VII. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

(pokračování)

Problematika soustav lineárních rovnic ve starých civilizacích a ve středověku byla předmětem druhé kapitoly této knihy, o řešení soustavy lineárních rovnic se čtvercovou regulární maticí pomocí Cramerova pravidla bylo pojednáno v kapitole o determinantech.

V této kapitole se k problematice soustav lineárních rovnic vrátíme. Budeme věnovat pozornost zejména období, které začíná krátce po polovině 19. století a končí moderní exaktní formulací nutné a postačující podmínky pro řešitelnost nehomogenní soustavy lineárních rovnic a moderní formulací věty o tvaru a dimenzi množiny všech jejích řešení na počátku 20. století.

Objev Cramerova pravidla, jeho úspěšné rozšíření a obliba, to vše odvádělo poměrně dlouhou dobu pozornost matematiků od problematiky týkající se obecné nehomogenní soustavy lineárních rovnic se čtvercovou singulární maticí, resp. s maticí obdélníkovou. Tento stav se změnil až krátce po polovině 19. století.

Dnes dobře víme, že podstatnou roli pro zformulování nutné a postačující podmínky řešitelnosti takovéto soustavy i pro popis množiny všech jejích řešení hraje pojem hodnosti matice. Ten však byl vytvořen až koncem sedmdesátých let 19. století (a nikoliv pro matice). Matematici nahrazovali chybějící pojem hodnosti různě formulovanými požadavky. Pokoušeli se vyjádřit ekvivalentní podmínku pro řešitelnost nehomogenní soustavy lineárních rovnic pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů matice této soustavy a příslušné rozšířené matice; i tyto pojmy však bylo třeba nejprve zavést. Vše bylo navíc komplikováno tím, že byly často zkoumány soustavy rovnic nad oborem integrity celých čísel.

C. G. J. Jacobi (1804–1851) napsal roku 1841 v závěru 7. paragrafu své práce *De formatione et proprietatibus Determinantium* následující slova:

Determinante igitur evanescente inter varios adhuc casus naturae maxime diversae distinguendum est et pro singulis criteria algebraica afferenda erunt. Quod tamen pro numero quocunque aequationum linearium paullo prolixum videtur negotium.[1] (Werke III., str. 370)

Tvrzení podávající nutnou a postačující podmínku pro řešitelnost soustavy lineárních rovnic bývá v učebnicích označováno jako věta Frobeniova, Kroneckerova, Capelliova, Kroneckerova-Capelliova apod. Jak uvidíme, správnější označení by bylo věta Dodgsonova.

---

[1] V německém překladu: *Man hat also, wenn die Determinante verschwindet, noch eine Mannigfaltikeit von Fällen sehr verschiedener Natur zu unterscheiden, und man müsste algebraische Kriterien für die einzelnen Fälle angeben. Das scheint jedoch für eine beliebige Anzahl linearer Gleichungen recht weitläufig zu sein.* ([Jacobi, 1841], v německém překladu na str. 20)

Základní informace a bibliografické údaje o problematice soustav lineárních rovnic najdeme ve třetím, čtvrtém a pátém svazku Muirovy rozsáhlé monografie o vývoji teorie determinantů:

T. Muir: *The theory of determinants in the historical order of development*, I, II, III, IV (1890/1906, 1911, 1920, 1923),

T. Muir: *Contributions to the theory of determinants 1900–1920* (1930).

Ve třetím, čtvrtém a pátém svazku Muirovy monografie to jsou po řadě tyto kapitoly:

Determinants and linear equations, from 1861 to 1878 (11 stran),

Determinants and linear equations, from 1880 to 1898 (11 stran),

Determinants and linear equations, from 1878 to 1918 (13 stran).

1. Gaussův eliminační algoritmus

Důležitým úkolem počátku 19. století bylo nalézt rozumnou metodu řešení soustav lineárních rovnic, která bude efektivnější než Cramerovo pravidlo. V řadě konkrétních situací, když bylo zapotřebí vypočítat řešení soustavy většího počtu lineárních rovnic, bylo použití Cramerova pravidla numericky velmi náročné nebo dokonce nemožné.

Studium problémů rozvíjející se astronomie, geodézie a dalších disciplín vedlo k řešení soustav lineárních rovnic; často se jednalo o soustavy s větším počtem rovnic a menším počtem neznámých, které řešení v exaktním smyslu neměly. Koeficienty těchto rovnic byly totiž s větší či menší přesností zjištěny při astronomických pozorováních, geodetických měřeních apod.; řešení takovýchto „neřešitelných“ soustav rovnic však bylo třeba najít. Hledaná řešení totiž vyjadřovala reálně existující veličiny, které bylo nutno vypočítat ze soustavy rovnic, jejichž koeficienty nebyly zjištěny přesně. Pozornost přitahovaly diference mezi levými a pravými stranami rovnic po dosazení nějakých proměnných hodnot za neznámé. Tyto diference bylo třeba v rozumném smyslu minimalizovat, a najít tak hodnoty neznámých.

Problémy tohoto typu řešil již L. Euler (1707–1783) roku 1749 v práci *Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter* a P. S. Laplace (1749–1827) roku 1799 v monografii *Traité de mécanique céleste.* L. Euler se snažil minimalizovat maximum absolutních hodnot diferencí, P. S. Laplace jejich součet.

A. M. Legendre (1752–1833) rozpracoval začátkem 19. století zajímavou metodu, která minimalizuje součet čtverců zmíněných diferencí. Tuto myšlenku prezentoval roku 1806 v práci *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des cométes.* Byl to právě on, kdo dal tomuto početnímu postupu jméno metoda nejmenších čtverců.

C. F. Gauss (1777–1855) měl v té době za sebou velmi úspěšný výpočet dráhy planetky Ceres, kterou objevil 1. ledna 1801 italský astronom Giuseppe

Piazzi (1746–1826). C. F. Gauss vypočetl dráhu tohoto tělesa pouze ze znalosti několika málo naměřených poloh (oblouk o délce 9°), jež byly k dispozici (planetka se mezitím pozorovatelům ztratila). Při výpočtu užil základní myšlenku metody nejmenších čtverců, kterou nezávisle na A. M. Legendreovi rozvíjel již od roku 1795. V závěru práce *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus solem ambientiem* z roku 1809 tuto problematiku v určitém smyslu rekapituloval a uvedl řadu poznámek o řešení soustav lineárních rovnic.

Práci *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis* z roku 1810 věnoval C. F. Gauss výpočtu dráhy planetky Pallas, kterou objevil v Brémách 28. března 1802 Wilhelm Olbers (1758–1840). Na základě astronomických pozorování této planetky sestavil 12 rovnic o 6 neznámých, popsal postup řešení problému, provedl eliminaci neznámých – souvisela s metodou nejmenších čtverců – a dospěl k „trojúhelníkové soustavě rovnic“. Obdobnými problémy se zabýval i ve druhé části své práce *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* z roku 1823 (viz [Gauss, 1821]). Poznámky uvedené ve výše zmíněných pracích popisují mimo jiné postup, který je znám jako Gaussův eliminační algoritmus (a rovněž transformaci kvadratické formy na kanonický tvar, tj. na součet čtverců). Základní myšlenka tohoto postupu (realizovaná pro regulární čtvercové matice) byla však známa, jak jsme již viděli, na počátku našeho letopočtu ve staré Číně.[2]

Poznamenejme ještě na okraj, že C. F. Gauss rozpracoval i metodu iterací a že obdobnými myšlenkami se před polovinou 19. století zabýval C. G. J. Jacobi v práci *Über eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden linearen Gleichungen* (1845). K této problematice byl přiveden svými fyzikálními výzkumy malých oscilací.

2. Padesátá léta 19. století

První učebnice teorie determinantů pojednávají o soustavách lineárních rovnic většinou jen ve vztahu ke Cramerovu pravidlu.

William Spottiswoode (1825–1883), autor první učebnice o determinantech nazvané *Elementary theorems relating to determinants*, věnoval v tomto textu z roku 1851 pozornost i soustavám lineárních rovnic; jejich problematiku dal do souvislosti s determinanty. V pátém paragrafu uvedl tyto dvě věty (Theorem XII., Theorem XIII.):

A determinant of the order n is in general the result of the elimination of n variables from n linear equations, whose coefficients are the constituents of the determinant.

---

[2] O Gaussových matematických výsledcích souvisejících s pohybem nebeských těles viz např. [Klein, 1926], 1. díl, str. 7–24, [Sheynin, 1979] a [Chabert, 1999]. O metodě nejmenších čtverců viz např. [Linnik, 1958]. Zajímavé informace podává též Herglotzův přehledový článek *Bahnbestimmung der Planeten und Kometen*, [EMW], díl VI.2.

If a determinant of the nth order vanishes, a system of n homogeneous linear equations, the coefficients of which are the constituents of the given determinant, may always be established. ([Spottiswoode, 1851], str. 236)

Francesco Brioschi (1824–1897) zařadil ve své monografii *La teorica dei determinanti e le sue principali applicationi* z roku 1854 partii o soustavách lineárních rovnic hned za základní vlastnosti determinantů.[3]

3. Šedesátá léta 19. století

V šedesátých letech 19. století se obecným zkoumáním řešitelnosti soustav lineárních rovnic zabývalo jen několik málo matematiků. Zvažovali, jakou roli hraje nulovost a nenulovost subdeterminantů matice soustavy a matice rozšířené, problém však většinou neřešili v plné obecnosti.

Henry John Stanley Smith (1826–1883) zavedl roku 1861 v třicetistránkové práci *On systems of linear indeterminate equations and congruences* pro soustavu lineárních rovnic pojem matice soustavy a matice rozšířená (*unaugmented array*, *augmented array*). Zabýval se zejména případem, kdy je více rovnic než neznámých (*redundant system of linear equations*).

Nicola Trudi (1811–1884) věnoval v učebnici *Teoria de' determinanti e loro applicazioni* z roku 1862 pozornost i soustavám lineárních rovnic. V kapitole *Risoluzione di un sistema di equazioni lineari* (druhá část knihy) řešil mimo jiné i případ soustavy se čtvercovou singulární maticí; motivován byl Cramerovým pravidlem. Zabýval se situací, kdy je jmenovatel zlomků, které by měly vyjadřovat neznámé, roven nule a pro jednu neznámou je nulový i čitatel. Ukázal, že má-li být soustava řešitelná, musí pro ostatní neznámé platit totéž, a dokázal, že alespoň jedna z rovnic je důsledkem zbývajících. Podobný výsledek uvedl roku 1864 Fortunato Padula (1815–1881) v článku *Ricerche di geometria analitica*.

Richard Baltzer (1818–1887) prezentoval problematiku soustav lineárních rovnic v devátém paragrafu své slavné monografie *Theorie und Anwendungen der Determinanten* z roku 1857. V dalších vydáních tento paragraf postupně rozšiřoval. Mimo jiné dal do souvislosti případ nehomogenní soustavy n lineárních rovnic o n neznámých a případ homogenní soustavy n lineárních rovnic o $n+1$ neznámých.

Pro homogenní soustavu se čtvercovou maticí řádu n ukázal toto: má-li matice soustavy nenulový subdeterminant řádu k a všechny subdeterminanty větších řádů jsou nulové, pak má řešení uvažované soustavy (v naší terminologii) dimenzi $n-k$. Ve čtvrtém vydání začíná tato partie takto:

Wenn die Werthe $x_1, \,.\,.\,, x_n$ *dem System von* $n-1$ *homogenen Gleichungen*

$$a_{i1}x_1 + \,.\,.\, + a_{i,n-1}x_{n-1} + a_{in}x_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\,, n-1)$$

[3] O Spottiswoodeově a Brioschiově učebnici bylo pojednáno již ve třetí kapitole o determinantech.

genügen, so genügen die Quotienten $x_1 : x_n,\ x_2 : x_n,\ ..$ *dem System von* $n-1$ *nicht homogenen Gleichungen*

$$a_{i1}y_1 + \ .. \ + a_{i,n-1}y_{n-1} + a_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ .. \ , n-1)$$

für ebensoviel Unbekannte $y_1, \ . \ . \ , y_{n-1}$. *Die Auflösung eines Systems von nicht homogenen linearen Gleichungen ist daher enthalten in der Auflösung eines congruenten Systems von homogenen linearen Gleichungen.*
([Baltzer, 1857], vydání z r. 1875, str. 65)

Charles Lutwidge Dodgson

Nejvýraznějším způsobem přispěl k problematice soustav lineárních rovnic v šedesátých letech 19. století Ch. L. Dodgson (1832–1898), který byl široké veřejnosti známý pod pseudonymem Lewis Carroll. Jeho výsledky týkající se soustav lineárních rovnic předčily výsledky všech prací, které byly o tomto tématu sepsány v letech šedesátých a sedmdesátých, a většiny prací let osmdesátých a devadesátých.

Roku 1867 publikoval knihu *Elementary treatise on determinants with their application to simultaneous linear equations and algebraical geometry.* V úvodu napsal:

A complete analysis of a system of simultaneous Linear Equations has always appeared to me to be a desideratum in Algebra: the subject is only touched on in Baltzer; a more complete attempt will be found in Peacock's Algebra, but I have nowhere seen anything like an exhaustive analysis. This chapter aims at furnishing this, but it has been so often altered and re-written that I put it forth at last, hoping, rather than expecting, that it will be found complete and satisfactory. ([Dodgson, 1867], str. v)

První kapitola *Laws of arrangement* (5 stran) má úvodní charakter, druhá *Analysis of determinants* (26 stran) podává základní informace o determinantech. Třetí kapitola nazvaná *Analysis of equations* (28 stran) je věnována podrobnému rozboru problematiky řešitelnosti soustav n lineárních rovnic o m neznámých. Matice soustavy rovnic je zde nazývána *V-Block*, rozšířená matice *B-Block*; z nich jsou vytvářeny subdeterminanty maximálního možného řádu, tzv. *principal Minors.* Jsou-li všechny tyto subdeterminanty rovny nule, nazývá se příslušná matice *evanescent.* Poznamenejme, že absolutní členy jsou v rovnicích zapsány na stejné straně s neznámými, na pravých stranách rovnic jsou vždy nuly. Symbolem V označil Ch. L. Dodgson determinant V-Bloku (pokud je čtvercový), symbolem $|V|$ některý ze subdeterminantů maximálního možného řádu a symbolem $||V||$ všechny subdeterminanty maximálního možného řádu. V tomto smyslu psal např. $V = 0$, $|V| = 0$, $||V|| = 0$ apod.

Ve třetí kapitole je dokázáno 19 tvrzení, která se týkají řešitelnosti a tvaru řešení jednotlivých typů soustav. Výklad se odvíjí od případu n lineárních rovnic o n neznámých s regulární maticí:

If there be n Equations containing n Variables, and if $V \neq 0$: the Equations are consistent, and there is only one set of values for the Variables.
([Dodgson, 1867], str. 35)

Důkaz je proveden nejprve pro $n = 2$, potom pro $n > 2$; v podstatě se odvozuje Cramerovo pravidlo; Cramerovo jméno se zde však nevyskytuje. Potřebnou symboliku pro $n = 2$, resp. pro obecný případ autor zavedl takto:

… the Determinants of the principal Minors of the B-Block, formed by successively erasing the columns containing the Variables and the column of constants, be represented by the symbols D_1, D_2, V; …

… the Determinants of the principal Minors of the B-Block be represented, as before, by $D_1, \dots D_n, V$. ([Dodgson, 1867], str. 35–36)

V důsledku první věty Ch. L. Dodgson vyjadřuje Cramerovo pravidlo ve tvaru ([Dodgson, 1867], str. 38)

$$\frac{x_1}{D_1} = \frac{-x_2}{D_2} = \&\text{c.} = \frac{(-1)^n}{V} \ .$$

Na několika místech (v poznámkách pod čarou) ukazuje konkrétní číselné příklady.

Druhé tvrzení se týká soustavy n lineárních rovnic o $n+r$ neznámých s maticí hodnosti n:

If there be n Equations containing $\overline{n+r}$ Variables, and if $|V| \neq 0$: the Equations are consistent, and, if any non-evanescent principal Minor of the V-Block be selected, the r Variables, whose coefficients are not contained in it, may have arbitrary values assigned to them; and, for each such set of arbitrary values, there is only one value for each of the remaining Variables.
([Dodgson, 1867], str. 39)

Pro případ homogenní soustavy a $r = 1$ uvedl Ch. L. Dodgson tuto modifikaci plynoucí z Cramerova pravidla ([Dodgson, 1867], str. 39):

$$\frac{x_1}{D_1} = \frac{-x_2}{D_2} = \&\text{c.} = \frac{(-1)^n x_{n+1}}{D_{n+1}} \ .$$

V následujících deseti tvrzeních (a připojených důsledcích) řešil další případy; 13. až 19. tvrzení (a jejich důsledky) snadno vyplývají z předchozích vět; uvedeny jsou patrně z didaktických důvodů. Srovnejme např. 3. a 13. tvrzení.

If there be n Equations containing $\overline{n-1}$ Variables, and if $B \neq 0$; the Equations are inconsistent. ([Dodgson, 1867], str. 40)

If there be n Equations containing $\overline{n-1}$ Variables; and if they be consistent: $B = 0$. ([Dodgson, 1867], str. 52)

Celá třetí kapitola je napsána velmi srozumitelně a přehledně, porozumění textu nedělá žádný problém; její shrnutí je v krátké kapitole čtvrté nazvané *Tests for consistency of equations* (3 strany). Nejprve jsou zde vysvětleny pojmy *postačující podmínka*, *nutná podmínka*, *sufficient test* a *necessary test.*

If there be a condition, or set of conditions, such that, when it is all fulfilled, a certain other condition is also fulfilled: it is said to be **a sufficient test** *of that other condition.*

And if it be such that, when any part of it is not fulfilled, a certain other condition is not fulfilled: it is said to be **a necessary test** *of that other condition.*

CONVENTION. *When a condition, or set of conditions, is said to be a test of a certain other condition, let it be understood that it is sufficient and necessary, unless it be otherwise stated.* ([Dodgson, 1867], str. 60)

Nutná a postačující podmínka pro řešitelnost soustavy lineárních rovnic je vyjádřena takto:

If there be given n Equations, not all homogeneous, containing Variables: a test for their being consistent is that either, first, there is one of them such that, when it is taken along with each of the remaining Equations successively, each pair of Equations, so formed, has its B-Block evenescent; or, secondly, there are m of them, where m is one of the number 2 ..... n, which contain at least m Variables, and have their V-Block not evanescent, and are such that, when they are taken along with each of the remaining Equations successively, each set of Equations, so formed, has its B-Block evanescent.
([Dodgson, 1867], str. 61)

V prvním apendixu nazvaném *Method of analysing a given set of simultaneous linear equations* (6 stran) demonstroval Ch. L. Dodgson praktické užití své teorie – na příkladech, které jsou dále uvedeny, ukázal, jak postupovat podle výše uvedené věty.

$$\begin{aligned} u + v - 2x + y - z - 6 &= 0 \\ 2u + 2v - 4x - y + z - 9 &= 0 \\ u + v - 2x - 5 &= 0 \\ u - v + x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - y + 7 &= 0 \\ 6x - 2y + 14 &= 0 \\ x + y + 1 &= 0 \\ x + 5y - 3 &= 0 \\ 5x + y + 9 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2u + v + 2x + y + 3z &= 0 \\ 5u + 3v - 4x + 3y - 6z &= 0 \\ u + v - 8x + y - 12z &= 0 \end{aligned}$$

Přehled všech případů, které vyšetřil ve třetí kapitole, uvedl Ch. L. Dodgson ve dvou srozumitelných tabulkách v závěru své knihy pod názvem *Tabular view of analysis of equations* ([Dodgson, 1867], str. 134–137), a to jednak pro nehomogenní, jednak pro homogenní soustavy. Shrnutí obecných výsledků pak prezentoval na následujících stránkách pod názvem *Formulae. Part I. – Algebraical* ([Dodgson, 1867], str. 138–139).

4. Sedmdesátá léta 19. století

V sedmdesátých letech 19. století se problematikou soustav lineárních rovnic zabývalo několik dalších matematiků. Z nich jsou většinou připomínáni jen G. Fontené (1848–1923), E. Rouché (1832–1910) a G. Frobenius (1849–1917). T. Muir (1844–1934) uvedl ve třetím svazku své bibliografie teorie determinantů z tohoto období celkem 11 prací věnovaných soustavám lineárních rovnic. Výraznějších výsledků dosaženo nebylo, autoři věnovali pozornost nulovosti a nenulovosti subdeterminantů matice soustavy a matice rozšířené, řešili některé speciální případy. Dodgsonovy výsledky tito matematici neznali, výsledky britské matematiky se totiž na evropský kontinent dostávaly se značným zpožděním.

G. Dostor (1820–?) věnoval soustavám lineárních rovnic v knize *Éléments de la théorie des déterminants* z roku 1877 druhou kapitolu druhé části knihy (strany 89–102). Vyšel od soustavy tří rovnic o třech neznámých; omezil se více méně na Cramerovo pravidlo, na homogenní soustavy n rovnic o n neznámých s nulovým determinantem a na otázku n nehomogenních rovnic o $n-1$ neznámých. Ani matice, ani ekvivalentní podmínka řešitelnosti obecné nehomogenní soustavy se zde neobjevily; druhé vydání této učebnice z roku 1883 o soustavách rovnic nic nového nepřineslo.

Podobně jako Ch. L. Dodgson postupoval např. Jan Versluys (1845–1920) roku 1870 v práci *Discussion complète d'un système d'équations linéaires*. Vyšetřoval případy nehomogenní soustavy se čtvercovou maticí řádu 3 (rozlišil osm různých případů), resp. 4 (dvacet pět různých případů).

Problematika soustav lineárních rovnic se objevila v několika dalších publikacích, které však podstatný pokrok nepřinesly: V. Valeriano sepsal roku 1871 práci *Sistema generale di n equazioni lineari fra n incognite*, P. Donnini roku 1875 článek *Un sistema particolare d'equazioni lineari*, Charles Robert Méray (1835–1911) roku 1875 práci *Sur la discussion d'un système d'équations linéaires simultanées*, Jean Gaston Darboux (1842–1917) roku 1876 článek *Sur la théorie de l'élimination entre deux équations à une inconnue*, Ventéjols roku 1877 práci *Sur un problème comprenant la théorie de l'élimination* a Enrico D'Ovidio (1842–1933) roku 1877 článek *Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari*. C. Biehler se ve své disertaci *Sur la théorie des équations* z roku 1878 zabýval obdobnými problémy; shrnul v ní to, co bylo na evropském kontinentě v té době známo.

Georges Fontené a Eugene Rouché

Někdy je v souvislosti s teorií soustav lineárních rovnic citován článek *Théorème pour la discussion d'un système de n équations du premier degré à n inconnues* z roku 1875, jehož autorem je G. Fontené. Hlavní výsledek této práce je podán skoro na celé stránce ([Fontené, 1875], str. 484–485), ale není příliš srozumitelný. Jak je vidět již z jejího názvu, G. Fontené se omezil, podobně jako V. Valeriano roku 1871, na případ, kdy je matice soustavy čtvercová.

V souvislosti s vývojem této problematiky bývají rovněž citovány práce *Sur la discussion des équations du premier degré* z roku 1875 a *Note sur les équations linéaires* z roku 1880, jejichž autorem je francouzský matematik E. Rouché. V první práci se autor věnoval soustavě lineárních rovnic se čtvercovou maticí, významnější je práce druhá, v níž zavedl pojmy

- *déterminant principal* pro nenulový subdeterminant největšího možného řádu v matici soustavy,
- *déterminant caractéristiques* pro subdeterminant rozšířené matice, který není obsažen v matici soustavy a má jako svůj primární subdeterminant nějaký subdeterminant principální ([Rouché, 1880], str. 221–223).

Dále je v této práci formulována … *la proposition qui renferme toute la théorie des équations linéaires*, která říká, že soustava n lineárních rovnic o m neznámých je řešitelná právě tehdy, když jsou všechny charakteristické determinanty rovny nule. Nastane-li tento případ, pak má soustava jediné řešení právě tehdy, jsou-li řády všech charakteristických determinantů větší než počet neznámých. Podmínka řešitelnosti soustavy lineárních rovnic však příliš srozumitelně vyjádřena není. V anglickém překladu uvedl T. Muir tuto větu takto:

In order that n linear equations containing m unknowns may be consistent it is necessary and sufficient that all the 'characteristic determinants' of the set shall vanish; and, if this condition be satisfied, the set has only one solution or is indeterminate according as the order of the said determinants is greater or less than m. ([Muir, 1906], díl III., str. 91)

E. Rouché však neukázal, jak najít příslušný principiální subdeterminant, v konkrétních příkladech není tedy jeho výsledek příliš užitečný.

G. Fontené se k problematice soustav lineárních rovnic vrátil roku 1900 v práci *Réclamation à propos du théorème dit "de Rouché"*. Poukázal na to, že tvrzení označované jako Rouchéova věta by se mohlo stejně dobře jmenovat Fontenéova věta. V té době však již byly o řešitelnosti soustav lineárních rovnic publikovány lepší práce.

Georg Ferdinand Frobenius

Ve třetím paragrafu práce *Ueber das Pfaffsche problem* z roku 1875 G. Frobenius uvažoval homogenní soustavu m lineárně nezávislých lineárních rovnic o n neznámých (je tedy $n > m$). Zapisoval ji ve tvaru

$$a_1^{(\mu)}u_1 + \cdots + a_n^{(\mu)}u_n = 0 \ , \qquad (\mu = 1, \dots m) \ .$$

Ukázal, že lineární kombinace dvou řešení je opět řešením, uvažoval lineárně nezávislá řešení a došel nakonec k tomu, že existuje (v naší současné řeči) $n - m$ lineárně nezávislých řešení (Abhandlungen I., str. 255–258).

V delší práci *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten* z roku 1879, v níž je definován pojem hodnosti číselného systému (obdélníkové matice), se G. Frobenius věnoval i soustavám lineárních rovnic. V osmém paragrafu nazvaném *Lineare Gleichungen* odvodil některé výsledky o soustavách lineárních rovnic z poznatků o lineárních formách. Výsledky týkající se lineárních forem (s celočíselnými koeficienty) zformuloval do několika vět a napsal:

Diese Sätze bilden die Grundlage für die Theorie der (ganzzahligen) linearen Gleichungen. ([Frobenius, 1879], str. 169)

Tvrzení o soustavách lineárních rovnic uvedl G. Frobenius v tomto tvaru:

III. Damit mehrere Lösungen von m unabhängigen homogenen linearen Gleichungen zwischen n Unbekannten ein Fundamentalsystem bilden, ist nothwendig und hinreichend, dass die Determinanten $(n-m)$ten Grades, die sich aus ihnen bilden lassen, keinen Divisor gemeinsam haben.
([Frobenius, 1879], str. 171)

IV. Damit mehrere nicht homogene lineare Gleichungen durch ganzzahlige Werthe der Unbekannten befriedigt werden können, ist nothwendig und hinreichend, dass der Rang l und der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten $l$ten Grades des Systems der Coefficienten der Unbekannten nicht geändert wird, wenn zu diesem System noch die constanten Glieder der Gleichungen hinzugefügt werden. ([Frobenius, 1879], str. 171–172)

Frobeniovo zpracování není ani jednoduché, ani příliš srozumitelné.

Roku 1905 se G. Frobenius k soustavám lineárních rovnic vrátil v článku *Zur Theorie der linearen Gleichungen*; nehomogenní soustavu převedl na soustavu homogenní takto:

Sollen die nichthomogenen Gleichungen

$$(16.) \qquad a_{\alpha 0} = a_{\alpha 1}x_1 + \cdots + a_{\alpha n}x_n \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$$

eine Lösung besitzen, so müssen die homogenen Gleichungen

$$a_{\alpha 0}x_0 + a_{\alpha 1}x_1 + \cdots + a_{\alpha n}x_n = 0$$

eine Lösung haben, worin x_0 von Null verschieden ist.
(Abhandlungen III., str. 353)

Nutnou a postačující podmínku existence řešení soustavy lineárních rovnic zformuloval takto:

Ist nun r' der Rang der Matrix R

$$(17.) \qquad a_{\alpha 0}, a_{\alpha 1}, \ldots a_{\alpha n} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$$

und r der der Matrix B

$$(18.) \qquad a_{\alpha 1}, \ldots a_{\alpha n}\ ,$$

... Die Gleichungen (16.) haben also eine Lösung, wenn $r' = r$ ist, aber keine, wenn $r' = r + 1$ ist. (Abhandlungen III., str. 353)

Na počátku 20. století však již byla teorie řešení soustav lineárních rovnic zpracována na podstatně vyšší úrovni.

5. Osmdesátá a devadesátá léta 19. století

V osmdesátých a devadesátých letech 19. století se soustavám lineárních rovnic věnovalo již více matematiků, tato problematika se objevila i v několika učebnicích. T. Muir uvedl ve své rozsáhlé monografii práce asi 25 autorů včetně šesti učebnic. Vyskytují se v nich již maticové úpravy v duchu Gaussovy eliminace, upřesňuje se vyjádření ekvivalentní podmínky řešitelnosti soustavy lineárních rovnic. Stále však hrají velkou roli determinanty, pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů je ještě poměrně dlouho vyjadřována hodnost matice.

Diedrich August Klempt pojednal o soustavách lineárních rovnic v knize *Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra* z roku 1880, a sice ve třetí části nazvané *Lineare Gleichungen und lineare Funktionen* (str. 148–183).[4] Postupně zkoumal n lineárních rovnic o n neznámých s nenulovým determinantem (*die Determinante des Systems der Gleichungen*), $n+1$ rovnic o n neznámých, $n+m$ rovnic o n neznámých, m rovnic o $m+\nu$ neznámých. Nakonec vyšetřoval případ n rovnic o n neznámých s nulovým determinantem; symboly $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ značí determinanty, které vystupují v Cramerově pravidle.

Verschwindet also die Determinante eines Systems von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten, so werden die Gleichungen durch endliche Werthe nur dann befriedigt, wenn auch $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$ verschwinden. In diesem Falle werden die Gleichungen durch jeden beliebigen Werth der Unbekannten befriedigt. ([Klempt, 1880], str. 161)

V následujících paragrafech třetí části knihy se autor věnoval homogenním rovnicím, lineárním homogenním funkcím a jejich lineárním transformacím. Lineární rovnice chápal jako lineární homogenní funkce, pro determinant matice soustavy lineárních rovnic proto užíval termín *Funktionaldeterminante.* Jeden z důležitých výsledků zformuloval takto:

Verschwinden die Funktionaldeterminante eines Systems linearer homogenener Gleichungen und alle Unterdeterminanten $(n-1)$ter, $(n-2)$ter ... bis $(n-k+1)$ter Ordnung, und verschwindet wenigstens eine Unterdeterminante $(n-k)$ter Ordnung nicht, so existiren zwischen den Funktionen k identische Gleichungen. ([Klempt, 1880], str. 175)

A. Schmitz v práci *Bemerkungen über die Anwendbarkeit der französischen Methode zur Auflösung linearer Gleichungen* převáděl řešení soustavy n rovnic na řešení soustavy $n-1$ rovnic, tu na řešení soustavy $n-2$ rovnic atd. Ukazoval též, že pokud je některá z těchto soustav neřešitelná, pak prezentovaná metoda selhává.

C. Biehler publikoval sice v článku *Sur les équations linéaires* z roku 1880 hlubší výsledky než ve své disertační práci z roku 1878, ale výraznější přínos jeho práce nemá. Mimo jiné řešil případ, kdy počet rovnic je menší než počet neznámých, dokazoval i výsledky, které zveřejnil Ventéjols roku 1877.

---

[4] První část je věnována kombinatorice, druhá determinantům.

Zajímavé je, že se nezmiňoval o pracích Rouchéových. V závěru článku převáděl kvadratické formy na kanonický tvar (součet čtverců).

Gastone Gohierre de Longchamps (1842–1906) se zabýval soustavami lineárních rovnic ve své obsáhlé učebnici *Algébre* z roku 1883. Věnoval jim kapitolu *Équations linéaires* (str. 88–111), kterou T. Muir charakterizoval těmito slovy:

This is a fuller and more serviceable exposition of the subject than is to be found in any previous text-book of determinants. ([Muir, 1906], díl IV., str. 99)

G. G. de Longchamps řešil nejprve problematiku obecných soustav lineárních rovnic, teprve potom se zabýval soustavami homogenními.

Francesco Giudice (1855–1936) se v práci *Equazioni simultanee di primo grado* z roku 1883 snažil vyjasňovat problematiku související s vymezením fundamentálního systému.

V článku *O řešení lineárných rovnic* z roku 1885 zpracoval Eduard Weyr (1852–1903) tuto problematiku do jisté míry původním způsobem. T. Muir ocenil jeho stručné a jasné vyjadřování (*clearness and brevity of expression*).

Ed. Weyr se snažil seznámit českou matematickou veřejnost s problematikou soustav lineárních rovnic. Inspiroval se do jisté míry Baltzerovou monografií *Theorie und Anwendung der Determinanten*, v níž je využit Kroneckerův přístup k vyšetření všech možných případů, které mohou nastat.

Nejprve pomocí subdeterminantů definoval lineární závislost n-tic čísel (reálných či komplexních – jejich povaha se zde nespecifikuje), vyšetřoval jejich lineární kombinace a dokázal, že m daných n-tic může generovat nejvýše m lineárně nezávislých n-tic. Pak studoval homogenní i nehomogenní soustavy, uvedl podmínky pro existenci řešení, zjistil dimenzi množiny všech řešení a ukázal, jak vyhledat všechna řešení. Neužíval pojmů hodnost ani nulita, ale vybudoval celou teorii na nulovosti a nenulovosti příslušných subdeterminantů.

Paul Albert Gordan (1837–1912) vydal roku 1885 rozsáhlý učební text *Vorlesungen über Invariantentheorie I. Determinanten.* V osmém paragrafu *Systeme linearer Gleichungen und deren Auflösung* (str. 101–120) je vyložena problematika soustav lineárních rovnic podobně jako v knize Longchampsově. Uvádí se, že v německy psané literatuře nebyl do té doby podán lepší a přehlednější výklad této problematiky. P. A. Gordan postupoval tehdy netradičním způsobem – od homogenních soustav k nehomogenním.

Die Aufgabe, ein System von Gleichungen zu lösen, die nicht homogen sind, lässt sich auf die Auflösung eines Systems von homogenen Gleichungen zurückführen. Wir behandeln daher nur den Fall, der zunächst von Interesse ist, nämlich die Auflösung von n nicht homogenen Gleichungen mit n Unbekannten.

Nehomogenní soustavu n rovnic s neznámými $y_1, \ldots, y_n$ převedl na soustavu homogenní takto:

Wir können dieselben in zweierlei Weise homogen machen, entweder, indem wir setzen

$$y_k = \frac{x_k}{x_{n+1}}\ ,$$

und mit x_{n+1} jede Gleichung multipliciren, oder, indem wir den Coefficienten 1 der Absolutglieder als $n+1^{\text{te}}$ Unbekannte x_{n+1} betrachten.
([Gordan, 1885], str. 117)

Paragraf věnovaný soustavám rovnic zakončil čtyřmi jednoduchými ukázkovými příklady:

$$\begin{aligned} 3x + 7y - 26 &= 0 \\ 2x - y - 6 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4z - 3y - 2x - 7 &= 0 \\ 7x - 4y - 1 &= 0 \\ 4z - 9x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x - 15y - 7 &= 0 \\ -14x + 35y + 3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x_3 - 4x_1 - 2 &= 0 \\ 4x_2 + 5x_3 - 1 &= 0 \\ 20x_1 + 12x_2 - 7 &= 0 \end{aligned}$$

Alfredo Capelli, Giovanni Garbieri

A. Capelli (1855–1910) je jedním z matematiků, jejichž jméno bývá často v učebnicích spjato s nutnou a postačující podmínkou řešitelnosti soustavy lineárních rovnic. Jeho výsledky představují nejvýraznější pokrok při zkoumání dané problematiky.

A. Capelli a G. Garbieri (1847–1931) se roku 1886 v páté kapitole učebního textu *Corso di analisi algebrica, I. Teorie introduttorie* věnovali problematice soustav lineárních rovnic. Jejich výklad ukazuje značný pokrok, neboť velmi plodně využili nový pojem hodnost. Ukázali, že homogenní soustava n lineárních rovnic o n neznámých hodnosti k se dá postupnými substitucemi transformovat na ekvivalentní soustavu k rovnic o n neznámých v „trojúhelníkovém tvaru“. V učebnici je již naznačen význam lineární závislosti řádků matice soustavy pro celou teorii soustav lineárních rovnic.

V Capelliově učebním textu *Lezioni di algebra complementare, date nell'anno accademico 1888–1889* sepsaném pro studenty neapolské univerzity se již objevuje zcela moderní formulace ekvivalentní podmínky řešitelnosti soustavy lineárních rovnic.[5] Při důkazu tohoto tvrzení se A. Capelli odvolával na příslušné pasáže předchozího učebního textu, který sepsal s G. Garbierim.

G. Garbieri publikoval roku 1891 delší článek *Introduzione del una teorica dell'eliminazione* (65 stran); měl sloužit spíše jako učební text. Dal do souvislosti otázku řešitelnosti soustavy lineárních rovnic s vlastnostmi matic. Mimo jiné popsal maticové úpravy, které nevedou ke změně hodnosti, podrobně zpracoval problematiku nehomogenních i homogenních soustav v duchu předchozích Capelliových textů.

[5] Další vydání, již knižní (Pellerano, Napoli), s názvem *Lezioni di algebra complementare ad uso degli aspiranti alla licenza universitaria in scienze fisiche e matematiche* z let 1895 a 1898 jsou poměrně rozsáhlá (xii+527, resp. xvi+680 stran).

V článku *Sopra la compatibilità o incompabilità di più equazioni di primo grado fra più incognite* z roku 1892 A. Capelli shrnul některé výsledky ze svých přednášek ze školního roku 1888/1889. Nejprve připomněl pojem hodnosti matice (*caratteristica della matrice … cioè il massimo ordine di determinanti minori diverzi da zero continuti in essa …*). Jeho formulace nutné a postačující podmínky řešitelnosti soustavy lineárních rovnic je stručná, jasná a zcela moderní.

Dato un sistema qualunque di m equazioni di $1°$ grado con n incognite

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= \alpha_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= \alpha_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \;\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= \alpha_m \end{aligned}$$

affinchè esso sia compatibile con valori finiti delle incognite è necessario e sufficiente che le due matrici

$$(A)\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \qquad \text{e} \qquad (B)\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \alpha_m \end{matrix}$$

abbiano la stessa caratteristica. ([Capelli, 1892], str. 55)

A. Capelli rovněž ukázal strukturu množiny všech řešení řešitelné soustavy, jejíž matice má hodnost h:

… si potranno assegnare ad arbitrio i valori di $n - h$ incognite (che però non si possono sempre scegliere a piacere) dopodichè i valori delle h rimanenti incognite resteranno perfettamente determinati. ([Capelli, 1892], str. 55)

A. Capelli se věnoval problematice soustav lineárních rovnic i ve své pozdější učebnici *Istituzioni di analisi algebrica* z roku 1902; její další vydání z roku 1909 má již téměř tisíc stran. Poznamenejme, že se jedná se o upravená a postupně rozšiřovaná vydání výše uvedeného titulu *Lezioni di algebra complementare …* z roku 1898.

6. Přelom 19. a 20. století

Zmiňme se ještě o práci *Sui sistemi lineari d'equazioni algebriche* z roku 1903, jejímž autorem je F. Giudice. Mimo jiné je v ní ukázáno, že součtem libovolného řešení nehomogenní soustavy a libovolného řešení příslušné homogenní soustavy je řešení uvažované nehomogenní soustavy. Diskutován je zde i pojem fundamentálního systému.

Několik článků věnovaných řešením soustav lineárních rovnic a jejich klasifikaci se objevilo mezi lety 1910 a 1920 i v časopise The American Mathematical

Monthly. Dokreslují vývoj, završování této problematiky i snahy po vhodném metodickém zpracování.

Na přelomu 19. a 20. století se problematika soustav lineárních rovnic již začala objevovat v učebnicích v poměrně moderním tvaru. Jednalo se jednak o učebnice algebry, jednak o učebnice teorie determinantů. Dnešní podobu tedy získávají fundamentální věty o soustavách lineárních rovnic poměrně pozdě.

Eugen Netto

Ve druhém díle učebnice *Vorlesungen über Algebra* z roku 1900 uvedl E. Netto (1846–1919) mimo jiné nutnou a postačující podmínku pro řešitelnost soustavy lineárních rovnic. Nejprve pomocí determinantů zavedl hodnost obdélníkového systému veličin, poté uvažoval p lineárních funkcí

$$f_\alpha \equiv a_{\alpha 1} z_1 + a_{\alpha 2} z_2 + \cdots + a_{\alpha q} z_q \qquad (\alpha = 1, 2, \dots\ p)$$

a soustavu rovnic

$$f_1 + a_{10} = 0\ , \quad f_2 + a_{20} = 0\ , \quad \dots\ , \quad f_p + a_{p0} = 0\ .$$

Napsal, že tato soustava je

… nur dann lösbar, wenn … das System

$$|a_{gh}| \qquad (g = 1, 2, \dots p\,;\ h = 0, 1, 2, \dots\ q)$$

von dem gleichen Range ist wie

$$|a_{ik}| \qquad (i = 1, 2, \dots p\,;\ k = 1, 2, \dots\ q)\ .$$

Dále předpokládal, že hodnost je r, a došel k tomuto závěru:

Diese Gleichungen bestimmen $z_1, z_1, \dots z_r$ *durch die willkürlich gebliebenen Grössen* $z_{r+1}, z_{r+2}, \dots z_q$. ([Netto, 1896], II., str. 188–190)

V učebnici *Algebra* z roku 1915 formuloval E. Netto takovýto výsledek:

Das System … von m *linearen Gleichungen mit* n *Unbekannten ist dann und nur dann lösbar, wenn die Konstantenmatrix* $\big(A_0\big)$ *den gleichen Rang* r *mit der Koeffizientenmatrix* (A) *besitzt. In die Lösung gehen* $(n-r)$ *willkürliche Größen ein; die Anzahl der Lösungen kann daher als* $(n-r)$*-fach unendlich bezeichnet werden, wobei* 0*-fach unendlich gleich 1 genommen wird.* ([Netto, 1915], str. 94)

Elegantně tedy popsal nutnou a postačující podmínku existence řešení a strukturu množiny všech řešení. Vše se týká nehomogenní soustavy lineárních rovnic.

Leopold Kronecker

L. Kronecker (1823–1891) se problematiky soustav lineárních rovnic dotknul již v šedesátých letech 19. století v souvislosti se zkoumáním bilineárních a kvadratických forem. Bylo to v článcích *Ueber bilineare Formen* (1866) a *Ueber Schaaren quadratischer Formen* (1868). Počátkem osmdesátých let publikoval rozsáhlou práci *Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen* (1881) a o deset let později krátký článek *Reduction der Systeme von n^2 ganzzahligen Elementen* (1891); tyto dvě publikace bývají rovněž dávány do souvislosti se soustavami lineárních rovnic.

Vlastní tématikou soustav lineárních rovnic, jejich řešitelností, tvarem množiny všech řešení a metodami jejich nalezení se L. Kronecker zabýval ve svých přednáškách na berlínské univerzitě, zejména v osmdesátých letech 19. století. Jeho přednášky o determinantech vyšly až roku 1903 přepracované a doplněné Kurtem Henselem (1861–1941) pod názvem *Vorlesungen über die Theorie der Determinanten.*

Speciální případy soustav lineárních rovnic se objevují v Kroneckerově textu v souvislosti s determinanty již v prvních dvou přednáškách, obecnou teorii však nalezneme až v 19. přednášce. V jejím závěru jsou tyto dvě pasáže:

… kann nun leicht der entsprechende Satz für den Fall von beliebig vielen nicht homogenen linearen Gleichungen

$$\begin{gathered} f_1 = a_{10} + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ f_m = a_{m0} + a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{gathered}$$

hergeleitet werden. … Neben dem Systeme

$$(a_{k0}, a_{k1}, \ldots\ a_{kn}) = (V_0, V_1, \ldots\ V_n) \qquad k = 1, 2, \ldots\ m$$

aller $m(n+1)$ Gleichungskoeffizienten wollen wir die Matrix

$$(a_{k1}, \ldots\ a_{kn}) = (V_1, \ldots\ V_n) \qquad k = 1, 2, \ldots\ m$$

der mn Koeffizienten von $x_1, \ldots x_n$ betrachten und ihren Rang beziehlich durch

$$R(V_0; V_i) \qquad \textit{und} \qquad R(V_i) \qquad i = 1, 2, \ldots\ n$$

bezeichnen. Dann ist offenbar stets

$$R(V_i) \le R(V_0; V_i)\ .$$

([Kronecker, 1903], str. 345)

Ein System von m linearen nicht homogenen Gleichungen

$$f_i = u_{i0} + u_{i1}x_1 + \cdots + u_{in}x_n = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots\ m$$

besitzt dann und nur dann überhaupt eine Lösung, wenn

$$R(V_0; V_i) = R(V_i)$$

ist. Ist r der gemeinsame Rang jener beiden Koeffizientensysteme, so sind diese m Gleichungen äquivalent einem Systeme von nur r unter ihnen, und ihre Lösungen bilden eine $(n-r)$-fache Mannigfaltigkeit, da sich r der Unbekannten als lineare nicht homogene Funktionen der $(n-r)$ übrigen ergeben, welche ihrerseits völlig beliebig angenommen werden können.
([Kronecker, 1903], str. 347)

Encyclopédie des sciences mathématiques

Pátý paragraf článku K. T. Vahlena (1869–1945) a E. Cahena *Théorie arithmétique des formes* otištěného ve francouzské matematické encyklopedii je věnován soustavám lineárních rovnic. Pojetí této problematiky je již značně moderní. Pro soustavu rovnic

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_{i,k} x_k = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

je zavedena matice soustavy a matice rozšířená, text obsahuje stručnou, jasnou a zcela moderní formulaci podmínky existence řešení soustavy lineárních rovnic:

… La première des deux matrices précédentes a le rang r. La condition de possibilité du système d'équations linéaires envisagées est que le rang de la seconde matrice soit aussi r et que les deux matrices aient le même plus grand diviseur. ([Vahlen, Cahen, 1906], str. 82)

Dále je uvedeno, že řešení má tvar

$$x_k = \xi_k + z_{k,1} t_1 + z_{k,2} t_2 + \cdots + z_{k,n-r} t_{n-r} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) ,$$

hovoří se o fundamentálním systému (*système fondamental*).

Citovány jsou zde výsledky G. Frobenia (1879) a L. Kroneckera (1866, 1868, 1891).

7. Dvacáté století

V prvních třech desetiletích dvacátého století se stále ještě v mnoha učebnicích matematiky a algebry objevují soustavy lineárních rovnic v pojetí, které je do značné míry poplatné přístupu století devatenáctého. Efektivní vyjádření nutné a postačující podmínky řešitelnosti obecné nehomogenní soustavy lineárních rovnic (včetně popisu tvaru množiny všech řešení) využívající pojmů matice, hodnost matice, podprostor vektorového prostoru a dimenze přichází poměrně pozdě. Pokusme se to demonstrovat na několika ukázkách z učebnic, jež ovlivňovaly vývoj matematiky, jejích aplikací i jejího pojetí ve vysokoškolské výuce.

Maxime Bôcher

Ve slavné a mnohokrát vydané knize M. Bôchera (1867–1918) nazvané *Introduction to higher algebra*, která poprvé vyšla roku 1907, je problematice soustav lineárních rovnic věnována čtvrtá kapitola *Linear equations* (11 stran). Text je již velmi moderní, plně je využívána maticová řeč.

Bôcherův výklad začíná Cramerovým pravidlem (bez důkazu), zavedením matice soustavy a matice rozšířené (*augmented matrix*) a porovnáním jejich hodností. Dokázány jsou následující věty:

A necessary and sufficient condition for a system of linear equations to be consistent is that the matrix of the system have the same rank as the augmented matrix.

If in a system of linear equations the matrix of the system and the augmented matrix have the same rank r*, the values of* $n-r$ *of the unknows may be assigned at pleasure and the others will then be uniquely determined.*

The $n-r$ *unknows whose values may be assigned at pleasure may be chosen in any way provided that the matrix of the coefficients of the remaining unknowns is of rank* r*.* ([Bôcher, 1907], str. 46)

Zkoumání homogenní soustavy lineárních rovnic vede k definici fundamentálního systému a k této větě:

If the equations (1) *are of rank* $r < n$*, they possess an infinite number of fundamental systems each of which consists of* $n - r$ *solutions.*
([Bôcher, 1907], str. 50)

Kapitolu o soustavách lineárních rovnic uzavírá následující teorém:

A necessary and sufficient condition that a set of solutions of a system of homogeneous linear equations of rank r *in* n *variables form a fundamental system is that they be*

(a) *linearly independent,*

(b) $n - r$ *in number.* ([Bôcher, 1907], str. 52)

Gerhard Kowalewski

Soustavám lineárních rovnic je věnován 25. až 29. paragraf monografie *Einführung in die Determinantentheorie* z roku 1909, jejímž autorem je G. Kowalewski (1876–1950). Na několika stránkách (str. 55–65) je poměrně úsporně, efektivně a moderně vyložena celá tato problematika. G. Kowalewski využil maticovou řeč, pojmy hodnost a lineární nezávislost, vysvětlil nejprve homogenní a poté nehomogenní případ. Důležitým pojmem jeho výkladu je tzv. fundamentální systém:

Man nennt ein System von unabhängigen Lösungen, aus denen sich jede Lösung durch lineare Kombination ergibt, ein Fundamentalsystem.

Satz 21. *Wenn der Rang* r *eines Systems linearer homogener Gleichungen kleiner als die Anzahl* n *der Unbekannten ist, so gibt es Fundamentalsysteme von* $n - r$ *Lösungen.*

Um ein solches Fundamentalsystem zu erhalten, braucht man nur $n - r$ unabhängige Lösungen zu suchen. ([Kowalewski, 1909], str. 58)

G. Kowalewski ukázal metodu nalezení fundamentálního systému a označil ji jako *Methode von Frobenius*. Nakonec zformuloval nutnou a postačující podmínku řešitelnosti soustavy lineárních rovnic prakticky v současném tvaru:

Das System … hat dann und nur dann eine Lösung, wenn die Matrizen

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \quad \textit{und} \quad \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

von gleichem Range sind. ([Kowalewski, 1909], str. 62–63)

Leonard Eugene Dickson

L. E. Dickson (1874–1954) se roku 1914 v knize *Elementary theory of equations* věnoval i soustavám lineárních rovnic. Pojem matice v knize neužíval, příslušné výsledky popisoval výhradně v řeči determinantů. Závěrečný výsledek formuloval pro nehomogenní soustavu n lineárních rovnic o n neznámých s pravými stranami $k_1, \dots, k_n$, která je označena číslem (17):

Fundamental Theorem. *Let the determinant D of the coefficients of the unknowns in equations* (17) *be of rank r, $r < n$. If the determinants K obtained from the $(r+1)$-rowed minors of D by replacing the elements of any column by the corresponding known terms k_i are not all zero, the equations are inconsistent. But if these determinants K are all zero, the r equations involving the elements of a non-vanishing r-rowed minor of D determine uniquely r of the variables as linear functions of the remaining $n - r$ variables, and the expressions for these r variables satisfy also the remaining $n - r$ equations.* ([Dickson, 1914], str. 146)

A necessary and sufficient condition that n linear homogeneous equations in n unknowns shall have a set of solutions, other than the trivial one in which each unknowns is zero, is that the determinant of the coefficients be zero. ([Dickson, 1914], str. 148)

V následujícím odstavci autor uvedl, jak se postavit k obecnějším případům; tato pasáž ukazuje, jak komplikovaným způsobem byla ještě na počátku 20. století prezentována problematika soustav lineárních rovnic:

In case we have a system of more than n linear equations in n unknowns, we may first discuss n of the equations. If these are inconsistent, the entire system is. If they are consistent, the general set S of solutions may be found and substituted into the remaining equations. … ([Dickson, 1914], str. 148–149)

K výše uvedenému odstavci je připojena poznámka pod čarou, v níž se objevila zmínka o pojmu matice:

For an abbreviated statement, the concepts matrix and its rank are needed. Cf. Bôcher, Introduction to Higher Algebra, p. 46.

Veniamin Fedorovič Kagan

V. F. Kagan (1869–1953) se narodil v Litvě, studoval v Oděse a Kyjevě, potom působil na univerzitách v Oděse a Moskvě. Zabýval se hlavně geometrií a tenzorovou analýzou, podrobně studoval dílo N. I. Lobačevského (1792–1856) a redigoval vydání jeho prací.

Roku 1922 vyšla v Oděse Kaganova rozsáhlá učebnice *Osnovanija teorii opredelitelej*. Je členěna do 14 kapitol, má 82 paragrafů, obsahuje velké množství úloh a číselných příkladů, to vše na 521 stranách.

První kapitola je věnována jedné lineární rovnici o jedné neznámé; druhá, čtvrtá a osmá soustavám dvou, resp. tří rovnic o dvou, resp. třech neznámých, a nakonec soustavám m rovnic o n neznámých. Ve všech třech zmíněných kapitolách je uvedena věta Kroneckerova-Capelliova, a to téměř ve stejné podobě (viz str. 29–34, 87–91, 168–174). V paragrafu *Obščee izsledovanie sistemy linejnych uravnenij* má tato známá věta takovýto tvar.

Teorema Kronekera-Kapelli. a) *Esli rang matricy, sostavlennoj iz koefficientov sistemy linejnych uravnenij ..., po prisoedinenii k nej stolbca svobodnych členov povyšaetsja, to uravnenija protivorečivy.*

b) *Esli že prisoedinenie svobodnych členov ne povyšaet ranga etoj matricy, to uravnenija sovmestny, i čislo k, kotorym etot rang vyražaetsja, pokazyvaet, skol'ko iz uravnenij sistemy možno vybrať nezavisimych; ostal'nyja že uravnenija predstavljajut soboju sledstvija takich k nezavisimych uravnenij, točnee, oni predstavljajut soboju vyvodnyja uravnenija, proistekajuščija iz k nezavisimych uravnenij.* ([Kagan, 1922], str. 169)

Salvatore Pincherle

Italský matematik S. Pincherle (1853–1936) napsal v druhé části *Teoria delle equazioni* své učebnice *Lezioni di algebra complementare* (3. vydání z let 1925–1926) velmi stručně a jasně:

Se r è la caratteristica di un sistema di equazioni lineari omogenee ad n incognite, il grado di indeterminazione del sistema stesso è $n - r$.
([Pincherle, 1908], vydání z r. 1926, díl II., str. 93)

Toto tvrzení S. Pincherle nazval *Teorema della caratteristica.* Nutnou a postačující podmínku řešitelnosti nehomogenní soustavy lineárních rovnic s pravými stranami $k_1, k_2, \ldots, k_m$ zformuloval v této podobě:

Condizione necessaria a sufficiente affinchè il sistema ammetta soluzioni, è che sia r la charatteristica della matrice (N) formata dai coefficienti e dai termini noti; cioè che siano pure nulli tutti i determinanti d'ordine $r + 1$ che si ottengono dai determinanti d'ordine $r + 1$ della matrice (M) sostituendo ad una colonna qualsiasi la colonna corrispondente dei termini noti k_s.
([Pincherle, 1908], vydání z r. 1926, díl II., str. 100)

Hans Beck

Ve velmi pěkné a moderně pojaté knize H. Becka (1876–1942) nazvané *Einführung in die Axiomatik der Algebra* z roku 1926 pojednává o soustavách lineárních rovnic šestá kapitola (str. 48–73). Prezentovaný přístup k této problematice je ryze maticový. Základním poznatkům o maticích je totiž věnována čtvrtá kapitola (str. 31–40), vektorům kapitola pátá (str. 41–47), determinantům až kapitola desátá (str. 127–164); teprve v ní najdeme Cramerovo pravidlo (str. 132–133).

Pokusme se přiblížit Beckův přístup k soustavám lineárních rovnic krátkými ukázkami.

Satz 75. Das System homogener linearer Gleichungen vom Range r in n Unbekannten hat ∞^{n-r} Lösungen. ([Beck, 1926], str. 65)

Matici, resp. rozšířenou matici nehomogenní soustavy lineárních rovnic nazval autor *Systemmatrix*, resp. *Affinmatrix*; v dalším výkladu uvažoval hodnosti obou těchto matic.

Satz 83. Ein inhomogenes System linearer Gleichungen hat dann und nur dann Lösungen, wenn seine beiden Rangzahlen gleich sind.
([Beck, 1926], str. 72)

Oscar Perron

V prvním díle své učebnice *Algebra* z roku 1927 se O. Perron (1880–1975) věnoval i problematice soustav lineárních rovnic. Využil maticovou řeč, nutnou a postačující podmínku řešitelnosti i základní poznatky o fundamentálním systému řešení zformuloval velmi moderně:

Eine Anzahl von unabhängigen Lösungen …, aus denen sich alle anderen Lösungen in der Form … zusammensetzen lassen, heißt ein Fundamentalsystem von Lösungen. Wir beweisen jetzt, daß es, wenn $k > n$ ist, Fundamentalsysteme gibt und daß jedes Fundamentalsystem aus genau $k - n$ Lösungen besteht. ([Perron, 1927], vydání 1932, str. 103)

Das System von inhomogenen Gleichungen … hat dann und nur dann Lösungen, wenn die beiden Matrizes … gleichen Rang haben …
([Perron, 1932], str. 106–107)

Otto Schreier, Emanuel Sperner

V prvním díle učebnice *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra* z roku 1931 využili její autoři, O. Schreier (1901–1929) a E. Sperner (1905–1980), maticový aparát ke zcela moderní prezentaci teorie soustav lineárních rovnic. V šestém paragrafu zavedli pojem matice v souvislosti se zkoumáním soustavy lineárních rovnic. Nutnou a postačující podmínku řešitelnosti uvedli ve dvojí podobě: maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice soustavy zůstane stejný i po přidání sloupce pravých stran, resp. hodnosti matice soustavy a matice rozšířené jsou stejné. Hodnost matice je definována jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců. Dále je ukázáno, že množina všech řešení homogenní soustavy je vektorový prostor, který má dimenzi $n-r$, kde n je počet neznámých a r hodnost matice soustavy, a že množina všech řešení nehomogenní soustavy vznikne přičtením jediného řešení této soustavy ke všem řešením odpovídající soustavy homogenní. Celá teorie je vyložena velmi jednoduše, moderně, pouze na několika málo stránkách.

Satz 1. *Die Gleichungen* (1) *sind dann und nur dann in den* x_i *lösbar, wenn die Maximalzahl linear unabhängiger unter den Vektoren* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *gleich ist der Maximalzahl linear unabhängiger unter den Vektoren* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}$.

... Man nennt die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer Matrix auch den Rang der Matrix.

... Die Matrix (2) *heißt die einfache Matrix,* (5) *dagegen die erweiterte Matrix des Gleichungssystems* (1). *...*

Satz 2. *Die Gleichungen* (1) *sind dann und nur dann in den* x_i *lösbar, wenn der Rang der einfachen Matrix des Systems* (1) *gleich ist dem Rang der erweiterten Matrix.* ([Schreier, Sperner, 1931], díl I., str. 38)

Satz 3. *Hat die (einfache) Matrix des Gleichungssystems* (6) *den Rang* r, *dann erfüllt die Gesamtheit der Lösungsvektoren des Systems ein* $(n-r)$*-dimensionales lineares Vektorgebilde.* ([Schreier, Sperner, 1931], díl I., str. 41)

Satz 6. *Aus einem bestimmten Lösungsvektor* $\mathfrak{r}$ *des inhomogenen Gleichungssystems* (1) *erhält man alle Lösungsvektoren* $\mathfrak{z}$ *dieses Systems durch die Formel* $\mathfrak{z} = \mathfrak{r} + \mathfrak{h}$, *wenn* $\mathfrak{h}$ *alle Lösungsvektoren des zugehörigen homogenen Gleichungssystems* (6) *durchläuft.* ([Schreier, Sperner, 1931], díl I., str. 43)

V tomto paragrafu nacházíme jako vedlejší výsledek následující tvrzení:

Satz 7. *Die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer Matrix ist gleich der Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren.*
([Schreier, Sperner, 1931], díl I., str. 45)

Enciclopedia delle Matematiche elementari

V druhém svazku prvního dílu italské matematické encyklopedie z roku 1932 podal Luigi Berzolari (1863–1949) v přehledném článku *Equazioni lineari* (13 stran) základní fakta o soustavách lineárních rovnic. Jeho stať, která obsahuje velké množství bibliografických údajů, má pět částí:

1. *Regola di Leibniz-Cramer*,
2. *Equazioni lineari omogenee*,
3. *Sistemi fondamentali di soluzioni*,
4. *Equazioni lineari non omogenee*,
5. *Alcune proprietà dei sistemi di equazioni lineari omogenee.*

Napsána je poměrně stručně a přehledně, úspěšně využívá jak maticovou řeč, tak pojmy hodnost matice, lineární kombinace, lineární nezávislost, fundamentální systém řešení atd. Nutná a postačující podmínka řešitelnosti soustavy lineárních rovnic je uvedena v tomto tvaru:

... affinchè il sistema (1) *ammetta soluzioni, è necessario e sufficiente che le due matrici*

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{matrix} \right\|,$$

la prima formata con i coefficienti, l'altra con i coefficienti e con i termini noti, abbiano lo stesso rango. ([BVG, I-2], str. 115–116)

V poznámce pod čarou uvedené u tohoto výsledku odkazuje L. Berzolari na práce G. Frobenia (1879, 1905), A. Capelliho (1892) a L. Kroneckera (1903).

Ludwig Bieberbach

V pátém vydání učebnice *Vorlesungen über Algebra*[6] z roku 1933 uvedl L. Bieberbach (1886–1982) věty o soustavách lineárních rovnic ve stručné, a z dnešního hlediska velmi srozumitelné podobě; tato problematika je zpracována v kapitole *Systeme linearer Gleichungen* (str. 69–82). Existence netriviálního řešení homogenní soustavy se týká tato věta:

Die homogenen Gleichungen (8) *besitzen dann und nur dann eine nicht triviale Lösung, wenn der Rang ϱ dieses Gleichungssystems kleiner ist als die Zahl n der Unbekannten.* ([Bieberbach, Bauer, 1928], vydání z r. 1933, str. 73)

Nutná a postačující podmínka existence řešení nehomogenní soustavy má tento tvar:

Die Gleichungen (12) *sind dann und nur dann lösbar, wenn der Rang der Matrix*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \dots & a_1 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & \dots & a_m \end{pmatrix}$$

dieses Gleichungssystems gleich dem Rang des Gleichungssystems (8), *d. h. gleich dem Rang der Matrix*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ist. ([Bieberbach, Bauer, 1928], vydání z r. 1933, str. 74)

---

[6] Učebnice *Vorlesungen über Algebra* Gustava Bauera (1820–1906) vyšla poprvé roku 1903. Její třetí vydání z roku 1921 podstatně přepracoval L. Bieberbach – se jmény obou autorů vyšlo čtvrté vydání roku 1928 a páté vydání roku 1933.

Tvrzení o struktuře množiny všech řešení homogenní soustavy je v učebnici vyjádřeno v tomto tvaru:

Die Lösungen eines homogenen Gleichungssystems in n Unbekannten vom Rang ϱ bilden eine $n-\varrho$-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit.
([Bieberbach, Bauer, 1928], vydání z r. 1933, str. 77)

Srovnáme-li tuto partii s odpovídajícími odstavci v předchozím vydání z roku 1928, vidíme velký pokrok, zejména ve formulaci nutné a postačující podmínky řešitelnosti nehomogenní soustavy lineárních rovnic.

8. Závěr

V předchozích odstavcích jsme měli možnost poznat, jak obtížně se matematika propracovávala k efektivnímu, stručnému a jasnému vyjádření ekvivalentní podmínky řešitelnosti soustavy lineárních rovnic a k popisu struktury množiny všech jejích řešení. Přitom je tato problematika obsažena již řadu desetiletí v úvodních kurzech vysokoškolské matematiky.

Viděli jsme, že priorita zveřejnění nutné a postačující podmínky řešitelnosti soustavy lineárních rovnic patří Ch. L. Dodgsonovi (1867) a její první moderní vyjádření A. Capellimu (1892).