Jan Vilém Pexider (1874–1914)

Štefan Schwabik
Pexiderovy matematické publikace

In: Jindřich Bečvář (editor): Jan Vilém Pexider (1874–1914). (Czech). Praha: Prometheus, 1997. pp. 36–44.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401017

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Studie

o funkcionálních rovnicích.

Napsal

Dr. Jan Vilém Pexider.

Část II.

OBSAH:

V PRAZE.

Tiskem dra Edv. Grégra. — Nákladem vlastním.

1900.

PEXIDEROVY MATEMATICKÉ PUBLIKACE

Štefan Schwabik

Matematické práce J. V. Pexidera byly zveřejněny v období 1898 – 1909.

Pexiderova doktorská disertace z roku 1898 je nazvána *Theorie variačního počtu dle Weierstrasse*. Pexider se zde věnuje problému, který sám v úvodu postavil takto:

Ustanoviti jest veličiny x *a* y *co takové funkce proměnné* t*, aby — pozmění-li se rovnicemi* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ *definovaná křivka libovolným způsobem a libovolně málo — z této změny plynoucí změna integrálu*

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\, dt$$

byla stále jen positivní, má-li integrál ten míti hodnotu minimální, jen negativní, má-li míti hodnotu maximální.

Jde tedy o určování extrémů funkcionálu J, který je zde udán v parametrické podobě, tj. v rovině se má určit křivka $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [t_0, t_1]$, pro kterou má J extrém. Tento problém je ve variačním počtu známý dlouho; v exaktní podobě se mu věnoval zejména Weierstrass, jehož myšlenky Pexider ve své disertaci podrobně sleduje.

Téma dovádí v první části práce (s podtitulem *Absolutní maxima a minima*) k nutným podmínkám pro extrém, v druhé části se pak věnuje podmínkám postačujícím, kde ústřední roli hraje Weierstrassovo kriterium formulované pomocí známé Weierstrassovy funkce $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.

Pexiderova disertační práce má z dnešního hlediska jednoznačně kompilační charakter; nové myšlenky, odlišné od myšlenek Weierstrasse a jeho žáků v ní nelze nalézt.

Dá se říci, že Pexider reprodukuje téma věrně a s pochopením. V tomto smyslu je možno jeho disertaci chápat jako přiblížení tehdy poměrně nového tématu českému vědeckému publiku.

Pexiderova disertace v tištěné podobě publikována nebyla.

Ve své první publikované práci [P1] uvedl Pexider dva příklady pro odvození vzorce pro výpočet derivace funkce na základě funkcionální rovnice, kterou tato funkce splňuje. Práce je z dnešního hlediska formulačně nepřesná a podstatné výsledky nepřináší.

Práce [P2] říká, že když jsou funkce $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ lineárně nezávislé (*žádná není algebraicky lineárnou funkcí druhých*) a když jsou lineární kombinace

$$u_0 + u_1\varphi_1(x) + u_2\varphi_2(x) + \cdots + u_n\varphi_n(x)$$

a

$$v_0 + v_1\varphi_1(x) + v_2\varphi_2(x) + \cdots + v_n\varphi_n(x)$$

sobě rovné pro nekonečně mnoho různých hodnot $x_1, x_2, \ldots$ *číselně menších než libovolná hodnota* A*,* potom platí

$$u_0 = v_0,\ u_1 = v_1,\ \ldots,\ u_n = v_n\ .$$

Není zřejmé, kde jsou funkce definovány; to, co Pexider ukazuje, lze s trochou nadsázky v dnešní řeči formulovat tak, že systém funkcí 1, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ je lineárně nezávislý, právě když je lineárně nezávislý.

K práci [P1] se tematicky váže práce [P3]; autor vychází z funkcionální rovnice pro nějakou funkci f, např. z funkcionální rovnice

$$f(uz) = f(u) + f(z)\ ,$$

a bezstarostnou formální manipulací s „diferenciálem“ a integrací dostává některé vzorce pro integrál.

Pexiderovy práce [P4] a [P5] tvoří jeden celek; nesou název *Studie o funkcionálních rovnicích.*

Sestávají ze čtyř částí (I, II — [P4], III, IV — [P5]):

I. *Stanovení funkcí, hovících určitým podmínkám,*
II. *Stanovení integrálů funkcí hovících určitým podmínkám,*
III. *Abelův theorém o existenci funkce, hovící funkcionální rovnici jistého tvaru, a theorém parallelní,*
IV. *Funkcionální rovnice elementárních funkcí.*

V I. oddílu se Pexider zabývá skupinou funkcionálních rovnic

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y)\ ,\\ f(x+y) &= f(x)\cdot f(y)\ ,\\ f(xy) &= f(x)\cdot f(y)\ ,\\ f(xy) &= f(x) + f(y)\ . \end{aligned}$$

Jde o stanovení funkcí f, které tyto rovnice splňují, žádá-li se, aby
1. f byla spojitá reálná funkce reálné proměnné,
nebo aby
2. f byla spojitá a analytická funkce komplexní proměnné.

II. Oddíl je věnován stanovení integrálů spojitých funkcí, které vyhovují jedné z rovnic

$$\begin{aligned} \Phi(x+y) &= f(x) + f(y)\ ,\\ \Phi(x+y) &= f(x)\cdot f(y)\ ,\\ \Phi(xy) &= f(x)\cdot f(y)\ ,\\ \Phi(xy) &= f(x) + f(y)\ . \end{aligned}$$

Pexider zde navazuje na svou práci [P3]. Vztahy pro integrály odvozuje z obecného postupu, který je opět dosti nepřesný, a výklad — zejména co do předpokladů — velmi zkratkovitý.

V III. části Pexider stručně dokazuje Abelovu větu ([P5], str. 1):

Má–li funkce $\varphi(x,y)$ dvou neodvisle proměnných x a y tu vlastnost, že funkce $\varphi(z,\varphi(x,y))$ jest symmetrickou funkcí argumentů x, y a z, existuje vždy taková funkce f, pro niž platí

$$f(\varphi(x,y)) = f(x) + f(y)\ .$$

Udává pak *parallelní theorém* ([P5], str. 6):

Má–li funkce $\varphi(x,y)$ dvou neodvisle proměnných x a y tu vlastnost, že funkce $\varphi(z,\varphi(x,y))$ jest symmetrickou funkcí argumentů x, y a z, existuje vždy taková funkce f, pro niž platí

$$f(\varphi(x,y)) = f(x)\cdot f(y)\ .$$

Výsledkem tedy je, že funkcionální rovnice

$$f(\varphi(x,y)) = f(x) + f(y)$$

a

$$f(\varphi(x,y)) = f(x)\cdot f(y)$$

pro neznámou funkci f mají, za daného předpokladu o funkci $\varphi(x,y)$, vždy řesení.

Ve IV. oddíle pak Pexider odvozuje funkcionální rovnice pro elementární funkce jak reálného, tak i komplexního argumentu.

Abelova věta byla jedním z velkých témat analýzy minulého století. V práci [P6] se Pexider věnoval výkladu právě tohoto tématu. Jeho znalost pravděpodobně vycházela z Pexiderových studií v zahraničí a nepochybně také z obsáhlého studia pramenů. Práce [P6] je rozsáhlý spis o 64 stranách, který je doprovázen třemi stranami literatury. Pexider jej vydal vlastním nákladem.

Abelovým integrálem se rozumí

$$\int R(u,z)dz\ ,$$

kde $f(u,z)$ je polynom, $R(u,z)$ racionální funkce a $f(u,z) = 0$. V integrálu se funkce u chápe jako algebraická funkce proměnné z.

Abelova věta pak zhruba řečeno tvrdí, že součet integrálů tohoto typu lze zapsat jako p takovýchto integrálů, ke kterým nutno přidat algebraické a logaritmické členy. Počet p přitom závisí jen na funkci f. Když je například $f(u,z) = u^2 - P(z)$ a P je polynom šestého stupně, je $p = 2$ a platí

$$\sum_{n=1}^{N}\int_0^{z_n} R(u,z)dz = \int_0^a R(u,z)dz + \int_0^b R(u,z)dz + R_0 + \sum_k c_k \log R_k\ ,$$

kde R_0 a R_k jsou racionální funkce proměnných $z_m, a, b, u_m = u(z_m), u(a), u(b)$, meze a a b v integrálech na pravé straně jsou algebraické funkce proměnných z_m, u_m.

Pexider se v předmluvě k tomuto spisu zmiňuje, že v závěrečné partii, kde se věnoval historickým aspektům problematiky, se opíral o „důkladný spis *Bericht über die Entwickelung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit* od Brilla a Noethera z r. 1894“.

Svoje znalosti pramenů k Abelovu teorému pak Pexider využil i v článku historické povahy [P10], v němž uvedl chronologický přehled prací o Abelově teorému a jeho různých důkazech.

Ve čtyřech částech vyšla roku 1904 v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky Pexiderova „osvětová“ studie [P9a] o *znázornění čísel délkami a naopak.* Inspirací k této práci byly Hilbertovy přednášky o základech geometrie v roce 1902 a témata, která Hilbert shrnul např. ve druhém vydání svých *Grundlagen der Geometrie.*

Geometrie je pojata v Hilbertově stylu axiomaticky. Pexider ukazuje, že *jest možno takovou soustavu axiomů geometrických stanoviti, … a že lze … vedle jiných nových věcí, na základě této soustavy problém znázornění čísel délkami a měření délek čísly řešiti uspokojivě a v duchu tradičního požadavku, totiž požadavku oboustranně jednoznačné korrespondence mezi čísly a délkami.* ([P9a], str. 16)

V Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky tato stať působí do jisté míry překvapivě. Jde totiž o mimořádně aktuální téma (včetně filozofických pohledů), které se na stránky časopisu dostalo ve zcela čerstvém stavu. Zdá se, že k této problematice byl Pexider doveden mimo jiné i na základě svého sporu s Eduardem Weyrem. Problematika znázornění čísla délkou v geometrii a naopak, vyjádření délky číslem byla jednou z jeho výtek adresovaných Weyrovi. Pexider pokládal za nutné o tematice informovat české čtenáře a učinil tak velmi zdařile a hlavně včas. Ne všechny zásadní objevy matematické se na stránky časopisu dostaly tak rychle.

Pexiderova práce [P9b], která vyšla samostatně vlastním nákladem autora, se jen nepodstatně liší od práce [P9a].

Vlastnosti symetrických funkcí proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$, tj. funkcí F, jejichž funkční hodnota se nezmění provedením jakékoli permutace proměnných, zkoumal Pexider v práci [P11]. Vedle této jednoduché formy symetrie, kterou Pexider nazývá formou prvního rodu (*Formen erster Gattung*), zkoumá i další (např. forma druhého rodu je utvořena tak, že y_k, $k = 1, 2, \dots, n$, jsou funkce nezávislých argumentů $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_s}$ a F je funkcí $y_1, y_2, \dots, y_n$, která je symetrická v řadách argumentů $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_s}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$ a $s \geq 2$).

Obecné nepříliš složité úvahy Pexider užívá pro speciální tvary symetrických funkcí, kupř. pro funkci tvaru

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \cdots + \varphi_n(x_n) \ ,$$

která má být symetrická. Dostane, že je

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j) + C \ ,$$

kde φ je nějaká funkce a C je konstanta.

V práci [P12] se Pexider vrací k staršímu tématu funkcionálních rovnic ze svých starších prací [P4] a [P5]. Zkoumá sadu funkcionálních rovnic

$$\begin{aligned} f_1(z) + \varphi_1(u) &= \psi_1(z+u) \ , \\ f_2(z) \times \varphi_2(u) &= \psi_2(z+u) \ , \\ f_3(z) \times \varphi_3(u) &= \psi_3(zu) \ , \\ f_4(z) + \varphi_4(u) &= \psi_4(zu) \end{aligned}$$

a klade otázku, jaké spojité funkce f_j, φ_j, ψ_j, $j = 1,2,3,4$, těmto rovnicím vyhovují. Jde o zobecnění situace

$$f_j = \varphi_j = \psi_j \ , \quad j = 1,2,3,4 \ ,$$

kterou vyšetřoval Cauchy.

Výše uvedené funkcionální rovnice jsou svým způsobem navzájem provázané, podívejme se proto jen na první z nich, tj. na funkcionální rovnici

$$f(z) + \varphi(u) = \psi(z+u) \ , \tag{*}$$

které se ve specializované literatuře říká *Pexiderova rovnice*. Sledujme pro tento případ Pexiderovy úvahy z [P12]:

Kvůli symetrii pravé strany rovnice (rozuměj symetrii vzhledem k z a u) *platí*

$$\varphi(z) = f(z) + C \ ,$$

kde C je konstanta, jejíž hodnotu lze stanovit například tak, že položíme $z = 0$. Dosazením této hodnoty za u v rovnici (*) obdržíme vztahy

$$f(z) + \varphi(0) = \varphi(z) + f(0) = \psi(z) \ ,$$

kterých lze využít k eliminaci dvou z funkcí f, φ, ψ v rovnici (*) — eliminujme např. funkce φ a ψ. Dosaďme nejprve $f(z) + \varphi(0) = \psi(z)$ do (*), dostaneme

$$f(z) + \varphi(u) = f(z+u) + \varphi(0)$$

a posléze užitím rovnosti $f(z) + \varphi(0) = \varphi(z) + f(0)$ pro $z = u$, tj. $f(u) + \varphi(0) - f(0) = \varphi(u)$ obdržíme

$$f(z) + f(u) + \varphi(0) - f(0) = f(z+u) + \varphi(0) \ ,$$

neboli

$$f(z) + f(u) = f(z + u) + f(0) \ .$$

Jestliže nyní do poslední rovnice zavedeme novou funkci g vztahem $f(z) = f(0) + g(z)$, dostaneme funkcionální rovnici pro funkci g ve známém Cauchyově tvaru

$$g(z) + g(u) = g(z + u) \ ,$$

a pro její řešení pak známou lineární funkci $g(z) = az + b$.

Tím se řešení složitě vyhlížející Pexiderovy rovnice $f(z) + \varphi(u) = \psi(z + u)$ zredukovalo na známou funkcionální rovnici pro lineární funkci. Cestu zpět od funkce g k funkcím f, φ a ψ si čtenář jistě najde sám.

[P12] je právě ta práce, kvůli které se Pexiderovo jméno objevuje i v současné matematice. Náznaky úvah výše uvedeného typu (pro dvě neznámé funkce) lze však nalézt i v česky publikované práci [P4]; práce [P12] však vešla v obecnější známost, uvedla do matematiky rovnice, které pak byly spojeny s Pexiderovým jménem.[1]

Pexider ukázal, že obecněji postavený problém nedává podstatně nové poznatky než ty, které získal Cauchy.

Ve druhé části práce [P12] se v obecné formulaci Pexider vrací k problematice, kterou zkoumal ve své první publikované práci [P1].

Jde o rovnici

$$F[f_1(z_1), f_2(z_2), \ldots, f_n(z_n)] = 0 \ ,$$

ze které se mají určit funkce f_j, přičemž se na proměnné $z_1, z_2, \ldots, z_\kappa$ hledí jako na nezávislé a na zbylé $z_{\kappa+1}, \ldots, z_n$ jako na závislé na $z_1, z_2, \ldots, z_\kappa$. Nutná podmínka pro řešitelnost úlohy (podobná podmínce pro platnost věty o implicitních funkcích) je někdy i postačující a tuto situaci Pexider analyzuje spolu s jednoduchými příklady výpočtu derivace funkce, která je dána funkcionální rovnicí. Tytéž příklady uváděl už ve své práci [P1]. Nakonec pak dospívá k tomu, že za jistých okolností lze z funkcionálního vztahu pro určení funkcí f_j odvodit rovněž vztahy určující integrály těchto funkcí. Této problematice se pak věnoval ještě v práci [P13]. Ta rovněž představuje návrat ke staršímu tématu práce [P3] v obecnější a pořádnější podobě.

Práce [P15] je věnována vyjádřením číselně teoretické funkce $\psi(x)$, která udává počet prvočísel nejvýše rovných kladnému reálnému číslu x, a funkce

$$\Psi(x) = \psi(x) - \psi(\sqrt{x}) \ .$$

V práci [P18] se Pexider zabývá otázkou, kolik kořenů má rovnice

$$E\left(\frac{n}{x}\right) - E\left(\frac{n}{x+1}\right) = 0 \ ,$$

[1] K tomu viz například knížku Františka Neumana: *Funkcionální rovnice,* SNTL, Praha 1986.

kde $E(x)$ označuje celou část čísla x; Pexider užívá pro tuto hodnotu též označení $[x]$. Počet $A(n)$ kořenů uvedené rovnice vyjádřil roku 1895 Matyáš Lerch pomocí jistých speciálních funkcí. Pexider dochází k tomu, že tento počet lze udat ve tvaru

$$A(n) = E(n) - E(\sqrt{n}) - E\left(\frac{n}{E(\sqrt{n})+1}\right),$$

a že zkoumané kořeny jsou čísla

$$x = E\left(\frac{n}{\alpha}\right) + 1,\ E\left(\frac{n}{\alpha}\right) + 2,\ \ldots,\ E\left(\frac{n}{\alpha-1}\right) - 1\ ,$$

kde $\alpha = 2, 3, \ldots, E(\sqrt{n}) + 1$ a α vyhovuje podmínce

$$E\left(\frac{n}{\alpha-1}\right) - E\left(\frac{n}{\alpha}\right) > 1\ .$$

Nechť jsou $r_1, r_2, \ldots, r_\kappa, \ldots$ nejmenší kladné zbytky mocnin

$$1^n, 2^n, \ldots, \kappa^n, \ldots$$

s přirozeným exponentem n podle celočíselného modulu m. Potom tvoří zbytky $r_1, r_2, \ldots, r_m$ kongruence

$$(\kappa + qm)^n \equiv \kappa^n \pmod{m}$$

$(r_{\kappa+qm} = r_\kappa)$, kde q je celé, skupinu m celých čísel, které se v nekonečné řadě n–tých mocninných zbytků $r_1, r_2, \ldots, r_\kappa, \ldots$ periodicky opakují.

V práci [P19] Pexider zkoumal vztahy, které splňují prvky takové periody mocninných zbytků, dle toho, zda se jedná o sudé nebo liché hodnoty exponentu n. Zkoumal případ kvadratických ($n = 2$), kubických ($n = 3$) a bikvadratických ($n = 4$) zbytků a v těchto případech vyšetřoval jejich součty.

Statě [P14], [P16] a [P17] jsou věnovány pojistné matematice.

Sledujeme–li časovou řadu Pexiderových matematických statí, které spatřily světlo světa v tištěné podobě, můžeme vypozorovat nepochybný vývoj jejich obsahu i formy. Vrací se ke svým tématům a výklad s časem získává na přesnosti a srozumitelnosti, kupříkladu co do obsahu jsou si práce [P4] a [P12] příbuzné, práci [P12] Pexider publikoval s odstupem 4 let po [P4] a čas výklad zpřehlednil a upřesnil. Je také kvalitativní rozdíl mezi pracemi publikovanými česky a pracemi cizojazyčnými. Ty druhé jsou nepochybně pořádnější a přesnější, snad je to i proto, že byly napsány později. Za zmínku snad stojí i to, že Pexider do roku 1903 publikoval česky; potom jsou už všechny jeho práce psány německy nebo francouzsky.

Pozoruhodné jsou práce, v nichž se Pexider pokusil informovat českou matematickou veřejnost o nových, nebo méně známých věcech z matematiky.

Toho druhu je jeho práce [P6] o Abelově větě nebo práce [P9a], o které jsme se zmínili výše o něco podrobněji. V těchto článcích nešlo o původnost matematických výsledků a výkladu, spíše v nich lze spatřovat informativní přehledné články.

Když uvažujeme o matematických publikacích J. Pexidera, nelze se nezmínit ještě o jedné okolnosti. Práce [P1] — [P6] Pexider předložil jako svůj habilitační spis. Zpravodajem o předložené habilitační žádosti byl profesor Eduard Weyr a ten na základě svého zkoumání podal 3. března 1902 *sl. sboru professorskému návrh na odmítnutí žádosti p. dra. J. Pexidera za připuštění k habilitaci.*

Eduard Weyr vcelku správně usoudil, že předložené práce nemají dobrou úroveň a že jsou namnoze kompiláty. Ve svém pětistránkovém posudku věci podrobně rozebral a svůj názor doložil. Uvedené práce jsou vskutku toho druhu, jak je Weyr charakterizoval. Na Weyrově odsudku se stěží dá něco změnit i z dnešního pohledu, kdy na Pexiderovy práce můžeme hledět s odstupem a bez emocí. Nic na tom nemění ani ta skutečnost, že v práci [P4] je pojednáváno o funkcionálních rovnicích, které posléze uvedly Pexiderovo jméno do současné matematiky. Matematický příspěvek Pexiderův byl vskutku nepatrný.

Situace se žádostí o habilitaci byla pro Pexidera výzvou k boji. Proti usnesení profesorského sboru pražské university, které bylo c. k. ministerstvem kultu a vyučování potvrzeno, se v červnu 1902 odvolal s tím, že zejména naznačil Weyrovu nekompetentnost. Posléze na Eduarda Weyra zaútočil z jiné strany v souvislosti s Weyrovou knihou o diferenciálním počtu. Tento dílčí spor byl dlouhý, plný emocí a probíhal i v tištěné podobě (viz [P7], [P8]); podrobně byl popsán a zhodnocen v knížce J. Bečvář a kol.: *Eduard Weyr 1852 – 1903,* Prometheus, Praha 1995.

Spor o Pexiderovu habilitaci byl ukončen až v roce 1907. Pexiderovy práce znovu posoudil Karel Petr a vyjádřil se rovněž k původnímu stanovisku zemřelého Eduarda Weyra. Závěr komise (členy byli Koláček, Strouhal, Sobotka, Petr a Raýman) byl velmi příkrý a týkal se i něčeho jiného než matematiky:

… nemůže komise srovnati s názorem svým o vědeckých a mravních zásadách normálního učitele vysokých škol způsob, jakým dr. Pexider v mathematice i vůči společnosti vědecké po celá léta vystupuje.

Dále pak komise navrhla,

… aby děkan sboru, oznamuje p. dru Pexiderovi … vyřízení jeho dvou žádostí … , připojil ihned poznámku, že případná nová žádost Pexiderova za habilitaci při naší fakultě … bude ihned odmítnuta.

Tím po šesti letech skončila záležitost s Pexiderovou habilitací.