IX. PEANOVA LINEÁRNÍ ALGEBRA

Peano's book was intended to introduce students to Grassmann's approach, which largely included the others, in a way that was clearer and more accessible than Grassmann had done. Only in the last two chapters of the book, so Peano wrote in the introduction, did he introduce new ideas of his own.

([Moore, 1995], str. 267)

Giuseppe Peano byl jedním z mála matematiků, kteří poměrně brzy reagovali na Grassmannovy myšlenky prezentované v jeho monografiích a časopiseckých článcích. Ve své knize *Calcolo geometrico* publikoval axiomatickou definici vektorového prostoru a základní poznatky o vektorových prostorech a jejich homomorfismech. Tuto partii zpracoval velmi moderním způsobem, řadu důležitých výsledků, s nimiž vystoupil H. Grassmann, však do své knihy nezařadil. Po obsahové stránce přinesly některé partie Grassmannovy knihy *Die Ausdehnungslehre* z roku 1862 větší bohatství myšlenek dnešní lineární algebry než Peanovo *Calcolo geometrico.*

1. Giuseppe Peano

G. Peano se narodil 27. srpna 1858 na farmě Tetto Galat asi 5 km od města Cuneo (Piemonte). Střední školu i univerzitu (1876–1880) absolvoval v Turíně; jeho univerzitní studium ovlivnili významní italští matematici Enrico D'Ovidio (1842–1933) a Angelo Genocchi (1817–1889). Po ukončení studia byl G. Peano po dobu jednoho roku asistentem E. D'Ovidia a v letech 1881 až 1890 asistentem A. Genocchiho. Od roku 1884 působil jako docent, od roku 1890 jako mimořádný a od roku 1895 jako řádný profesor na univerzitě v Turíně. V letech 1886 až 1901 byl též profesorem turínské vojenské akademie. Byl členem turínské akademie věd.

Peanovy první práce jsou z roku 1883. O rok později vyšla Genocchiho kniha *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale, pubblicato con aggiunte da G. Peano*; zpracoval ji G. Peano volně podle Genocchiho přednášek a uvedl v ní rovněž své výsledky, které podstatně přispěly k prohloubení a zpřesnění základů matematické analýzy. Kniha byla přeložena do němčiny (1899) a do ruštiny (1903), Peanovy výsledky byly na počátku 20. století citovány i tehdejší německou encyklopedií matematických věd [EMW].

Roku 1887 vydal G. Peano knihu *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Bocca, Torino, xii+336 stran), o rok později *Geometrický počet* [Peano, 1888], v dalším roce spisek *Arithmetices principia, nova methodo exposita* (Bocca, Torino, 1889, xvi+20 stran), v němž se poprvé objevily dnes velmi dobře známé Peanovy axiomy přirozených čísel, a knihu *I principii di geometria logicamente esposti* (Bocca, Torino, 1889, 40 stran). Roku 1893 publikoval dvoudílnou učebnici *Lezioni di Analisi infinitesimale* (Candeletti, Torino, iv+319+iv+324 stran). Během let 1895 až 1908 vyšlo pět postupně přepracovaných a doplňovaných svazků Peanova díla *Formulaire de Mathématiques*, resp. *Formulario Mathematico.*[1] Jedná se o velké sbírky matematických vět vyjádřených formulemi. Motivem tohoto Peanova projektu bylo použití logiky jako exaktního prostředku k vyjadřování matematických tvrzení.

G. Peano se podílel i na reformních snahách ve vyučování matematice v Itálii, patřil k iniciátorům myšlenky mezinárodních kongresů matematiků. Roku 1897 se zúčastnil v Curichu prvního Mezinárodního kongresu matematiků, k jehož organizátorům patřil; proslovil jednu ze čtyř hlavních přednášek nazvanou *Logica matematica* – přednášel o matematické logice a o svém projektu *Formulario.* Byl tehdy vedoucí osobností matematické logiky. Velkého uznání se mu dostalo v srpnu roku 1900 v Paříži na dvou kongresech – na Mezinárodním filozofickém kongresu a na druhém Mezinárodním kongresu matematiků. V dalších letech se vůdčí osobností světové matematické logiky stal B. Russell; G. Peano se intenzivně věnoval vytváření a propagaci umělého jazyka *Interlingua*, účastnil se i založení společnosti italských matematiků. Zemřel 20. dubna 1932 v Turíně. O G. Peanovi v širších souvislostech viz [Roero, 2001].

Peanovo jméno je v matematice spjato s řadou výsledků týkajících se zejména základů matematiky, matematické logiky, neeukleidovské geometrie, matematické analýzy a didaktiky; nejznámější jsou Peanovy axiomy přirozených čísel (1889) a Peanova křivka (1890) – spojitá křivka vyplňující čtverec. Roku 1891 založil časopis *Rivista di matematica*, který vycházel od 6. svazku (v letech 1996 až 1999) pod názvem *Revue de Mathématiques.*

K Peanovým spolupracovníkům a žákům (tzv. Peanova škola) patřili Giulio Vivanti (1859–1949), Mario Pieri (1860–1913), Filiberto Castellano (1860–1919), Cesare Burali-Forti (1861–1931), Roberto Marcolongo (1862–1943), Giovanni Vailati (1863–1909), Gino Fano (1871–1952), Giovanni Vacca (1872–1953), Tommaso Boggio (1877–1963) a Alessandro Padoa (1886–1937).

Peanův život a dílo budí zájem i v současnosti. Velkou pozornost Peanovým pracím a jeho korespondenci věnovali na počátku 21. století Clara Silvia Roero, Natalia Nervo a Erika Luciano:

C. S. Roero (ed.): *L'opera omnia di Giuseppe Peano* (CD-ROM, 2002),

C. S. Roero, N. Nervo (ed.): *L'archivio Giuseppe Peano* (CD-ROM, 2002),

C. S. Roero (ed.): *Le riviste di Giuseppe Peano* (CD-ROM, 2003),

C. S. Roero, E. Luciano (ed.): *Giuseppe Peano, Louis Couturant: Carteggio (1896–1914)* (2005).

[1] I: Bocca, Torino, 1895, vii+144 stran, II: Bocca, Turin, §1: 1897, 64 stran, §2: 1898, viii+60 stran, III: G. Carré et C. Naud, Paris, 1901, viii+231 stran, IV: Bocca, Turin, 1903, xvi+407 stran, V: Bocca, Torino, 1908, xxxvi+463+xlvii stran.

2. Peanovo Calcolo geometrico

Roku 1888 vyšla v Turíně nevelká Peanova kniha *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* [Peano, 1888]. Jejím hlavním cílem bylo vybudovat tzv. geometrický počet, který Peano v úvodu své knihy charakterizoval takto:

Geometrickým počtem rozumíme soubor operací, které se aplikují na geometrické objekty a které jsou analogické operacím algebraickým, které se aplikují na čísla. Geometrický počet dovoluje vyjádřit výsledky geometrických konstrukcí pomocí vzorců, geometrická tvrzení rovnicemi a úvahu dovoluje nahradit úpravami těchto rovnic. Geometrický počet je analogií analytické geometrie; zatímco se v analytické geometrii pracuje s čísly, která reprezentují geometrické objekty, pracuje se v této nové vědě přímo s těmito objekty.[2]

Peanova kniha navázala na myšlenky barycentrického počtu, jehož tvůrcem je německý matematik a astronom August Ferdinand Möbius (1790–1868)[3], na teorii ekvipolencí, kterou publikoval roku 1832 italský matematik Giusto Bellavitis (1803–1880)[4], na teorii kvaternionů, kterou vytvořil irský matematik, fyzik a astronom William Rowan Hamilton (1805–1865)[5], a podala

---

[2] V originále: *Il calcolo geometrico, in generale, consiste in un sistema di operazioni a eseguirsi su enti geometrici, analoghe a quelle che l'algebra fa sopra i numeri. Esso permette di esprimere con formule i risultati di costruzioni geometriche, di rappresentare con equazioni proposizioni di geometria, e di sostituire una trasformazione di equazioni ad un ragionamento. Il calcolo geometrico presenta analogia colla geometria analitica; ne differisce in ciò, che, mentre nella geometria analitica i calcoli si fanno sui numeri che determinano gli enti geometrici, in questa nuova scienza i calcoli si fanno sugli enti stessi.* ([Peano, 1888], str. v)
Na jiném místě své knihy je Peano stručnější: *Il calcolo geometrico consiste in un sistema di operazioni analoghe a quelle del calcolo algebrico, ma in cui gli enti sui quali si eseguiscono i calcoli, invece che numeri, sono enti geometrici, che definiremo.* ([Peano, 1888], str. 21)
V německé verzi Peanova drobného spisku *Gli elementi di calcolo geometrico* je geometrický počet charakterizován takto: *Der geometrische Calcul behandelt die geometrischen Fragen, indem er die analytischen Operationen direct mit den geometrischen Dingen vornimmt, ohne es nöthig zu haben, sie immer mittels der Coordinaten zu bestimmen.* ([Peano, 1891], Vorrede)

[3] G. Peano cituje Möbiovu knihu *Der barycentrische Calcul: Ein neues Hülfsmittel zur analytische Behandlung der Geometrie* [Möbius, 1827] z roku 1827.

[4] G. Peano zde cituje tehdy novou Laisantovu knihu *Théorie et applications des équipollences.* Poznamenejme, že Charles-Ange Laisant (1841–1920) přeložil roku 1874 do francouzštiny Bellavitisovu knihu *Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di geometria analitica* [Bellavitis, 1835]. Ve stejném roce zpracoval tuto teorii Guillaume Jules Hoüel (1823–1886), o tom se však G. Peano nezmiňuje. Bellavitisovu teorii přeložil do češtiny Karel Zahradník (1848–1916); jeho knížka *Methoda equipollencí čili rovnic geometrických* vyšla v Praze roku 1874 nákladem Jednoty českých mathematiků.

[5] G. Peano zde uvádí rok 1853, kdy vyšla Hamiltonova kniha *Lectures on Quaternions* [Hamilton, 1853]. Cituje však Laisantovu knihu *Introduction à la méthode des quaternions* (Gauthier-Villars, Paris, 1881) a vůbec se nezmiňuje o druhé Hamiltonově monografii *Elements of Quaternions* [Hamilton, 1866]. Cituje dále práci E. W. Hydea *Calculus of direction and position*, American Journal of Mathematics 6(1883), 1–14. Poznamenejme ještě,

první systematický výklad v té době ještě málo známých myšlenek německého matematika, fyzika a filologa Hermanna Günthera Grassmanna (1809–1877), které byly obsaženy v jeho knize *Ausdehnungslehre* [Grassmann, 1844].[6]

G. Peano poznamenal, že již Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) uvažoval roku 1679 o vytvoření jakéhosi geometrického počtu.[7] Vyzvedl však zejména význam Grassmannovy *Ausdehnungslehre*, která z velké části obsahuje myšlenky Möbiova barycentrického počtu, Bellavitisovy teorie ekvipolencí i Hamiltonovy teorie kvaternionů. Přílišná abstraktnost a značná nejasnost pojmů zavedených H. Grassmannem však zabránila rozšíření jeho myšlenek i jejich geometrických aplikací. G. Peano uvedl, že by byl rád, kdyby jeho *Calcolo geometrico* rozšíření Grassmannových idejí napomohlo. Předpokládal, že v krátkém čase bude geometrický počet nebo nějaká analogická teorie tvořit součást vysokoškolské matematiky:

Sarei lieto delle mie fatiche nello scrivere questo libro ..., se esso servirà a divulgare fra i matematici alcune delle idee del Grassmann. È però mia opinione che, fra non molto tempo, questo calcolo geometrico, o qualche cosa di analogo, si sostituirà a metodi attualmente in uso nell'insegnamento superiore. ([Peano, 1888], str. vii–viii)

Peanova kniha *Calcolo geometrico* je napsána v moderním matematickém duchu, stručně a srozumitelně.

že E. W. Hyde publikoval roku 1890 knihu *The directional calculus based upon the methods of H. Grassmann* (Boston, xii+247 stran).

[6] Zajímavé je, že se zde G. Peano nezmiňuje o zcela zásadním, přepracovaném vydání Grassmannovy monografie [Grassmann, 1862]. Uvádí, že některé myšlenky, k nimž H. Grassmann dospěl, rozvíjeli nezávisle německý matematik Hermann Hankel (1839–1873) v knize *Vorlesungen über die Complexen Zahlen* (1867) a anglický matematik Arthur Cayley (1821–1895) v práci *On multiple algebra*, Quarterly Journal of Mathematics 22(1887), 270–308.

G. Peano se rovněž zmiňuje o tom, že Grassmannovy ideje ovlivnily jen několik málo matematiků:

Ferdinand Caspary (1853–1901): *Ueber die Umformung gewisser Determinanten, welche in der Lehre von den Kegelschnitten vorkommen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 92(1882), 123–144,

F. Caspary: *Ueber einige Determinanten-Identitäten, welche in der Lehre von den perspectivischen Dreiecken vorkommen*, ibid. 95(1883), 36–43,

F. Caspary: *Ueber die Erzeugung algebraischer Raumcurven durch veränderliche Figuren*, ibid. 100(1887), 405–412,

F. Caspary: *Bemerkung zu den desmischen Tetraedern*, Mathematische Annalen 29(1887), 581–582,

Rudolf Mehmke (1857–1944): *Ueber die Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hülfe Grassmann'scher Methoden*, Mathematische Annalen 23(1883), 143–151,

William Kingdon Clifford (1845–1879): *Applications of Grassmann's extensive algebra*, American Journal of Mathematics 1(1878), 350–358,

Emmanuel Carvallo: *Exposition d'une méthode de M. Caspary pour l'étude des courbes gauches*, Bulletin de la Société Mathématique de France 15(1887), 158–166,

Leopold Schendel: *Grundzüge der Algebra nach Grassmann'schen Prinzipien*, H. W. Schmidt, Halle a. S., 1885, 161 stran.

[7] Viz *Leibnizens Mathematische Schriften*, Berlin, 1849, T. II., str. 17, T. V., str. 133.

3. Peanova logika a teorie množin

Úvodní, nečíslovaná kapitola *Operazioni della logica deduttiva* (20 stran) je zajímavá z hlediska historie logiky a teorie množin (viz např. [Monna, 1973], str. 115–117, [Church, 1936]). G. Peano zde definoval množinově teoretické operace, uvedl jejich vlastnosti a ukázal jejich souvislost s logickými operacemi konjunkce, disjunkce a negace. Patrně poprvé se zde objevilo označení průniku a sjednocení množin pomocí symbolů $\cap$ a $\cup$; tyto symboly G. Peano snad převzal z Grassmannovy *Ausdehnungslehre* z roku 1844 (ve vydání z roku 1862 už nejsou), v níž byly použity symboly $\smile$, $\frown$ v jiném smyslu (jako abstraktní operace).[8]

Zavedl rovnost dvou množin ($A = B$, *equazione logica*), průnik dvou nebo více množin ($A \cap B$ nebo AB, *congiunzione* – druhému označení dával přednost) jako největší množinu, která je v nich obsažena, sjednocení dvou nebo více množin ($A \cup B$, *disgiunzione*, *addizione logica*) jako nejmenší množinu, která je obsahuje, a doplněk množiny ($\overline{A}$ nebo $-A$, *negazione*). Tyto operace se provádějí s podmnožinami (*classe*) nějaké dané množiny – univerza (*sistema di enti*), kterou Peano značil $\bullet$ (*tutto*). Zavedl též prázdnou množinu $\bigcirc$ (*nulla*) a inkluze ($A < B$, $B > A$ – symboly $<$ a $>$ nazýval *minore* a *maggiore*). Pro operace s množinami uvedl řadu identit, zdůrazil shody i odlišnosti těchto operací a operací aritmetických. Poznamenal, že některé z těchto identit lze vzít za axiómy a ostatní z nich odvodit. Z paralelně položených identit pro průnik a sjednocení je vidět dualita těchto dvou operací.

Logickou funkcí (*funzione logica*) $f(X)$ rozuměl G. Peano výraz, který vznikne z proměnné množiny X a nějakých pevně daných množin pomocí operací průniku, sjednocení a doplňku. Ukázal, že každá takováto logická funkce se dá právě jediným způsobem vyjádřit ve tvaru

$$f(X) = PX \cup Q\overline{X}$$

(*forma separata*), kde P a Q jsou nějaké pevné množiny. Navíc je $P = f(\bullet)$ a $Q = f(\bigcirc)$, takže

$$f(X) = f(\bullet)X \cup f(\bigcirc)\overline{X}\ .$$

[8] G. Peano zmínil knihu německého matematika Ernsta Schrödera (1841–1902) nazvanou *Der Operationskreis des Logikkalküls*, Leipzig, 1877 (reprint: Teubner, Stuttgart, 1966, viii+37 stran), v níž jsou použity symboly $\times$ a $+$ v logice, a uvedl, že užívá symboly $\cup$ a $\cap$ proto, aby nedošlo k záměně s operacemi aritmetickými. G. Peano citoval též Schröderův článek *Note über den Operationskreis des Logikcalculs*, Mathematische Annalen 12(1877), 481–484, a ještě tyto práce: C. S. Peirce: *On the Algebra of Logic*, American Journal of Mathematics 3(1880), 15–57, 7(1885), 180–196, A. Cayley: *On the inversion of a quadric surface*, Quarterly Journal of Mathematics 11(1871), 283–288; zmínil též výsledky W. K. Clifforda a odkázal čtenáře na jeho nedávno vydané *Mathematical Papers*, dále Williama Stanleye Jevonse (1835–1882) a jeho práci *The Principles of Science. A Treatise on logic and scientific method* (Macmillan, London, 1883; kniha však vyšla již roku 1874, dále 1877, 1879, 1883, 1887, 1892, 1900, 1905, 1907, 1913, ..., Dover, 1958, liii+786 stran) a Louise Liarda (1846–1917) a jeho *Les logiciens anglais contemporains* (Paris, 1878; další vydání 1883, 177 stran).

Podobně je pro logickou funkci $f(X,Y)$ dvou proměnných

$$\begin{aligned} f(X,Y) &= f(\bullet,Y)X \cup f(\circ,Y)\overline{X} = \\ &= f(\bullet,\bullet)XY \cup f(\bullet,\circ)X\overline{Y} \cup f(\circ,\bullet)\overline{X}Y \cup f(\circ,\circ)\overline{XY} \ . \end{aligned}$$

Od operací s množinami přešel G. Peano postupně k logice a ukázal ekvivalenci operací s množinami a výroky. Rozlišil výroky, které neobsahují proměnnou, a výroky, které proměnnou obsahují (*proposizione categorica*, *proposizione condizionale*); dnes jsou v logice pro tyto pojmy vžité názvy *sentence* a *predikát.* Jestliže je α výrok obsahující proměnnou x, potom symbolem $x : \alpha$ označil G. Peano množinu všech x, pro něž je výrok α pravdivý. Uvedl řadu příkladů z oblasti reálných funkcí; posledním z nich je formule

$$y : \{x : [f(x,y) = 0] = \bullet\} = \circ \ ,$$

která se v dnešní symbolice zapíše ve tvaru

$$\neg\ \exists\ y\ \forall\ x\ f(x,y) = 0 \ .$$

Pro výroky α, β obsahující proměnné zavedl G. Peano implikaci, ekvivalenci, konjunkci, disjunkci a negaci ($\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha \cap \beta$, $\alpha \cup \beta$, $-\alpha$), symbol $\circ$ pro sporný a symbol $\bullet$ pro pravdivý výrok (*condizione assurda*, *condizione identica*); dnes se v logice užívají termíny *falzum* a *verum* a symboly F a V. Na řadě příkladů pak G. Peano ukázal užití zavedených logických operací; např. pro reálná čísla x, y je

$$[x : (x^2 + y^2 = 1) = \circ] = (y < -1) \cup (y > +1) \ .$$

Dále odvodil řadu formulí, v nichž jsou $A, B, \ldots$ buď množiny, nebo výroky. Např. formuli

$$(A < B) \cap (A' < B') < (A \cup A' < B \cup B')$$

dnes zapíšeme pro množiny ve tvaru

$$(A \subseteq B) \wedge (A' \subseteq B') \Rightarrow (A \cup A' \subseteq B \cup B')$$

a pro výroky ve tvaru

$$(A \Rightarrow B) \wedge (A' \Rightarrow B') \Rightarrow (A \vee A' \Rightarrow B \vee B') \ .$$

Kromě odvození řady formulí došel G. Peano i k základním zákonitostem odvozování jedněch formulí z druhých. Došel např. k tomu, že (v dnešní řeči) relace $=$, $<$ a $>$ jsou kongruence vůči operacím $\cap$ a $\cup$.

Posledním tématem úvodní kapitoly je řešení logických rovnic a problém eliminace. Logickou rovnicí rozumí G. Peano rovnici $f(X) = \circ$, kde $f(X)$ je logická funkce. Podle předešlého je tato rovnice ekvivalentní s rovnicí

$AX \cup B\overline{X} = \bigcirc$; odtud $B < X < \overline{A}$. Nutnou a postačující podmínkou existence řešení, tj. výsledkem eliminace, je inkluze $B < \overline{A}$ neboli $AB = \bigcirc$. Podobně pro logickou rovnici $f(X, Y) = \bigcirc$ neboli

$$AXY \cup BX\overline{Y} \cup C\overline{X}Y \cup D\overline{XY} = \bigcirc$$

je nutnou a postačující podmínkou existence řešení rovnost $ACBD = \bigcirc$.

Peanova teorie množin nebyla následována a jeho označení nebylo akceptováno.[9] Peanova symbolika v logice byla přejata Bertrandem Arthurem Williamem Russellem (1872–1970)[10] a Alfredem Northem Whiteheadem (1861–1947) v knize *Principia mathematica* (1910–1913). Symboly $\cup$ a $\cap$ pro sjednocení a průnik byly rozšířeny až po druhé světové válce. Ještě Kazimierz Kuratowski (1896–1980) užíval roku 1952 symboly $+$ a $\times$,[11] ale Nicolas Bourbaki již roku 1939 symboly $\cup$ a $\cap$.[12] Jedním z důvodů, proč G. Peano zařadil tuto partii do knihy o geometrickém počtu, bylo patrně to, že logické operace, stejně jako operace algebraické, představují analogii ke geometrickému počtu.[13]

4. Peanův geometrický počet

Geometrický počet propracoval G. Peano v první až osmé kapitole knihy *Calcolo geometrico*. V první kapitole *Formazioni geometriche* (12 stran) prezentoval základní myšlenky vybudovaného geometrického počtu.

Definoval orientovanou úsečku (*linea* AB) a její délku (*grandezza* AB, $\mathrm{gr}\, AB$), orientovaný trojúhelník (*superficie* ABC) a jeho obsah ($\mathrm{gr}\, ABC$), orientovaný čtyřstěn (*volume* $ABCD$) a jeho objem ($\mathrm{gr}\, ABCD$); jedná se o uspořádané dvojice, trojice či čtveřice bodů v prostoru. Orientovaná úsečka AB je reprezentována pohybem bodu P z bodu A do bodu B, orientovaný trojúhelník ABC pohybem úsečky AP, kde bod P probíhá úsečku BC od bodu B k bodu C, a čtyřstěn $ABCD$ pohybem trojúhelníku ABP, kde bod P probíhá úsečku CD od bodu C k bodu D.[14] G. Peano dále definoval skládání těchto objektů: složením bodu A a úsečky PQ vznikne buď trojúhelník APQ,

---

[9] Sjednocení, resp. průnik dvou množin byly značeny $A + B$, resp. AB nebo $D(A, B)$. Viz např. Felix Hausdorff (1868–1942): *Grundzüge der Mengenlehre* (Veit & Comp., Leipzig, 1914, viii+476 stran; reprint: Chelsea, New York, 1949, 1978), ve druhém vydání *Mengenlehre* (Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1927, 285 stran), ve třetím vydání *Mengenlehre* (Walter de Gruyter & Co., Berlin, Leipzig, 1935, 306 stran); anglicky: *Set theory*, 1935, 1944, 1957.

[10] Viz např. [Kennedy, 1973].

[11] K. Kuratowski: *Topologie II*, Warszawa, Wrocław, 1950, 1952 (anglicky: 1950, francouzsky: 1961). První díl vyšel v několika vydáních v letech 1933, 1948, 1952, 1958.

[12] N. Bourbaki: *Théorie des ensembles (Fascicule de résultats)*, Hermann & C[ie]., Éditeurs, Paris, 1939, viii+51 stran.

[13] *... esse presentano grande analogia con quelle dell'algebra, e del calcolo geometrico.* ([Peano, 1888], str. vii)

[14] Poznamenejme, že G. Peano byl v osmdesátých letech 19. století jedním z mála matematiků, kteří bez obav užívali v geometrii jazyk teorie množin. Plně přijal aktuální nekonečno a geometrické útvary chápal jako množiny bodů, tj. zcela v dnešním pojetí.

nebo trojúhelník PQA, složením bodů A, B a úsečky PQ vznikne některý z čtyřstěnů $ABPQ$, $APQB$, $PQAB$, složením bodu A a trojúhelníku XYZ vznikne některý z čtyřstěnů $AXYZ$, $XYZA$ a složením úseček PQ a $P'Q'$ čtyřstěn $PQP'Q'$. G. Peano zavedl nulový čtyřstěn $\mathbb{O}$ (jeho objem je roven nule, tj. jeho vrcholy leží v jedné rovině) a definoval orientaci (*senso*) nenulového čtyřstěnu $ABCD$: jestliže při pohledu z bodu A na rovinu BCD je trojúhelník BCD orientován ve směru pohybu hodinových ručiček, nazývá se čtyřstěn $ABCD$ pravotočivý (*destrorso*), v opačném případě levotočivý (*sinistrorso*). Poměr (*rapporto*) čtyřstěnů definoval G. Peano jako podíl jejich objemů; při stejné orientaci těchto čtyřstěnů se tento poměr bere kladný, v opačném případě záporný. Pomocí poměrů s libovolným, pevně zvoleným nenulovým čtyřstěnem Ω definoval rovnost čtyřstěnů, násobek čtyřstěnu reálným číslem a součet čtyřstěnů:

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\ , \qquad \text{jestliže} \qquad \frac{\mathbb{A}}{\Omega} = \frac{\mathbb{B}}{\Omega}\ ,$$

$$\mathbb{A} = m\mathbb{B}\ , \qquad \text{jestliže} \qquad \frac{\mathbb{A}}{\Omega} = m \cdot \frac{\mathbb{B}}{\Omega}\ ,$$

$$\mathbb{A} = \mathbb{B} + \mathbb{C}\ , \qquad \text{jestliže} \qquad \frac{\mathbb{A}}{\Omega} = \frac{\mathbb{B}}{\Omega} + \frac{\mathbb{C}}{\Omega}\ ;$$

přesně vzato nejde o definice operací, ale relací. Pro sčítání platí komutativní a asociativní zákon a pro násobení skalárem a sčítání oba distributivní zákony. Rovnost čtyřstěnů je ekvivalencí a vzhledem k oběma operacím je dokonce kongruencí, rovnost dvou čtyřstěnů je ekvivalentní s rovností jejich objemů a orientací. Opačným čtyřstěnem $-\mathbb{A}$ k čtyřstěnu $\mathbb{A}$ je čtyřstěn $(-1)\mathbb{A}$, rozdílem čtyřstěnů $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ je čtyřstěn $\mathbb{A} - \mathbb{B} = \mathbb{A} + (-1)\mathbb{B}$. Obecně má smysl rovnost[15]

$$\Sigma = m\mathbb{A} + n\mathbb{B} + \dots\ ,$$

v níž vystupují čtyřstěny $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \dots, \Sigma$ a reálná čísla $m, n, \dots$ Permutace vrcholů čtyřstěnu mění jeho orientaci ($ABCD = -BACD$, $ABCD = CDAB$ atd.).

Poznamenejme, že G. Peano definoval rovnost a součet čtyřstěnů a jejich reálný násobek zbytečně složitě. Je to proto, že chtěl objemy chápat vždy jako nezáporná čísla.

Formace prvního, druhého, třetího a čtvrtého druhu (*formazione di prima, seconda, terza, quarta specie*) zavedl G. Peano jako formální lineární kombinace bodů, úseček, trojúhelníků a čtyřstěnů s reálnými koeficienty; body, úsečky, trojúhelníky a čtyřstěny jsou tedy speciálními případy takto zavedených formací.

Pomocí již definovaných operací pro čtyřstěny je definována nulovost formací prvního, druhého a třetího druhu a jejich rovnost. Řekneme, že formace

$$m\mathbb{A} + n\mathbb{B} + \dots$$

[15] Zdůrazněme, že G. Peano uvažoval pouze konečné součty, i když tomu symbolika užitá na tomto místě neodpovídá.

prvního (druhého, třetího) druhu je nulová, jestliže pro libovolný trojúhelník (úsečku, bod) $\mathbb{P}$ je

$$m\mathbb{A}\mathbb{P} + n\mathbb{B}\mathbb{P} + \cdots = \mathbb{O} .$$

Formace prvního (druhého, třetího) druhu

$$m\mathbb{A} + n\mathbb{B} + \ldots \qquad \text{a} \qquad m'\mathbb{A}' + n'\mathbb{B}' + \ldots$$

se rovnají, jestliže pro každý trojúhelník (úsečku, bod) $\mathbb{P}$ je

$$m\mathbb{A}\mathbb{P} + n\mathbb{B}\mathbb{P} + \cdots = m'\mathbb{A}'\mathbb{P} + n'\mathbb{B}'\mathbb{P} + \ldots$$

Přirozeným způsobem definoval G. Peano součet dvou formací téhož druhu a násobek formace reálným číslem x: jestliže

$$\mathbb{S} = m\mathbb{A} + n\mathbb{B} + \ldots \qquad \text{a} \qquad \mathbb{S}' = m'\mathbb{A}' + n'\mathbb{B}' + \ldots ,$$

potom

$$\mathbb{S} + \mathbb{S}' = m\mathbb{A} + n\mathbb{B} + \cdots + m'\mathbb{A}' + n'\mathbb{B}' + \ldots$$

a

$$x\mathbb{S} = xm\mathbb{A} + xn\mathbb{B} + \ldots$$

Pro sčítání formací platí komutativní a asociativní zákon, pro násobení reálným číslem a sčítání oba distributivní zákony. Navíc je rovnost formací kongruencí vzhledem k oběma operacím. Je zavedena opačná formace $-\mathbb{S} = (-1)\mathbb{S}$ a rozdíl formací téhož druhu: $\mathbb{S} - \mathbb{S}' = \mathbb{S} + (-\mathbb{S}')$.

V závěru kapitoly definoval G. Peano násobení dvou formací (*formazione proiettante*, *prodotto progressivo*): jestliže

$$\mathbb{S} = m_1\mathbb{A}_1 + \cdots + m_n\mathbb{A}_n \qquad \text{a} \qquad \mathbb{S}' = m_1'\mathbb{A}_1' + \cdots + m_{n'}'\mathbb{A}_{n'}'$$

jsou formace druhů s a s', kde $s + s' \leq 4$, potom

$$\mathbb{S}\mathbb{S}' = \sum_{i,j} m_i m_j' \mathbb{A}_i \mathbb{A}_j' .$$

Součin $\mathbb{S}\mathbb{S}'$ je formací druhu $s + s'$. Takto definované násobení je asociativní, oboustranně distributivní vzhledem ke sčítání, komutuje s násobením reálnými čísly, tj.

$$(x\mathbb{S})\mathbb{S}' = x(\mathbb{S}\mathbb{S}') = \mathbb{S}(x\mathbb{S}') ,$$

a je $\mathbb{S}\mathbb{S}' = (-1)^{ss'}\mathbb{S}'\mathbb{S}$. Rovnost formací je kongruencí vzhledem k tomuto násobení.

Pomocí již zavedené orientace čtyřstěnů definoval G. Peano orientaci úseček ležících na téže přímce a orientaci trojúhelníků ležících v téže rovině.

Dvě úsečky AB a $A'B'$ ležící na téže přímce se nazývají stejně orientované, jestliže pro libovolně zvolené body P, Q mají čtyřstěny $ABPQ$ a $A'B'PQ$

stejnou orientaci. Dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ téže roviny se nazývají stejně orientované, jestliže pro libovolně zvolený bod P mají čtyřstěny $ABCP$ a $A'B'C'P$ stejnou orientaci.

Na několika místech první kapitoly G. Peano ukázal, jak je možno pomocí geometrického počtu symbolicky vyjádřit některé geometrické vlastnosti. Jestliže A, B, C, D, E jsou body, a, b úsečky a α, β trojúhelníky, potom platí:[16]

(i) $ABCD = \mathbb{O}$ právě tehdy, když body A, B, C, D leží v téže rovině.

(ii) $ABC = \mathbb{O}$ právě tehdy, když body A, B, C leží v přímce.

(iii) $AB = \mathbb{O}$ právě tehdy, když $A = B$.

(iv) $mA = nB$ právě tehdy, když $A = B$ a $m = n$.

(v) $a = mb$ právě tehdy, když úsečky a, b leží na stejné přímce, poměr jejich délek je $|m|$ a jsou stejně, resp. nestejně orientované pro m kladné, resp. záporné.

(vi) $\alpha = m\beta$ právě tehdy, když trojúhelníky α, β leží v téže rovině, poměr jejich obsahů je $|m|$ a jsou stejně, resp. nestejně orientované pro m kladné, resp. záporné.

(vii) $\frac{ABCD}{ABCE} > 0$ právě tehdy, když body D, E leží ve stejném poloprostoru určeném rovinou ABC.

(viii) $ABCD = ABCE$ právě tehdy, když je přímka DE rovnoběžná s rovinou ABC.

(ix) $(B - A)CD = \mathbb{O}$ právě tehdy, když jsou přímky AB a CD rovnoběžné.

V následujících třech kapitolách se G. Peano věnoval zejména otázkám redukce obecných formací prvního, druhého a třetího druhu na jednoduché tvary. Zavedl v souvislosti s touto problematikou pojmy vektor, bivektor a trivektor ([Peano, 1888], str. 37, 55, 65); rozpracoval tak vektorový počet.

Vektor je formace prvního druhu typu $B - A$, tj. rozdíl dvou bodů; bod A je počátek (*origine*) a bod B konec (*termine*) vektoru $B - A$; velikostí vektoru se rozumí velikost odpovídající úsečky. Součin dvou vektorů se nazývá *bivektor*, součin tří vektorů *trivektor*. Každý bivektor je možno vyjádřit jako součin dvou vektorů se společným počátkem, tj.

$$(B - A)(C - A) = AB + BC + CA \ ,$$

takže bivektor je součtem stran trojúhelníka; velikost bivektoru zavedl G. Peano jako obsah odpovídajícího trojúhelníka. Podobně je možno každý trivektor vyjádřit jako součin tří vektorů se společným počátkem, tj.

$$(B - A)(C - A)(D - A) = BCD + DCA + ACB + ABD \ ,$$

takže trivektor je součtem stěn čtyřstěnu (v tomto součtu se každá hrana čtyřstěnu „projde“ v obou směrech). Vektorem úsečky AB je podle G. Peana

[16] Symbolem $\mathbb{O}$ budeme rozumět nulový čtyřstěn, resp. nulový trojúhelník, resp. nulovou úsečku.

vektor $B - A$ a bivektorem trojúhelníka ABC bivektor $(B - A)(C - A)$. Součet vektorů je opět vektor, součet bivektorů je opět bivektor. Prakticky všechny výsledky těchto tří kapitol mají konstruktivní charakter.

Ve druhé kapitole *Formazioni di prima specie* (16 stran) se G. Peano zabýval redukcí formace prvního druhu. Definoval váhu (*massa*) formace $\mathbb{S} = m_1 A_1 + \cdots + m_n A_n$ jako součet $m_1 + \cdots + m_n$ a dokázal tato dvě tvrzení:

Věta ([Peano, 1888], str. 36–37):

(i) *Jestliže je váha formace $\mathbb{S}$ nenulová, existuje bod G takový, že*

$$\mathbb{S} = (m_1 + \cdots + m_n) \cdot G \ .$$

(ii) *Jestliže je váha formace $\mathbb{S}$ nulová, existují body P, Q takové, že $\mathbb{S} = P - Q$; jeden z těchto dvou bodů je možno volit libovolně.*

V mechanice se výše uvedený bod G nazývá *barycentrum* nebo *těžiště* hmotných bodů $A_1, \ldots, A_n$ (jejich hmoty jsou $m_1, \ldots, m_n$). Tvrzení (i) dokázal G. Peano nejprve pro $n = 2$. Bod G leží na přímce $A_1 A_2$ a jeho vzdálenosti od bodů A_1, A_2 jsou v poměru $|m_2| : |m_1|$; bod G leží mezi body A_1, A_2 právě tehdy, když mají čísla m_1, m_2 stejná znaménka. Tvrzení (ii) se dokáže snadno pomocí tvrzení (i).

Obecná formace prvního druhu se tedy redukuje buď na násobek bodu, nebo na vektor.

Ve třetí kapitole *Formazioni di seconda specie* (14 stran) jsou redukovány obecné formace druhého druhu.

Věta ([Peano, 1888], str. 56–57):

(i) *Součet úseček v prostoru je roven součtu bivektoru a jediné úsečky; její počátek může být zvolen libovolně, její vektor je součtem vektorů všech uvažovaných úseček.*

(ii) *Součet úseček v prostoru je roven součtu dvou úseček.*

Protože je reálný násobek úsečky opět úsečka, redukuje se obecná formace druhého druhu jednak na součet bivektoru a úsečky, jednak na součet dvou úseček.

Hlavním cílem čtvrté kapitoly *Formazioni di terza specie* (5 stran) je redukce obecné formace třetího druhu.

Věta ([Peano, 1888], str. 65):

(i) *Jestliže je součet bivektorů daných trojúhelníků nenulový, je součet těchto trojúhelníků opět trojúhelník.*

(ii) *Jestliže je součet bivektorů daných trojúhelníků nulový, je součet těchto trojúhelníků trivektor.*

Protože je reálný násobek trojúhelníka opět trojúhelník, redukuje se obecná formace třetího druhu buď na trojúhelník, nebo na trivektor.

V dalších třech kapitolách *Formazioni su d'una retta* (5 stran), *Formazioni nel piano* (24 stran) a *Formazioni nello spazio* (31 stran) vyšetřoval G. Peano formace na přímce, v rovině a v prostoru. Jedná se zejména o problémy lineární závislosti a jednoznačného vyjádření formací jako lineárních kombinací.

Věta ([Peano, 1888], str. 69, 79, 106):

(i) *Jsou-li* $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ *formace prvního druhu na jedné přímce, potom je*

$$\mathbb{AB} \cdot \mathbb{C} + \mathbb{BC} \cdot \mathbb{A} + \mathbb{CA} \cdot \mathbb{B} = \mathbb{O} \ .$$

(ii) *Jsou-li* $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ *formace prvního druhu v rovině, potom je*

$$\mathbb{BCD} \cdot \mathbb{A} - \mathbb{ACD} \cdot \mathbb{B} + \mathbb{ABD} \cdot \mathbb{C} - \mathbb{ABC} \cdot \mathbb{D} = \mathbb{O} \ .$$

(iii) *Jsou-li* $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$ *formace prvního druhu v prostoru, potom je*

$$\mathbb{BCDE} \cdot \mathbb{A} - \mathbb{ACDE} \cdot \mathbb{B} + \mathbb{ABDE} \cdot \mathbb{C} - \mathbb{ABCE} \cdot \mathbb{D} + \mathbb{ABCD} \cdot \mathbb{E} = \mathbb{O} \ .$$

Vezmeme-li na přímce dvě formace $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ prvního druhu, pro něž je $\mathbb{AB} \neq \mathbb{O}$, pak z rovnosti uvedené v (i) vyplývá, že libovolnou formaci $\mathbb{C}$ prvního druhu lze psát ve tvaru

$$\mathbb{C} = \frac{\mathbb{CB}}{\mathbb{AB}} \cdot \mathbb{A} \ + \frac{\mathbb{AC}}{\mathbb{AB}} \cdot \mathbb{B} = x\mathbb{A} + y\mathbb{B} \ .$$

Vezmeme-li za formaci $\mathbb{A}$ bod A (počátek) a za formaci $\mathbb{B}$ jednotkový vektor $B - A$, pak je číslo x rovno váze formace $\mathbb{C}$. Jestliže je tedy formace $\mathbb{C}$ bod C (formace prvního druhu váhy 1), je

$$C = A + y(B - A) \ .$$

Věta ([Peano, 1888], str. 83): *Nechť* $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3$ *jsou formace prvního druhu v rovině, pro něž* $\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2\mathbb{A}_3 \neq \mathbb{O}$. *Potom platí:*

(i) *Libovolnou formaci* $\mathbb{A}$ *prvního druhu je možno jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$\mathbb{A} = x_1\mathbb{A}_1 + x_2\mathbb{A}_2 + x_3\mathbb{A}_3 \ .$$

(ii) *Libovolnou formaci a druhého druhu je možno jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$a = u_1\mathbb{A}_2\mathbb{A}_3 + u_2\mathbb{A}_3\mathbb{A}_1 + u_3\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 \ .$$

Věta ([Peano, 1888], str. 113): *Nechť* $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4$ *jsou formace prvního druhu v prostoru, pro něž* $\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2\mathbb{A}_3\mathbb{A}_4 \neq \mathbb{O}$. *Potom platí:*

(i) *Libovolnou formaci* $\mathbb{A}$ *prvního druhu je možno jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$\mathbb{A} = x_1\mathbb{A}_1 + x_2\mathbb{A}_2 + x_3\mathbb{A}_3 + x_4\mathbb{A}_4 \ .$$

(ii) *Libovolnou formaci a druhého druhu je možno jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$a = p_{12}\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 + p_{13}\mathbb{A}_1\mathbb{A}_3 + p_{14}\mathbb{A}_1\mathbb{A}_4 + p_{23}\mathbb{A}_2\mathbb{A}_3 + p_{24}\mathbb{A}_2\mathbb{A}_4 + p_{34}\mathbb{A}_3\mathbb{A}_4 \ .$$

(iii) *Libovolnou formaci α třetího druhu je možno jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$\alpha = u_1\mathbb{A}_2\mathbb{A}_3\mathbb{A}_4 - u_2\mathbb{A}_1\mathbb{A}_3\mathbb{A}_4 + u_3\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2\mathbb{A}_4 - u_4\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2\mathbb{A}_3 \ .$$

V šesté kapitole ([Peano, 1888], str. 75) zavedl G. Peano operaci $\perp$, která v rovině „otáčí“ vektory o pravý úhel v kladném smyslu (znaménko $\perp$ nazývá *perpendicolare*), a uvedl její vlastnosti. Např. pro vektory U, V a reálné číslo x je

(i) $\perp\perp U = -U$,
(ii) $\perp xU = x\perp U$,
(iii) $\perp(U + V) = \perp U \ + \perp V$

apod. Dále G. Peano definoval goniometrické funkce ([Peano, 1888], str. 76–77): jsou-li U, V vektory, položil

$$\operatorname{sen}(U,V) = \frac{UV}{(\operatorname{gr} U)(\operatorname{gr} V)} \ , \qquad \cos(U,V) = \operatorname{sen}(U,\perp V) \ ,$$
$$\operatorname{tang}(U,V) = \frac{\operatorname{sen}(U,V)}{\cos(U,V)} \ , \qquad \cot(U,V) = \frac{\cos(U,V)}{\operatorname{sen}(U,V)} \ .$$

V sedmé kapitole ([Peano, 1888], str. 100) zavedl G. Peano operaci $|$, která bivektoru u přiřazuje jeho *normálový vektor* $|u$, resp. vektoru U jeho *normálový biivektor* $|U$; velikosti vektoru U a bivektoru u se rovnají, vektor U je kolmý na rovinu určenou bivektorem u a trivektor Uu je kladný. Ukázal řadu vlastností této operace, např.

(i) $||u = u$, $||U = U$,
(ii) $|ku = k|u$, $|kU = k|U$,
(iii) $|(U + V) = |U + |V$,
(iv) $|(UV) = (|U) \cdot (|V)$,
(v) $U|V = V|U$.

V šesté a sedmé kapitole ([Peano, 1888], str. 80, 107, 109) definoval G. Peano ještě tzv. sestupný součin formací (*prodotto regressivo*, *intersezione*).

(A) Nechť $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ jsou formace prvního druhu v rovině. Sestupný součin formací $\mathbb{AB}$ a $\mathbb{CD}$ druhého druhu je definován rovností

$$\mathbb{AB} \cdot \mathbb{CD} = \mathbb{ACD} \cdot \mathbb{B} - \mathbb{BCD} \cdot \mathbb{A}$$

a je to tedy formace prvního druhu. Vzhledem k rovnosti z výše uvedené věty ([Peano, 1888], str. 79) je rovněž

$$\mathbb{AB} \cdot \mathbb{CD} = \mathbb{ABD} \cdot \mathbb{C} - \mathbb{ABC} \cdot \mathbb{D} \ .$$

Snadno se dokáže, že $\mathbb{AB} \cdot \mathbb{AC} = \mathbb{ABC} \cdot \mathbb{A}$ atd. Pro sestupný součin formací druhého druhu a, b, jejich součet a násobek reálným číslem k platí rovnosti:

(i) $ab = -ba$,

(ii) $a = a'$, $b = b' \implies ab = a' \cdot b'$,

(iii) $a(b + b') = ab + ab'$,

(iv) $(a + a')b = ab + a'b$,

(v) $(ka)b = a(kb) = k(ab)$.

Sestupný součin dvou různoběžných orientovaných úseček a, b v rovině je roven k-násobku průsečíku O přímek, na kterých tyto úsečky leží; přitom je absolutní hodnota čísla k rovna obsahu trojúhelníka určeného úsečkami a, b posunutými do bodu O – přesněji $k = \operatorname{gr} a \cdot \operatorname{gr} b \cdot \operatorname{sen}(a, b)$. Sestupný součin orientovaných úseček ležících na rovnoběžných přímkách je vektor.

(B) Nechť $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ jsou formace prvního druhu v prostoru. Sestupný součin formací $\mathbb{AB}$ a $\mathbb{PQR}$ druhého a třetího druhu je definován rovností

$$\mathbb{AB} \cdot \mathbb{PQR} = \mathbb{PQR} \cdot \mathbb{AB} = \mathbb{APQR} \cdot \mathbb{B} - \mathbb{BPQR} \cdot \mathbb{A}$$

a je to tedy formace prvního druhu. Vzhledem k rovnosti z výše uvedené věty ([Peano, 1888], str. 108) je rovněž

$$\mathbb{AB} \cdot \mathbb{PQR} = \mathbb{ABQR} \cdot \mathbb{P} + \mathbb{ABRP} \cdot \mathbb{Q} + \mathbb{ABPQ} \cdot \mathbb{R} .$$

Snadno se dokáže, že $\mathbb{AB} \cdot \mathbb{ACD} = \mathbb{ABCD} \cdot \mathbb{A}$. Pro sestupný součin formací a, α druhého a třetího druhu, jejich součet a násobek reálným číslem k platí rovnosti:

(i) $a\alpha = \alpha a$,

(ii) $a = a'$, $\alpha = \alpha' \implies a\alpha = a'\alpha'$,

(iii) $a(\alpha + \alpha') = a\alpha + a\alpha'$,

(iv) $(a + a')\alpha = a\alpha + a'\alpha$,

(v) $(ka)\alpha = a(k\alpha) = k(a\alpha)$.

Sestupný součin $a \cdot \alpha$ orientované úsečky a a orientovaného trojúhelníka α je roven k-násobku průsečíku O odpovídající přímky a roviny; přitom je absolutní hodnota čísla k rovna objemu čtyřstěnu určeného úsečkou a a trojúhelníkem α posunutými do bodu O – přesněji $k = \operatorname{gr} a \cdot \operatorname{gr} \alpha \cdot \operatorname{sen}(a, \alpha)$. Sestupný součin orientované úsečky a a orientovaného trojúhelníka α, který leží v rovině rovnoběžné s úsečkou a, je vektor.

(C) Nechť $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ jsou formace prvního druhu v prostoru. Sestupný součin formací $\mathbb{ABC}$ a $\mathbb{PQR}$ třetího druhu je definován rovností

$$\mathbb{ABC} \cdot \mathbb{PQR} = \mathbb{APQR} \cdot \mathbb{BC} + \mathbb{BPQR} \cdot \mathbb{CA} + \mathbb{CPQR} \cdot \mathbb{AB} ,$$

a je to tedy formace druhého druhu. Speciálně je

$$\mathbb{ABC} \cdot \mathbb{ABD} = \mathbb{ABCD} \cdot \mathbb{AB} \ .$$

Pro sestupný součin formací α, β třetího druhu, jejich součet a násobek reálným číslem k platí rovnosti:

(i) $\alpha\beta = -\beta\alpha$,

(ii) $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta' \implies \alpha\beta = \alpha'\beta'$,

(iii) $\alpha(\beta + \beta') = \alpha\beta + \alpha\beta'$,

(iv) $(\alpha + \alpha')\beta = \alpha\beta + \alpha'\beta$,

(v) $(k\alpha)\beta = \alpha(k\beta) = k(\alpha\beta)$.

Sestupný součin orientovaných trojúhelníků α a β je orientovaná úsečka ležící na průsečnici rovin určených těmito trojúhelníky; její velikost je rovna $\mathrm{gr}\, \alpha \cdot \mathrm{gr}\, \beta \cdot \mathrm{sen}\, (\alpha, \beta)$. Jsou-li uvedené roviny rovnoběžné, je $\alpha\beta$ bivektor.

Jsou-li $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ dvě formace v prostoru druhů s a s', potom je v případě $s+s' \leq 4$ zápisem $\mathbb{AB}$ míněn (vzestupný) součin (*prodotto progressivo*) a je to formace druhu $s + s'$. Jestliže je $s + s' > 4$, je zápisem $\mathbb{AB}$ míněn sestupný součin (*prodotto regressivo*) a je to formace druhu $s + s' - 4$. V obou případech je

$$\mathbb{AB} = (-1)^{ss'} \cdot \mathbb{BA} \ .$$

Jsou-li $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ tři formace druhů s, s' a s'', je možno vytvořit dvanáct součinů $\mathbb{AB} \cdot \mathbb{C}$, $\mathbb{A} \cdot \mathbb{BC}$, $\mathbb{BA} \cdot \mathbb{C}$ atd.; výsledné formace jsou buď druhu $s + s' + s''$, nebo $s + s' + s'' - 4$, nebo $s + s' + s'' - 8$. G. Peano vyšetřoval též sestupný součin dvou bivektorů v prostoru ([Peano, 1888], str. 99).

Poznamenejme pro úplnost, že v osmé kapitole *Derivate* (13 stran) vyšetřoval G. Peano limitní přechody, derivování a integrování „proměnných“ formací.

5. Peanova lineární algebra

V poslední kapitole *Trasformazioni di sistemi lineari* (30 stran) podal G. Peano základy teorie reálných vektorových (lineárních) prostorů a jejich homomorfismů (lineárních zobrazení), a to jako určitou abstrakci a syntézu geometrického počtu z předchozích kapitol.

Hned na začátku této kapitoly uvedl G. Peano axiomatickou definici reálného vektorového prostoru. Je třeba zdůraznit, že je to poprvé, kdy se axiomatická definice vektorového prostoru v matematice objevuje, a to téměř v dnešním tvaru. Vektorovým prostorem (*sistema lineare*) rozuměl G. Peano množinu (*sistema di enti*), v níž je definováno

– sčítání prvků (dnes mluvíme o vektorech),
– násobení prvků reálnými čísly (dnes mluvíme o násobení vektorů skaláry),

– pro libovolné prvky a, b, c a reálná čísla m, n platí rovnosti:

(i) $a + b = b + a$,

(ii) $(a + b) + c = a + (b + c)$,

(iii) $m(a + b) = ma + mb$,

(iv) $(m + n)a = ma + na$,

(v) $m(na) = (mn)a$,

(vi) $1a = a$,

– existuje prvek o (nulový vektor – *ente nullo*) takový, že pro každý prvek a je

(vii) $0a = o$.

G. Peano postuloval ve své definici ještě symetrii a tranzitivitu rovnosti vektorů a skutečnost, že rovnost je kongruencí vzhledem ke sčítání vektorů a vzhledem k násobení vektorů skalárem. Zavedl označení $a - b$ pro $a + (-1)b$ a poznamenal, že pro každý vektor a je

$$a - a = o \qquad \text{a} \qquad a + o = a$$

(vzhledem ke sčítání jde tedy o Abelovu grupu) a že každá lineární kombinace vektorů (*funzione lineare omogenea*) je opět nějakým vektorem uvažovaného prostoru.

Uveďme tuto partii v originálním znění ([Peano, 1888], str. 141–142):

Esistono dei sistemi di enti sui quali sono date le seguenti definizioni:

1. È definita l'eguaglianza di due enti a e b del sistema, cioè è definita una proposizione, indicata con $a = b$, la quale esprime una condizione fra due enti del sistema, soddisfatta da certe coppie di enti, e non da altre, e la quale soddisfa alle equazioni logiche:

$$(a = b) = (b = a) \ , \quad (a = b) \cap (b = c) < (a = c) \ .$$

2. È definita la somma di due enti a e b, vale a dire è definito un ente, indicato con $a + b$, che appartiene pure al sistema dato, e che soddisfa alle condizioni:

$$(a = b) < (a + c = b + c) \ , \quad a + b = b + a \ , \quad a + (b + c) = (a + b) + c \ ,$$

e il valor comune dei due membri dell'ultima eguaglianza si indicherà con $a + b + c$.

3. Essendo a un ente del sistema, ed m un numero intero e positivo, colla scrittura ma intenderemo la somma di m enti eguali ad a. È facile riconoscere, essendo $a, b, \ldots$ enti del sistema, $m, n, \ldots$ numeri interi e positivi, che

$$(a = b) < (ma = mb) \ ; \quad m(a + b) = ma + mb \ ; \quad (m + n)a = ma + na \ ;$$

$$m(na) = (mn)a \ ; \qquad 1a = a \ .$$

Noi supporremo che sia attribuito un significato alla scrittura ma, qualunque sia il numero reale m, in guisa che siano ancora soddisfatte le equazioni precedenti. L'ente ma si dirà prodotto del numero (reale) m per l'ente a.

4. Infine supporremo che esista un ente del sistema, che diremo ente nullo, e che indicheremo con 0, tale che, qualunque sia l'ente a, il prodotto del numero 0 per l'ente a dia sempre l'ente 0, ossia

$$0a = 0 \ .$$

Se alla scrittura $a - b$ si attribuisce il significato $a + (-1)b$, si deduce:

$$a - a = 0 \ , \qquad a + 0 = a \ .$$

DEF. I sistemi di enti per cui sono date le definizioni 1, 2, 3, 4, in guisa da soddisfare alle condizioni imposte, diconsi sistemi lineari.

G. Peano si správně povšiml, že rovnosti (iii) až (vi) platí, když za m, n bereme pouze přirozená čísla a prvek ma definujeme jako m-násobek prvku a, tj. $ma = a + a + \cdots + a$ (m-krát); v dnešní terminologii je možno říci, že si uvědomil, že každá Abelova grupa je modulem nad okruhem celých čísel. Ve své definici vlastně požaduje, aby dané násobení vektorů reálnými čísly bylo rozšířením definice přirozeného násobku, a to při zachování vlastností (iii) až (v).

Lineární závislost a nezávislost definoval G. Peano takto:[17]

Vektory $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se nazývají lineárně závislé (fra loro dipendenti), jestliže existují čísla $m_1, m_2, \ldots, m_n$, která nejsou všechna rovna nule a pro která je

$$m_1a_1 + m_2a_2 + \cdots + m_na_n = o \ .$$

Jsou-li vektory $a_1, \ldots, a_n$ lineárně závislé, dá se z výše uvedené rovnosti vyjádřit každý vektor a_i, u kterého je nenulový koeficient m_i, jako lineární kombinace vektorů ostatních. Jsou-li vektory $a_1, \ldots, a_n$ lineárně nezávislé, pak z výše uvedené rovnosti vyplývá, že všechna čísla $m_1, \ldots, m_n$ jsou rovna nule.

Dimenzi prostoru (*numero delle dimensioni*) definoval G. Peano jako maximální počet lineárně nezávislých vektorů, které je možno v prostoru najít.[18] Jako příklady prostorů dimenze 1 a 2 uvedl reálná a komplexní čísla a poznamenal, že vektorový prostor může mít též nekonečnou dimenzi. Příklad

---

[17] *Più enti a_1 a_2 ... a_n d'un sistema lineare diconsi fra loro dipendenti, se si possono determinare n numeri m_1 m_2 ... m_n, non tutti nulli, in guisa che risulti $m_1a_1 + m_2a_2 + \cdots + m_na_n = 0$.* ([Peano, 1888], str. 142)

[18] *Numero delle dimensioni d'un sistema lineare è il massimo numero di enti fra loro indipendenti che si possono prendere nel sistema.* ([Peano, 1888], str. 143)

prostoru nekonečné dimenze (polynomy s reálnými koeficienty) je však uveden až ve cvičeních.[19]

Následuje věta, která vyjadřuje základní vlastnost báze (*enti di riferimento*):

Jestliže je A prostor dimenze n a $a_1, \dots, a_n$ *lineárně nezávislé vektory tohoto prostoru, potom pro každý vektor a existují jednoznačně určená čísla* $x_1, \dots, x_n$*, pro něž je* $a = x_1a_1 + \cdots + x_na_n$. ([Peano, 1888], str. 143)

Na základě této věty definoval G. Peano souřadnice vektoru vzhledem k bázi $a_1, \dots, a_n$; uvedl, jak vypadají souřadnice součtu dvou vektorů, násobku vektoru, nulového vektoru a jak je možno souřadnice vzhledem k bázi $b_1, \dots, b_n$ vyjádřit pomocí souřadnic vzhledem k bázi $a_1, \dots, a_n$, známe-li souřadnice vektorů $a_1, \dots, a_n$ vzhledem k bázi $b_1, \dots, b_n$. Je zajímavé, že G. Peano definoval pojem báze pouze implicitně v definici souřadnic vektoru vzhledem k bázi. Bází prostoru dimenze n rozuměl každých n lineárně nezávislých vektorů tohoto prostoru.

Dimenze vektorového prostoru (konečně generovaného) je dnes zpravidla definována jako počet prvků nějaké báze tohoto prostoru, přičemž báze je zavedena jako lineárně nezávislá množina generátorů. Je však třeba nejprve ukázat, že každé dvě báze mají stejný počet prvků. Tento fakt se často dokazuje užitím tzv. Steinitzovy věty o výměně nebo pomocí nějakého ekvivalentního tvrzení; jde o to, že n lineárně nezávislých vektorů nelze vyjádřit jako lineární kombinace menšího počtu vektorů. G. Peano ke své definici dimenze obdobné tvrzení nepotřeboval. Potřeboval by je, kdyby dokazoval, že prostor dimenze n není možno generovat méně než n vektory nebo že každou lineárně nezávislou podmnožinu, která má méně než n vektorů, je možno rozšířit na n-prvkovou bázi. Těmito problémy se však ve své knize nezabýval a je těžké říci, do jaké míry si je uvědomoval.

V prostoru konečné dimenze definoval G. Peano limitní přechod. Vektor a_0 je limitou proměnného vektoru a, jestliže souřadnice vektoru a_0 vzhledem k nějaké bázi jsou limitami odpovídajících souřadnic proměnného vektoru a. Zdůraznil, že definice nezávisí na zvolené bázi. Proměnný vektor může být funkcí reálné proměnné; potom je možno definovat derivaci, neurčitý a určitý integrál. Zobrazení jednoho vektorového prostoru do druhého se nazývá spojité, jestliže zachovává limitní přechod (*il limite della funzione è la funzione del limite*); v obou prostorech musí být limitní přechod definován. G. Peano uvedl, že v prostorech konečné dimenze to znamená, že souřadnice obrazu jsou spojitými funkcemi souřadnic vzoru.

Homomorfismus (lineární zobrazení) vektorových prostorů (*operazione distributiva*, *trasformazione lineare*) definoval G. Peano jako zobrazení R jednoho

[19] *Si considerino le funzioni algebriche interi* $f(x)$ *d'una variabile numerica* x*. Intendendo con* $f_1(x) = f_2(x)$ *l'identità dei valori di* $f_1(x)$ *e* $f_2(x)$*, qualunque sia il valore di* x*, con* $f_1(x) + f_2(x)$ *la funzione intera somma di* $f_1(x)$ *e* $f_2(x)$*, con* $mf(x)$*, ove* m *è un numero, il prodotto del numero* m *per la funzione* $f(x)$*, e con 0 una funzione nulla per ogni valore di* x*, le funzioni considerate sono enti di un sistema lineare.*
Se si considerano solo le funzioni intere di grado n*, esse costituiscono un sistema lineare ad* $n+1$ *dimensioni; le funzioni intere di grado qualunque formano un sistema lineare ad infinite dimensioni.* ([Peano, 1888], str. 154, cvič. 81.2)

prostoru do druhého, pro které platí rovnosti

$$R(a+a') = Ra + Ra' \ , \qquad R(ma) = m(Ra) \ .$$

Jako základní vlastnosti homomorfismu uvedl rovnosti

$$R(ma + nb + \dots) = mRa + nRb + \dots \qquad \text{a} \qquad Ro = o \ .$$

Poznamenal, že každý endomorfismus (*sostituzione*) vektorového prostoru reálných čísel je právě násobení nějakým pevně zvoleným číslem. Jako příklady homomorfismů uvedl zobrazení přiřazující každému vektoru jeho m-násobek, resp. některou souřadnici vzhledem ke zvolené bázi.

Zajímavá je Peanova poznámka, že druhá rovnost v definici homomorfismu vyplývá pro racionální čísla z rovnosti první a že není-li číslo m racionální, je ji možno – za předpokladu spojitosti R – rovněž dokázat z rovnosti první.

G. Peano definoval rovnost homomorfismů, speciální homomorfismy jako je násobení pevným skalárem, identický a nulový homomorfismus, zavedl součet a složení homomorfismů a násobek homomorfismu skalárem. Poznamenal, že množina všech homomorfismů prostoru A do prostoru B je vektorový prostor.[20] Dále uvedl distributivní zákony pro součet a složení homomorfismů a asociativní zákon pro skládání. Věděl, že skládání není komutativní; zavedl pojem záměnné endomorfismy a připomněl, že endomorfismus, který představuje násobení skalárem, je záměnný s libovolným endomorfismem.

Na tomto místě by mohl G. Peano tvrdit, že množina všech endomorfismů vektorového prostoru tvoří dokonce lineární asociativní algebru. Tento pojem zavedl roku 1870 americký matematik Benjamin Peirce (1809–1880). Jeho práce *Linear associative algebra* byla roku 1870 vytištěna v malém počtu exemplářů a teprve o jedenáct let později vyšla časopisecky.[21]

Dále je dokázáno důležité tvrzení o bázi prostoru konečné dimenze:

Jestliže $a_1, \dots, a_n$ jsou lineárně nezávislé vektory n-rozměrného prostoru A a $b_1, \dots, b_n$ vektory nějakého prostoru B, potom existuje právě jediný homomorfismus R prostoru A do prostoru B, pro nějž je

$$Ra_1 = b_1, \ \dots, \ Ra_n = b_n \ .$$

Na základě této věty označil G. Peano homomorfismus, který zobrazuje vektory báze $a_1, \dots, a_n$ prostoru A po řadě na vektory $b_1, \dots, b_n$ prostoru B, symbolem

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} ;$$

hornímu řádku říkal čitatel, dolnímu jmenovatel. Poznamenal, že jako jmenovatel je možno zvolit libovolnou bázi prostoru A a že dva homomorfismy

[20] *Si deduce che le varie trasformazioni degli enti d'un sistema A in enti d'un sistema B costituiscono un sistema lineare.* ([Peano, 1888], str. 147)

[21] Viz American Journal of Mathematics 4(1881), 97–229; tuto práci G. Peano necitoval, asi ji neznal.

prostoru A je možno „převést na společného jmenovatele". Pomocí zavedeného označení vyjádřil G. Peano některé jednoduché vztahy a popsal některé pojmy (např. rovnost homomorfismů, jejich součet, složení a násobek homomorfismu skalárem). Jako příklad uvedl endomorfismus prostoru reálných čísel, který nenulové číslo b zobrazí na číslo c: libovolně zvolené číslo a je tímto endomorfismem zobrazeno na číslo

$$\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} a = \frac{c}{b} \cdot a \ .$$

Peanovo výše uvedené označení homomorfismu bylo patrně motivováno právě tímto příkladem.

Inverzní izomorfismus zavedl G. Peano takto:

Jestliže $R = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ *je homomorfismus* n*-rozměrného prostoru* A *do* n*-rozměrného prostoru* B *a vektory* $b_1, \dots, b_n$ *jsou lineárně nezávislé, definujeme*

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} \ .$$

Uvedl zde též rovnosti $R^{-1}R = 1$, $RR^{-1} = 1$ a $(R^{-1})^{-1} = R$.

G. Peano dále definoval mocninu R^n endomorfismu R, kde n je přirozené číslo, a uvedl rovnosti

$$R^m R^n = R^{m+n} \ , \qquad (R^m)^n = R^{mn} \ .$$

Jestliže existuje R^{-1}, definoval $R^{-n} = (R^{-1})^n$; dále položil $R^0 = 1$ (identita). Obě výše uvedené rovnosti potom platí pro jakákoli celá čísla m, n. Pro libovolný endomorfismus R zavedl exponenciální funkci

$$e^R = 1 + R + \frac{R^2}{2!} + \frac{R^3}{3!} + \dots$$

Jsou-li R a S záměnné endomorfismy, jsou záměnné rovněž R, S, $R+S$, RS, R^{-1}, e^R a je $e^{R+S} = e^R \cdot e^S$.

Poslední odstavec deváté kapitoly se vztahuje spíše k analýze. G. Peano zde definoval diferenciál zobrazení f vektorového prostoru A do vektorového prostoru B:

$$\begin{pmatrix} d & x' \\ & x \end{pmatrix} f(x) = \lim \frac{1}{h} \left(f(x + hx') - f(x) \right) \ .$$

Ukázal, že diferenciál je homomorfismus vzhledem k proměnné x' a tento homomorfismus nazval derivací zobrazení f.

Geometrického počtu vybudovaného v předchozích kapitolách využíval G. Peano v deváté kapitole k demonstraci pojmů a výsledků abstraktní teorie vektorových prostorů. Uvedl např., že formace prvního druhu na přímce, v rovině a v prostoru tvoří vektorové prostory dimenzí 2, 3 a 4, vektory v rovině a v prostoru vektorové prostory dimenzí 2 a 3 a formace druhého druhu v prostoru vektorový prostor dimenze 6. Jako příklady homomorfismů uvedl progresivní i regresivní součin formací atd. Velké bohatství materiálu je obsaženo ve cvičeních k této kapitole.

6. Závěr

Podobně jako Grassmannovy knihy [Grassmann, 1844, 1862], ani Peanovo *Calcolo geometrico* [Peano, 1888] nemělo velký ohlas a vliv na další vývoj matematiky. V recenzi [Loria, 1891] je sice zmíněna obecná definice vektorového prostoru, ale není zdůrazněn její význam:

Die Prüfung der Systeme … zeigt, dass zwischen ihnen eine auffällige Analogie besteht, und dass diese Systeme (die Herr Peano lineare nennt) gerade alle dadurch charakterisirt werden, dass man für jedes derselben die Gleichheit zwischen zwei Elementen des Systems und ihre Summe, ferner das Product eines Elementes des Systems mit einer ganzen Zahl definiren kann, und schliesslich kennt man ein gewisses Wesen, 0 genannt, dessen Product mit jedem Elemente des Systems gleich 0 ist. Auf diese Systeme kann man die obigen Untersuchungen über die Vectoren und die Formationen anwenden. Die Untersuchungen des Herrn Peano über die Transformationen der linearen Systeme sind einer besonderen Erwähnung wert wegen ihrer Allgemeinheit; ihr Nutzen wird ausserdem durch die hübschen Anwendungen bewiesen, welche der Verfasser davon auf die Geometrie macht.

Zajímavou reakci na Peanovo *Calcolo geometrico* nacházíme v článku *Two new works on Grassmann's geometrical calculus* z roku 1891. Alexander Ziwet (1853–1928) v něm ocenil právě závěrečné partie Peanovy knihy:

The last 45 pages of the book contain a chapter on the application of infinitesimal analysis to the geometrical configurations, and a chapter on linear transformations, with special reference to their application in geometry. This constitutes perhaps the most interesting, because the most original, part of Prof. Peano's work. ([Ziwet, 1891], str. 19)

Základy geometrického počtu a některá jeho užití vyložil G. Peano ještě v menším spisku *Gli elementi di calcolo geometrico* [Peano, 1891], který byl vzápětí přeložen do němčiny. Ve srovnání s knihou [Peano, 1888] zde však chybí partie o logických a množinových operacích a kapitola o obecné teorii vektorových prostorů. Teorii formací prvního až čtvrtého řádu vyložil G. Peano o pět let později v článku *Saggio di calcolo geometrico* [Peano, 1896], který byl přeložen do polštiny (1897) a němčiny (1898). Geometrickému počtu a jeho užití a vektorovému počtu jsou věnovány i některé partie Peanových knih *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (1887), *Lezioni di analisi infinitesimale* (1893, Vol. 2), *Formulario mathematico* (1908, Vol. 5) a časopisecké články *Teoremi su massimi e minimi geometrici, e su normali a curve e superficie*, *Trasformazioni lineari dei vettori di un piano*, *Analisi della teoria dei vettori* (viz [Peano, 1888, 1895, 1898], resp. Opere III., str. 37–40, 158–166, 187–207).

Roku 1897 navázal C. Burali-Forti ve své knize *Introduction à la géometrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann* na některé Grassmannovy myšlenky a ocenil rovněž Peanovo *Calcolo geometrico*, neboť tato kniha tyto ideje šířila srozumitelným způsobem. Nezdůraznil však Peanův axiomatický přístup.

Na Peanovu teorii vektorových prostorů navázal až roku 1901 další italský matematik Salvatore Pincherle (1853–1936) ve své knize *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi* [Pincherle, 1901], která je někdy považována za první učebnici funkcionální analýzy (viz [Medvedev, 1973]).

C. Burali-Forti a R. Marcolongo vyšli roku 1909 v knize *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla fisica matematica* z axiomatické definice vektorového prostoru. S. Pincherle, C. Burali-Forti a R. Marcolongo výrazně přispěli k rozšíření těchto myšlenek v Itálii a ve Francii.

Německý matematik a fyzik Hermann Weyl (1885–1955) přidal roku 1918 ve své slavné knize *Raum. Zeit. Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie* [Weyl, 1918] k axiomům vektorového prostoru axiomy o vztahu bodů a vektorů a axiomy skalárního součinu, a dospěl tak k axiomatickému popisu afinního a eukleidovského prostoru vybudovaného na pojmu vektorový prostor.

Významný německý matematik Felix Klein (1849–1925) v knize o vývoji matematiky v 19. století chybně poznamenal, že se G. Peano omezil na trojrozměrný prostor.[22]

Teprve Nicolas Bourbaki upozornil na to, že G. Peano podal ve své knize *Calcolo geometrico* základy teorie vektorových prostorů včetně axiomatické definice reálného vektorového prostoru, a to téměř v současném tvaru.[23]

V Peanových vybraných spisech vydaných v Římě v letech 1957 až 1959 je z knihy *Calcolo geometrico* přetištěna jen úvodní kapitola o logických a množinových operacích (Opere II., str. 3–19). Je zde však uveden jeho krátký spisek *Gli elementi di calcolo geometrico* z roku 1891 (Opere III., str. 41–71).

Michael J. Crowe se roku 1967 v knize *A History of Vector Analysis* jen krátce zmínil o G. Peanovi jako o pokračovateli H. Grassmanna a propagátorovi jeho myšlenek (viz [Crowe, 1967], str. 235–236), ale nezdůraznil význam základů

---

[22] *Hier sei nur bemerkt, daß sich Peano in seinem Buche auf den Raum von 3 Dimensionen beschränkt und den Physikern so weit entgegenkommt, daß er die Bezeichnungen Vektor usw. aufnimmt.* ([Klein, 1927], 2. díl, str. 48)

[23] Viz N. Bourbaki: *Algèbre multilinéaire*, Paris, 1948. *Peano, l'un des créateurs de la méthode axiomatique, et l'un des premiers mathématiciens aussi à apprécier à sa valeur l'oeuvre de Grassmann, donne dès 1888 … la définition axiomatique des espaces vectoriels (de dimension finie ou non) sur le corps des réels, et, avec une notation toute moderne, des applications linéaires d'un tel espace dans un autre …* ([Bourbaki, 1948], str. 146) V anglickém překladu: *Peano, one of the creators of the axiomatic method, and one of the first mathematicians also to appreciate at its true worth the work of Grassmann, gives already in 1888 … the axiomatic definition of vector spaces (whether of finite dimension or not) over the field of reals, and, with a fully modern notation, linear maps from such a space to another …* . ([Bourbaki, 1960], angl. verze, str. 66)

teorie vektorových prostorů, které jsou podány v deváté kapitole Peanovy knihy *Calcolo geometrico.*

Roku 1973 upozornil Antonie Frans Monna (1909–1995) v drobnější knize *Functional Analysis in Historical Perspective* na tu skutečnost, že G. Peano uvedl dokonce příklad vektorového prostoru nekonečné dimenze.

Peano remarks that the dimension may be infinite. ([Monna, 1973], str. 119)

A. F. Monna se ve druhé kapitole své knihy soustředil na otázky vzniku a vývoje pojmu vektorový prostor,[24] ale nezmínil se např. o významu Peanovy věty o bázi. Monnova tvrzení o tom, že G. Peano dokázal existenci báze a ukázal vztah homomorfismů a matic neodpovídají skutečnosti.

For finite-dimensional spaces he proves the existence of a basis.

The connection with matrices is established by means of the coordinates. ([Monna, 1973], str. 119, 120)

Roku 1973 otisknul Hubert C. Kennedy (nar. 1931) anglický překlad nulté a první kapitoly Peanova spisu *Calcolo geometrico* v knize *Selected works of Giuseppe Peano* ([Pea2], str. 75–100); najdeme zde i anglické překlady Peanových článků *Sur les systèmes linéaires* a *Saggio di calcolo geometrico* z roku 1896 ([Pea2], str. 167–168, 169–188). H. C. Kennedy se Peanovým životem a dílem zabýval v té době v pracích [Kennedy, 1972], [Kennedy, 1973] a [Kennedy, 1974].

Roku 1980 hodnotil H. C. Kennedy mimo jiné i Peanovo *Calcolo geometrico* v knize *Peano. Life and Works of Giuseppe Peano* (viz [Kennedy, 1980], str. 21–24).

Roku 2000 vyšla Peanova kniha *Calcolo geometrico* v anglickém překladu L. C. Kannenberga (nar. 1924).

---

[24] Viz [Monna, 1973], kapitola *The development of the notion of a linear space*, str. 87–121; o Peanově knize [Peano, 1888] viz str. 114–121.