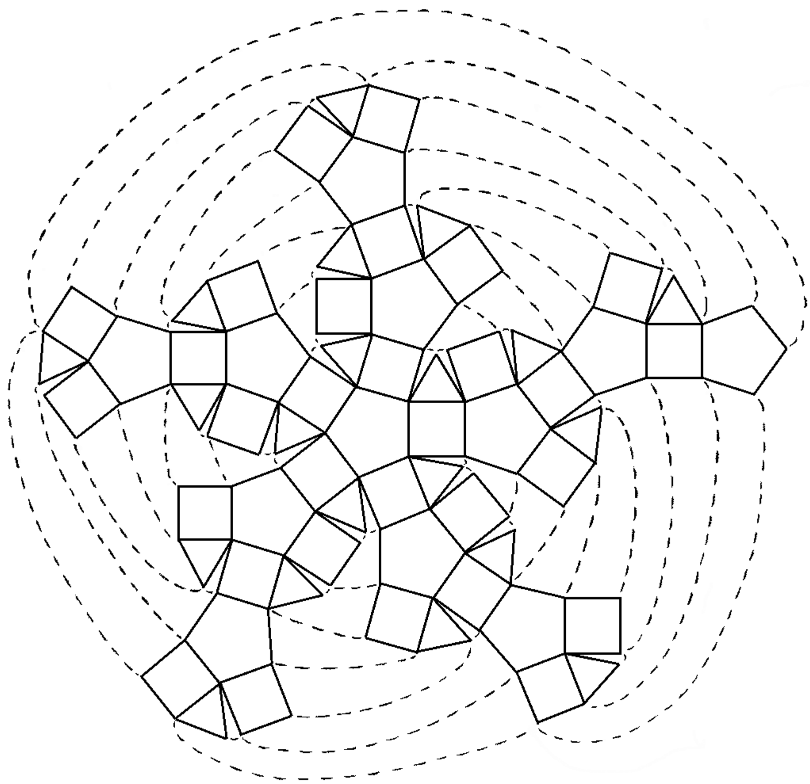
Položme nyní $k = 3$. Ze součtu úhlů mnohoúhelníků v jednom vrcholu získáme níže uvedené možnosti ($q \in \mathbb{N}$), které vzápětí podrobíme testu existence sítě.

17. $/3, 3, q/$, $q > 3$
18. $/3, 4, q/$, $q > 4$
19. $/3, 5, q/$, $q > 4$
20. $/3, 6, 6/$
21. $/3, 6, q/$, $q > 6$
22. $/3, 7, q/$, $q > 6$
23. $/3, 8, 8/$
24. $/3, 8, q/$, $q > 8$
25. $/3, 9, q/$, $q > 8$
26. $/3, 10, 10/$
27. $/3, 10, q/$, $q > 10$
28. $/3, 11, q/$, $q > 10$
29. $/4, 4, q/$, $q > 2, q \neq 4$
30. $/4, 5, q/$, $q > 4$
31. $/4, 6, 6/$
32. $/4, 6, 7/$
33. $/4, 6, 8/$
34. $/4, 6, 9/$
35. $/4, 6, 10/$
36. $/4, 6, 11/$
37. $/4, 7, q/$, $q > 6$
38. $/5, 5, 6/$
39. $/5, 6, 6/$
40. $/5, 6, 7/$

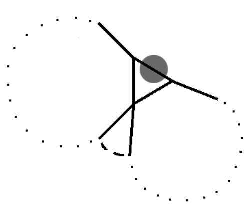
Uvažme, ze kterých konfigurací se nám nepodaří sestrojit síť. Zajisté budeme neúspěšní, vezmeme-li trojúhelník a dva navzájem různé mnohoúhelníky (obr. 35), neboť dostaneme spor při obsazování třetí strany trojúhelníku. Vyloučíme tedy všechny tyto možnosti — (17), (18), (21), (24) a (27).

Rovněž nesestrojíme síť z trojúhelníku a dvou stejných k–úhelníků, kde k je liché a současně $k > 3$. Na obr. 36 je spor ukázán pro $k = 5$,

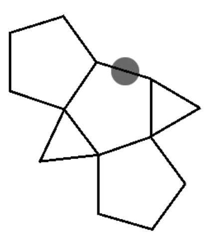
[27] Pseudorombokuboktaedr tedy nezachovává souměrnosti krychle.



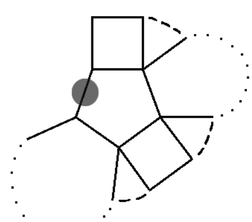
Obr. 34: Síť $(3, 4, 5, 4)$



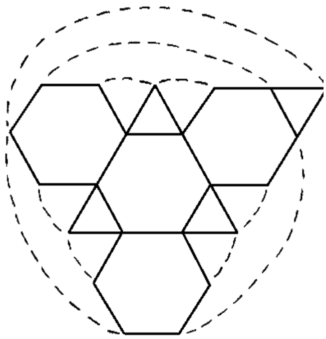
Obr. 35: Spor $(3, p, q)$



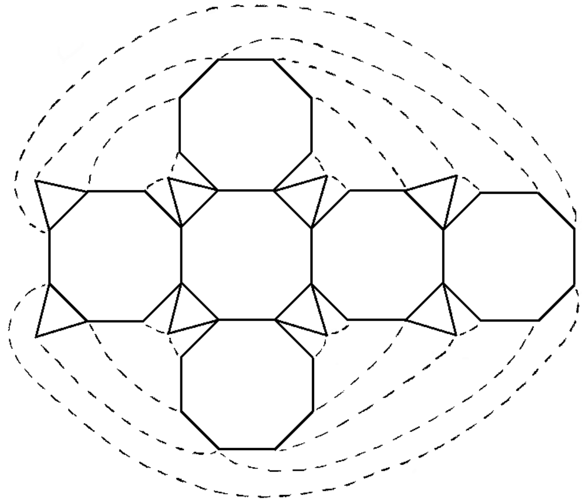
Obr. 36: Spor $(3, p, p)$



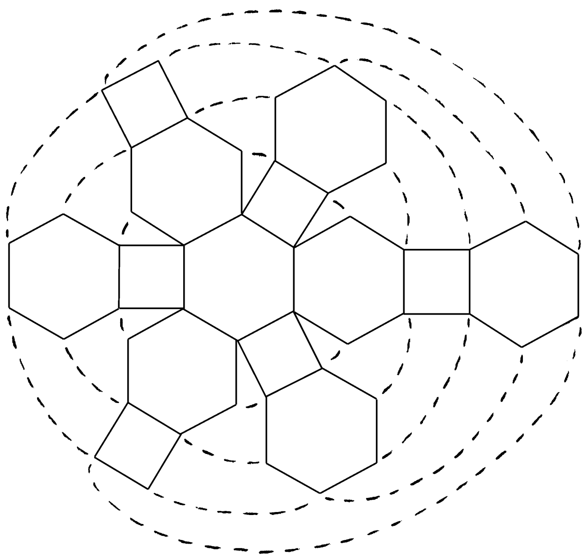
Obr. 37: Spor $(4, p, q)$



Obr. 38: Síť $(3, 6, 6)$



Obr. 39: Síť $(3, 8, 8)$



Obr. 40: Síť $(4, 6, 6)$

jedná se o analogický problém jako u obr. 35. Proto jsou vyloučeny také možnosti (19), (22), (25) a (28).

Ke sporu dojde také, zvolíme-li si čtverec a dva jiné mnohoúhelníky, z nichž alespoň jeden má lichý počet vrcholů (obr. 37 ukazuje spor pro pětiúhelník a libovolný mnohoúhelník). Nyní můžeme vyloučit i body (30), (32), (34), (36) a (37).

Proberme postupně všechny zbylé možnosti. U bodů (20), (23) a (26) se síť zkonstruovat dá a to jednoznačně (obr. 38, 39, 41). Dostaneme polopravidelné mnohostěny s vrcholovými posloupnostmi $(3, 6, 6)$, $(3, 8, 8)$ a $(3, 10, 10)$.

Varianta (29) tvoří *prismy* $(4, 4, q)$. Z možností (31), (33) a (35) získáme jednoznačně vyjádřené sítě na obrázcích 40, 43, 45. Mnohostěny z nich sestrojené budou mít po řadě označení $(4, 6, 6)$, $(4, 6, 8)$ a $(4, 6, 10)$.

Varianty (38) a (40) vedou ke sporu (obr. 42) při tvorbě sítě — s pátou hranou pětiúhelníku nemůže incidovat ani šestiúhelník, ani pětiúhelník (38), respektive sedmiúhelník (40).

A konečně z poslední zatím nerozřešené možnosti (39) dostáváme síť (obr. 44) a příslušný mnohostěn $(5, 6, 6)$.

Ukázali jsme si, že typů polopravidelných mnohostěnů je celkem 15, přičemž dva z nich jsou nekonečné (prismy a antiprismy). Následuje výčet vyhovujících posloupností:

$(3, 3, 3, 3, 4)$	$(3, 4, 4, 4)$	$(4, 4, q)$, $q \geq 3$, $q \neq 4$
$(3, 3, 3, 3, 5)$	$(3, 4, 5, 4)$	$(4, 6, 6)$
$(3, 3, 3, q)$, $q \geq 4$	$(3, 6, 6)$	$(4, 6, 8)$
$(3, 4, 3, 4)$	$(3, 8, 8)$	$(4, 6, 10)$
$(3, 5, 3, 5)$	$(3, 10, 10)$	$(5, 6, 6)$,

kde $q \in \mathbb{N}$.

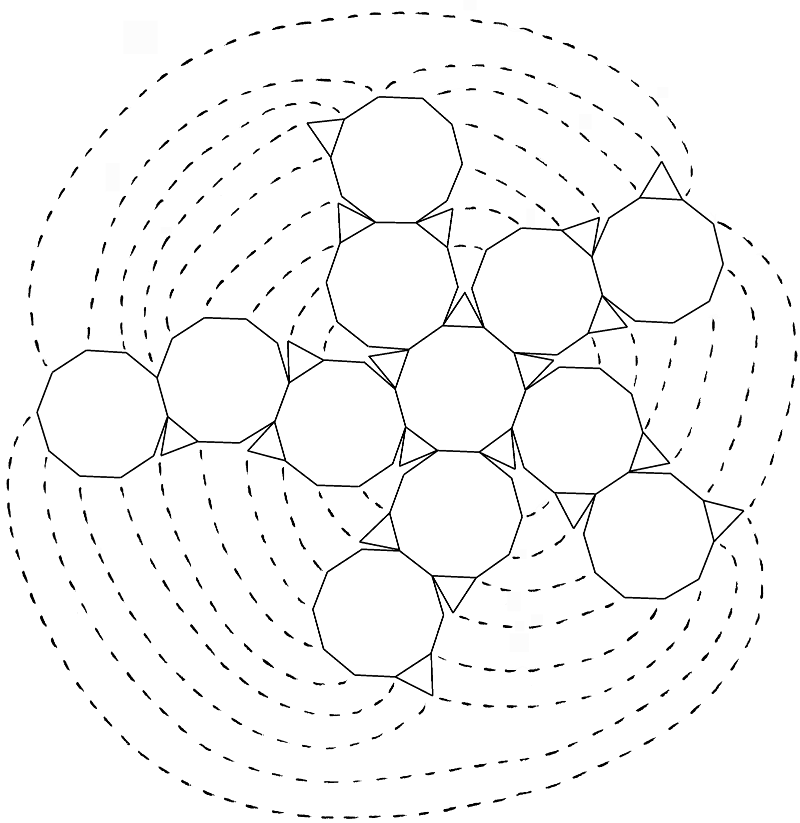
QED.

2.3 Objevy mnohostěnů v umění do počátku 17. stol.

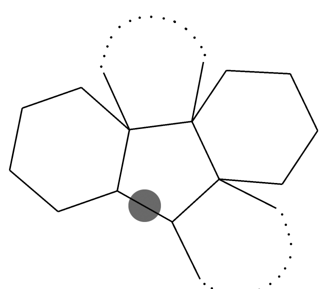
Vědecký zájem o mnohostěny je od dob renesance také provázen zájmem uměleckým. V tomto odstavci si klademe za cíl upozornit na ta výtvarná díla z období od konce 14. stol. do počátku 17. stol., která ztvárnila mnohostěny do té doby matematicky nepopsané.

Z období 1425–1427 pochází část dlažby v bazilice sv. Marka v Benátkách znázorňující malý hvězdicový dvanáctistěn (obr. 48).[28] Autorem

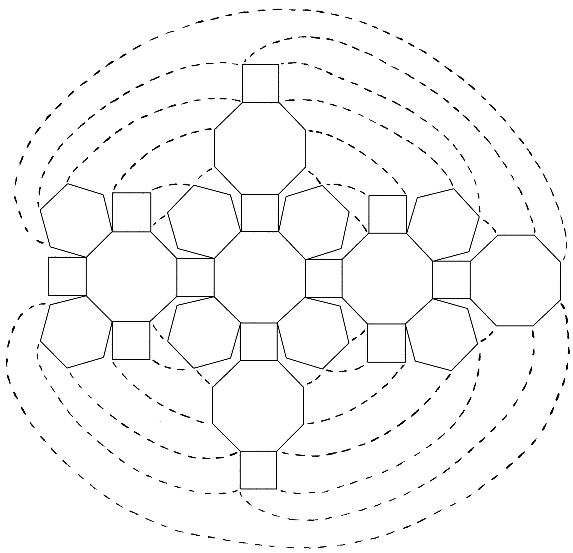
[28] Ukázky uměleckých děl v tomto odstavci jsou převzaty z [wwwGe].



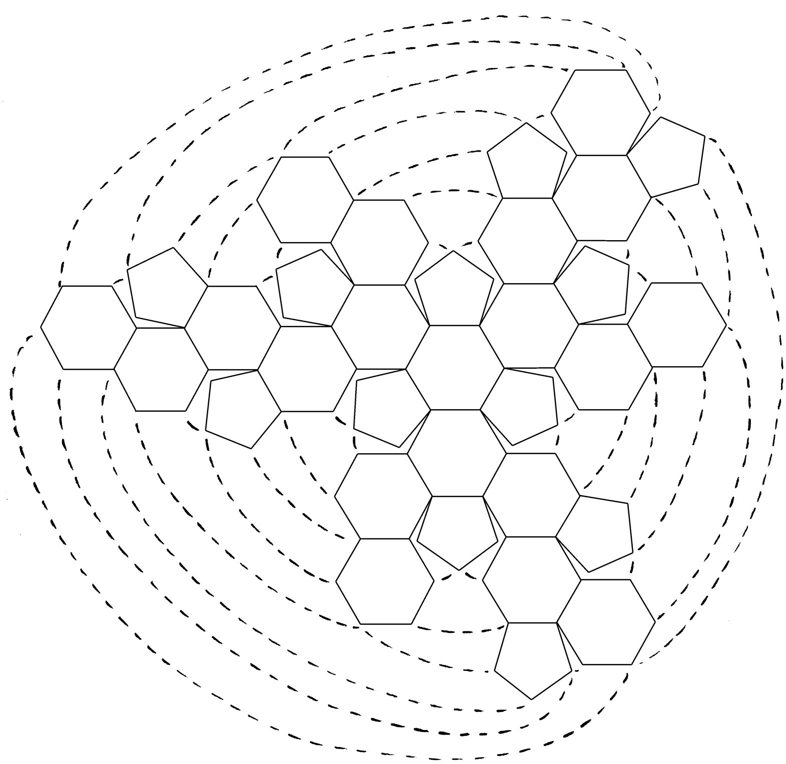
Obr. 41: Síť $(3, 10, 10)$



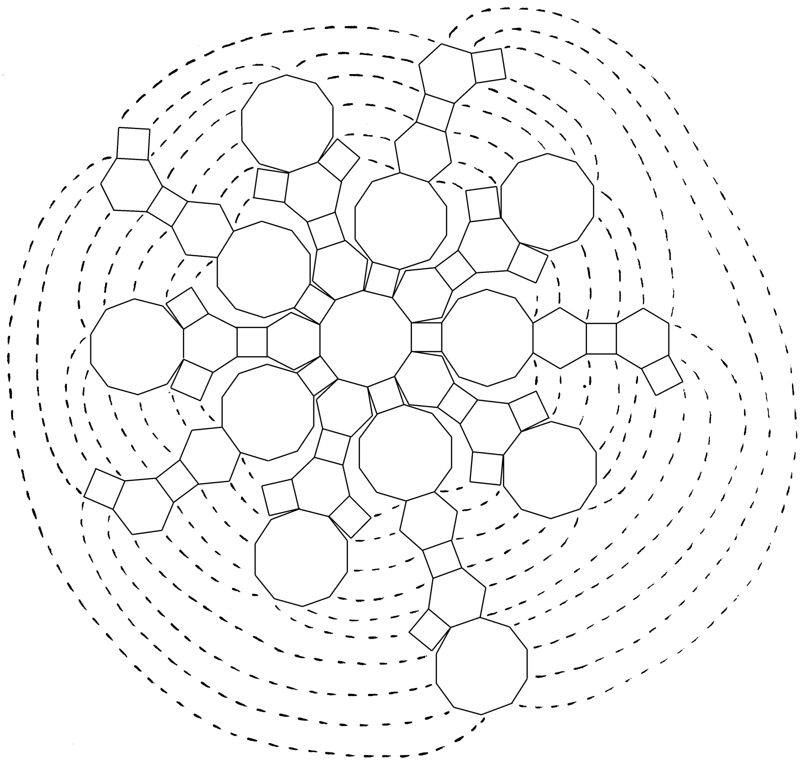
Obr. 42: Spor $(5, 6, p)$



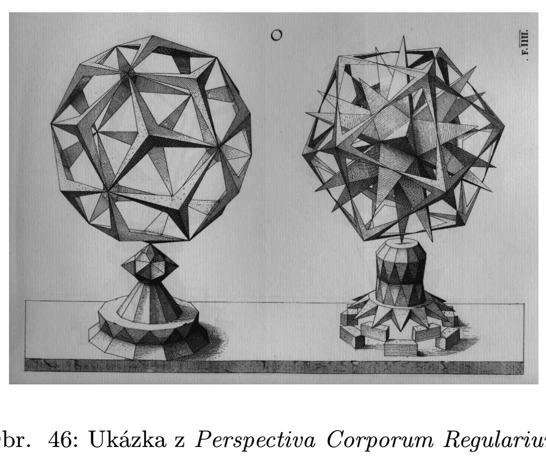
Obr. 43: Síť $(4, 6, 8)$



Obr. 44: Síť $(5, 6, 6)$



Obr. 45: Síť $(4, 6, 10)$



Obr. 46: Ukázka z *Perspectiva Corporum Regularium*

byl pravděpodobně florentský malíř PAOLO UCELLO (1397–1475). Poznamenejme zde, že matematicky byl tento mnohostěn popsán až o téměř 200 let později (viz str. 21).

Další osobností, která se významně zapsala do historie pravidelných mnohostěnů, byl německý malíř ALBRECHT DÜRRER. V jeho díle *Underweysung der Messung* se poprvé objevují sítě mnohostěnů. Na obrázku 47 je vlevo síť polopravidelného mnohostěnu, který v Keplerově ilustraci 20 má číslo 12. Druhá znázorněná síť patří mnohostěnu, který vznikne osekáním osekané krychle. Podíváme-li se na druhou síť pečlivě, brzy objevíme chybu, kterou Dürrer udělal. Okolo některých vrcholů dvanáctiúhelníků znázornil tři trojúhelníky, které vyplňují plný úhel (kdyby tomu tak bylo, nešel by tento mnohostěn v prostoru zkonstruovat).

Významné místo v geometrii zaujímá také vídeňský malíř WENTZEL JAMNITZER (1508–1585), který ve svých ilustracích v díle *Perspectiva Corporum Regularium* vykresluje mnohostěny, jež mají být matematicky popsány o mnoho let později (obr. 46[29]).

3. Hledání vztahů mezi mnohostěny

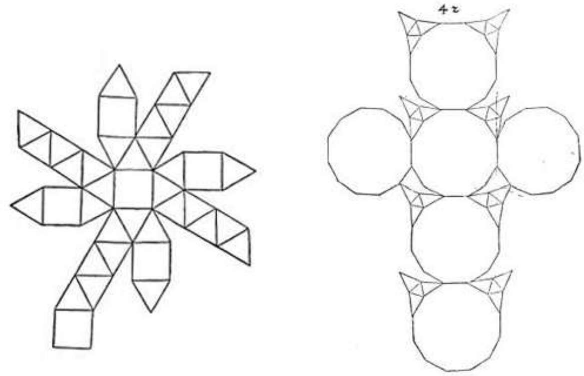
V období od 17. do 19. stol. se začíná geometrie ubírat obecnějším směrem. V matematice mnohostěnů již nejde jen o to, tělesa objevit a popsat, ale vůdčí začíná být snaha najít obecné zákonitosti, které by platily pro všechny zkoumané prvky.

První publikované práce tohoto rázu pochází z 18. stol. od švýcarského matematika Leonharda Eulera. Některé obecné vztahy platící pro mnohostěny však znal již v 17. stol. francouzský filosof a matematik René Descartes. Za svého života práci o mnohostěnech nepublikoval, dnes ale víme, že mohl znát větu, kterou o více než sto let později uvádí Euler (viz str. 45). Proto bude první část této kapitoly věnována Descartovi a druhá Eulerovi.

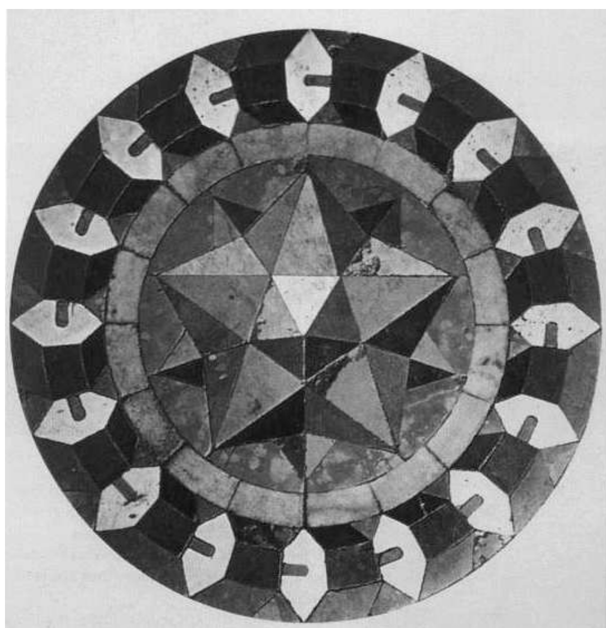
Až na počátku 19. stol. objevuje francouzský geometr a fyzik Luis Poinsot další dva hvězdicové mnohostěny. Právě hvězdicovým formám mnohostěnů bude věnována další část této kapitoly.

K propojování prostorové geometrie s právě vznikající topologií dochází v první polovině 19. stol., kdy anglický matematik sir William Rowan Hamilton použije grafů k rovinné interpretaci vztahů mezi prvky

[29]Ilustrace z *Perspectiva Corporum Regularium* lze nalézt např. v [wwwHe].



Obr. 47: Sítě těles od Albrechta Dürrera



Obr. 48: Dlažba v bazilice sv. Marka v Benátkách

mnohostěnu. Přelomovým se stává začlenění mnohostěnů do n-dimenzionálního matematického systému, které provádí švýcarský matematik Ludwig Schläfli.

Další část této kapitoly bude věnována objevům pravidelných mnohostěnů ve strukturách některých přírodnin. Až v období od 18. stol. se potvrzuje intuice Řeků, kteří se domnívali, že dokonalost (plynoucí z krásy) pravidelných mnohostěnů se musí odrážet ve stvořené přírodě. Ukážeme, jak se dokonalost (plynoucí z tvarových charakteristik) těchto těles dokázala prosadit v živé i neživé přírodě.

Na závěr kapitoly poukážeme na další zobecnění pojmu pravidelného mnohostěnu, které nám umožňuje provést celkovou klasifikaci konvexních mnohostěnů, jejichž stěnami jsou shodné mnohoúhelníky.

3.1 Descartes

Francouzský matematik a filosof René Descartes (1596–1650) je prvním, kdo se zabývá obecnými zákonitostmi platícími pro mnohostěny. Proč jeho dílo bylo spatřeno až v 19. stol, se pokusíme objasnit v následujícím odstavci.

V roce 1649, rok před svou smrtí, přichází Descartes do Švédska vyučovat princeznu Christinu filosofii. Když umírá, jeho pozůstalost je poslána zpátky do Francie, kde však po příjezdu do Paříže padá bedna s rukopisy do řeky. Většina prací je zachráněna a usušena, některé se dostanou do rukou soudobým vědcům. Mezi nimi je i Leibniz, který některé z rukopisů přepíše, včetně šestnáctistránkového pojednání nazvaného *Progymnasmata de solidorum elementis (Cvičení ze základů těles)*. Originál později zmizí a Leibnizův přepis zapadne až do jeho znovuobjevení roku 1860. Zdá se tedy velmi pravděpodobné, že jediný Leibniz věděl o Descartově práci na mnohostěnech a nikomu o ní neřekl[30]. *Progymnasmata* je první známou prací zabývající se obecnými mnohostěny, ačkoli daleko známější jsou pozdější práce Eulera (viz odstavec 3.2). V dalším uvedeme významná tvrzení ze spisu *Progymnasmata*.

Descartes se zabýval součtem vnitřních úhlů patřících mnohoúhelníkům, které se sbíhají v jednom vrcholu mnohostěnu. Deficitem vrcholu mnohostěnu nazval velikost úhlu, která chybí do 4 pravých úhlů (např. pro krychli je deficit vrcholu jeden pravý úhel). Celkovým deficitem potom rozuměl součet všech dílčích deficitů (pro krychli tedy osm pravých úhlů). Descarterovým závěrem vyvozeným ze sférické trigonometrie byl právě fakt, že celkový deficit je pro mnohostěn vždy roven velikosti osmi

[30] Sekce o Descartovi čerpá především z článku [Sa04b].

pravých úhlů:

3.1. Věta. *Součet všech vrcholových deficitů je v libovolném konvexním mnohostěnu roven velikosti osmi pravých úhlů.*

Z tohoto tvrzení přímo plyne věta 3.5 (str. 47), která bude zmíněna v pozdějších pracech Eulera.

Pozoruhodná je obzvláště následující věta:

3.2. Věta. *Pomocí součtu vnitřních úhlů v mnohoúhelnících tvořících stěny mnohostěnu a počtu stěn najdeme počet zmiňovaných vnitřních úhlů takto: počet stěn vynásobíme čtyřmi a výsledek přičteme k součtu vnitřních úhlů (vyjádřenému v pravých úhlech). Polovina z výsledku bude rovna počtu vnitřních úhlů.*

(Dato aggregato ex omnibus angulis planis et numero facierum, numerum angulorum planorum invenire: Ducatur numerus facierum per 4, et productum addatur aggregato ex omnibus angulis planis, et totius media pars erit numeris angulorum planorum.)

Zajímavost této věty tkví v tom, že ve složení s větou 3.1 nám vytvoří známou *Eulerovu větu* (viz věta 3.3), kterou Euler objevuje 100 let po Descartově smrti. Nechť $\sum$ značí součet všech vnitřních úhlů v mnohoúhelnících tvořících stěny mnohostěnu, v počet vrcholů a h počet hran tohoto tělesa. Věta 3.1 lze potom zformulovat následovně:

$$4v - \sum = 8. \tag{15}$$

Dále nechť s značí počet stěn a u počet všech vnitřních úhlů v mnohoúhelnících tvořících stěny tělesa. Je zřejmé, že platí:

$$u = 2h. \tag{16}$$

Větu 3.2 můžeme interpretovat rovností:

$$\frac{4s + \sum}{2} = u. \tag{17}$$

Dosazením obou uvedených vztahů získáme:

$$\frac{4s + 4v - 8}{2} = 2h, \tag{18}$$

což již je *Eulerova věta* (viz věta 3.3). Otázkou zůstává, zda si byl Descartes vědom platnosti tohoto vzorce, či nikoli.

3.2 Euler

Jak již bylo zmíněno dříve, novověcí matematikové se snaží vytvářet teorie, které by byly živnou půdou pro zkoumané objekty a které by umožnily jejich začlenění a další zkoumání. Jedním z nejvýznamnějších představitelů této doby je švýcarský matematik LEONHARD EULER (1707–1783).

Eulerův příspěvek k mnohostěnům je velmi významný, protože odhaluje obecně platné vztahy v těchto tělesech.[31]

Významné poznatky k mnohostěnům uvádí Euler ve dvou článcích:

- *Elementa doctrinae solidorum (Základy učení o tělesech)*[32]
- *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusis sunt praedita (Důkaz některých vlastností těles ohraničených mnohoúhelníky)*[33]

Některá tvrzení z prvního článku se prokazatelně objevila již v Eulerově korespondeci Christianu Goldbachovi datované z 14. 11. 1750.[34] Druhý článek napsal Euler o rok později. Oba byly nakonec společně publikovány ve čtvrtém čísle *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* z roku 1752/53, který se však objevil v tisku až v roce 1758.

Nejprve se podíváme na článek *Elementa doctrinae solidorum.* Euler v něm zavádí pojem *hrana (acies)*, do té doby nijak nepojmenovaný. Dále formuluje věty, z nichž uveďme následující:

3.3. Věta. *V libovolném tělese ohraničeném mnohoúhelníky převyšuje součet vrcholů tělesa s jeho stěnami počet hran o 2.*

(Propositio 4: In omni solido hedris planis incluso aggretatum ex numero angulorum solidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.)

Vyjádřeno vzorcem je to:

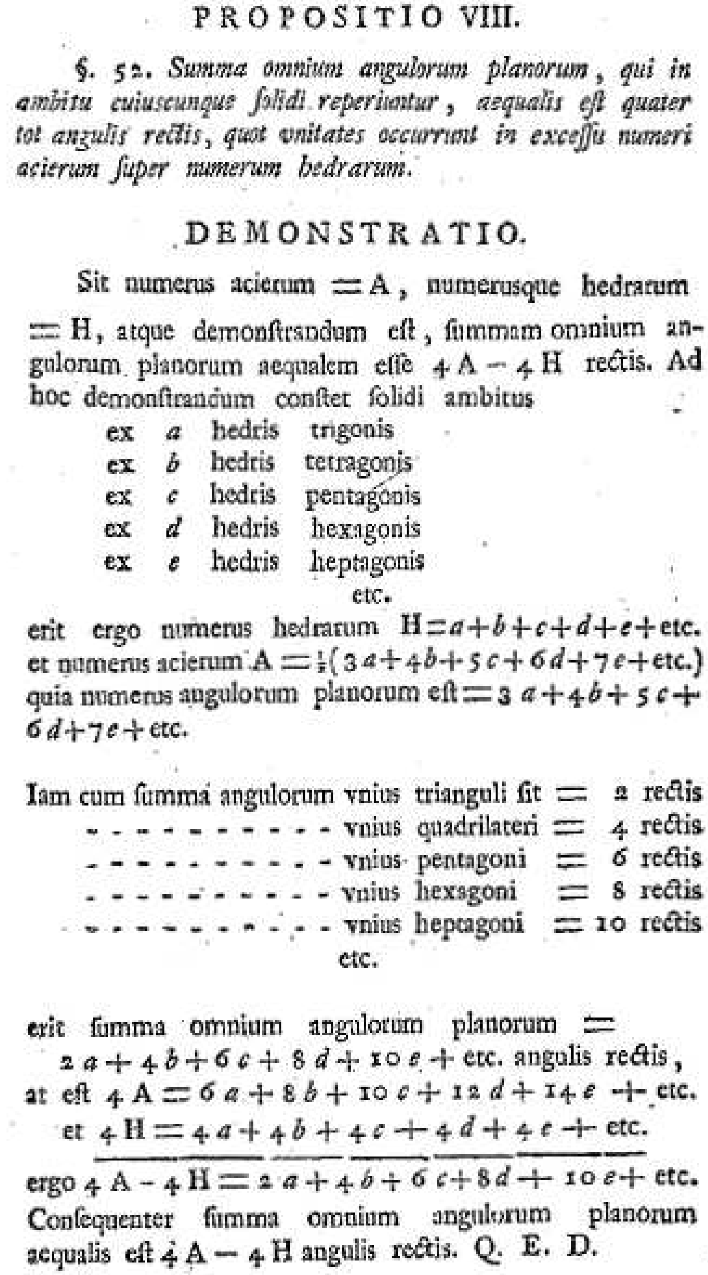
$$v + s = h + 2, \tag{19}$$

[31] Nelze s přesností tvrdit pro jaké typy mnohostěnů Euler své věty dokazoval. Někteří matematikové (např. [Sa04b] nebo [Arm83]) se domnívají, že mnohostěny, které Euler nazýval *tělesa ohraničená mnohoúhelníky* lze v dnešní době chápat jako konvexní mnohostěny.

[32] [E52a] str. 109–140.

[33] [E52b] str. 140–160.

[34] [Fu68] str. 536–539.



PROPOSITIO VIII.

§. 52. *Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu cuiuscunque ſolidi reperiuntur, aequalis eſt quater tot angulis rectis, quot vnitates occurrunt in exceſſu numeri acierum ſuper numerum hedrarum.*

DEMONSTRATIO.

Sit numerus acierum $= A$, numerusque hedrarum $= H$, atque demonſtrandum eſt, ſummam omnium angulorum planorum aequalem eſſe $4A - 4H$ rectis. Ad hoc demonſtrandum conſtet ſolidi ambitus

ex *a* hedris trigonis
ex *b* hedris tetragonis
ex *c* hedris pentagonis
ex *d* hedris hexagonis
ex *e* hedris heptagonis
etc.

erit ergo numerus hedrarum $H = a+b+c+d+e+$ etc.
et numerus acierum $A = \frac{1}{2}(3a+4b+5c+6d+7e+$ etc.$)$
quia numerus angulorum planorum eſt $= 3a+4b+5c+6d+7e+$ etc.

Iam cum ſumma angulorum vnius trianguli ſit $=$ 2 rectis
- - - - - - - - - - - vnius quadrilateri $=$ 4 rectis
- - - - - - - - - - - vnius pentagoni $=$ 6 rectis
- - - - - - - - - - - vnius hexagoni $=$ 8 rectis
- - - - - - - - - - - vnius heptagoni $=$ 10 rectis
etc.

erit ſumma omnium angulorum planorum $=$
$2a+4b+6c+8d+10e+$ etc. angulis rectis,
at eſt $4A = 6a+8b+10c+12d+14e+$ etc.
et $4H = 4a+4b+4c+4d+4e+$ etc.

ergo $4A - 4H = 2a+4b+6c+8d+10e+$ etc.
Conſequenter ſumma omnium angulorum planorum aequalis eſt $4A - 4H$ angulis rectis. Q. E. D.

Obr. 49: Ukázka z *Elementa doctrinae solidorum* kde v značí počet vrcholů mnohostěnu, h počet hran mnohostěnu a s počet stěn mnohostěnu.

Euler nikdy nepíše dnes jistě více používaný zápis po něm pojmenované věty: $v - h + s = 2$. Namísto důkazu tvrzení Euler pouze přiznává, že se mu jej dosud nepodařilo nalézt.

Další tvrzení, které je dnes v podstatě neznámé, Euler formuluje takto:

3.4. Věta. *Součet všech vnitřních úhlů mnohoúhelníků tvořících stěny mnohostěnu vyjádřený v pravých úhlech je stejný jako čtyřnásobek počtu hran tělesa zmenšený o čtyřnásobek počtu stěn tělesa.*

Euler vede důkaz takto (obr. 49). Nejprve označí počty n-úhelníků, které tvoří mnohostěn. Tedy a značí počet trojúhelníků, b čtyřúhelníků, c pětiúhelníků, d šestiúhelníků apod. Dále vyjádří počet hran h, počet stěn s a součet vnitřních úhlů v mnohoúhelnících $\sum$ vyjádřený v pravých úhlech:

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2} \cdot (3a + 4b + 5c + 6d ...) \\ s &= a + b + c + d + ... \\ \sum &= 2a + 4b + 6c + 8d + ... \end{aligned}$$

Jednoduchou úpravou zjistíme, že platí rovnost:

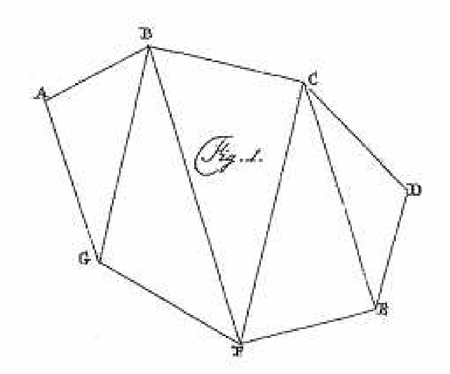
$$\sum = 4h - 4s. \tag{20}$$

3.5. Věta. *Součet všech vnitřních úhlů mnohoúhelníků tvořících stěny mnohostěnu vyjádřený v pravých úhlech je o* 8 *menší než započítáme-li pro každý vrchol čtyři pravé úhly.*

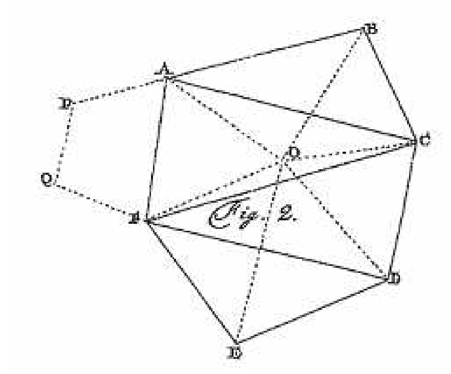
Tuto větu Euler bere jako důsledek předchozí věty. Musíme si však uvědomit, že k tomu, aby tato věta mohla být pokládána za důsledek věty 3.5, potřebuje Euler také větu 3.3.

V článku *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusis sunt praedita* již Euler uveřejňuje důkaz své věty 3.3. Dnes bychom jej prezentovali pomocí matematické indukce, v té době ne zcela běžné důkazové metody.[35] Proto také Euler nejprve připraví půdu důkazu tím, že ukáže, jak jeho princip funguje v rovině na

[35] Důkaz je převzat z článku [E52b].



Obr. 50: Eulerova kresba k důkazu (1)



Obr. 51: Eulerova kresba k důkazu (2)

elementárním tvrzení, že součet vnitřních úhlů v konvexním n-úhelníku je roven $2n-4$ pravým úhlům. Předpokládejme např. konvexní sedmiúhelník $ABCDEFG$ (obr. 50). Euler rozdělí mnohoúhelník na trojúhelníky vyznačením úhlopříček GB, BF, FC, CE. Odstraněním trojúhelníku CDE vznikne mnohoúhelník s $n-1$ vrcholy a součet vnitřních úhlů se zmenší o 2 pravé úhly. Proto po k krocích, pro nějaké k, získáme $n-k=3$, zůstane nám tedy z mnohoúhelníku trojúhelník ABG, jehož součet vnitřních úhlů je roven dvěma pravým úhlům. Proto byl součet všech vnitřních úhlů v původním mnohoúhelníku roven $(2k+2)$ pravým úhlům, neboli $2\cdot(n-3)+2=2n-4$ pravým úhlům.

Právě uvedený postup důkazu nám může připadat zbytečně složitý,[36] mějme však na paměti, že si Euler chystal půdu k důkazu ve třetí dimenzi.

V prostoru se Euler rozhodne odstraňovat vrcholy. Podává následující důkaz, o jehož nekorektnosti[37] se přesvědčíme na závěr. Uvažuje mnohostěn na obrázku (obr. 51) a odstraní z něj vrchol O, který je spojen s vrcholy A, B, C, D, E a F, čímž odstraní také čtyřstěny $OABC$, $OACF$, $OCDF$ a $ODEF$ (body P, Q patří k důkazu jiného tvrzení). Dále tvrdí, že odstraněním vrcholu O (čímž myslí odstranění zmíněných čtyřstěnů) se nezmění vztah mezi v, h a s. Vyvozuje, že jestliže bude pokračovat v popsaném odstraňování vrcholů, získá čtyřstěn (což je chybný závěr). Protože čtyřstěn splňuje dokazovanou rovnost, zbývá

[36] Jednodušší je např. uvažovat libovolný vnitřní bod n-úhelníku a spojit s ním každý z n vrcholů. Vzniklé trojúhelníky mají součet vnitřních úhlů roven $2n$ pravým úhlům, což je o čtyři pravé úhly (okolo vnitřního bodu) více, než musí být zjišťovaný součet vnitřních úhlů.

[37] Vycházíme z komentovaného rozboru, který lze nalézt v [Sa04b].

jen dokázat, že odstraňováním vrcholů se skutečně nemění vztah mezi v, h a s.

Euler vede myšlenku takto: jestliže odstraníme vrchol O, potom se počet v zmenší o jedna. Předpokládejme, že k je počet stěn, které se stýkají ve vrcholu O. Potom k značí také počet hran sbíhajících se v tomto vrcholu, stejně jako počet hran ohraničujících (ne nutně) rovinný mnohoúhelník $ABCDEF$. Rozčleněním tohoto mnohoúhelníku na trojúhelníky nám vznikne $k-2$ rovinných mnohoúhelníků (trojúhelníků) ohraničených $k-3$ novými hranami. Proto odstraněním vrcholu O ubude jeden vrchol, k hran a k stěn. Současně však přibude $k-2$ stěn a $k-3$ hran triangulací.

Proto pro počty v', s' a h' v novém mnohostěnu bude platit:

$$\begin{aligned} v' &= v-1 \\ s' &= s-k+(k-2) = s-2 \\ h' &= h-k+(k-3) = h-3 \end{aligned}$$

Proto platí:

$$v'-h'+s' = v-1-(h-3)+s-2 = v-h+s, \tag{21}$$

což znamená, že uvedený postup nemá vliv na hodnotu tohoto výrazu, která zůstává stejná pro zadaný mnohostěn i pro výsledný čtyřstěn.

Jednalo by se bezesporu o elegantní důkaz, kdyby ovšem neobsahoval fatální chybu v tvrzení, že postupnou redukcí musíme získat čtyřstěn (respektive vždy těleso stejného typu, tedy ohraničené rovinnými útvary). Protipříklad je uvedený na obrázku (obr. 53). Odstraníme-li z tohoto tělesa vrchol O Eulerovým postupem, rozpadne se nám těleso na dva čtyřstěny: $AEBD$ a $CFBD$, spojené společnou hranou BD. Tato tělesa Euler neuvažoval a věta 3.3 pro ně neplatí.

Ačkoli Euler nepodal korektní důkaz, objevil pravdivé a velmi podstatné tvrzení, které je od té doby nazýváno *Eulerovou větou.*

První[38] správný důkaz *Eulerovy věty* uveřejňuje v díle *Geometrie der Lage* roku 1847 německý geometr KARL GEORG CHRISTIAN VON STAUDT (1798–1867).

Abychom jeho důkaz[39] mohli vést v duchu dnešní terminologie, zavedeme nejprve některé pojmy z teorie konečných grafů.

[38] [Arm83] str. 3.
[39] [vS47] str. 20–21. Ukázka je na obrázku 52.

49. Wenn jeder Eckpunkt eines Polyeders mit jedem andern durch eine Kante oder eine aus Kanten zusammengesetzte Linie verbunden werden kann, und seine Oberfläche durch jede aus Kanten zusammengesetzte geschlossene Linie, welche nicht öfter als einmal durch einen und denselben Punkt geht, in zwei Theile getheilt wird, so ist die Anzahl E der Eckpunkte mehr der Anzahl F der Flächen gleich der Anzahl K der Kanten mehr zwei.

Wenn nämlich der Körper E Eckpunkte hat, so sind E—1 Kanten, von welchen die erste zwei Eckpunkte unter sich, die zweite einen derselben mit einem dritten, die dritte einen der drei vorigen mit einem vierten u. s. w. verbindet, hinreichend um von jedem Eckpunkte auf jeden andern übergehen zu können. Da nun in einem solchen Systeme von Kanten keine geschlossene Linie enthalten ist, jede der übrigen (noch freien) Kanten aber mit zwei oder mehrern Kanten des Systems eine geschlossene Linie bildet, so sind die übrigen Kanten hinreichend aber auch alle erforderlich, um durch sie von jeder der F Flächen des Körpers auf jede andere übergehen zu können, woraus man schliessen kann, dass die Anzahl der übrigen Kanten F—1, mithin die Anzahl aller Kanten E + F — 2 und demnach E + F = K + 2 sey.

Obr. 52: Ukázka z díla *Geometrie der Lage*

3.1. Definice. Nechť U je neprázdná konečná množina, jejíž prvky nazveme *uzly*. Nechť H je množina prvků, jež nazveme *hranami*, přičemž platí, že každá hrana je jednoznačně určena dvěma uzly z množiny U, které spojuje. Tedy H je systém dvouprvkových podmnožin množiny U. Uspořádanou dvojici (U, H) nazveme *grafem*.

3.2. Definice. Nechť u_i jsou uzly množiny U a $u_j u_k$ jsou hrany z množiny H. Posloupnost

$$u_0, u_0u_1, u_1, u_1u_2, u_2, \dots, u_{n-1}, u_{n-1}u_n, u_n$$

nazveme *sledem délky n*.

3.3. Definice. Řekneme, že graf (U, H) je *souvislý*, existuje-li mezi každými dvěma uzly z množiny U sled.

3.4. Definice. Číslo vyjadřující počet hran vycházejících z uzlu u nazveme *stupeň uzlu* u.

3.5. Definice. Souvislý graf (U, H), jehož všechny uzly mají stupeň 2, nazveme *kružnicí.* Souvislý graf (U, H) bez kružnic nazveme *strom.*

3.6. Definice. Graf (U_1, H_1) nazveme *faktorem grafu* (U, H), právě tehdy když $U_1 = U$ a současně $H_1 \subseteq H$. Faktor, který je stromem, se nazývá *kostra.*

Bez důkazu uvedeme ještě jednu elementární větu.

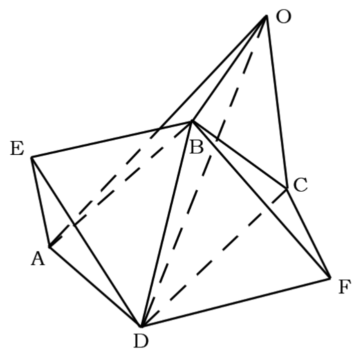
3.6. Věta. *V každém stromu (U, H) platí, že počet uzlů U zmenšený o počet hran H je roven jedné:*

$$|U| - |H| = 1 \tag{22}$$

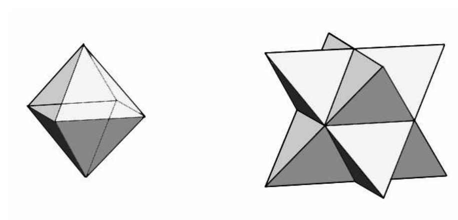
Nyní použijeme teorii grafů k důkazu platnosti *Eulerova vzorce.*

Mnohostěn[40] si můžeme představit jako graf (U, K). Uzly grafu budou vrcholy mnohostěnu a hrany grafu budou hranami mnohostěnu. Je

[40][Arm83] str. 1–4. Mnohostěnem rozumíme těleso ohraničené konečnou množinou rovinných mnohoúhelníků, které plní následující podmínky. Dva mnohoúhelníky spolu mohou sousedit právě společnou hranou. Každá hrana mnohoúhelníku leží v právě jednom dalším mnohoúhelníku. Pro každý vrchol obklopený k mnohoúhelníky lze najít označení těchto mnohoúhelníků Q_1, Q_2,…,Q_k takové, že mnohoúhelník Q_i má společnou hranu s mnohoúhelníkem Q_{i+1} pro $1 \leq i < k$ a Q_k má společnou hranu s Q_1.



Obr. 53: K Eulerovu důkazu (3)



Obr. 54: Ohvězdování osmistěnu

zřejmé, že tento graf je souvislý, vždyť mezi každými dvěma vrcholy existuje sled. Vezměme nyní libovolnou kostru grafu (U, K) a označme ji T. Sestrojme dále tzv. duální graf T' ke grafu T: v každé stěně mnohostěnu zvolme vnitřní bod, který bude v T' vrcholem. Dva vrcholy v T' spojíme hranou právě tehdy, když jim odpovídající stěny v mnohostěnu mají společnou hranu, která není obsažena v T. (Pro pravidelný dvanáctistěn bychom mohli získat grafy na obrázku v *Příloze 2*.)

Tvrdíme, že T' je souvislý. Kdyby existoval vrchol, k němuž se nemůžeme dostat řetězcem hran z libovolného vrcholu, znamenalo by to, že v T existuje kružnice, což je spor s tím, že T je kostra.

Tvrdíme, že T' je strom. Kdyby v T' existovala kružnice k, znamenalo by to, že řez podél této kružnice rozdělí mnohostěn na dvě části, kde každá z nich obsahuje alespoň jeden vrchol. To je zřejmé, protože uvažujeme jednoduše spojitý mnohostěn (kdybychom vzali např. mnohostěn, který by byl topologicky shodný s *torem*, T' by přirozeně kružnici obsahovat mohlo, viz obrázek v *Příloze 2*). Zmíněné rozdělení mnohostěnu obsahuje spor s tím, že T je spojité (kdybychom ty dvě části spojili, museli bychom protnout k, což je spor s definicí T', vždyť hrany z T a T' nesmí mít společný bod). Jistě je T' také faktor, neboť vrcholy T' jsme volili v každé ze stěn mnohostěnu.

Ze vztahu (22) dostáváme aplikací na kostry T, T':

$$|U_T| - |H_T| = 1 \tag{23}$$

$$|U_{T'}| - |H_{T'}| = 1, \tag{24}$$

kde
U_T množina všech vrcholů mnohostěnu
$U_{T'}$ množina všech stěn mnohostěnu
H_T množina některých hran mnohostěnu

$H_{T'}$ množina, jejíž prvky odpovídají postupně všem hranám mnohohostěnu, které nejsou obsaženy v předchozí množině

Sečtením posledních dvou vztahů a dosazením do řeči mnohostěnu:

$$\begin{aligned} |U_T| - |H_T| + |U_{T'}| - |H_{T'}| &= 2 \\ |U_T| &= v \\ |U_{T'}| &= s \\ |H_T| + |H_{T'}| &= h \end{aligned}$$

dostaneme dokazované tvrzení (viz věta 3.3).

QED.

3.3 Poinsot

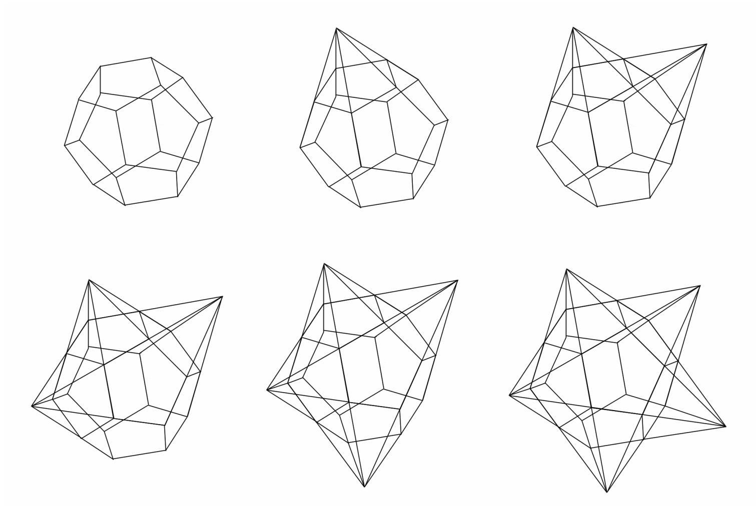
Významný francouzský geometr a fyzik Louis Poinsot (1777–1859) napsal roku 1809 dílo o mnohoúhelnících a mnohostěnech,[41] ve kterém prezentuje objev čtyř hvězdicových mnohostěnů. Poinsot si pravděpodobně nebyl vědom toho,[42] že dva z nich již objevil Kepler v roce 1619 — viz odstavec 2.2.1. Nově objeveným mnohostěnem je proto *velký dvanáctistěn* (obrázek v *Příloze 1*) a *velký dvacetistěn* (obrázek v *Příloze 3*).

Jak již bylo zmíněno v definici hvězdicového mnohostěnu (viz str. 21), tato tělesa vzniknou ohvězdováním pravidelných mnohostěnů, přičemž vyloučíme složeniny. Podívejme se tedy, jak takové ohvězdování bude vypadat. Rozebereme postupně všechny možnosti a pro lepší představu je budeme demonstrovat na obrázcích.

Vezmeme-li pravidelný čtyřstěn nebo šestistěn, protažení stěn těchto mnohostěnů nebude mít žádné nové průniky s nesousedními stěnami (u čtyřstěnu sousedí každá stěna s každou a u krychle jsou ke zvolené stěně všechny ve vztahu sousednosti nebo rovnoběžnosti).

U osmistěnu se nám jedno ohvězdování povede, uvážíme-li průnik protažené stěny se stěnami, které měly s původní stěnou společný právě vrchol. Získáme těleso nazvané *stella octangula (hvězda osmicípá)*, které znal již Johannes Kepler.[43] Jedná se však o složeninu dvou pronikajících se čtyřstěnů (obr. 54), proto ji nebudeme mezi hvězdicové mnohostěny počítat. Dalším protažením stěn osmistěnu nám nové průsečíky nevzniknou.

[41] [wwwMa]
[42] [wwwMa]
[43] [Cox48] str. 56.



Obr. 55: První ohvězdování dvanáctistěnu

Podívejme se nyní na pravidelný dvanáctistěn. Zde již bude situace zajímavější a pro hvězdicové mnohostěny zajisté štědřejší. Prodloužíme-li stěny pravidelného dvanáctistěnu tak, abychom pro každou stěnu získali průsečíky se sousedními stěnami (obr. 55), vznikne nám *malý hvězdicový dvanáctistěn* (obrázek v *Příloze 1*).[44] Protáhneme-li stěny více, abychom získali průsečíky i s druhým „kruhem" sousedících stěn, vznikne nám nejprve *velký dvanáctistěn* (obr. 56)[45] a po dalším protažení *velký hvězdicový dvanáctistěn* (obr. 57).[46] Zkoumáme-li proces ohvězdování pozorně, zjistíme, že Kepler pravděpodobně nepostupoval takto systematicky — musel by přece objevit i velký dvanáctistěn. Můžeme se proto domnívat, že Kepler ohvězdování nepovažoval za obecný proces, který by šel aplikovat ve větší šíři.

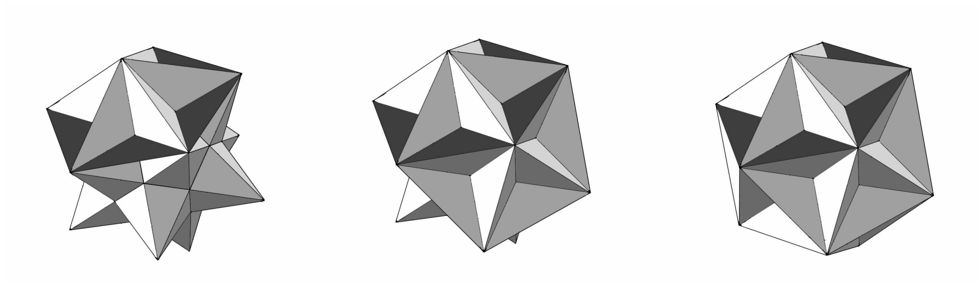
Další průniky protažených stěn pravidelného dvanáctistěnu již nezískáme. Původní dvanáctistěn a všechny hvězdy, které z něj vzniknou jsou vyobrazeny na obrázku v *Příloze 1*.

Poslední pravidelný mnohostěn, který nám zbývá, je dvacetistěn. Protažením jeho stěn získáme nejprve *složeninu pěti osmistěnů* — pro průnik každé stěny se šesti stěnami sousedícími vrcholově (obrázek v *Příloze 3*). Na obrázku v *Příloze 4* je tato složenina vybarvená tak, aby vynikly jednotlivé osmistěny, které složeninu tvoří. Průnik dalších šesti

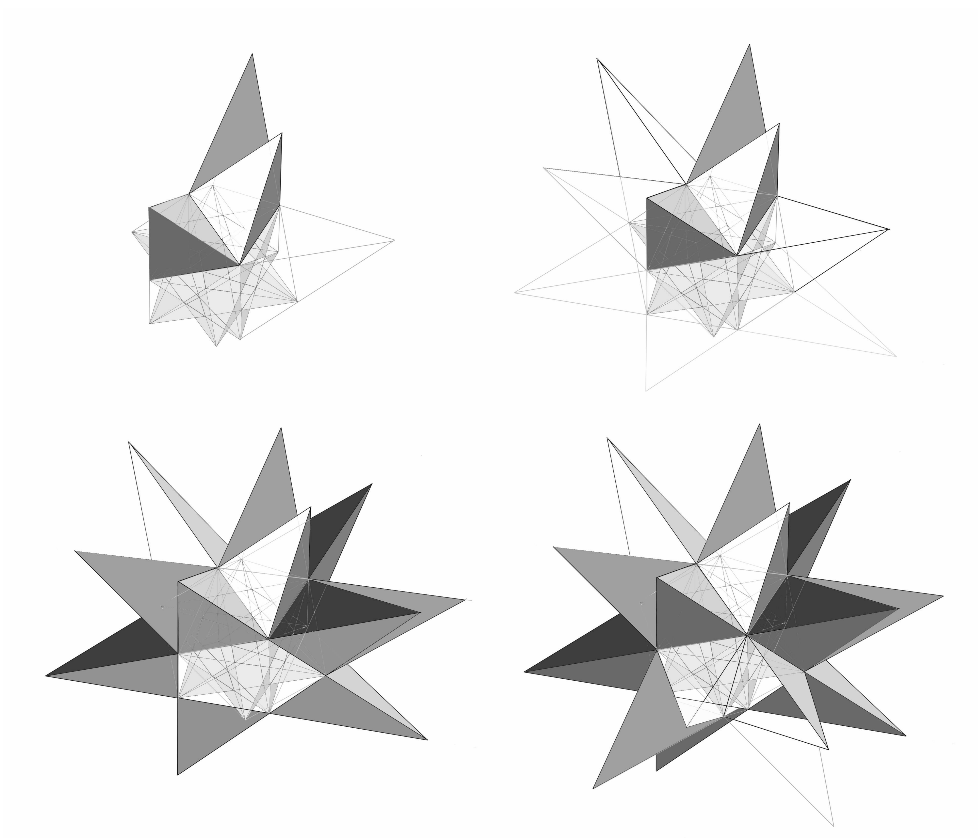
[44] Jak bylo zmíněno v odstavci 2.2.1, tento mnohostěn byl znám již Keplerovi.

[45] Objevení připisováno Poinsotovi.

[46] Jak bylo zmíněno v odstavci 2.2.1, tento mnohostěn byl též znám již Keplerovi.



Obr. 56: Druhé ohvězdování dvanáctistěnu



Obr. 57: Třetí ohvězdování dvanáctistěnu

rovin (určených trojúhelníky, které vrcholově sousedí s protilehlým trojúhelníkem) určí obrys stěny, jež bude tvořit další složeninu, tentokrát *pěti čtyřstěnů* (obrázek v *Příloze 3*). Stejně jako v předchozím případě, i zde je na obrázku v *Příloze 4* zachyceno toto těleso také v barevném provedení znázorňujícím jednotlivé čtyřstěny. Obě složeniny objevil a popsal v díle *Ueber die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder* z roku 1876 EDMUND HESS (1843–1903).[47]

Konečně poslední možností ohvězdování pravidelného dvacetistěnu je průnik dané stěny se třemi stěnami, které sousedí s protilehlým trojúhelníkem a tentokrát nám konečně nevznikne složenina, ale *velký dvacetistěn* (obrázek v *Příloze 3*).[48]

Tím jsme vyčerpali všechny možnosti ohvězdování a získali jsme tak čtyři hvězdicové mnohostěny, které bývají nazývány také kepler–poinsotova tělesa, neboť Kepler a Poinsot byli první, kdo je matematicky popsali.

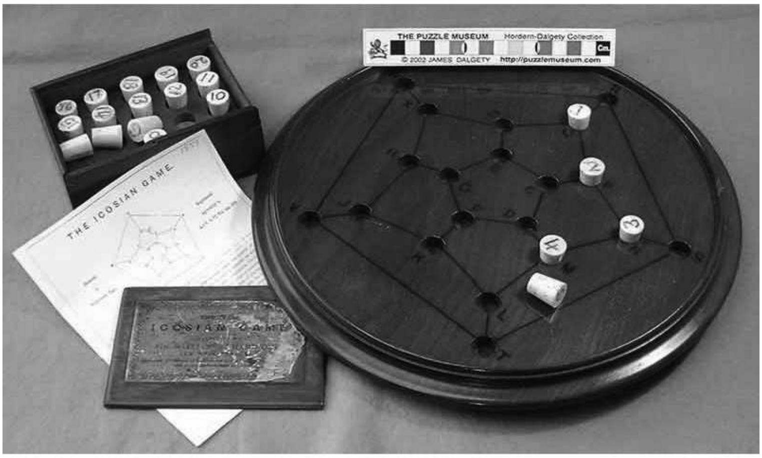
3.4 Mnohostěny a grafy

Mnohostěny nejsou v geometrii uzavřenou kapitolou, která by neměla čím přispět matematice budované od základů. V 19. stol. začínají být mnohostěny interpretovány pomocí grafů, což nám na ně nabízí nový pohled. Teorie grafů sice neumožní znázornit model mnohostěnu tak, aby zachovala původní metrické vlastnosti, dokáže však zachytit prostorové vztahy a vazby. Jedná se o další důležitý krok na cestě zobecňování, která vede k propojování jednotlivých oblastí matematiky.

Konkrétní využití teorie grafů bylo obsaženo např. v důkazu věty 3.3, který začíná na str. 50. Rovinné grafické znázornění nám zjednoduší zkoumání vztahů mezi stěnami, hranami a vrcholy v mnohostěnu. Významným zastáncem této teorie je irský královský astronom sir WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805–1865). Od něj pochází dětský hlavolam z roku 1857 na obr. 58.[49] Úkolem je projít všechna města (vrcholy dvanáctistěnu) a přitom nejít žádnou z cest (hran dvanáctistěnu) vícekrát než jednou. Hamilton převedl prostorovou úlohu pomocí grafu do roviny.

Znázornění mnohostěnů pomocí grafů využívá také VICTOR SCHLEGEL (1843–1905), který rovinných diagramů pro prostorové mnohostěny používá jako analogie prostorových diagramů, které umožní znázornit čtyřrozměrné mnohostěny. Jeho diagramy pěti platónských těles jsou na

[47] [Cox48] str. 56.
[48] Objevení připisováno Poinsotovi.
[49] [wwwPu]



Obr. 58: Hamiltonův hlavolam

obr. 59.[50]

3.5 Schläfli

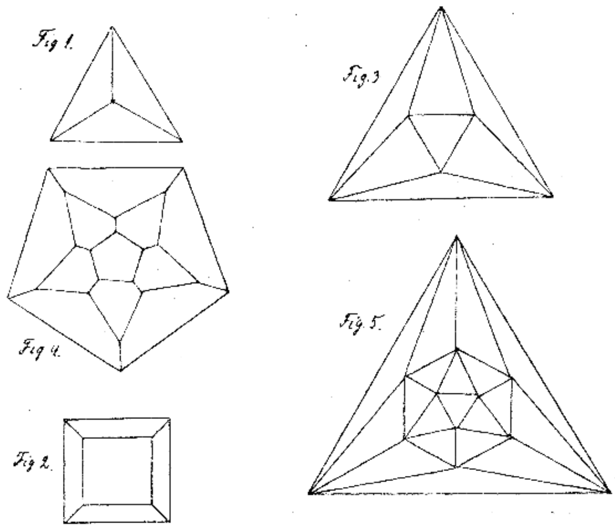
Švýcarský matematik LUDWIG SCHLÄFLI (1814–1895) zavádí označení pravidelných mnohostěnů pomocí uspořádané dvojice (p, q), kde p značí pravidelný p–úhelník a q počet hran sbíhajících se v jednom vrcholu. Odpovídající *Schläfliho symboly* jsou shrnuty v následujícím přehledu:

$(3, 3)$	čtyřstěn
$(3, 4)$	osmistěn
$(3, 5)$	dvacetistěn
$(4, 3)$	šestistěn
$(5, 3)$	dvanáctistěn

Schläfli jako první[51] odvozuje vztahy mezi počtem vrcholů v (případně počtem hran h, případně počtem stěn s) a zmíněnými charakteristikami p a q. Jedná se o následující rovnosti:

[50] Diagramy pochází z díla *Über Projectionsmodelle der regelmässigen vierdimensionalen Körper* vydaného roku 1886.

[51] [Cox48] str. 14.



Obr. 59: Schlegelovy diagramy

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{4p}{4-(p-2)(q-2)} \\
h &= \frac{2pq}{4-(p-2)(q-2)} \\
s &= \frac{4q}{4-(p-2)(q-2)}
\end{aligned}
$$

Ukážeme, jak lze získat vztah pro počet vrcholů (ostatní vztahy bychom odvodili analogicky). Budeme potřebovat *Eulerovu větu* (str. 45) a další dvě pomocná tvrzení.

První z nich tvrdí, že počet hran pravidelného mnohostěnu je roven polovině počtu vrcholů násobeného počtem hran vycházejících z jednoho vrcholu. To je zřejmé, neboť každou hranu při tomto počítání bereme dvakrát (hrana je určena dvěma vrcholy a byla proto započítána dvakrát). Zapsáno vzorcem máme:

$$h = \frac{vq}{2} \tag{25}$$

Druhé pomocné tvrzení zní: počet hran pravidelného mnohostěnu je roven polovině počtu stěn násobené počtem stran příslušného pravidelného mnohoúhelníku. To je zřejmé, neboť každou hranu počítáme takto dvakrát (hrana je určena dvěma mnohoúhelníky a byla proto započítána dvakrát). Zapsáno vzorcem máme:

$$h = \frac{sp}{2} \tag{26}$$

Chceme-li vyjádřit závislost v na p a q, musíme eliminovat neznámé h a s. Porovnáním rovností 25 a 26 získáme vyjádření s:

$$s = \frac{vq}{p} \tag{27}$$

Nyní dosaďme vztah 25 a 27 do *Eulerovy věty* a upravujme až do tvaru, který jsme chtěli dokázat:

$$\begin{aligned}
v - h + s &= 2 \\
v - \frac{vq}{2} + \frac{vq}{p} &= 2 \\
2pv - vqp + 2vq &= 4p \\
v(2p - pq + 2q) &= 4p \\
v &= \frac{4p}{2p - pq + 2q} \\
v &= \frac{4p}{4 - (p-2)(q-2)}
\end{aligned}$$

QED.

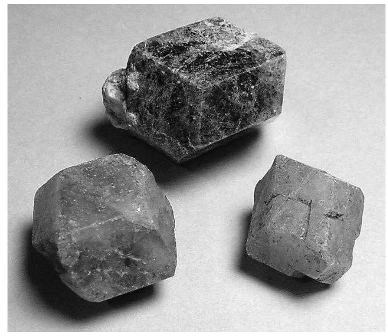
Schläfli je pro mnohostěny významný i z jiného pohledu. Popisem n-rozměrné geometrie otvírá nový prostor pro mnohostěny z vyšších dimenzí. Definuje pravidelný *polytop* (mnohostěn v libovolné dimenzi) a odvozuje pro něj obecně platné zákonitosti. Na Schläfliho navazuje mnoho geometrů 19. a 20. stol., kteří dále jeho teorie rozvíjejí.[52]

3.6 Pravidelné mnohostěny v přírodě

Názor, že krystaly jsou tvořeny mnohostěny, se objevuje již na konci 17. stol. (Robert Hooke, Christian Hauygens). Za otce moderní krystalografie je považován RENÉ–JUST HAÜY (1743–1822), který jako první vědecky popisuje stavbu krystalů. V současnosti máme možnost pozorovat i krystaly velmi malých rozměrů (následující fotografie pochází

[52] [Cox48] str. 141–144, 209–212.

Obr. 60: Magnetit



Obr. 61: Garnet

Obr. 62: Pyrit

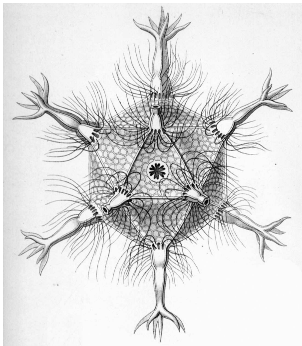
Obr. 63: Fluorit

od R. Wellera z Cochise College[53]). Na obrázku 60 jsou krystaly magnetitu, které mají tvar pravidelného osmistěnu, na obrázku 63 potom krychlové krystaly fluoritu. Obrázek 62 znázorňuje krystaly pyritu ve tvaru pravidelného dvanáctistěnu a na obrázku 61 vidíme kosočtverečné dvanáctistěny, které tvoří krystaly garnetu.

Pravidelné mnohostěny nacházíme od 19. stol. také v živé přírodě. Blíže se budeme věnovat tvaru schránek určitých mořských živočichů, některých virů a semen.

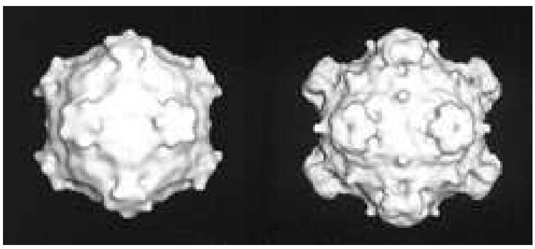
Darwinův žák ERNST HEINRICH PHILIPP AUGUST HAECKEL (1834–1919), profesor zoologie v Jeně nachází ve Středozemním moři mřížovce (*radiolaria*). Schránky těchto živočichů jsou tvořeny oxidem křemičitým a některé z nich mají tvar pravidelných mnohostěnů (osmistěnu, dvanáctistěnu nebo dvacetistěnu). Na obrázku 64 je ilustrace mřížovce *Circogonia icosahedra*, jehož schránka má tvar pravidelného dvacetistěnu, a na obr. 65 *Spumellaria* ve tvaru pravidelného osmistěnu. Obě ilustrace pochází z Haeckelova díla *Kunstformen der Natur* vydaného

[53] [wwwWe]



Obr. 64: Circogonia icosahedra

Obr. 65: Spumellaria



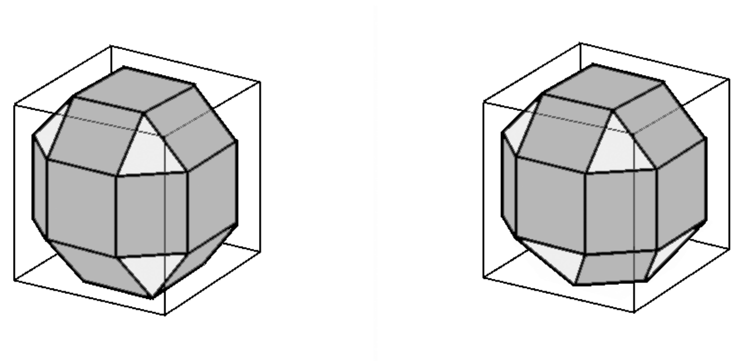
Obr. 66: Viry

roku 1904.[54]

Pravidelný dvacetistěn a pravidelný dvanáctistěn byly objeveny Donaldem Casperem a Aaronem Klugem v roce 1962 ve struktuře virů.[55] Před jejich objevem se předpokládalo, že viry mají kulovitý tvar. Ptáme-li se, proč tomu tak není, musíme odpověď hledat v evoluční teorii. Virus, aby mohl co nejúčiněji zaútočit na hostitelskou buňku, potřebuje vyřešit izoperický problém — najít těleso, které má při daném objemu nejmenší povrch složený ze stejných jednoduchých obrazců. Na obrázku 66 z elektronového mikroskopu[56] vidíme viry ve tvaru pravidelného dvacetistěnu, který tomuto požadavku dostojí nejlépe ze všech mnohostěnů.

V přírodě můžeme objevit i kosočtverečné dvanáctistěny (viz obr. 13). Mají totiž tu vlastnost, že jejich kopiemi lze beze zbytku zaplnit prostor. K vysvětlení, proč tomu tak je, potřebujeme vyjít z pravidelných mřížkových uspořádání koulí (středy koulí tvoří pravidelnou prostorovou mřížku). Pro představu nejjednodušší je *krychlová mřížka* — středy

[54] [wwwHa]
[55] [wwwVi]
[56] [wwwVi]



Obr. 67: Rombokuboktaedr (vlevo) a pseudorombokuboktaedr (vpravo)

sousedních koulí tvoří vrcholy krychlí. Zastavíme se u jiného uspořádání, které denně využíváme, u *stěno–středového uspořádání*. Najdeme ho třeba na trhu u prodejců pomerančů. Ti skládají pomeranče do pyramid po vrstvách tak, že v první vrstvě je uspořádají buď pravoúhle nebo šestiúhelníkově a následující vrstvu skládají tak, že dávají pomeranče do prohlubní z předcházející vrstvy, tedy následující vrstva je uspořádaná stejně jako předcházející, až na posunutí. Mohlo by se zdát, že takto získáme dvě strukturně odlišné pyramidy v závislosti na tom, jaké uspořádání v rámci vrstvy zvolíme, zda pravoúhlé nebo šestiúhelníkové. Jedná se však o totéž prostorové uspořádání koulí, záleží jen na tom, jak se na něj díváme. Jestliže jsme např. skládali pomeranče v pravoúhle uspořádaných vrstvách, stěna pyramidy bude tvořena vrstvou uspořádánou šestiúhelníkově a vrstva za ní bude stejná až na posunutí.

Nyní se můžeme podívat, jak tato mřížka souvisí s výskytem mnohostěnů v přírodě. Semena v rostoucím granátovém jablku mají zpočátku kulový tvar a jsou uspořádána ve stěno–středové mřížce. Semena se postupně zvětšují, až vyplní beze zbytku vnitřní prostor. Kdyby byla uspořádána původně v krychlové mřížce, měla by po vyplnění prostoru krychlový tvar. Ze stěno–středového uspořádání ovšem získají tvar kosočtverečného dvanáctistěnu.[57]

3.7 Další zobecnění pojmu pravidelného mnohostěnu

Dalším zobecněním definice pravidelného mnohostěnu (viz definice 1.1) se zabývá práce Normana W. Johnsona, který roku 1966 uveřejňuje příspěvek s názvem *Convex Solids with Regular Faces*, publikovaný v *Cana-*

[57] [Dev02] str. 201–207.

dian Journal of Mathematics, ve kterém zmiňuje 92 *Johnsonových těles* (důkaz, že se jedná o všechna tělesa uvedeného typu, uveřejňuje roku 1969 Victor Zalgaller).[58]

3.7. Definice. *Johnsonovým tělesem* rozumíme konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky, přičemž vylučujeme pravidelné a polopravidelné mnohostěny.

Až ve dvacátém století je tedy poprvé matematicky zařazen *pseudorombokuboktaedr*,[59] o kterém blíže pojednává odstavec 2.2.4. (V anglicky psané literatuře bývá tento mnohostěn nazýván také *elongated square gyrobicupola*, mezi *Johsonovými* tělesy nese označení 37). Tento mnohostěn můžeme získat např. „pootočením“ jedné vrstvy rombokuboktaedru o jednu stěnu (obr. 67).

Na závěr uvedeme stěžejní dílo o pravidelných mnohostěnech napsané ve 20. stol., které podává zevrubný přehled veškerých poznatků.[60] Jedná se o práci *Regular Polytopes* z roku 1948, jejímž autorem je Harold Scott MacDonald Coxeter (1907–2003), profesor geometrie na univerzitě v Torontu.

Závěr

Cíle, které jsem si kladla při psaní práce, lze shrnout do následujících čtyř oblastí.

Důraz byl především kladen na zachycení vývoje problematiky pravidelných mnohostěnů a těles z nich odvozených v průběhu času do počátku 20. stol.

Práce se dále snaží vystihnout přínos k tématu od „nematematiků“, především malířů a filosofů, kteří mnohdy předběhli svým dílem matematické objevy.

[58] [wwwNo]

[59] Některé prameny (např. [wwwGe]) tvrdí, že toto těleso mohlo být známo již J. C. P. Millerovi. Tento zdroj také uvádí, že poprvé se v podobě schlegelova diagramu objevuje pseudorombokuboktaedr v článku *Semi-regular Networks of the Plane in Absolute Geometry* roku 1905, jehož autorem je Duncan M. Y. Sommerville.

[60] Významná je především teorie polytopů z hlediska ucelení poznatků o pravidelných mnohostěnech a příbuzných tělesech ve vyšších dimenzích, popis grup symetrií a v neposlední řadě také zasazení do historického kontextu.

Část druhé kapitoly je věnována rozboru Keplerova důkazu o existenci právě 13 archimédovských těles. Poukazuji na některé nekorektnosti, kterých se Kepler dopustil a navrhuji správný postup důkazu.

Posledním, neméně důležitým, cílem bylo vytvoření textu, který by byl názorný a srozumitelný studentovi střední školy. Jedná se především o interpretaci historických důkazů některých matematiků (Eukleidés, Descartes, Euler, Schläfli) a o vizualizaci procesu ohvězdování pravidelných mnohostěnů.

Literatura

[Arm83] ARMSTRONG, M. A., *Basic Topology (Undergraduate Texts in Mathematics),* Springer — Verlag, New York, 1983.

[Esc82] BOLL, F. H., ERNST, B., KIST, J. R., LOCHER, J. L., WIERDA, F., *Escher, The Complete Graphic Work,* Thames and Hudson Ltd, London and Harry N Abrams Inc., New York, 1982.

[Cox48] COXETER, H. S. M., *Regular Polytopes,* Methuen & Co. Ltd., London, 1948.

[Dev02] DEVLIN, K., *Jazyk matematiky,* Argo, Praha, 2002.

[Euk07] EUKLEIDES, *Základy,* český překlad: František Servít, Král. Vinohrady, Praha, 1907.

[E52a] EULER, L., *Elementa doctrinae solidorum*, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 1752/53. Dostupné z http://math.dartmouth.edu/ euler/docs/originals/E230.pdf.

[E52b] EULER, L., *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusis sunt praedita*, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 1752/53. Dostupné z http://math.dartmouth.edu/ euler/docs/originals/E231.pdf.

[Fu68] FUSS, P., H., *Correspondance mathématique et physique de quelques célebres géometres du XVIIIeme siecle*, New York, 1968. Dostupné z http://www.eulerarchive.com/.

[He81a] HEATH, T., *A History of Greek Mathematics I.,* Dover Publications, Inc. New York, 1981.

[He81b] HEATH, T., *A History of Greek Mathematics II.,* Dover Publications, Inc. New York, 1981.

[Juc81] JUCOVIČ, E., *Konvexné mnohosteny,* Veda, Bratislava, 1981.

[Kep35] KEPLER, J., *Astronomia,* Frankfurt, 1635. Dostupné z http://imgbase-scd-ulp.u-strasbg.fr/displayimage.php?album=51&pos=0.

[Kep19] KEPLER, J., *Harmonices mundi,* Linz, 1619. Dostupné z http://imgbase-scd-ulp.u-strasbg.fr/thumbnails.php?album=27.

[Kep21] KEPLER, J., *Mysterium cosmographicum,* Frankfurt, 1621. Dostupné z http://imgbase-scd-ulp.u-strasbg.fr/thumbnails.php?album=41.

[Lev91] LEVITIN, K., *Geometrická rapsódie,* SNTL, Praha, 1991.

[Sa04a] SANDIFER, E., *How Euler Did It*, 2004, [cit. 2006–09–14]. Dostupné z http://www.maa.org/editorial/euler/How%20Euler%20Did%20It%2008%20V%20E%20and%20F%20part%201.pdf.

[Sa04b] SANDIFER, E., *How Euler Did It*, 2004, [cit. 2006–09–14]. Dostupné z http://www.maa.org/editorial/euler/How%20Euler%20Did%20It%2009%20V%20E%20and%20F%20part%202.pdf.

[Sek77] SEKANINA, M., SEKANINOVÁ, A., *Mnohostěny,* Univerzita J. E. Purkyně, Brno, 1977.

[vS47] VON STAUDT, G., K., CH., *Geometrie der Lage,* Verlag der Fr. Korn'schen Buchhandlung, 1847. Dostupné z http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/docviewer?did=01190001&seq=5.

[Vop01] VOPĚNKA, P., *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci,* Práh, Praha, 2001.

[wwwGe] HART, G., W., *Virtual Polyhedra,* 2000, [cit. 2006–09–14]. Dostupné z http://www.georgehart.com.

[wwwHa] STÜBERS, K., *Ernst Haeckel: Kunstformen der Natur,* 1999, [cit. 2006–09–20]. Dostupné z http://caliban.mpiz-koeln.mpg.de/~stueber/haeckel/kunstformen/liste.html.

[wwwHe] HEBISCH, U., *Mathematik und Kunst,* [cit. 2006–09–20]. Dostupné z http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/jamnitzer/galerie7a.html.

[wwwMa] *The MacTutor History of Mathematics archive,* University of St Andrews Scotland, 2006 [cit. 2006–09–14].
Dostupné z http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/∼history/index.html.

[wwwMo] MORGAN, G., *Early Theories of Spherical Virus Structure,* [cit. 2006–09–14]. Dostupné z http://medschool.wustl.edu/∼virology/gregmorgan.htm.

[wwwNo] *Norman Johnson,* [cit. 2006–09–20].
Dostupné z http://normanjohnson.quickseek.com/.

[wwwPu] DALGETY, J., *The Puzzle Museum,* [cit. 2006–09–19]. Dostupné z http://www.puzzlemuseum.com/month/picm02/200207icosian.htm.

[wwwVi] THE VIRUS RESEARCH GROUP, *The Origin of Icosahedral Symmetry in Viruses,* 2006, [cit. 2006–09–14]. Dostupné z http://virus.chem.ucla.edu/article.php/icosahedral_symmetry.

[wwwWe] WELLER, R., *Crystals and Crystal Models,* 2006, [cit. 2006–09–14]. Dostupné z http://skywalker.cochise.edu/wellerr/crystals/isometric/isometricL.htm.

Veronika Svobodová
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta MU, Brno
e-mail: schneck@email.cz