X. PINCHERLEOVA LINEÁRNÍ ALGEBRA

... the efforts of Grassmann and Peano to introduce vector spaces in an axiomatic way were persistently ignored until 1900.

([Dieudonné, 1981], str. 72)

Pincherle's contribution went far beyond Peano's first attempt, offering a unified axiomatic approach of the study of linear operators in finite and infinite-dimensional linear spaces. However, even though he was the author of the article on functional equations and operators in the French version of the 'encyclopédie des mathématiques pures et appliquées' (Pincherle 1912), in which he gave a very detail historical account and referred to his own work, Pincherle's work itself did not have much influence.

([Dorier, 2000], str. 35)

Italský matematik Salvatore Pincherle studoval koncem 19. století lineární operátory na prostorech funkcí a řad, rozpracovával myšlenky, které dnes řadíme do prehistorie funkcionální analýzy. Navázal do značné míry na axiomatický přístup Giuseppe Peana, podle jeho vzoru podal definici vektorového prostoru a vyložil některé partie, které dnes řadíme do lineární algebry. Ve srovnání s poslední kapitolou Peanova *Calcolo geometrico*, je Pincherleova lineární algebra podstatně hlubší a obsažnější teorií. Jakoby se její autor inspiroval zejména výsledky Grassmannovy monografie *Die Ausdehnungslehre* z roku 1862. Zajímavé je, že Pincherleova monografie *Le operazioni distributive* z roku 1901 není napsána tak moderním, stručným a jasným způsobem jako Peanovo *Calcolo geometrico* z roku 1888.

1. Salvatore Pincherle

Salvatore Pincherle se narodil 11. března 1853 v Terstu, který tehdy patřil Rakousku. Pocházel ze židovské obchodnické rodiny. Vystudoval lyceum v Marseille, kam rodina nedlouho po jeho narození přesídlila. V letech 1869 až 1874 studoval v Pise (Scuola Normale Superiore), kde působili Enrico Betti (1823–1892), všestranný matematik pracující v algebře, analýze, diferenciální geometrii a matematické fyzice, jeden ze zakladatelů topologie, a Ulisse Dini (1845–1918), který se věnoval diferenciální geometrii, později matematické analýze, teorii funkcí reálné proměnné a teorii analytických funkcí.

Velký vliv na Pincherleův matematický vývoj mělo přátelství s Felice Casoratim (1835–1890), profesorem univerzity v Pavii, který se zabýval teorií funkcí komplexní proměnné, diferenciální geometrií, diferenciálními rovnicemi a historií matematiky. Po ukončení studií v Pise působil S. Pincherle až do roku 1880 na lyceu v Pavii.

Ve školním roce 1877/1878 byl na stipendijním pobytu v Berlíně, kde poslouchal přednášky Ernsta Eduarda Kummera (1810–1893), Leopolda Kroneckera (1823–1891) a Karla Theodora Wilhelma Weierstrasse (1815–1897). Největší vliv na něho měly Weierstrassovy přednášky z teorie funkcí; za jeho žáka se ostatně vždy považoval. Weierstrassovy přednášky zpracoval a roku 1880 publikoval ve dvou částech (téměř 120 stran) v časopise *Giornale di Matematiche di Battaglini* pod názvem *Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principi del prof. C. Weierstrass.*[1] Touto prací, která měla v Itálii veliký ohlas, neboť italským čtenářům poprvé přiblížila Weierstrassovy myšlenky, na sebe S. Pincherle obrátil pozornost.

Po krátkém působení na univerzitě v Palermu roku 1880 přednášel pak po celý život (1881 až 1928) na univerzitě v Bologni. Od roku 1888 byl členem tamější akademie, v pozdějších letech byl dvakrát jejím prezidentem. Roku 1922 založil Italskou matematickou společnost (Unione Matematica Italiana) a byl jejím prvním prezidentem (do r. 1932). Založil současně časopis této společnosti nazvaný *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* a řídil jej až do smrti. Mnoho práce vykonal pro časopis *Annali di Matematica pura ed applicata.*

S. Pincherle významným způsobem přispěl ke zlepšení atmosféry mezinárodních kontaktů matematiků, která byla silně narušena první světovou válkou. Na 7. mezinárodním kongresu matematiků v Torontu roku 1924 (tj. ve svých 71 letech) vystoupil s jednou z hlavních přednášek; nazvána byla *Sulle operazioni funzionali lineari.* Na tomto kongresu byl zvolen na další čtyři roky prezidentem International Mathematical Union a v této funkci roku 1928 předsedal 8. mezinárodnímu kongresu matematiků v Bologni.

Během života se mu dostalo mnoha uznání. Několikrát byl v Bologni děkanem fakulty a prezidentem bolognské akademie věd. Byl jedním ze čtyřiceti členů Società Italiana delle Scienze, členem Consiglio Nazionale delle Ricerche, členem Consiglio direttivo del Circolo Matematico di Palermo, členem Accademia Nazionale dei Lincei (1904). Byl zahraničním členem Royal Society of Edinburgh (1921), Bayerische Akademie der Wissenschaften (1930), akademie v Coimbře, čestným členem Švýcarské vědecké společnosti, Moskevské matematické společnosti a Matematické společnosti v Kalkatě, obdržel čestný doktorát univerzity v Oslo, byl dopisujícím členem společností, resp. akademií v Turíně, Neapoli, Benátkách a Miláně.

Zemřel 10. července 1936 v Bologni.

S. Pincherle byl ve své době předním světovým matematikem, který podstatně přispěl ke vzniku a konstituování funkcionální analýzy. Přestože jeho přínos na tomto poli vysoce oceňovali tak významní matematici, jako byli Jaques Hadamard (1865–1963), Stefan Banach (1892–1945) a Maurice René Fré-

[1] Podobné články publikoval ve 12. a 14. ročníku Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky v letech 1883 a 1885 Ludvík Kraus (1857–1885), který strávil v Berlíně čtyři semestry na přelomu sedmdesátých a osmdesátých let. Jeho pojednání jsou nazvána *Základové arithmetiky. Dle výkladů prof. Weierstrassa* (str. 153–184, 232–264) a *Základové náuky o funkcích racionálných* (str. 49–66).

chet (1878–1973), je jeho jméno dnes pozapomenuto, stejně jako jeho přínos k funkcionální analýze.

S. Pincherle měl široké spektrum zájmů od fyziky až po klasickou analýzu. Věnoval se otázkám týkajícím se ploch minimálního obsahu, algebraickým rovnicím, diferenciálním a integrálním rovnicím, teorii funkcí komplexní proměnné, integrálním transformacím, teorii řetězových zlomků, hodně energie investoval do budování rodící se funkcionální analýzy. Řada jeho prací obsahuje obšírné historicko-bibliografické pasáže, z nichž je i dnes možno získat mnoho cenných poznatků. Připomeňme např. jeho článek *Pour la bibliographie de la théorie des opérations distributives* otištěný v časopise Bibliotheca Mathematica ve Stockholmu roku 1899, dva přehledové články psané pro německou a francouzskou encyklopedii matematických věd a poznámky v monografii *Le operazioni distributive* (viz [Pincherle, 1901], str. 461–484).

Snad nejvíce citovaný a ceněný Pincherleův výsledek byl publikován roku 1882 v článku *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche.* Obsahuje zobecnění výsledků o stejnoměrné spojitosti (Heine, Borel) a výsledků týkajících se řad analytických funkcí, které stejnoměrně konvergují v okolí každého bodu dané oblasti (Weierstrass). Tento Pincherleův výsledek je někdy dáván do souvislosti s pozdější Borelovou větou o konečném pokrytí.[2]

O Pincherleově životě a díle se můžeme podrobně dočíst např. v pojednáních [Berzolari, 1936], [Bortolotti, 1937], [Tonelli, 1937], [Amaldi, 1938], [Tricomi, 1954] a [Natucci, 1954].

Dvoudílné Pincherleovy vybrané spisy *Opere scelte* byly vydány v Římě roku 1954, obsahují však poměrně malý počet prací. V prvním díle je otištěna úvodní stať o Pincherleově životě a díle[3] a seznam jeho publikací – 271 položek, z toho 24 knih (vysokoškolské a středoškolské učebnice), práce jsou psány převážně italsky.

2. Ugo Amaldi

Pincherleovým žákem a později spolupracovníkem a kolegou byl Ugo Amaldi. Narodil se 18. dubna 1875 ve Veroně, studoval na univerzitě v Bologni. V letech 1903 až 1906 působil na univerzitě v Cagliari, v letech 1906 až 1919 v Modeně, potom do roku 1924 v Padově a do roku 1944 v Římě (Facoltà di Architettura, Facoltà di Scienze). Zabýval se hlavně teorií spojitých grup transformací. Jeho jméno je uvedeno na Pincherleově monografii *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi*: *in collaborazione con Ugo Amaldi, dottore in matematica.* Vzhledem k tomu, že mu roku 1900 bylo teprve pětadvacet let, zdá se pravděpodobné, že pouze vypomáhal s přípravou knihy, která je z velké části shrnutím předchozích Pincherleových výsledků.

[2] Viz např. T. H. Hildebrandt: *The Borel theorem and its generalizations*, Bulletin of the American Mathematical Society 32(1926), str. 423–474, [Natucci, 1954], str. 339.

[3] U. Amaldi: *Della Vita e delle Opere di Salvatore Pincherle*, str. 3–16.

U. Amaldi je autorem textů *Analisi matematica*, *Lezioni di analisi infinitesimale*, *Lezioni di analisi matematica* atd. Jako spolupracovníka si ho vybrali Tullio Levi-Civita (1873–1941) a Federigo Enriques (1871–1946). T. Levi-Civita a U. Amaldi sepsali ve dvacátých letech 20. století rozsáhlý, několikadílný učební text *Lezioni di meccanica razionale*, který na počátku padesátých let vycházel i rusky, dále publikovali obsáhlý text *Compendio di meccanica razionale*, knihu *Nozioni di balistica esterna* atd. F. Enriques a U. Amaldi vydali řadu učebnic a kompendií, např. *Algebra elementare*, *Geometria elementare*, *Elementi di geometria*, *Nozioni di geometria*.

U. Amaldi byl členem Accademia dei Lincei (1928), v letech 1941 až 1943 byl prezidentem Unione Matematica Italiana. Zemřel 11. listopadu 1957 v Římě. O jeho životě a díle viz např. [Viola, 1957].

3. Salvatore Pincherle a funkcionální analýza

Vznik funkcionální analýzy je většinou kladen až do dvacátých a třicátých let 20. století. Základní myšlenky jsou však starší, rodily se v pracích několika významných matematiků na přelomu 19. a 20. století. Byli to zejména S. Pincherle, Vito Volterra (1860–1940), David Hilbert (1862–1943), J. Hadamard a M. Fréchet. Zajímavé je, že se tito matematici ve svých publikacích poměrně intenzivně zamýšleli i nad zrodem a rozvojem idejí, které ke vzniku funkcionální analýzy vedly a které její vývoj ovlivnily.

V základech funkcionální analýzy je přechod od konečné dimenze k nekonečné, od diskrétního ke spojitému, významný impuls pro její další vývoj dala teorie množin. Cenné podněty přišly z vektorového počtu, z teorie hyperkomplexních čísel, z variačního počtu, hlavně však z jednotlivých disciplín matematické analýzy.

O historii funkcionální analýzy si lze udělat poměrně slušný obrázek, např. na základě těchto titulů: [Dunford, Schwartz, 1958], [Bourbaki, 1960], [Katětov, 1968], [Bernkopf, 1973], [Medvedev, 1973], [Monna, 1973], [Borgwadt, 1975], [Dieudonné, 1981], [Siegmund-Schultze, 1982], [Birkhoff, Kreyszig, 1984], [Siegmund-Schultze, 1994]. Velmi zajímavé jsou informace, názory a postřehy, které o vzniku a vývoji této disciplíny napsali její významní tvůrci – [Pincherle, 1899], [Pincherle, 1905], [Hilbert, 1909], [Pincherle, 1911], [Hadamard, 1912], [Volterra, 1912], [Volterra, 1914], [Fréchet, 1925], [Fréchet, 1928], [Hadamard, 1928] a [Volterra, 1932].

Salvatore Pincherle dospěl v osmdesátých a devadesátých letech 19. století ke studiu konkrétních lineárních operátorů. Řešení nejrůznějších konkrétních problémů a studium prací současníků i předchůdců ho vedly k ucelenému pohledu na problematiku, kterou se zabýval, a k přesvědčení o užitečnosti a plodnosti samostatné disciplíny studující objekty, kterým dnes říkáme lineární operátory. Svědčí o tom i úvodní slova v jeho pracích *L'algebra delle forme lineari alle differenze* z roku 1895 a *Mémoire sur le Calcul fonctionnel distributif* z roku 1897, v nichž se snažil zdůvodňovat svůj abstraktní přístup a objasňovat jej.

Pojem operátoru se objevil v Pincherleových pracích již v letech 1885 až 1887. Jednalo se o integrály typu $\int A(x,y)\varphi(y)dy$, které autor chápal jako *funkcionální operace* a snažil se je charakterizovat. V článku *Studi sopra alcune operazioni funzionali* z roku 1886 studoval některé takovéto funkcionální operace (lineární operátory) na prostorech analytických funkcí. Již zde zdůrazňoval, že důležitou roli hrají prostory nekonečné dimenze:

Chiamo operazione funzionale qualunque operazione che eseguita sopra una funzione analitica dà per risultato una funzione analitica. Sono tali, per esempio, le operazioni aritmetiche in numero finito, e per classi numerose di casi, anche in numero infinito, la derivazione e l'integrazione, la risoluzione di equazioni finite o differenziali, la sostituzione, ecc.

Fra gli algoritmi più notevoli per le operazioni funzionali va citata l'integrazione definita applicata ad una funzione di due variabili, della forma

$$\int_{(c)} f(x,y)dy\ ,$$

dove l'integrazione s'intende eseguita lungo una curva c, chiusa o no, del piano y. (Opere I., str. 92)

V polovině devadesátých let pak začal vyšetřovat lineární operátory jako homomorfismy či endomorfismy vektorových prostorů nekonečné dimenze (prostory funkcí, prostory řad); k tomu jistě přispěla i jeho znalost Peanovy knihy *Calcolo geometrico*. Obecný pojem operátoru (*operazione distributiva*) zavedl S. Pincherle v práci *Sulle operazioni funzionali distributive* z roku 1895, v níž se snažil charakterizovat hlavní myšlenku funkcionálního počtu – funkce (prvky daných prostorů) je možno chápat jako proměnnou nových operací. Zdůrazňoval význam studia nekonečně dimenzionálních prostorů analytických funkcí, prosazoval geometrický pohled (např. mocninné řady chápal jako body uvažovaného prostoru).

Tento Pincherleův přístup ocenil již roku 1895 T. Levi-Civita v článku *I gruppi di operazioni funzionali e inversione degli integrali definiti.*

Následující dva úryvky z článku *Cenno sulla Geometria dello spazio funzionale* (1896/1897) dokumentují, jakým způsobem chápal S. Pincherle lineární operátory na prostorech funkcí, resp. řad, a že již začal výhodně využívat geometrickou terminologii.

In alcuni lavori recentemente pubblicati ho espresso il concetto che, per varie ricerche d'Analisi, è opportuno considerare la totalità delle funzioni analitiche di una variabile x o – per meglio fissare le idee – la totalità delle serie di potenze intere positive di x, come una varietà o spazio di cui ogni singola serie costituisce un elemento. Ad una tale varietà, evidentemente ad un numero infinito di dimensioni, si può dare il nome di spazio funzionale; ogni serie di potenze di x sarà un punto di questo spazio ed i coefficienti della serie si potranno riguardare come le coordinate del punto. (Opere I., str. 368)

Ricordiamo che una operazione A la quale applicata alle funzioni analitiche dà origine a funzioni pure analitiche, e che gode inoltre della proprietà distributiva, si dice operazione funzionale distributiva. (Opere I., str. 370)

V následujících větách pak S. Pincherle zavedl spojité operátory (*operazione continua*).

Roku 1897 definoval v práci *Sull'operazione aggiunta* skalární součin. Hledal vlastní čísla lineárních operátorů, podrobně vysvětloval a zdůvodňoval svůj abstraktní přístup a znovu charakterizoval funkcionální počet. Zkoumal nekonečně dimenzionální prostory mocninných řad, které reprezentují analytické funkce. Zavedl adjungovaný prostor, zabýval se existencí operátorů, které jsou surjektivní a nikoli injektivní, resp. injektivní a nikoli surjektivní.

S. Pincherle se koncem 19. století snažil budovat jakousi „teorii lineárních operátorů". K tomuto cíli směřovalo několik jeho prací, zejména rozsáhlý článek *Mémoire sur le Calcul fonctionnel distributif* otištěný v časopise Mathematische Annalen roku 1897. V delším úvodu (8 stran) autor diskutoval myšlenky nejdůležitějších prací, v nichž se rodila teorie lineárních operátorů, snažil se najít několik ideových proudů a odůvodnit své snažení a své postupy. Podněty vedoucí ke vzniku teorie lineárních operátorů spatřoval v symbolickém počtu, který chápal jako jisté zobecnění algebraických operací, ve studiu speciálních operátorů, v teorii integrálních rovnic a vektorovém počtu. Mimo jiné napsal:

Il nous reste enfin à citer quelques travaux qui regardent encore le calcul fonctionnel, mais qui s'en occupent à un point de vue nouveau, qui permet de rendre très claires et presque intuitives certaines généralités de ce calcul. C'est le point de vue vectoriel ou du calcul géométrique, inspiré par l'Ausdehnungslehre de Grassmann et par les écrits de Hamilton et de Tait sur les quaternions. Dans cet ordre d'idées, M. Peano a écrit quelques pages très intéressantes où, d'une façon aussi sobre que claire, il donne les propriétés les plus simples des opérations distributives appliquées à des éléments déterminés par n coordonnées …

Le même point de vue se retrouve dans un travail étendu de M. Carvallo, dont la première partie considère les substitutions linéaires comme des opérations … appliquées aux vecteurs de l'espace ordinaire …

… dans l'ordre des considérations de M. Volterra que nous avons rappelées ci-dessus. Au même ordre d'idées, bien que le concept vectoriel n'y soit pas explicitement énoncé, se rattachent d'autres travaux importants: pour n'en citer qu'un, le mémoire de M. Frobenius sur les formes bilinéaires et les nombreuses recherches que ce beau mémoire a inspirées.
([Pincherle, 1897], str. 330)

Následující slova je možno chápat jako stručné vyjádření myšlenky, kterou byl autor veden:

L'objet de ce mémoire est l'étude des opérations distributives qu'on peut appliquer aux fonctions analytiques, plus particulièrement aux séries de puissances entières et positives de la variable x, et qui donnent comme résultant des séries de la même nature. Nous considérons l'ensemble de ces séries comme *une variété ou espace (que nous appelons espace fonctionnel) à un nombre infini de dimensions: chaque série est un élément ou point de cet espace, et le système des coefficients de la série peut se regarder comme le système de ses coordonnées. Les opérations distributives donnent des correspondances de cet ensemble sur lui-même, correspondances qui sont analogues aux homographies et se réduisent aux homographies mêmes lorsque on les applique à des variétés à un nombre fini de dimensions contenues dans l'espace fonctionnel.* ([Pincherle, 1897], str. 330–331)

Podrobnější a tématicky uspořádaný soupis pramenů k problematice, které se věnoval v úvodu studie *Mémoire sur le Calcul fonctionnel distributif*, publikoval roku 1899 v práci *Pour la bibliographie de la théorie des opérations distributives*, v níž podrobně sledoval vývoj pojmu lineární operátor od G. W. Leibnize (1646–1716) až do konce 19. století a současně prezentoval své úvahy související s tímto pojmem.

Na přelomu 19. a 20. století sepsal S. Pincherle na poměrně vysokém abstraktním základu rozsáhlou monografii *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi*, v níž shrnul výsledky svého dlouholetého bádání. Například poslední, šestnáctá kapitola *Cenno sulla geometria degli spazi lineari di funzioni* vznikla přepracováním podobně nazvaného článku *Cenno sulla Geometria dello spazio funzionale* [Pincherle, 1896], první historická poznámka *Per la bibliografia della teoria delle operazioni distributive* je přepisem článku *Pour la bibliographie de la théorie des opérations distributives* [Pincherle, 1899].

Roku 1905 publikoval S. Pincherle v německé encyklopedii matematických věd rozsáhlý přehledový článek *Funktionaloperationen und Gleichungen* poskytující téměř úplný pohled na rozvoj teorie lineárních operátorů a jejích aplikací v různých disciplínách. O sedm let později vyšla ve francouzské matematické encyklopedii rozšířená a doplněná verze tohoto článku nazvaná *Équations et opérations fonctionnelles*. V těchto dvou pracích S. Pincherle shromáždil, uspořádal a komentoval velké množství výsledků, které připravovaly pozdější zrod a rozvoj funkcionální analýzy. V obou pojednáních věnoval značnou pozornost otázkám, které dnes řadíme do lineární algebry. V následující ukázce z Pincherleova článku otištěného v německé matematické encyklopedii si lze povšimnout, jak podrobně bylo třeba ještě roku 1905 vysvětlovat některé základní pojmy. Rovněž stojí za pozornost, že na počátku 20. století ještě nebyly rozšířeny termíny lineární zobrazení, lineární operátor, homomorfismus apod.

Seien $\alpha, \beta, \ldots$ Funktionen von einer oder mehreren Variabeln, $A, B, \ldots$ Symbole von Operationen, deren Anwendung auf die Funktionen $\alpha, \beta, \ldots$ als Objekte in allgemeinen neue Funktionen als Resultate liefert. …

… die Summe $A + B$ als diejenige Operation, deren Anwendung auf ein Objekt α als Resultat die Summe der Resultate der Anwendung von A und von B auf dasselbe Objekt ergiebt. …

… Man nennt ferner Produkt von B mit A und bezeichnet mit AB das Resultat, das man erhält, wenn man die Operation A auf das Resultat von B anwendet. Das Produkt BA ist im allgemeinen von AB verschieden; sind diese Produkte einander gleich, so ist die Multiplikation der Symbole A und B

kommutativ. Die Operationen, die man gewöhnlich untersucht, geben $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$*; das ist die assoziative Eigenschaft. Von Symbolen derart, dass die Gleichungen gelten:*

$$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta)$$

und wenn c irgend eine Zahl ist

$$A(c\alpha) = cA(\alpha)\ ,$$

sagt man, sie haben die distributive Eigenschaft; die Symbole und die durch sie bezeichneten Operationen heissen dann auch selbst distributiv.
([Pincherle, 1905], str. 766–767)

4. Pincherleova monografie Le operazioni distributive

Kniha *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi* z roku 1901 je monografií, která v ucelené a jednotné formě prezentuje výsledky a myšlenky dřívějších Pincherleových prací. Sám název knihy naznačuje, že její hlavní náplní je studium lineárních operátorů na prostorech funkcí. Cílem knihy je vybudovat abstraktní přístup k celé této problematice. Poznamenejme, že kniha ještě není psána dnešním stylem (definice, věta, důkaz), na některých místech není zcela jasné, jaké jsou předpoklady prezentovaných tvrzení.

První čtyři kapitoly Pincherleovy monografie jsou věnovány homomorfismům (lineárním zobrazením) vektorových prostorů.

První kapitolu *L'insieme lineare generale ad n dimensioni* (str. 1–16) začal S. Pincherle axiomatickou definicí vektorového prostoru (*insieme generale, spazio lineare*), kterou převzal z Peanovy knihy *Calcolo geometrico* z roku 1888. Citoval zde ještě Laguerreovu práci *Sur le calcul des systèmes linéaires* z roku 1867 (otištěnou v jeho sebraných spisech z roku 1898) a Peanovo *Calcolo geometrico.*

S. Pincherle, podobně jako Giuseppe Peano (1858–1939), ještě ponechal v této definici symetrii a tranzitivitu rovnosti.[4] Nepostuloval však, že rovnost je kongruencí vůči sčítání vektorů a vůči násobení vektorů čísly. Stejně jako G. Peano se však zmínil o tom, že definice obecného násobku vektoru reálným číslem je rozšířením definice násobku vektoru přirozeným číslem. Pincherleova definice vektorového prostoru se příliš neliší od definice současné.

S. Pincherle rovněž poznamenal, že za číselný obor je možno brát racionální, reálná i komplexní čísla, ale upozornil, že v dalším textu bude uvažovat zejména čísla komplexní.[5]

A seconda dei casi i numeri, di cui si è parlato in questo § si potranno intendere sia razionali, sia affatto liberi (reali complessi). Nel seguito, quando

[4] Chybně však poznamenal, že odtud vyplývá její reflexivita.
[5] G. Peano uvažoval jen reálné vektorové prostory.

non sia avvertito il contrario, parlando di numeri ci riferiremo ai numeri complessi. ([Pincherle, 1901], str. 3)

Jako příklady vektorových prostorů uvedl S. Pincherle reálná čísla, komplexní čísla a vektory v prostoru; nalézáme zde rovněž úvahy o volných a vázaných vektorech.

Un primo esempio di sistema lineare è dato dall'insieme dei numeri (reali e complessi). ...

Come è noto, dicesi vettore nello spazio un segmento rettilineo, considerato in quanto ha una determinata lunghezza, una determinata direzione e un deterinato verso.

Esaminiamo l'insieme di tutti i vettori dello spazio ordinario. ...

... Possiamo, quindi, affermare che l'insieme dei vettori dello spazio è un insieme lineare. ([Pincherle, 1901], str. 4–5)

S. Pincherle dále definoval pojem lineární kombinace (*combinazione lineare*) a zavedl lineárně závislé, resp. nezávislé vektory. Uvažoval i o tom, že lineárně závislé vektory $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ mohou být závislé více způsoby:

$$a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = 0 \qquad (j = 1, \ldots, r) .$$

Uvedl souvislost s hodností matice sestavené z koeficientů a_{ij} těchto lineárních kombinací (*caratteristica della matrice dei coefficienti* a_{ij}) a odkázal čtenáře na knihu *Lezioni di Algebra complementare* z roku 1898, kterou sepsal Alfred Capelli (1855–1910).

Stejným způsobem jako G. Peano definoval S. Pincherle vektorový prostor dimenze n (*insieme lineare ad* n *dimensioni*): vektorový prostor se nazývá prostorem dimenze n, jestliže v něm existuje n lineárně nezávislých vektorů, ale nikoli více.

Un insieme lineare di elementi dicesi ad n *dimensioni, se in esso esistono* n *elementi linearmente indipendenti e non più.* ([Pincherle, 1901], str. 7)

Na rozdíl od G. Peana však S. Pincherle dokázal, že z n lineárně nezávislých vektorů nemůžeme lineárními kombinacemi získat $n+1$ lineárně nezávislých vektorů; tento fakt dnes často dokazujeme užitím tzv. Steinitzovy věty o výměně, která je pozdějšího data (ale je uvedena již v Grassmannově *Ausdehnungslehre*). S. Pincherle využil při důkazu tohoto faktu známé výsledky z teorie soustav lineárních rovnic (homogenní soustava n lineárních rovnic o $n+1$ neznámých má netriviální řešení).

Dokázal též, že n lineárně nezávislých vektorů $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ prostoru S určuje podprostor dimenze n a že tento podprostor je tvořen právě množinou všech lineárních kombinací těchto vektorů. Toto zjištění vede k definici báze (*sistema fondamentale*); symbolem $S_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ označil S. Pincherle vektorový prostor dimenze n se zvolenou bází $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Bez důkazu poznamenal, že jestliže vektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou lineárně závislé právě r lineárně nezávislými způsoby, potom prostor generovaný vektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ má dimenzi $n - r$.

Dále dokázal, že v každém prostoru dimenze n existuje nekonečně mnoho bází. Utvořil n lineárních kombinací prvků zvolené báze $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ s koeficienty a_{ij}; ty jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když matice utvořená z koeficientů a_{ij} má hodnost n, tj. determinant $|a_{ij}|$ je nenulový. Takových matic existuje nekonečně mnoho.

S. Pincherle uvedl, že bude při dalších úvahách používat geometrickou řeč a že zejména prostory dimenzí 2 a 3 bude reprezentovat množinou vázaných vektorů v rovině a prostoru se zvoleným počátkem (*origine*). Od tohoto okamžiku začal pro prvky jakéhokoli vektorového prostoru užívat termíny vektor (*vettore*) nebo bod (*punto*), začal též využívat termín souřadnice (*coordinate del vettore rispetto al sistema fondamentale*). Pro podprostory dimenzí 1 a 2 začal užívat termíny přímka (*retta*) a rovina (*piano*).

Provedl rovněž přepočet (transformaci) souřadnic vektoru vzhledem ke dvěma různým bázím, uvažoval přitom obě navzájem inverzní transformace.

Queste equazioni lineari permettono di dedurre dalle coordinate di un vettore qualsiasi di $\mathcal{S}_n$, riferito al sistema $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, le coordinate del medesimo vettore riferito al sistema $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; esse definiscono una trasformazione di coordinate (che conserva l'origine). ([Pincherle, 1901], str. 11)

V první kapitole definoval i lineární obal r lineárně nezávislých vektorů v prostoru dimenze n:

… un tale insieme $\mathcal{S}_r[\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_r]$ si dirà contenuto nello insieme $\mathcal{S}_n$. ([Pincherle, 1901], str. 11–12)

S. Pincherle zavedl pro podprostor dimenze $n-1$ prostoru dimenze n termín nadrovina (*iperpiano*); pomocí subdeterminantů řádu $n-1$ matice typu $(n-1) \times n$ definoval souřadnice nadroviny vzhledem k dané bázi. Potom odvodil rovnici nadroviny.

V závěrečném paragrafu první kapitoly zavedl S. Pincherle součet (*somma*) dvou podprostorů vektorového prostoru a ukázal, že mají-li tyto podprostory dimenze p a q a jejich průnik dimenzi r, je dimenze jejich součtu $p+q-r$. Dokázal tak známou větu o dimenzích součtu a průniku dvou podprostorů; výslovně ji však nezformuloval.

Ve druhé kapitole nazvané *Generalità delle operazioni* (str. 17–29) vyšetřoval S. Pincherle nejprve obecný pojem jednoznačného a mnohoznačného zobrazení množin a zejména vektorových prostorů (*operazione univoca*, *operazione a determinazione unica*, *operazione a determinazione multipla*). Zavedl jejich rovnost, popsal nulové zobrazení a identitu (*operazione nulla*, *operazione unità*), definoval součet, rozdíl zobrazení a násobek zobrazení číslem, složení zobrazení, jeho mocniny a inverzní zobrazení (*operazione inversa*). Uvedl, že pro skládání zobrazení platí asociativní zákon, definoval komutující zobrazení (*operazioni commutabili*), zavedl symbol A^{-1} pro inverzní zobrazení k zobrazení A a dospěl k řešení rovnic $XA = B$ a $AY = B$ (A, B jsou daná a X, Y neznámá zobrazení) v případě, že existuje inverzní zobrazení A^{-1} ($X = BA^{-1}$ se nazývá *quoziente a destra* – pravý podíl, $Y = A^{-1}B$ *quoziente a sinistra* – levý podíl).

Celistvou racionální funkcí (*funzione razionale intera*) nazval S. Pincherle zobrazení vytvořené ze zobrazení $A, B, \ldots$ užitím konečně mnoha operací sčítání, skládání a násobení číslem; užije-li se též invertování, jedná se o racionální lomenou funkci (*funzione razionale fratta*).

Poznamenejme, že S. Pincherle uvedl, že všechna zobrazení jednoho vektorového prostoru do druhého tvoří vektorový prostor.

Da quanto precede discende che l'insieme delle operazioni univoche, le quali, applicate agli enti di uno spazio lineare $\mathcal{S}$, lo trasformano in uno spazio lineare $\mathcal{S}'$, soddisfa alle condizioni indicate ai §§ 2 − 6; quindi questo insieme di operazioni costituisce alla sua volta un nuovo insieme lineare ...
([Pincherle, 1901], str. 20)

Ve druhé části druhé kapitoly se S. Pincherle věnoval homomorfismům neboli lineárním zobrazením (*operazione distributiva*) vektorových prostorů. Povšimněme si, jak obšírně je definován homomorfismus:

... Questa proprietà viene detta distributiva; se α e β sono elementi qualsivogliano dello spazio lineare $\mathcal{S}$, ed A una operazione applicabile a questi enti, si dice che A gode della proprietà distributiva quando sia

$$A(\alpha+\beta) = A(\alpha) + A(\beta)\ . \tag{4}$$

Risulta da questa che se $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sono elementi di $\mathcal{S}$, sarà

$$A(\alpha+\beta+\gamma+\ldots) = A(\alpha) + A(\beta) + A(\gamma) + \ldots$$

e se n è un numero intero positivo,

$$A(n\alpha) = nA(\alpha)\ ;$$

dalla quale ultima risulta subito

$$A\Big(\frac{1}{n}\alpha\Big) = \frac{1}{n}A(\alpha)\ ,$$

e quindi, se c è un numero razionale,

$$A(c\alpha) = cA(\alpha)\ . \tag{5}$$

Noi ammetteremo che l'uguaglianza (5) *sussista per ogni numero c, reale o complesso, e:*

Chiameremo operazioni distributive quelle che godono delle proprietà espresse dalle equazioni (4) *e* (5). ([Pincherle, 1901], str. 25–26)

S. Pincherle dokázal, že součet homomorfismů, skalární násobek homomorfismu a složení homomorfismů je opět homomorfismus. Uvedl, že každá celistvá racionální funkce vytvořená z jediného endomorfismu A se redukuje na tvar

$$c_0A^0 + c_1A^1 + c_2A^2 + \cdots + c_mA^m$$

(*forma lineare nell'operazione* A *di ordine* m). Takovéto výrazy se násobí stejně jako polynomy, výsledný stupeň je roven součtu stupňů všech činitelů; jednotliví činitelé navíc komutují. Každý takovýto výraz lze vyjádřit ve tvaru

$$a_m(A - c_1)^{r_1}(A - c_2)^{r_2} \dots (A - c_s)^{r_s} \ ,$$

kde $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = m$; S. Pincherle se zde odvolal na znalosti z algebry (pracoval nad komplexními čísly!) a jako příklad uvedl rovnost

$$A^0 + A^2 = (A^0 + iA)(A^0 - iA) \ .$$

Zajímavé je, že S. Pincherle na několika místech užil termínu grupa, ale ještě ne v dnešním smyslu; jednalo se o množinu uzavřenou vůči uvažované operaci.

... Quando i prodotti delle operazioni del sistema appartengono al sistema stesso, si dice che il sistema forma un gruppo. ([Pincherle, 1901], str. 24)

Ve třetí kapitole nazvané *Radici e spazi di radici di un'operazione distributiva* (str. 30–49) studoval S. Pincherle homomorfismus A prostoru S do prostoru S'.

Slovem *radice* (tj. kořen) je označen každý vektor prostoru S, který se při homomorfismu A zobrazí na nulový vektor. Zaveden je pojem monomorfismu (*operazione senza radici*, *operazione non degenere* – ostatní homomorfismy se nazývají *degenere*), pojem jádra homomorfismu (*spazio di radici* – přesněji řečeno se tímto názvem rozumí každý podprostor jádra Ker A).

S. Pincherle definoval pojem homomorfismu s jádrem dimenze r (*operazione degenere di specie* r) a dokázal tzv. větu o hodnosti a defektu: dimenze jádra plus dimenze obrazu je rovna dimenzi výchozího prostoru.

È importante di notare che quando l'operazione A *è degenere di specie* r *in* $\mathcal{S}_n$*, si presentano i due fatti concomitanti:*

a) esiste in $\mathcal{S}_n$ *uno spazio di radici ad* r *dimensioni;*

b) ad $\mathcal{S}_n$ *corrisponde in* $\mathcal{S}'$ *uno spazio ad* $n - r$ *dimensioni.*

([Pincherle, 1901], str. 31)

Zajímavé je, že teprve v následujícím paragrafu je ukázáno, že jádro každého homomorfismu obsahuje nulový vektor (*zero*):

Ogni spazio di radici di un'operazione distributiva univoca contiene lo zero. ([Pincherle, 1901], str. 32)

Dále je nalezen úplný vzor zvoleného vektoru β prostoru S' a diskutována existence inverzního zobrazení k homomorfismu A – jednoznačné je právě tehdy, když je A monomorfismus (stále se berou v úvahu víceznačná zobrazení a patrně ne z celého oboru).

Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'inversa di un'operazione A *distributiva univoca sia essa pure univoca, è che* A *non sia degenere.*
([Pincherle, 1901], str. 32)

V následné úvaze S. Pincherle ukázal, že jádro složení dvou homomorfismů obsahuje jádro prvního z nich, ale může být větší. Potom studoval endomorfismus A prostoru S: podle předešlého je tedy (v dnešním označení)

$$\text{Ker } A \subset \text{Ker } A^2 \subset \text{Ker } A^3 \subset \dots$$

Důležitou roli zde hrají vektory, které leží v Ker A^m a neleží v Ker A^{m-1} (tzv. *radice propria di* A^m). Provedeme-li na tyto vektory endomorfismus A, dostaneme vektory z Ker $A^{m-1} \setminus$ Ker A^{m-2}.

Si dirà radice propria di A^m *una radice di* A^m *che non è radice di* A^{m-1}*; una radice di* A^r $(r < m)$ *si dirà radice impropria di* A^m*.*
([Pincherle, 1901], str. 34)

S. Pincherle dále definoval vlastní vektor (*invariante*) endomorfismu A pomocí rovnosti $A(\alpha) = k\alpha$ (číslo k nazval *moltiplicatore*); poznamenal, že vlastní vektory endomorfismu příslušející k témuž vlastnímu číslu k tvoří jádro endomorfismu $A - k \cdot A^0$.

Diremo che un elemento α *è invariante per un'operazione* A*, a determinazione unica, che trasforma* $\mathcal{S}$ *in sè, quando si abbia*

$$A(\alpha) = k\alpha \ ,$$

essendo k *un numero (moltiplicatore) determinato.* ([Pincherle, 1901], str. 35)

S. Pincherle zavedl invariantní podprostor (*spazio invariante*) a ukázal, že lineárně nezávislé vlastní vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ endomorfismu A generují invariantní podprostor; všechny vektory tohoto podprostoru jsou vlastními vektory právě tehdy, když vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ patří ke stejnému vlastnímu číslu.

Diremo spazio invariante per un'operazione A*, uno spazio trasformato in sè da quella operazione.* ([Pincherle, 1901], str. 36)

Ve druhé části třetí kapitoly vyšetřoval S. Pincherle nejprve dva komutující endomorfismy A, B prostoru $\mathcal{S}$, jejichž jádra mají triviální průnik. Zjistil, že B zobrazuje izomorfně (konečně dimenzionální) jádro Ker A na Ker A a že endomorfismus AB má jádro Ker $A \oplus$ Ker B. V obecnějším případě, tj. není-li Ker $A \cap$ Ker $B = 0$, je

$$\text{Ker } A + \text{Ker } B \subseteq \text{Ker } AB \ ,$$

$$\dim \text{Ker } AB = \dim \text{Ker } A + \dim \text{Ker } B - \dim\,(\text{Ker } A \cap \text{Ker } B) \ .$$

Tyto výsledky pak aplikoval na mocniny daného endomorfismu A a získal následující výsledky:

- Je-li dim Ker $A = m$, je dim Ker $A^r \leq m \cdot r$.[6]

[6] A^r *ammetterà in* $\mathcal{S}$ *uno spazio di radici ad mr dimensioni al più.* ([Pincherle, 1901], str. 41)

– Jestliže $\operatorname{Ker} A = [\alpha_0]$ a jestliže existují vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, pro něž $\alpha_0 = A(\alpha_1)$, $\alpha_1 = A(\alpha_2)$, ... , $\alpha_{n-1} = A(\alpha_n)$, potom

$$\operatorname{Ker} A^n = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}] \ .$$

– Jestliže $\operatorname{Ker} A = [\alpha_0]$, B komutuje s A a $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B = 0$, pak existují jednoznačně určená čísla $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$ taková, že

$$\begin{aligned} &B(\alpha_0) = k_0\alpha_0 \ , \\ &B(\alpha_1) = k_1\alpha_0 \ + k_0\alpha_1 \ , \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &B(\alpha_n) = k_n\alpha_0 + k_{n-1}\alpha_1 + \dots + k_1\alpha_{n-1} + k_0\alpha_n \ . \end{aligned}$$

S. Pincherle odtud odvodil, že pro každé přirozené číslo n existuje rozklad

$$B = k_0 + k_1 A + k_2 A^2 + \dots + k_{n-1}A^{n-1} + B_n A^n \ ,$$

kde B_n je nějaký endomorfismus komutující s A. Endomorfismus B, pro který platí takovýto rozklad, nazval regulárním vůči A (*regolare rispetto ad* A). Zapsal pak B formálně ve tvaru mocninné řady

$$B = k_0 + k_1 A + k_2 A^2 + \dots + k_n A^n + \dots$$

Jestliže je koeficient k_0 různý od nuly, lze získat i formální zápis nekonečné mocninné řady

$$B^{-1} = c_0 + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_n A^n + \dots \ ,$$

přičemž koeficienty $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ jsou řešeními rovnic

$$\begin{aligned} &c_0 k_0 = 1 \ , \\ &c_1 k_0 + c_0 k_1 = 0 \ , \\ &c_2 k_0 + c_1 k_1 + c_0 k_2 = 0 \ , \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Se, dunque, B è un'operazione commutabile con A, regolare rispetto ad A, col coefficiente di A^0 diverso da zero, si può assegnare, almeno formalmente, una serie di potenze di A, la quale rappresenta l'operazione B^{-1}.
([Pincherle, 1901], str. 47)

Jako příklad uvedl v následujícím paragrafu invertování endomorfismu $A-a$.

Ve čtvrté kapitole *Struttura degli spazi invarianti ad un numero finito di dimensioni* (str. 50–67) studoval S. Pincherle endomorfismus A nějakého blíže neurčeného prostoru a jeho n-rozměrný podprostor $S_n[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, který je vůči A invariantní. Vyšetřoval tedy vlastně endomorfismus na prostoru konečné dimenze. Protože je pro každé $i = 1, \dots, n$

$$A(\alpha_i) = a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n \ ,$$

je možno endomorfismus A na prostoru $S_n[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ reprezentovat lineární substitucí a tu opět maticí utvořenou z koeficientů a_{ij}. Jestliže má jádro endomorfismu A dimenzi r, má uvažovaná matice hodnost $n-r$. Poznamenejme však, že pojem matice homomorfismu explicitně definován není; zmíněná matice zde ani není zapsána.

... ogni operazione distributiva entro uno spazio ad un numero finito di dimensioni, invariante rispetto ad essa, è rappresentabile per mezzo di una sostituzione lineare. ([Pincherle, 1901], str. 50)

... condizione necessaria e sufficiente affinchè un'operazione distributiva, univoca entro uno spazio ad n dimensioni invariante rispetto ad essa, sia degenere di specie r, si è che la matrice della sostituzione lineare, che la rappresenta in tale spazio, sia di caratteristica $n-r$.
([Pincherle, 1901], str. 51–52)

S. Pincherle se dále soustředil na pečlivé studium automorfismu A prostoru $S_n[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$. Hledal vlastní čísla a vlastní vektory tohoto automorfismu a došel k tomu, že vlastní čísla jsou právě kořeny charakteristické rovnice (*equazione fondamentale*) automorfismu A, která má tvar

$$f(t) = \begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-t & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-t \end{vmatrix} = 0\ ,$$

a vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu c jsou právě všechna nenulová řešení homogenní soustavy lineárních rovnic odpovídající výše uvedené matici pro $t=c$.

Obsahem čtvrté kapitoly je (v dnešní řeči) konstrukce tzv. Jordanovy báze prostoru $S_n[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, tj. takové báze tohoto prostoru, vůči které je matice endomorfismu A Jordanova. Pojmy Jordanova báze a Jordanova matice se zde však nevyskytují, žádná matice zde není zapsána.

S. Pincherle řešil nejprve případ, kdy má charakteristická rovnice jednoduché kořeny $c_1, c_2, \dots, c_n$; dokázal, že příslušné vlastní vektory jsou lineárně nezávislé (bez jakéhokoli odkazu zde využil skutečnosti, že Vandermondeův determinant navzájem různých čísel je nenulový) a tvoří tedy bázi prostoru $S_n[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$. Dále se podrobně zabýval případem, kdy

$$f(t) = (t-c_1)^{r_1}(t-c_2)^{r_2}\dots(t-c_q)^{r_q}$$

a čísla $c_1, c_2, \dots, c_q$ jsou navzájem různá. Při řešení tohoto případu využil řady poznatků (rozšířil lineárně nezávislou množinu na bázi prostoru, počítal determinant blokově trojúhelníkové matice atd.). Došel k tomu, že každému invariantnímu podprostoru v $S_n[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ přísluší dělitel charakteristického polynomu $f(t)$ a každému direktnímu rozkladu tohoto prostoru na dva invariantní podprostory odpovídá rozklad charakteristického polynomu $f(t)$ v součin dvou dělitelů.

... se uno spazio invariante rispetto ad un'operazione A contiene uno spazio $\mathcal{S}_m$ ad un numero minore di dimensioni, esso pure invariante rispetto ad A, il primo membro dell'equazione fondamentale di A rispetto ad $\mathcal{S}_m$ ammette come fattore il primo membro dell'equazione fondamentale di A. ([Pincherle, 1901], str. 58)

S. Pincherle vyšetřoval endomorfismus $E_c = A - c$ (je míněno $A - c \cdot \mathrm{id}.$), kde c je vlastní číslo automorfismu A. Vyšel od vektoru, který se zobrazí na nulový vektor až při p-té mocnině endomorfismu E_c a který proto značil $\omega^{(p-1)}$ (při dnešním značení je $\omega^{(p-1)} \in \mathrm{Ker}\, E_c^p \setminus \mathrm{Ker}\, E_c^{p-1}$, jedná se o tzv. vhodný vektor endomorfismu E_c^p v Pincherleově terminologii). Dále sestrojil vektory

$$E_c(\omega^{(p-1)}) = \omega^{(p-2)},\ E_c(\omega^{(p-2)}) = \omega^{(p-3)},\ \ldots,\ E_c(\omega^{(1)}) = \omega,\ E_c(\omega) = 0\ .$$

Nyní dosadil $E_c = A - c$ a dostal rovnosti:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= c\,\omega\ , \\ A(\omega^{(1)}) &= c\,\omega^{(1)} + \omega\ , \\ A(\omega^{(2)}) &= c\,\omega^{(2)} + \omega^{(1)}\ , \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A(\omega^{(p-1)}) &= c\,\omega^{(p-1)} + \omega^{(p-2)}\ . \end{aligned}$$

S. Pincherle ještě ukázal, že číslo p je nejvýše rovno násobnosti vlastního čísla c jako kořene charakteristického polynomu. Poznamenejme, že je ihned vidět, že maticí endomorfismu A zúženého na podprostor generovaný vektory $\omega, \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(p-1)}$ (vzhledem k této bázi) je Jordanova buňka; nic takového však zde S. Pincherle neuvedl.

V následujícím paragrafu S. Pincherle tento postup zobecnil. Vyšel od k_1 vhodných vektorů $\omega_1^{(p-1)}, \ldots, \omega_{k_1}^{(p-1)}$ endomorfismu E_c^p, zobrazil je endomorfismem E_c a přidal k nim další vektory tak, aby získal maximální lineárně nezávislou množinu vhodných vektorů endomorfismu E_c^{p-1}. Postupně tak zkonstruoval množinu

$$\begin{array}{l} \omega_1^{(p-1)},\ \omega_2^{(p-1)}, \ldots,\ \omega_{k_1}^{(p-1)} \\ \omega_1^{(p-2)},\ \omega_2^{(p-2)}, \ldots,\ \omega_{k_1}^{(p-2)},\ \omega_{k_1+1}^{(p-2)}, \ldots,\ \omega_{k_1+k_2}^{(p-2)} \\ \omega_1^{(p-3)},\ \omega_2^{(p-3)}, \ldots,\ \omega_{k_1}^{(p-3)},\ \omega_{k_1+1}^{(p-3)}, \ldots,\ \omega_{k_1+k_2}^{(p-3)},\ \omega_{k_1+k_2+1}^{(p-3)}, \ldots,\ \omega_{k_1+k_2+k_3}^{(p-3)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_1, \ldots,\ \omega_{k_1},\ \omega_{k_1+1}, \ldots,\ \omega_{k_1+k_2},\ \omega_{k_1+k_2+1}, \ldots,\ \omega_{k_1+k_2+k_3}, \ldots,\ \omega_{k_1+k_2+\cdots+k_p} \end{array}$$

V dalších paragrafech dokázal, že tato množina vektorů je lineárně nezávislá, že podprostor generovaný těmito vektory má dimenzi rovnou násobnosti vlastního čísla c jako kořene charakteristického polynomu a že má direktní doplněk, který je také invariantní vzhledem k A. Ukázal též, že endomorfismus

$$E_{c_1}^{r_1} E_{c_2}^{r_2} \ldots E_{c_q}^{r_q}$$

je nulový.

Výsledek celé čtvrté kapitoly je shrnut v jejím posledním paragrafu.

Uvažujme endomorfismus A prostoru $\mathcal{S}$ a jeho n-dimenzionální podprostor $\mathcal{S}_n$, který je invariantní vůči endomorfismu A, a předpokládejme, že zúžení endomorfismu A na podprostor $\mathcal{S}_n$ je navíc automorfismus a

$$f(t) = (t - c_1)^{r_1}(t - c_2)^{r_2} \dots (t - c_q)^{r_q}$$

je jeho charakteristický polynom.

Prostor $\mathcal{S}_n$ je potom direktním součtem q podprostorů

$$\mathcal{S}_{r_1}, \mathcal{S}_{r_2}, \dots, \mathcal{S}_{r_q}$$

dimenzí $r_1, r_2, \dots, r_q$, z nichž každý je invariantní vzhledem k automorfismu A; každý prostor $\mathcal{S}_{r_i}$ je sjednocením jader všech mocnin endomorfismu $E_{c_i} = A - c_i$ a odpovídající charakteristický polynom je právě $(t - c_i)^{r_i}$.

Každý prostor $\mathcal{S}_{r_i}$ je direktním součtem konečného počtu podprostorů, které jsou invariantní vzhledem k A a odpovídají různým, lineárně nezávislým vektorům jednotlivých mocnin endomorfismu E_{c_i}.

Tak např. vlastnímu vektoru $\omega^{(p-1)}$ endomorfismu $E_{c_i}^p$ odpovídá podprostor, jehož bázi tvoří vektory

$$\omega^{(p-1)}, \quad E_{c_i}(\omega^{(p-1)}) = \omega^{(p-2)}, \quad \dots, \quad E_{c_i}(\omega^{(1)}) = \omega \ .$$

Další kapitoly Pincherleovy monografie *Le operazioni distributive* již výrazněji směřují k budování funkcionální analýzy. Autor se v nich zabýval zejména studiem prostorů řad a prostorů funkcí. Je pochopitelné, že se jednalo o prostory nekonečné dimenze.

V páté kapitole *L'insieme delle serie di potenze e le operazioni distributive elementari* (str. 68–86) zavedl vektorový prostor nekonečných posloupností $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ reálných nebo komplexních čísel a ukázal, že jde o prostor nekonečné dimenze, v němž jsou obsaženy podprostory libovolné konečné dimenze. Jeho prvky, které značil $\alpha[a_0, a_1, \dots, a_n]$ nebo $\alpha[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$, resp. $\alpha[a_n]$, začal chápat jako mocninné řady, a tedy jako analytické funkce:

... per più ragioni, è sembrato conveniente di assumere come tale la serie ordinata per le potenze intere e positive di una variabile x, in cui a_n è il coefficiente di x^n. Questa serie si rappresenterà colla stessa lettera che denotava la successione; pertanto, d'ora innanzi, alla considerazione della successione $\alpha[a_0, a_1, \dots, a_n]$, sostituiremo quella della serie

$$\alpha(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

([Pincherle, 1901], str. 71)

Symbolem S^0 označil S. Pincherle prostor všech řad $\alpha(x)$, které mají nenulový poloměr konvergence a S^r (pro $r > 0$) prostor všech řad, jejichž poloměr konvergence je větší než r. Poznamenal, že jestliže je $r > r'$, pak je $S^r \subseteq S^{r'}$. Zavedl též symbol S^∞ pro řady konvergující všude.

Ci accadrà di dovere considerare l'insieme delle serie $\alpha(x)$ che convergono in un cerchio di raggio superiore ad un numero positivo r. Quest'insieme, manifestamente lineare, verrà indicato con $\mathcal{S}^r$.

Se r e r' sono due numeri positivi ed $r > r'$, è chiaro che $\mathcal{S}^{r'}$ contiene $\mathcal{S}^r$.

Con notazione analoga, $\mathcal{S}^\infty$ sarà l'insieme delle serie il cui raggio di convergenza è infinito. ... L'insieme $\mathcal{S}^\infty$ appartiene ad ogni $\mathcal{S}^r$.
([Pincherle, 1901], str. 73)

S. Pincherle rovněž poznamenal, že v prostoru $\mathcal{S}^\infty$ jsou obsaženy všechny polynomy. Ty odpovídají posloupnostem, které mají od nějakého indexu samé nuly. Prostor $\mathcal{S}_n$ všech polynomů stupně nejvýše $n-1$ má zřejmě bázi $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{n-1}$. Tento poznatek autor v paragrafu 103 pochybným způsobem extrapoloval; prohlásil, že množina $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ je bází prostoru $\mathcal{S}$.

... il sistema di elementi

$$1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$$

potrà dirsi sistema fondamentale dell'insieme $\mathcal{S}$. ([Pincherle, 1901], str. 74)

Ve druhé části páté kapitoly vyšetřoval S. Pincherle endomorfismy prostoru $\mathcal{S}$, zejména násobení prvků prostoru $\mathcal{S}$ pevně zvoleným prvkem, derivaci a substituci. Uveďme definici derivace:

Sia $\alpha(x) = \alpha[a_n]$ un elemento arbitrario di $\mathcal{S}$. L'operazione, che applicata all'elemento α, genera l'elemento di $\mathcal{S}$ di coordinate:

$$a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, (n+1)a_{n+1}, \ldots$$

si dirà derivazione. Essa verrà rappresentata dal simbolo D.

La derivazione è manifestamente un'operazione distributiva.
([Pincherle, 1901], str. 77)

V závěru páté kapitoly se autor ještě vrátil k výše kritizovanému tvrzení (paragraf 103) o bázi prostoru $\mathcal{S}$; jeho úvaha však stále ještě není příliš přesná:

... insieme che diremo $\mathcal{S}^\omega$ ed al quale appartiene il sistema

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$$

che al § 103 *si è detto sistema fondamentale di $\mathcal{S}$. Per indicare gli insiemi $\mathcal{S}^\omega, \ldots, \mathcal{S}^\infty, \ldots, \mathcal{S}^{r'}, \ldots, \mathcal{S}^r, \ldots, \mathcal{S}^0, \ldots$ useremo la parola di intorni (di più in più estesi) dell'elemento* 1. ([Pincherle, 1901], str. 85)

Obsah zbývající části Pincherleovy monografie vypadá takto:

6. *Gli elementi del calcolo funzionale* (str. 87–118),
7. *Prime applicazioni del calcolo funzionale* (str. 119–151),
8. *Le operazioni normali* (str. 152–183),

9. *L'operazione aggiunta* (str. 184–195),
10. *Le forme lineari alle differenze* (str. 196–260),
11. *Le forme lineari differenziali* (str. 261–311),
12. *Forme differenziali lineari normali* (str. 312–342),
13. *Trasformazione delle operazioni* (str. 343–374),
14. *Le forme lineari alle sostituzioni* (str. 375–428),
15. *Generalizzazione della proprietà del Wronskiano* (str. 429–438),
16. *Cenno sulla geometria degli spazi lineari di funzioni* (str. 439–457),
- *Note* (str. 461–484),
- *Indice alfabetico* (str. 485–490).

Podívejme se ještě na devátou kapitolu *L'operazione aggiunta*, v níž je pro speciální prostor Laurentových řad definován skalární součin a jsou zavedeny adjungované a samoadjungované operátory.

Indichiamo con $\mathcal{T}$ l'insieme delle serie di Laurent, o serie ordinate per le potenze intere, positive e negative, di una variabile x. Una tale serie $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n x^n$ si può talvolta considerare indipendentemente da ogni condizione di convergenza: essa serve allora unicamente a legare, in un ente unico, la successione indefinita nei due sensi, $\ldots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots$
([Pincherle, 1901], str. 184)

Siano ora:

$$\varphi = \sum_{-\infty}^{\infty} g_n x^n \ , \qquad \psi = \sum_{-\infty}^{\infty} k_n x^n$$

due elementi di $\mathcal{T}$, e coi loro coefficienti si costruisca la espressione:

$$R(\varphi, \psi) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_{-n} k_{n-1} \ .$$

([Pincherle, 1901], str. 185)

La $R(\varphi, \psi)$ può riguardarsi come un'operazione applicata ai due enti φ e ψ, variabili in $\mathcal{T}$; fissato φ, essa è un'operazione applicata agli enti ψ di $\mathcal{T}_\varphi$, mentre fissato ψ, essa è un'operazione applicata agli enti φ di $\mathcal{T}_\psi$. Ci proponiamo di notare le proprietà di questa operazione.
([Pincherle, 1901], str. 185–186)

S. Pincherle dále uvedl, že zobrazení R je bilineární (*operazione distributiva separatamente rispetto a φ e a ψ*), a ukázal jeho další vlastnosti.

Data un'operazione distributiva univoca A che trasformi $\mathcal{T}$ in sè, chiameremo operazione aggiunta di A ed indicheremo con $\overline{A}$, l'operazione definita da:

$$R\big(A(\varphi), \psi\big) = R\big(\varphi, \overline{A}(\psi)\big) \ . \tag{4}$$

([Pincherle, 1901], str. 187)

V dalším textu ukázal, že pokud adjungovaná operace k lineárnímu operátoru existuje, jedná se o lineární operátor, dále předvedl, že adjungovaný operátor k lineární kombinaci operátorů je stejná lineární kombinace adjungovaných operátorů k jednotlivým operátorům, že adjungovaný operátor k adjungovanému operátoru je původní operátor, že adjungovaný operátor ke složení dvou operátorů je složením adjungovaných operátorů k jednotlivým operátorům, ale v opačném pořadí, že adjungováním navzájem inverzních operátorů získáme opět navzájem inverzní operátory atd.

V závěru deváté kapitoly se čtenář setká i s definicí samoadjungovaného operátoru; větší pozornost jim zde však autor nevěnoval.

Si ammetta che un'operazione A coincida colla propria aggiunta $\overline{A}$; nel quale caso l'equazione di definizione (4) *sarà:*

$$R\big(A(\varphi), \psi\big) = R\big(\varphi, A(\psi)\big) \ .$$

([Pincherle, 1901], str. 194)

Podívejme se ještě na třináctou kapitolu *Trasformazione delle operazioni*, která začíná obecnými úvahami o podobnosti operátorů.

Siano A, B due operazioni funzionali distributive, a determinazione unica in un dato spazio lineare. Si dice che B è trasformata di A mediante un'operazione X, o che X trasforma A in B, quando sia

$$XAX^{-1} = B \ . \tag{1}$$

La (1) *equivale, in ogni spazio funzionale in cui X sia a determinazione unica, alla*

$$XA = BX$$

e alla

$$X^{-1}BX = A \ .$$

([Pincherle, 1901], str. 343)

Kapitola pokračuje výkladem elementárních vlastností podobných operátorů a vyšetřováním některých problémů transformací konkrétních operátorů.

5. Závěr

Po Peanově spisu *Calcolo geometrico* byla Pincherleova monografie *Le operazioni distributive* druhou knihou, která se systematicky zabývala teorií vektorových prostorů a jejich homomorfismů. Navíc se poměrně podrobně věnovala prostorům se skalárním součinem, adjungovaným homomorfismům apod.; tato problematika byla důležitá pro rodící se funkcionální analýzu.

Velkou předností Pincherleovy knihy je zavedení a využívání geometrické řeči a prosazování geometrického pohledu na prostory funkcí. Již v 15. paragrafu (první kapitola) autor zdůrazňoval výhody tohoto geometrického jazyka. Poslední, 16. kapitola knihy je geometrií přímo prosycena. Uveďme např. termíny bod, vektor, souřadnice, přímka, rovina, nadrovina, křivka atd. Během dalších let byly geometrické podněty ve funkcionální analýze využívány poměrně často. Totéž lze říci o geometrické terminologii.[7]

V následujících letech S. Pincherle ze své monografie vycházel při další badatelské práci. Citoval ji v některých dalších článcích, např. roku 1906 v pojednání *Sulle equazioni funzionali lineari* (citoval zde též Hilbertovy, Volterrovy, Hadamardovy a Schmidtovy práce), roku 1911 v článku *Appunti di Calcolo funzionale*, roku 1913 v práci *Sull'operazione aggiunta di Lagrange*, v níž rozvíjel problematiku skalárního součinu, adjungovaných a samoadjungovaných operátorů, roku 1928 v přednášce *Osservazione sopra una classe di operazioni lineari* na mezinárodním kongresu matematiků v Bologni atd.

Už roku 1904 citoval Pincherleovu monografii M. Fréchet v prvním ze tří článků se společným názvem *Sur les opérations linéaires*; byl otištěn v časopise Transactions of the American Mathematical Society.

Roku 1910 ocenil Pincherleovy výsledky J. Hadamard v úvodu své knihy *Leçons sur le calcul des variations*:

Un chapitre spécial a été, en conséquence, consacré au Calcul Fonctionnel envisagé en lui-même. Des travaux tels que ceux de MM. Volterra, Pincherle, Bourlet, etc., ont le said ouvert la voie à suivre et permettent d'ores et déjà de généraliser parallèlement à la notion de différentielle, celle de variation première.

Leur exposition avait sa place marquée dans ce qui suinre.
([Hadamard, 1910], str. vii)

Roku 1912 uvedl J. Hadamard v článku *Le calcul fonctionnel* S. Pincherlea mezi tvůrci hlavních myšlenek funkcionální analýzy.

S. Banach označil o deset let později S. Pincherlea ve své rozsáhlé práci *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales* (spolu s V. Volterrou, M. Fréchetem, J. Hadamardem a dalšími) za jednoho z hlavních tvůrců funkcionální analýzy.

La notion de fonction de ligne fut introduite par M. Volterra. Des recherches à ce suject ont été faites par MM. Fréchet, Hadamard, F. Riesz, Pincherle, Steinhaus, Weyl, Lebesgue et par beaucoup d'autres. Dans les premiers ouvrages on admettait que le domaine et le contre-domaine sont des ensembles de fonctions continues admettant les derivées d'ordres supérieurs.
([Banach, 1922], str. 133; Oeuvres II., str. 305)

Roku 1925 podstatným způsobem zobecnil Guido Fubini (1879–1943) myšlenky Pincherleovy práce *Appunti di Calcolo funzionale distributivo* (1897).

V září roku 1928 na mezinárodním kongresu matematiků v Bologni ocenil Pincherleův přínos pro funkcionální analýzu J. Hadamard v příspěvku *Le*

[7] Například roku 1908 prosazoval Erhard Schmidt (1876–1959) geometrický pohled a geometrické chápání prostorů funkcí (viz [Bernkopf 1966], str. 46).

développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel a M. Fréchet v přednášce *L'analyse générale et les espaces abstraits*. Jejich příspěvky jsou otištěny ve sborníku *Atti del Congresso internazionale dei matematici* (Bologna, 1929). J. Hadamard několikrát zmínil Pincherleovo jméno během celého svého referátu; mimo jiné řekl:

Quant à la forme la plus générale à donner à l'expression d'une variation, cette question se rattache en réalité a la conception de vecteur dans les espaces fonctionnels ou abstraits, conception déjà introduite dès les travaux de M. Pincherle, mais qui a dû être reprise, aux nouveaux points de vue auxquels se place aujourd'hui l'Analyse fonctionnelle, par M. Fréchet et, d'une manière plus approfondie, par MM. Norbert Wiener et Banach. ...

D'autre part, c'est en envisageant certaines opérations sous le point de vue parfaitement explicite du Calcul fonctionnel que, dès 1898, M. Pincherle fournit des démonstrations nouvelles de théorèmes appartenant à la théorie des fonctions sous son sens le plus classique et relatifs aux singularités des fonctions analytiques; il les obtient comme conséquence du développement d'une transmuée analytique suivant les dérivées successives de la fonction-argument.
([Hadamard, 1928], str. 151, 155)

M. Fréchet ve své přednášce řekl:

Et c'est bien ici le lieu de rappeler que l'Analyse générale n'aurait guère pu être même conçue sans les travaux des mathématiciens italiens et particulièrement de deux d'entre eux: MM. Pincherle et Volterra.
([Fréchet, 1928], str. 267)

Roku 1931 napsal Enrico Bompiani (1889–1975) článek *Italian contributors to modern mathematics*, v němž zmínil i Pincherleův přínos k funkcionální analýze. Poznamenal též, v čem se liší Volterrův a Pincherleův přístup.

Pincherle created the calculus of distributive operations, today called linear functionals, and in his work we find many of the concepts and terms today accepted in the theory ...

The researches of Volterra upon functionals relate generally to the real field, while those of Pincherle on distributive operations extend to the complex field.
([Bompiani, 1931], str. 88–89, 90)

Harry Bateman (1882–1946) publikoval roku 1935 v časopise National Mathematics Magazine práci *Operational Equations*. V úvodu napsal:

The subject of operational equations is not new for operational equations have been discussed in the past without being described as such. There seems, however, to be no good systematic development of the subject including a classification of the equations into different types. The book of S. Pincherle and U. Amaldi on distributive operations supplies some of the main ideas from which a theory can be developed but this book was written many years ago and it will be readily understood that operations defined by equations need not possess the distributive property. ([Bateman, 1935], str. 197)

Přes výše uvedená ocenění neměla Pincherleova kniha, podobně jako Peanovo *Calcolo geometrico*, velký ohlas. V řadě prací a monografií z funkcionální analýzy nejsou Pincherleovy práce citovány. Například v proslulé trojdílné monografii Nelsona Dunforda (1906–1986) a Jacoba T. Schwartze (nar. 1930) *Linear operators* (1958, 1963, 1971), která obsahuje obšírnou bibliografii,[8] jsou uvedeny pouze oba Pincherleovy přehledové články napsané pro německou a francouzskou encyklopedii ([Pincherle, 1905], [Pincherle, 1912]).

Zajímavé je, že ani italští matematici Pincherleovy práce příliš necitovali. Například Mauro Picone (1885–1977) uvedl v učebnici *Lezioni di analisi funzionale* vydané v Římě v letech 1946 a 1947 Pincherleovo jméno pouze v souvislosti s větou o konečném pokrytí.

V knize *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle* z roku 1951 ocenil Pincherleovy výsledky v předmluvě J. Hadamard.[9] Oba autoři této knihy, Paul Lévy (1886–1971) a Franco Pellegrino, se však k Pincherleovým pracím příliš nehlásili. Pincherleova monografie je zmíněna jen na jediném místě, ve čtvrté části knihy nazvané *La théorie des fonctionnelles analytiques et ses applications*, jejímž autorem je F. Pellegrino.[10]

Příčin poměrně malého ohlasu Pincherleovy monografie i jeho dalších prací je asi více. Většina byla napsána italsky, některé byly publikovány v nepříliš známých a málo dostupných časopisech. V dvoudílných Pincherleových vybraných spisech *Opere scelte* vydaných roku 1954 v Římě je otištěno poměrně málo prací. Navíc patří mnohé Pincherleovy práce k prehistorii funkcionální analýzy a v současné době nebývá zvykem citovat staré práce.

Miroslav Katětov (1918–1995) v článku *Některé aspekty vývoje funkcionální analýzy*[11] napsal:

> *... začátkem století nebyl ještě axiomatický způsob zavádění matematických objektů, tím méně pak moderní strukturální přístup ještě zdaleka běžný, a není divu, že budování abstraktní teorie lineárních prostorů (zcela nutně axiomatické) naráželo v té době na psychologické překážky; ve dvacátých letech byla ovšem situace podstatně jiná.* ([Katětov, 1968], str. 19)

V článku *Pervaja monografija po funkcional'nomu analizu* z roku 1973 označil Fedor Andreevič Medvedev (1923–1993) právě Pincherleovu knihu *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi* za první monografii věnovanou funkcionální analýze; vznik této disciplíny přitom položil na přelom 19. a 20. století. V témže roce v práci *Osnovopoložniki funkcional'nogo analiza o ego rannej istorii* studoval, co o konstituování funkcionální analýzy napsali

---

[8] V prvním svazku je soupis literatury na stranách 731–826, ve druhém svazku na stranách 1785–1883.

[9] *Il était réservé à M. Pincherle et surtout à M. Volterra d'en dégager l'individualité et d'en montrer l'importance.* ([Lévy, Pellegrino, 1951], str. xiii)

[10] *Les opérateurs linéaires dans le domaine analytique avaient été étudiés par Pincherle, qui les appelait „Opérations distributives"* ... ([Lévy, Pellegrino, 1951], str. 420)

[11] Jedná se o referát přednesený 28. srpna 1965 na matematické sekci XI. mezinárodního kongresu historie věd v Krakově.

v letech 1899 až 1932 její zakladatelé S. Pincherle, D. Hilbert, J. Hadamard, V. Volterra a M. Fréchet. Zabýval se i příčinami nedocenění Pincherleových výsledků.

Antonie Frans Monna (1909–1995) věnoval roku 1973 v knížce *Functional analysis in historical perspective* Pincherleovým výsledkům poměrně značnou pozornost. O jeho monografii *Le operazioni distributive* mimo jiné napsal:

For short, the chapters I to IV of this book, written in 1901, contain a systematic study of the theory of linear spaces. It seems that Peano's Calcolo geometrico and Pincherle's book were the first textbooks on this domain.

However, Pincherle's book too had only little influence: it was seldom quoted and I believe it was just ignored for many years after its publication.
([Monna, 1973], str. 127)

Heidemarie Borgwadt v článku nazvaném *Die historische Entwicklung der Funktionalanalysis zu einer selbständigen mathematischen Disziplin* z roku 1975 Pincherleovu roli při zrodu funkcionální analýzy zcela opomíjí. Rovněž v knize *History of functional analysis* z roku 1981, jejímž autorem je Jean Dieudonné (1906–1992), je S. Pincherle zmíněn jen čtyřikrát, a to pouze okrajově.

Poznamenejme ještě, že roku 1988 se konala v Bologni konference, na níž se Pincherleovým dílem zabývali Umberto Bottazzini a Carlos A. Berenstein. O rok později informovali Umberto Bottazzini a Stefano Francesconi v časopise Historia Mathematica o dochovaných Pincherleových rukopisech.