Matematické výsledky

In: Martina Bečvářová (author): Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918. (Czech). Praha: Matfyzpress, 2008. pp. 133–184.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400910

V.

MATEMATICKÉ VÝSLEDKY

V této kapitole se pokusíme ukázat, jakých vědeckých výsledků naši matematici dosáhli v kontextu vývoje světové matematiky. Popíšeme, jak reagovali na nejnovější výsledky evropských matematiků, kterým tématům věnovali pozornost a která stála zcela mimo jejich zájem. Načrtneme, jak přispěli k vývoji jednotlivých matematických disciplín, a jak na jejich práce reagovali zahraniční matematici. Zaměříme se především na algebru, teorii čísel, matematickou analýzu, pravděpodobnost a statistiku, zmíníme se i o geometrii.[1] Soustředíme se jen na druhou polovinu 19. století. Výsledků matematiků působících na našem území v první polovině 19. století se dotkneme pouze stručně, jen abychom ukázali, z jakých základů vyšla matematická produkce ve druhé poloviny 19. století.

Matematika v našich zemích v první polovině 19. století

V první polovině 19. století v našich zemích prakticky neexistovala systematická matematická vědecká práce. Matematici se věnovali odborné práci pod vlivem podnětů přicházejících z pedagogické práce nebo z praxe, bádali jen ve směrech vyhovujících jejich zálibám a zájmům. Téměř nesledovali vývoj evropské matematiky, k jejímu pokroku přispěli jen výjimečně.

František Josef Gerstner spatřoval v matematice jen účinný nástroj rozvoje fyziky a řešení technických úkolů. Věnoval se sice některým technickým problémům, bohatě využíval své výborné znalosti matematiky a fyziky, ale žádnou čistě matematickou práci nenapsal.

Tehdejší naši matematici, např. Adam Bittner, Franz Xaver Moth[2] a Josef Ladislav Jandera, své síly většinou vyčerpali při psaní učebnic. V nich však bohužel nerespektovali vývoj matematiky, zejména zpřesňování jejích základů, a setrvávali na eulerovském pojetí. To bylo v Evropě překonáno např. Cauchyovými, Fourierovými a Jacobiovými studiemi, v nichž byla pozornost věnována hlavně některým partiím diferenciálního a integrálního počtu, exaktnímu výkladu základů matematiky, zpřesňování definic a zjednodušování důkazů.

Některé práce našich matematiků první poloviny 19. století stojí hluboko pod úrovní tehdejší evropské matematiky, jiné dokonce prokazují nepochopení tehdejších vývojových trendů. Např. F. X. Moth odmítal pojem limity, neuznával funkce komplexní proměnné apod.[3]

---

[1] Geometrické tématice v českých zemích byla již v minulosti věnována značná pozornost (např. [Bj1], [Bh], [Fo1], [Fo2], [No1], [Sk1] a [Vy]).

[2] O jeho životě a díle viz *Franz Xaver Moth (1802–1879)*, Almanach der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien 29(1879), str. 172–194, a [No1].

[3] Podrobnější hodnocení vývoje matematické produkce v našich zemích viz [Fo2], [Fo3], [No1] a [No3].

Výjimečnou osobností tohoto období byl Jakub Filip Kulik, který se celý život zabýval numerickými výpočty, rozklady velkých čísel a sestavováním tabulek prvočísel. Toto téma ho zaujalo již ve dvacátých letech 19. století, ještě před jeho příchodem do Čech; šlo o poměrně oblíbenou problematiku již od konce předešlého století. J. F. Kulik navazoval ve svých pracích na tabulky prvočísel sestavené Johannem Heinrichem Lambertem (1728–1777), L. Chermacem (1. pol. 19. stol.) a Johannem Karlem Burckhardtem (1773–1825). Po více než dvacetileté namáhavé početní práci sestavil tabulky dělitelů a tabulky prvočísel až do čísla 100 330 201; protože byly velmi rozsáhlé, zůstaly v rukopisech.[4] Kulikovy tabulky získaly světový ohlas až v polovině 20. století, když byly jeho rukopisy pečlivě prostudovány. Další Kulikovy práce podávaly rozličná a dosti komplikovaná pravidla pro dělitelnost čísly 13, 37, 73, 101 a 137.

Ve čtyřicátých letech navázal J. F. Kulik na Lagrangeovy a Legendreovy číselně teoretické práce a začal zkoumat dělitele kvadratických forem tvaru $x^2 \pm ay^2$. Při studiu využíval své tabulky, sestavil rovněž tabulky čtverců, jejich součtů a rozdílů. V roce 1841 se pokusil pomocí grafické metody zodpovědět otázku zákonitosti rozložení prvočísel v množině přirozených čísel. Byla to neobvyklá, ale zajímavá metoda; nevedla však k dobrému výsledku. J. F. Kulik získal pouze komplikované rovinné schéma popisující rozmístění prvočísel; znázornil tak, že rozdělení prvočísel není rovnoměrné, a proto bude tento problém potřebovat hlubší studium. Přes velkou rozsáhlost tabulek a výpočtových prací nedospěl J. F. Kulik v teorii čísel k výraznějším teoretickým výsledkům ani k obecnějším závěrům.[5]

Nejvýznamnějším matematikem, který na našem území působil v první polovině 19. století, byl Bernard Bolzano (1781–1848). Věnoval se geometrii, diferenciálnímu a integrálnímu počtu, otázkám, které dnes spadají do teorie množin, logice a filozofii matematiky. Podnětným způsobem zkoumal základní matematické pojmy (funkce, limita funkce, spojitost a derivace funkce, konvergence posloupnosti, reálné číslo atd.), pokoušel se reformovat základy matematické analýzy, logiky a teorie množin, zabýval se problémy budování základů matematiky.[6]

Mnohé jeho obdivuhodné výsledky, ačkoliv měly světovou úroveň, žádnou odezvu nevyvolaly. Většina totiž zůstala v rukopisech a vývoj matematiky ovlivnit nemohla. Ve dvacátých letech 20. století byl objeven významný Bolzanův výsledek – příklad spojité funkce, která nemá v žádném bodě

---

[4] Více viz druhá kapitola této práce.

[5] Viz I. J. Depman: *Zamečatelnye slavjanskie vyčisliteli G. Vega i J. F. Kulik*, Istoriko matematičeskie issledovanija 6(1953), str. 573–608; L. Nový: *On Kulik's tables of divisors*, in Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum, Prague, Special Issue 16, 1981, str. 327–343; L. Nový: *O Kulikových tabulkách dělitelů*, Sborník pro dějiny přírodních věd a techniky, 8(1963), str. 43–52.

[6] O životě Bernarda Bolzana a jeho matematických výsledcích vyšlo mnoho prací; zásluhou českých matematiků byly vydány některé jeho rukopisné práce. Viz např. monografie V. Jarník: *Bernard Bolzano a základy matematické analýzy*, JČMF, Praha, 1981, a kapitola *Karel Rychlík a Bernard Bolzano* z monografie M. Hykšové: *Karel Rychlík (1885–1968)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 22, Prometheus, Praha, 2003, str. 165–201, ve které je obsáhlá bolzanovská bibliografie.

derivaci.[7] Poznamenejme, že Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1805–1897) ukázal v roce 1872 v přednášce v Královské akademii věd v Berlíně funkci, která je v reálném oboru spojitá, ale nemá derivaci v žádném bodě: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(\pi b^n x)$, $0 < a < 1$; $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Jeho spojitá nediferencovatelná funkce byla uveřejněna roku 1875 Paulem Davidem Gustavem du Bois-Reymondem (1831–1889) v časopise *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.[8] Dlouhou dobu byla Weierstrassova funkce považována za první a přitom nejjednodušší spojitou funkci bez derivace, ačkoli B. Bolzano svůj objev učinil před rokem 1834.[9]

Matematika v našich zemích ve druhé polovině 19. století

Na počátku druhé poloviny 19. století ještě doznívaly odborné aktivity F. J. Gerstnera, J. F. Kulika a W. Matzky. Od šedesátých let 19. století se postupně objevovaly první původní česky psané práce našich matematiků, z nichž však většina nepřinášela ani podnětné myšlenky, ani nové výsledky. Někdy objevovaly již objevené, v lepším případě podávaly drobné modifikace nebo vylepšení známých důkazů a postupů, často předkládaly jen nové metodické přístupy a didaktické poznámky. Přesto však sehrály důležitou roli v rozvoji naší národní matematické produkce. Světových výsledků dosáhli pouze Emil Weyr v geometrii, Eduard Weyr v teorii matic a hyperkomplexních čísel, Matyáš Lerch v teorii čísel a matematické analýze, Rudolf Skuherský v ortogonální projekci, Karel Pelz v axonometrii, František Tilšer v teorii osvětlování a Emanuel Czuber v teorii pravděpodobnosti a ve statistice. Novou populární tématikou – funkcionálními rovnicemi – se zabýval Jan Vilém Pexider, který však nedosáhl výrazných výsledků. Poznamenejme, že pouze výsledky M. Lercha, J. V. Pexidera a Ed. Weyra jsou v matematice stále živé. Práce Em. Weyra, K. Pelze, R. Skuherského a F. Tilšera jsou dnes téměř zapomenuty, neboť geometrie se ve 20. století vydala jiným směrem.

---

[7] B. Bolzano funkci zavedl jako limitu spojitých funkcí y_1, y_2, y_3, ... definovaných na intervalu $[a,b]$. Funkce y_1 je funkce, která v bodě $x = a$ nabývá hodnoty A, v bodě $x = b$ hodnoty B a uvnitř intervalu (a,b) je lineární. Funkce y_2 je definována tak, že v obou polovinách intervalu (a,b) je nejprve rostoucí a pak klesající. Tedy původní interval (a,b) je rozdělen na čtyři intervaly s krajními body a, $a + \frac{3}{8}(b-a)$, $\frac{a+b}{2}$, $a + \frac{7}{8}(b-a)$, b a těmto bodům přísluší hodnoty A, $A + \frac{5}{8}(B-A)$, $A + \frac{1}{2}(A+B)$, $B + \frac{1}{8}(B-A)$, B a funkce y_2 je na každém ze čtyř intervalů lineární. Analogicky B. Bolzano definuje y_3 a další funkce. Podrobněji o Bolzanově funkci a jejím objevu viz M. Hykšová: *Karel Rychlík (1885–1968)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 22, Prometheus, Praha, 2003, str. 176–179.

[8] Viz K. T. W. Weierstrass: *Zur Functionenlehre*, Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1880; přetisk in: *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, Springer Verlag, 1886, str. 67–101.

[9] O historii spojitých funkcí bez derivace viz např. M. Hykšová: *Karel Rychlík (1885–1968)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 22, Prometheus, Praha, 2003, str. 135–144.

Algebra a teorie čísel

Ve druhé polovině 19. století se algebra ve světě stále ještě z velké části orientovala na problematiku algebraických rovnic a různé otázky eliminace neznámých z různých typů soustav rovnic, na soustavy lineárních rovnic, teorii determinantů a teorii hyperkomplexních čísel, později přibyla teorie matic. Poté, co byly v širší míře pochopeny Galoisovy myšlenky související s řešitelností algebraických rovnic, začala se rozvíjet teorie grup; grupy se začaly objevovat v teorii invariantů a zejména v geometrii. Koncem 19. století se rodily nové důležité pojmy abstraktní algebry – vektorový prostor, těleso, okruh, ideál, izomorfismus atd.[10]

V šedesátých letech 19. století se česká matematická obec teprve rodila, naši matematici zasáhli v té době jen do některých oblastí tehdejší algebry. Vedle psaní učebnic se většina pokusů o samostatný výzkum soustředila hlavně na determinanty, matice a hyperkomplexní čísla, pouze několik prací se dotklo moderní teorie grup.[11] Pokračovala práce v teorii čísel, nových výsledků však bylo dosaženo až koncem 19. století.

Algebraické rovnice

Algebraickým rovnicím nebyla v našem prostředí věnována větší pozornost, žádných významných původních výsledků nebylo dosaženo. Práce v této oblasti měly spíš metodický charakter.

V roce 1860 publikoval J. F. Kulik práci *Beiträge zur Auflösung höherer Gleichungen überhaupt und der kubischen Gleichungen insbesondere*, v níž ukázal metody přibližného a rychlého numerického řešení kubických a bikvadratických rovnic.[12]

V osmdesátých letech 19. století se teorií algebraických rovnic intenzivněji zabýval Václav Láska. V roce 1888 v kvalitním časopise *Archiv der Mathematik und Physik*[13] diskutoval řešení tzv. „smíšených kvadratických rovnic“

$$u^2 - 2v = a, \qquad v^2 - 2cu = b,$$

kde a, b a c jsou reálná čísla; z dnešního pohledu jde o jednoduchou soustavu polynomiálních rovnic druhého stupně.

V roce 1896 uveřejnil středoškolský profesor Antonín Pleskot (1866–1935) v *Rozpravách České akademie věd a umění* nevelkou stať *Příspěvky k theorii*

---

[10] Základní fakta z vývoje algebry a teorie čísel lze najít např. v [KJ1] a [Di1], které patří k větším přehledným studiím.

[11] Soukromý docent německé univerzity S. Kantor ji aplikoval na geometrické úlohy. Tyto výsledky patřily v našem prostředí k ojedinělým.

[12] Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, 1860, 103 stran.

[13] *Eine Lösung der gemischten quadratischen Gleichung*, Archiv der Mathematik und Physik 5(1888), 2. série, str. 220–221.

eliminace[14] obsahující některé podmínky dělitelnosti polynomů polynomem x^2+ax+b. Vyslovil též několik vět o eliminaci neznámých ze dvou algebraických rovnic libovolného stupně. O tři roky později publikoval v časopise *Nouvelles analles de mathématiques* dva články o řešitelnosti speciálních rovnic n-tého stupně s reálnými koeficienty a pokoušel se předvést nový postup při řešení rovnic třetího stupně.[15] Pleskotovy práce nové problémy neřešily, mohly však zaujmout elegantním přístupem.

Původní výsledky přinesly dvě práce německého matematika Augusta Lea Otty Biermanna otištěné ve Vídni v časopise *Monatshefte für Mathematik und Physik* v letech 1891 a 1894.[16] Týkaly se problémů eliminace; byly věnovány tzv. rezultantům, tj. funkcím utvořeným z koeficientů dvou polynomů pomocí determinantů.

Různé elementární výklady o řešení rovnic lze najít v některých výročních zprávách našich středních škol, v *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky*, v publikacích Královské české Společnosti nauk a České akademie věd a umění a v různých samostatně vydaných brožurách. Například v roce 1872 vyložil Wilhelm Matzka Hornerovu metodu přibližného řešení rovnic a připojil několik ilustračních příkladů.[17] V roce 1886 Ludvík Kraus odvodil některé speciální vlastnosti algebraických rovnic, které mají jen reálné kořeny.[18]

O poměrně malém zájmu o klasické otázky algebry svědčí mimo jiné nedokončený projekt třídílné učebnice algebry Eduarda Weyra a Václava Karla Řehořovského; roku 1883 vyšel jen první svazek *Theorie souměrných funkcí kořenů* od V. Řehořovského.[19] První rozsáhlejší učebnici algebry (488 stran) vydal až roku 1953 Vladimír Kořínek (1899–1981).[20]

Větší zájem o algebraické rovnice se objevil v našich zemích až na konci 19. století a především na počátku 20. století. Tehdy začal aktivně odborně pracovat Karel Petr, jehož hlavním zájmem byla algebra a teorie čísel.[21] Většinu svých článků publikovaných v *Rozpravách České akademie věd a umění* a *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky* K. Petr věnoval separaci reálných

---

[14] Rozpravy České akademie věd a umění 5(1896), č. 25, 13 stran.

[15] *Limites des racines d'une équation n'ayant que des racines réalles*, Nouvelles analles de mathématiques 18(1899), 3. série, str. 301–305, a *Nouveau procédé pour résoudre les équations du troisième degré*, Nouvelles analles de mathématiques 18(1899), 3. série, str. 465–466.

[16] *Ueber die Resultante ganzer Functionen*, Monatshefte für Mathematik und Physik 2(1891), str. 143–146, a *Ueber die Bildnung der Eliminanten einer Systems algebraischer Gleichungen*, Monatshefte für Mathematik und Physik 5(1894), str. 17–32.

[17] *W. G. Horner's eingentliche Auflösungsweise algebraischer Ziffergleichungen. Eine literärgeschichtliche Studie zu deren Verdeutlichung und Wärdigung*, Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag 6(1872), 47 stran.

[18] *Poznámka k rovnicím, jež mají pouze realné kořeny*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 15(1886), str. 63.

[19] *Theorie souměrných funkcí kořenů*, Nákladem vlastním, v komisi Fr. Řivnáče, Praha, 1883, 186 stran.

[20] V. Kořínek: *Základy algebry*, 1. vydání, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1953, 488 stran; 2. vydání, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1956, 520 stran.

[21] Detailní hodnocení Petrovy odborné a vědecké práce nebylo dosud provedeno. Viz [Cr].

kořenů algebraických rovnic vyšších stupňů, popisu jejich vlastností a zkoumání vlastností symetrických polynomů vyšších stupňů,[22] řešení speciálních rovnic[23] a invariantům algebraických forem.[24] Poznamenejme, že významnější práce Karel Petr sepsal až ve dvacátých letech 20. století.

Determinanty

Ve druhé polovině 19. století byla u nás z algebraické problematiky věnována největší pozornost determinantům. Teorie determinantů byla v té době ve světě velmi oblíbenou disciplínou; zájem o determinanty vrcholil v šedesátých letech, koncem století však již byl ve značném útlumu. České práce o tomto tématu jsou psány v době, kdy se tato oblast již značně vyčerpala; lze říci, že determinantům byla věnována pozornost déle, než bylo třeba. O vzniku a vývoji teorie determinantů viz [Bj5], [Mu1] a [Mu2].

Teorii determinantů se v 19. století více či méně intenzivně věnovalo několik českých matematiků. Byli to středoškolští a vysokoškolští učitelé Václav Šimerka (1819–1887),[25] František Hoza (1843–1914), Martin Pelnář (2. pol. 19. stol.), Václav Karel Řehořovský (1849–1911), O. Ježek (2. pol. 19. stol.), Matěj Norbert Vaněček (1859–1922), Matyáš Lerch (1860–1922),[26] Vilém Jung (1857–1908),[27] Ludvík Kraus (1857–1885), Anton Puchta (1851–1903), Karel Zahradník (1848–1916) a další.[28]

Většinou šlo jen o drobné příspěvky, které „objevovaly" známé výsledky publikované již dříve v zahraničí. Týkaly se hlavně vlastností speciálních

[22] Např. *O počtu reálných kořenů rovnice algebraické v mezích daných*, Rozpravy České akademie věd a umění 6(1897), část I., č. 8, 11 stran; *O vyjádření podmínek reality kořenů rovnice 5. stupně pomocí invariantů*, Rozpravy České akademie věd a umění 8(1899), č. 23, 12 stran; *O vyjádření podmínek pro realitu kořenů rovnice stupně šestého pomocí invariantů*, Rozpravy České akademie věd a umění 15(1906), č. 4, 24 stran; *Poznámka o vyjádření počtu komplexních kořenů rovnice algebraické pomocí invariantů*, Rozpravy České akademie věd a umění 15(1906), č. 38, 6 stran; *O separaci kořenů rovnic algebraických*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 38(1909), str. 554–569.

[23] Např. *Řešení rovnice $x^3+y^3+z^3 = u^3$ celými čísly*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 40(1911), str. 99–102.

[24] Např. *O semiinvariantech*, Rozpravy České akademie věd a umění 6(1897), část II., č. 38, 22 stran; *O jednom rozvoji pro algebraické formy*, Rozpravy České akademie věd a umění 16(1907), č. 7, 27 stran; *Über eine Reihenentwickelung für algebraische Formen*, Bulletin International. Résumés des travaux presentés 12(1907), str. 163–191; *O počtu invariantních útvarů na sobě lineárně nezávislých*, Rozpravy České akademie věd a umění 17(1908), č. 17, 21 stran a č. 37, 20 stran.

[25] Byl prvním českým matematikem, který publikoval práci o determinantech, a sice článek *Bestimmte Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten gelöst mittels der Permutationslehre*, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe 33(1858), str. 277–281. Věnován je řešení soustavy lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla, a to více než sto let po jeho objevu.

[26] Významnější je jeho článek *O některých vzorcích z theorie determinantů*, Rozpravy České akademie věd a umění 8(1899), č. 12, 16 stran.

[27] Závažnější jsou jeho publikace *Příspěvek k theorii determinantů mocninných*, Rozpravy České akademie věd a umění 8(1899), č. 38, 22 stran; *Poznámka o jistém determinantu mocninném*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 29(1900), str. 41–42.

[28] O F. Hozovi, V. K. Řehořovském a V. Jungovi viz Ottův slovník naučný.

determinantů, využití determinantů v jiných disciplínách (např. v algebře, analytické geometrii a teorii čísel), různých metodických postupů apod. Stručné charakteristiky těchto článků lze najít v Muirově bibliografii[29]; i z nich je zjevné, že přínos těchto prací nebyl podstatný.

Eduard Weyr publikoval o determinantech jeden článek roku 1880[30]; věnován byl jeho důkazu věty o násobení determinantů. Obecné důkazy této věty byly publikovány již v letech 1812 a 1815 (Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856), Augustin Louis Cauchy (1789–1857)).[31] Eduard Weyr však zcela běžně využíval aparátu teorie determinantů v řadě svých prací. Např. v článku *O řešení lineárných rovnic*[32] z roku 1885 podal z metodického pohledu dosti původní zpracování problematiky soustav lineárních rovnic.

Značnou část své rozsáhlé publikační činnosti zasvětil determinantům František Josef Studnička. Svou aktivitou v teorii determinantů patrně ovlivnil i odborné zaměření některých středoškolských profesorů. O determinantech sepsal více než 60 prací, svoji pozornost zaměřil na speciální otázky a různá využití determinantů v algebře, analytické geometrii, sférické trigonometrii, analýze apod.[33] Jeho práce nepřinášejí nové výsledky, objevují již objevené, případně přinášejí drobné modifikace a vylepšení známých důkazů nebo postupů. Velkou pozornost F. J. Studnička věnoval několika základním větám (rozvoj determinantu, Laplaceova věta, nulovost determinantu v závislosti na vlastnostech příslušné matice, různé typy úprav, rychlý výpočet determinantu aj.).

Zabýval se též determinanty matic symetrických, symetrických s nulovou diagonálou, antisymetrických, „antisymetrických“ s nenulovou diagonálou, persymetrických ($a_{pg} = a_{rs}$, kde $p + q = r + s$), reciprokých, cyklických a také determinanty komplexních matic, Hermiteovými determinanty, funkcionálními determinanty (hessiány, jacobiány a wronskiány) a vyjádřením determinantů pomocí subdeterminantů daných řádů a vlastností. Napsal řadu prací, ve kterých do jisté míry přispěl k poznání vlastností některých speciálních determinantů. Hodně se zabýval tzv. determinanty *mocninnými* a *sestavnými* a jejich vzájemnými vztahy. Mocninným determinantem rozuměl determinant tvaru

$$\begin{vmatrix} {a_1}^{m_1} & {a_1}^{m_2} & \dots & {a_1}^{m_n} \\ {a_2}^{m_1} & {a_2}^{m_2} & \dots & {a_2}^{m_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {a_n}^{m_1} & {a_n}^{m_2} & \dots & {a_n}^{m_n} \end{vmatrix},$$

[29] Thomas Muir (1844–1934) v monografiích [Mu1] a [Mu2] sestavil důkladný přehled prakticky všech prací o determinantech.

[30] Ed. Weyr: *Verification der Multiplicationsformel für Determinanten*, Zprávy ze zasedání Královské české Společnosti nauk, 1880, str. 55–56.

[31] J. P. M. Binet: *Mémoire sur un système de formules analytiques et leur application à des considérations géométriques*, Journal de l'Ecole Polytechnique 16(1812), str. 280–302; A. L. Cauchy: *Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment*, Journal de l'Ecole Polytechnique 17(1815), str. 29–112.

[32] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 14(1885), str. 101–110, 149–159.

[33] Podrobné hodnocení Studničkových prací z teorie determinantů viz [Be1], str. 71–93.

kde $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou libovolná čísla, $m_1 = 0 < m_2 < \dots < m_n$ jsou celá čísla. Sestavné (též kombinační) determinanty F. J. Studnička vytvářel z prvků K_0, K_1, $K_2, \dots, K_n$ (jedná se o symetrické funkce utvořené z prvků $a_1, a_2, \dots, a_n$), kde

$$\begin{aligned}
&K_0 = 1,\\
&K_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n,\\
&K_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_1a_n + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&K_n = a_1a_2a_3 \cdot \ldots \cdot a_n.
\end{aligned}$$

Prvky $K_0, \dots, K_n$ jsou v tomto pořadí zapsány v jednotlivých řádcích tak, aby každý následující řádek byl alespoň o jeden prvek vpravo posunut, např.

$$\begin{vmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & 0 \\ 1 & K_1 & K_2 & K_3 \\ 0 & 1 & K_1 & K_2 \\ 0 & 0 & 1 & K_1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} K_2 & K_3 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_3 & 0 \\ 1 & K_1 & K_2 & K_3 \\ 0 & 0 & 1 & K_1 \end{vmatrix}.$$

Této problematice věnoval F. J. Studnička samostatnou práci *O determinantech mocninných a sestavných*, která roku 1897 získala cenu Královské české Společnosti nauk.[34] Shrnul v ní některé výsledky svých dřívějších prací, použil i některé příklady ze svých knih. Jednotlivé části pojednávají o mocninných determinantech druhého, třetího, čtvrtého a n-tého řádu, tj. o determinantech typu:

$$\begin{vmatrix} 1 & x^n \\ 1 & y^n \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & x^m & x^n \\ 1 & y^m & y^n \\ 1 & z^m & z^n \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x^m & x^n & x^p \\ 1 & y^m & y^n & y^p \\ 1 & z^m & z^n & z^p \\ 1 & u^m & u^n & u^p \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} {a_1}^{m_1} & {a_1}^{m_2} & \dots & {a_1}^{m_n} \\ {a_2}^{m_1} & {a_2}^{m_2} & \dots & {a_2}^{m_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {a_n}^{m_1} & {a_n}^{m_2} & \dots & {a_n}^{m_n} \end{vmatrix}.$$

Vyšetřoval souvislosti mezi determinanty mocninnými a sestavnými, odvodil řadu vztahů mezi nimi; vyplývají z nich některé známé vzorce (např. Bernoulliův vzorec pro $\frac{\sin nx}{\sin x}$, vzorec pro součet a rozdíl n-tých mocnin kořenů algebraických rovnic, některé vlastnosti řetězových zlomků atd.). Studničkova monografie není příliš objevná, ani mocninné determinanty nebyly věcí úplně novou. Studničkův *mocninný determinant* není nic jiného než Vandermondeův determinant, se kterým pracoval roku 1772 Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796)[35], roku 1772 Pierre-Simon Laplace (1749–1827)[36], roku

[34] *O determinantech mocninných a sestavných*, Nákladem jubilejního fondu Královské české Společnosti nauk, Praha, 1897, 76 stran.

[35] *Mémoire sur l'élimination*, Hist. de l'Acad. Roy. des Sciences 1772, str. 516–532.

[36] *Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde*, Hist. de l'Acad. Roy. des Sciences 1772, str. 294–304.

1779 Étienne Bézout (1730–1783)[37], roku 1795 Gaspard Clair François Marie Riche de Prony (1755–1839)[38] a jiní. Funkce definované těmito determinanty studoval roku 1812 A. L. Cauchy[39], později Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), James Joseph Sylvester (1814–1897) a další.[40] Ani vztahy, které F. J. Studnička odvodil, nejsou závažné; zajímavé jsou však proto, že se dají použít např. v analytické geometrii křivek.

F. J. Studnička se věnoval i historii teorie determinantů a prokázal velkou znalost původních pramenů i učebnicové literatury; v práci *A. L. Cauchy als formaler Begründer der Determinanten-Theorie. Eine literarisch-historische Studie*[41] z roku 1876 dokazoval, že právě A. L. Cauchy je skutečným zakladatelem teorie determinantů. Studničkův názor později přijali např. E. Pascal (1865–1940) a D. E. Smith (1860–1944).[42] Otázka skutečného zakladatele teorie determinantů byla později diskutována dalšími autory.

Je zajímavé, že se vývojem teorie determinantů ve stejném roce jako F. J. Studnička zabýval i Edvard Julius Mellberg ve své disertační práci nazvané *Teorin för Determinant-Kalkylen* (Helsinki, 1876, 121 stran). Obě práce se objevily současně a nezávisle na sobě. Studničkova práce byla a je ceněna i citována v učebnicích teorie determinantů, v řadě historických studií, monografií a v některých bibliografiích. Studničkovo jméno tak nacházíme i v současné literatuře (např. v knize J. W. Daubena *The history of mathematics from antiquity to the present* z roku 1985, v článku E. Knoblocha *From Gauß to Weierstraß: Determinant Theory and Its Historical Evaluations*, in Ch. Sasaki, M. Sugiura, J. W. Dauben (ed.): *The Intersection of History and Mathematics*, Science Networks, Historical Study, Vol. 15, Birkhäuser, 1994, str. 51–66).

Na počátku 20. století se determinantům a jejich aplikacím věnovali další naši matematici. Karel Petr o determinantech publikoval v roce 1906 dva články; determinanty však užíval i v dalších svých pracích z teorie forem, Sturmových funkcí aj.[43] Dvě poměrně významné práce sepsal v letech 1913 a 1915 Václav

---

[37] *Théorie Générale des Equations Algébrique*, Paris, 1779.

[38] *Leçons d'analyse. Considérations sur les principes de la méthode inverse des différences*, Journal de l'Ecole Polytechnique 1(1795), str. 211–273.

[39] *Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment*, Journal de l'Ecole Polytechnique 10(1812), str. 29–112.

[40] Např. C. G. J. Jacobi: *De formatione et proprietatibus Determinantium*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 22(1841), str. 285–318; *De Determinantibus functionalibus*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 22(1841), str. 319–359. O Sylvesterových pracích viz [Mu1].

[41] Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag 8(1875–1876), VI. Folge, 40 stran.

[42] E. Pascal: *Die Determinanten*, Teubner, Leipzig, 1900 (německé vydání připravil z italského originálu z r. 1896 H. Leitzmann; italské vydání vyšlo ještě roku 1923 v Miláně); D. E. Smith: *History of modern Mathematics*, New York, 1906.

[43] Např. *Néhány megjegyzés a determinánsok elméletéhez*, Mathematikai és physikai Lapok 15(1906), str. 353–365; *Několik poznámek o determinantech*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 35(1906), str. 311–321; *O symmetrických soustavách čísel a větě Sturmově*, Rozpravy České akademie věd a umění 15(1906), 19 stran; *Poznámka o Sturmových*

Simandl (1887–1918); o jejich anglické překlady ho požádal sám T. Muir.[44] Další články věnovali determinantům Václav Hruška (1888–1954), Jan Schuster (1880–1961), Jaroslav Jarušek, Bohumil Bydžovský, K. Rössler a další.

První českou učebnici obsahující úvod do teorie determinantů vydal v Praze roku 1865 Martin Pokorný.[45] Další učební texty o determinantech vydali F. J. Studnička (*O determinantech*, 1870 česky a rusky, 1871 německy)[46], W. Matzka (*Grundzüge der systematischen Einführung und Begründung der Lehre der Determinanten vermittelst geeigneter Auflösung der Gruppen allgemeiner linearen Gleichungen*, 1877–1878)[47], Eduard Bartl, profesor na německé reálce v Praze (*Einleitung in die Theorie der Determinanten zum Gebrauche an Mittelschulen sowie zum Selbstunterrichte*, 1878)[48] a Karel Zahradník (*Prvé počátky nauky o determinantech. Pro vyšší střední školy*, 1879, roku 1878 vyšla chorvatsky v Záhřebu[49] a *O determinantech*, 1905[50]).

V roce 1899 vydal F. J. Studnička učebnici *Úvod do nauky o determinantech*[51], která má skoro čtyřikrát větší rozsah než jeho předchozí knížka *O determinantech.* Kromě základů teorie determinantů obsahuje i některé Studničkovy výsledky vztahující se k determinantům mocninným a sestavným. Učebnice byla určena především univerzitním studentům; jejím cílem mělo být i povzbuzení k odborné práci v teorii determinantů.

Matice, bilineární a kvadratické formy

Ve druhé polovině 19. století se zájem špičkových světových matematiků soustředil na studium vlastností matic, bilineárních a kvadratických forem. Za zrod teorie matic je dnes všeobecně považován rok 1858, kdy Arthur Cayley (1821–1895) sepsal a uveřejnil článek nazvaný *A Memoir on the Theory of Matrices*.[52]

---

funkcích, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 36(1907), str. 136–141; *Die symmetrischen Zahlensysteme und der Satz von Sturm*, Bulletin International. Résumés des travaux presentés 11(1906), str. 14–34.

[44] *O zvláštních determinantech*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 42(1913), str. 532–545; *Vyčíslení zvláštního determinantu*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 44(1915), str. 43–46.

[45] *Determinanty a vyšší rovnice*, Praha, 1865, 133 stran.

[46] *O determinantech*, Dr. Ed. Grégr, Praha, 1870, 64 stran; *Načal'naja osnovanija teorii Determinantov' ili opred'litelej*, Dr. Ed. Grégr, Praha, 1870, 70 stran; *Einleitung in die Theorie der Determinanten. Für Studierende an Mittleschulen und technischen Anstalten*, J. G. Calve'sche k. k. Universität-Buchhandlung, Prag, 1871, 67 stran. V německém vydání F. J. Studnička užil termín *subdeterminant*, který prý po něm použil v roce 1875 R. Baltzer ve čtvrtém vydání své slavné monografie *Theorie und Anwendung der Determinanten*; tím se tento termín rozšířil a ujal v matematickém světě.

[47] Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, math.-naturwiss. Classe, VI. Folge, 9. Band (1877–1878), 61 stran.

[48] Prag, 1878, 96 stran.

[49] Dr. Ed. Grégr, Praha, 1879, 48 stran; *O derminantih drugoga i trećega stupnja. Za porabu viših srednjih učilišta*, Zagreb, 1878, 39 stran.

[50] J. Barvič, Brno, 1905, 50 stran.

[51] Sborník Jednoty českých mathematiků, JČM, Praha, 1899, 231 stran.

[52] Phil. Trans. R. Soc. London 148(1858), str. 17–37 (Coll. Mathem. Papers, Vol. II, str. 475–496).

V historických studiích věnovaných vzniku teorie matic byl proto A. Cayley označen za jejího zakladatele, i když ve výše uvedené práci zavedl pouze maticové operace, vytvořil z matic řádu n lineární asociativní algebru dimenze n^2 a reprezentoval Hamiltonovy kvaterniony jistými komplexními maticemi druhého řádu. Jediným jeho hlubším výsledkem je Cayleyova-Hamiltonova věta. A. Cayley ji však prověřil jen pro matice druhého a třetího řádu, předvedl důkaz pro $n = 2$ a poznamenal, že necítí potřebu podat obecný důkaz. William Rowan Hamilton (1805–1865) dokázal obdobné tvrzení pro kvaterniony. První obecný důkaz podal až Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917) roku 1878[53]. Cayleyova práce o maticích vešla ve známost až počátkem osmdesátých let, koncem 19. století začaly být výsledky teorie forem vyjadřovány v řeči teorie matic.

V našich zemích se teorii matic a forem věnovali pouze Ludvík Kraus a Eduard Weyr, kteří Cayley-Hamiltonovu větu dokázali s malým zpožděním roku 1884. Ostatní čeští matematici se o tuto problematiku téměř nazajímali.

Eduard Weyr vystoupil na zasedání Královské české Společnosti nauk v dubnu roku 1884 s přednáškou *O základní větě v theorii matric*[54], kterou později vydal tiskem. K problematice základní věty algebry, tj. Cayleyovy-Hamiltonovy věty, ho patrně inspiroval jeho mladší kolega Ludvík Kraus.

Hleděl jsem tuto větu obecně dokázati, však se mi to nepodařilo, neboť cesta, která v jednoduchých poměrně případech $n = 2, 3$ vedla k cíli, se v obecném případu stávala neschůdnou. Obrátil jsem se k svému příteli p. Dr. L. Krausovi, priv. docentu na zdejší české universitě, s prosbou, aby se pokusil o důkaz; byl jsem nemálo potěšen, obdržev ihned, čeho jsem si přál. Dovolím si reprodukovati doslovně pěkné úvahy p. dra Krause.[55]

Eduard Weyr nejprve uvedl Krausův důkaz a potom svoji modifikaci tohoto důkazu. Oba tedy roku 1884 užívali maticový aparát a znali důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy věty. Je zajímavé, že o Weyrově důkazu věděl již roku 1884 J. J. Sylvester; svědčí o tom poznámka v jeho práci *Sur la résolution générale de l'équation linéaire en matrices d'un ordre quelconque.*[56] Eduard Weyr byl navíc jedním z prvních matematiků kontinentální Evropy, který přispěl ke sjednocování teorie matic a teorie forem.

Eduard Weyr se maticím věnoval i nadále. Roku 1884 sestrojil pro matici M druhého řádu matici e^M. Jsou-li μ_1, μ_2 *charakteristické kořeny*[57] matice M, je

$$e^M = \frac{e^{\mu_1} - e^{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} \cdot M + \frac{\mu_1 \cdot e^{\mu_2} - \mu_2 \cdot e^{\mu_1}}{\mu_1 - \mu_2} \cdot E,$$

[53] *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 84(1878), str. 1–63 (Gesammelte Abh. I., str. 343–405).

[54] Zprávy ze zasedání Královské české Společnosti nauk, 1884, str. 148–152.

[55] Ed. Weyr: *O základní větě v theorii matric*, Zprávy ze zasedání Královské české Společnosti nauk, 1884, str. 148–152; str. 150.

[56] Comptes rendus de l'Académie des sciences Paris 99(1884), str. 409–412, 432–436 (Coll. Mathem. Papers, Vol. IV, str. 199–205).

[57] Charakteristickými kořeny matice M míní Ed. Weyr její vlastní čísla. Ponecháváme zde jeho termín, neboť Ed. Weyr zavedl ještě pojem *charakteristická čísla* – viz dále.

kde E je jednotková matice. Přirozený logaritmus $\log M$ matice M definoval rovností

$$e^{\log M} = M$$

a odvodil jeho explicitní vyjádření. Byl jedním z prvních matematiků, kteří studovali matice e^M a $\log M$. Dnes se nesprávně uvádí[58], že exponenciálu s maticovým argumentem studovali jako první Giuseppe Peano (1858–1932) roku 1888 a Emmanuel Carvallo (1856–1945) roku 1891.[59] Poznamenejme, že Guiseppe Peano v knížce *Calcolo geometrico*[60] zavedl k danému endomorfismu R vektorového prostoru endomorfismus

$$e^R = 1 + R + \frac{R^2}{2!} + \cdots .$$

Morris Kline v knize *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*[61] uvádí, že transcendentní funkce s maticovým argumentem zavedl jako mocninné řady William Henry Metzler (1863–1943) v roce 1892.[62] Funkce e^q a $\log q$, kde q je kvaternion, studovali již W. R. Hamilton[63] a vztah kvaternionů a matic byl od Cayleyho práce[64] z roku 1858 znám britským matematikům.

Roku 1885 publikoval Ed. Weyr dvě práce, *Sur la théorie des matrices*[65] a *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces*[66], v nichž stručně prezentoval svoji teorii charakteristických čísel a „typických“ matic, kterou později rozpracoval a podrobně vyložil roku 1889 ve spise *O theorii forem bilinearných*[67] a v jeho německé verzi *Zur Theorie der bilinearen Formen*[68]. Výsledky, které jsou v těchto pracích publikovány, se týkají závažné problematiky podobnosti matic a úplných systémů invariantů podobnosti, vlastních čísel, diagonalizovatelnosti matice a Jordanova kanonického tvaru.

---

[58] Viz např. Cyrus Colton MacDuffee (1895–1961): *The Theory of Matrices*, Berlin, 1933.

[59] G. Peano: *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari*, Atti R. Acad. Torino 22(1887), str. 437–446; překlad: *Intégration par séries des équations différentialles linéares*, Mathematische Annalen 32(1888), str. 450–456; E. Carvallo: *Sur les systèmes linéaires, le calcul des symboles différentiels et leur application à la physique mathématique*, Monatshefte für Mathematik und Physik 2(1891), str. 177–216, 225–266, 311–330.

[60] G. Peano: *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino, 1888.

[61] New York, 1972, str. 811.

[62] W. F. Metzler: *On the roots of matrices*, Amer. J. Math. 14(1892), str. 326–377.

[63] Např. *Lectures on Quaternions*, Hodges and Smith, Dublin, 1853, 736 stran, a *Elements of quaternions*, Dublin, 1866, 802 stran; nové anglické vydání Ch. J. Joly, Longmans, Green, and Co., London, 1. díl 1899, 583 stran, 2. díl, 1901, 502 stran; německý překlad P. Glan, Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1882, 1. díl a 2. díl, 1283 stran.

[64] *A Memoir on the Theory of Matrices*, Phil. Trans. R. Soc. London 148(1858), str. 17–37 (Coll. Mathem. Papers, Vol. II, str. 475–496).

[65] Comptes rendus de l'Académie des sciences Paris 100(1885), str. 787–789.

[66] Comptes rendus de l'Académie des sciences Paris 100(1885), str. 966–969.

[67] Spisův poctěných jubilejní cenou Královské české Společnosti nauk v Praze č. II., Praha, 1889, 111 stran.

[68] Monatshefte für Mathematik und Physik 1(1890), str. 163–200, 201–236.

Jedním z důležitých výsledků je odhad nulity[69] součinu dvou matic:

$$n(A_i) \leq n(A_1A_2) \leq n(A_1) + n(A_2), \qquad i = 1, 2.$$

Eduard Weyr dále zavedl tzv. *charakteristická čísla*:

Jestliže A je komplexní matice n-tého řádu a λ její s-násobný charakteristický kořen, pak existuje přirozené číslo r takové, že

$$n(A - \lambda E) < n(A - \lambda E)^2 < \cdots < n(A - \lambda E)^r = n(A - \lambda E)^{r+1} = \cdots .$$

Označíme-li

$$\begin{aligned}
&n(A - \lambda E) = \alpha_1,\\
&n(A - \lambda E)^2 = \alpha_1 + \alpha_2,\\
&\dotfill\\
&n(A - \lambda E)^r = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r,
\end{aligned}$$

pak přirozená čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ jsou Weyrova charakteristická čísla matice A příslušná k charakteristickému kořenu λ. Platí pro ně tyto vztahy:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r, \qquad\qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = s.$$

Ed. Weyr ukázal, že systém všech charakteristických kořenů a příslušných charakteristických čísel je úplným systémem invariantů podobnosti matic, a že každé přípustné volbě těchto invariantů odpovídá třída podobných matic.

Ed. Weyr dále sestrojil konkrétní matici M řádu n, která má předepsané charakteristické kořeny a předepsaná charakteristická čísla, a tak v dané třídě podobných matic nalezl reprezentanta M, z nějž se pomocí vztahu $X = Q^{-1}MQ$ získají všechny matice X této třídy. Weyrova matice M má velmi jednoduchý tvar. Obsahuje pouze nuly, jedničky a charakteristické kořeny λ_j; od Jordanovy matice reprezentující danou třídu podobných matic se liší pouze trochu jiným uspořádáním prvků. Pro tuto matici M zavedl Ed. Weyr později termín *typický tvar*.

Pojem hodnosti matice zavedl roku 1879 F. G. Frobenius[70], implicitně se však tento pojem objevoval už dříve. J. J. Sylvester užíval nezávisle pojmu nulity již po roce 1850.[71] Roku 1882 publikoval v práci *On the properties of a split matrix*[72] odhad nulity součinu matic. Eduard Weyr publikoval tento výsledek roku 1885 nezávisle na J. J. Sylvesterovi.

---

[69] U čtvercové matice nulitou rozumíme rozdíl jejího řádu a její hodnosti.

[70] *Über homogene totale Differentialgleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 86(1879), str. 1–19 (Gesammelte Abh. I, str. 435–453); *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 86(1879), str. 146–208 (Gesammelte Abh. I, str. 482–544).

[71] *Additions to the articles, „On a new class of theorems“, and „On Pascal's theorem“*, Phil. Mag. 37(1850), str. 363–370 (Coll. Mathem. Papers, Vol. I, str. 145–151).

[72] J. Hopkins Univ. Circulars 1(1882), str. 210–211 (Coll. Mathem. Papers, Vol. III, str. 645–646).

Otázky kanonických tvarů matic se poprvé objevily při transformaci bilineárních a kvadratických forem, kdy se vhodnými substitucemi lineárních kombinací nových proměnných přecházelo k jednodušším vyjádřením uvažovaných forem. Úvahami o podobnosti matic se zabývali již A. L. Cauchy, J. J. Sylvester a Henry John Stanley Smith (1826–1883). Roku 1868 publikoval Karl Theodor Wilhelm Weierstrass svoji teorii elementárních dělitelů[73], kde mimo jiné podal nutné a postačující podmínky pro podobnost matic a diagonalizovatelnost matice, a v podstatě dospěl k tzv. Jordanovu kanonickému tvaru. O dva roky později vydal Camille Jordan (1838–1922) svoje obsáhlé dílo *Traité des substitutions et des équations algébrigues*[74]; v druhé knize této práce nacházíme rovněž převod matice na kanonický tvar. F. G. Frobenius se problematikou charakteristické rovnice, minimálního polynomu, podobnosti, invariantních faktorů a elementárních dělitelů zabýval roku 1878[75]; roku 1894 se k tomuto tématu vrátil a dal svým výsledkům exaktnější podobu.[76] Všechny tyto výsledky byly zformulovány v řeči bilineárních a kvadratických forem a s využitím determinantů; jejich souhrn – podaný více méně v duchu původních prací, ale v maticové řeči – je dnes součástí základních kursů lineární algebry.

Eduard Weyr přistoupil k problematice podobnosti matic a k nalezení úplného systému invariantů podobnosti jiným způsobem.[77] Jeho přístup je bližší pohledu algebry či dnešní funkcionální analýzy. Později svou metodu charakteristických čísel podrobněji rozpracoval a doplnil zavedením důležitého pojmu normální soustava (viz [Bj1]).

Výklad Weyrovy teorie podali v letech 1892, 1904 a 1930 William Henry Metzler (1863–1943), Kurt Hensel (1861–1941) a Julius Wellstein (1888–1978).[78] Weyrovu teorii uvádějí i C. C. MacDuffee v knize *The Theory of Matrices* z roku 1933[79] a Rudolf Zurmühl (1904–1966) v knize *Matrizen und ihre technische Anwendung* z roku 1950[80]. Wolfgang Krull (1899–1971) ji roku 1921 rozšířil pro matice nad libovolným tělesem.[81] Soubor všech

---

[73] *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*, M'ber. d. Berlin Akad. d. Wiss. 1868, str. 310–338 (Werke 2, str. 19–44).

[74] Kniha I. až V., Gauthier-Villars, Paris, 1870, VIII + 667 stran; reprint Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1989.

[75] *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 84(1878), str. 1–63 (Gesammelte Abh. I., str. 343–405).

[76] *Über die Elementarteiler der Determinanten*, Sitz.-ber. Königl. Preuss. Akad. d. Wiss. Berlin 1894, str. 7–20 (Gesammelte Abh. II, str. 577–590).

[77] Viz *O theorii forem bilinearných*, Spisův poctěných jubilejní cenou Královské české Společnosti nauk v Praze č. II., Praha, 1889, 111 stran; *Zur Theorie der bilinearen Formen*, Monatshefte für Mathematik und Physik 1(1890), str. 163–200, 201–236.

[78] W. H. Metzler: *On the roots of matrices*, Amer. J. Math. 14(1892), str. 326–377; K. Hensel: *Theorie der Körper von Matrizen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 127(1904), str. 116–166; J. Wellstein: *Über symmetrische, alternierende und orthogonale Normalformen von Matrizen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 163(1930), str. 166–182.

[79] Berlin, 1933.

[80] Springer-Verlag, Berlin, 1950.

[81] W. Krull: *Über Begleitmatrizen und Elementarteilertheorie*, Freiburg, 1921.

charakteristických čísel ke všem charakteristickým kořenům $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ matice M, tj.

$$(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{r_1}^1; \alpha_1^2, \ldots, \alpha_{r_2}^2; \ldots; \alpha_1^k, \ldots, \alpha_{r_k}^k),$$

bývá nazýván *Weyrova charakteristika.*

Roku 1911 zobecnil F. G. Frobenius Weyrovy výsledky z práce týkající se hodnosti matic a ocenil Weyrovu teorii charakteristických čísel.[82]

Ještě padesát let od Weyrovy smrti nalézáme v české matematické literatuře odezvu na jeho teorii charakteristických čísel a typických tvarů matic. Otakar Borůvka (1899–1995) ji propagoval nejen ve svých přednáškách, ale i ve svých pracích a upozorňoval na možnosti jejího použití.[83] Později na tuto teorii navázali Miroslav Novotný (nar. 1922) a Jiří Čermák.[84] V české matematické literatuře je Weyrova teorie podrobně vyložena v Borůvkově knížce *Základy teorie matic* z roku 1971[85] a přeložena do moderní řeči prostorů a homomorfismů v Bečvářově učebnici *Lineární algebra* [Bj6].

Čtyřicetistránková Weyrova práce *O binarných matricích*[86] z roku 1887 je věnována maticím druhého řádu. Byla zřejmě napsána pro popularizaci teorie matic a jejího vztahu k hyperkomplexním číslům. Nejprve jsou zde uvedena základní fakta o maticových operacích, jež jsou dány do souvislosti s transformacemi, které matice reprezentují.

Ed. Weyr ukazuje, že na základě Cayleyovy-Hamiltonovy věty je možno redukovat celou i racionální funkci φ matice M druhého řádu na lineární funkci tvaru

$$\alpha M + \beta E,$$

kde se skaláry α, β snadno vyjádří pomocí charakteristických kořenů matice M (E je opět jednotková matice). Jestliže jsou charakteristické kořeny μ_1, μ_2 matice M v absolutní hodnotě menší než poloměr konvergence řady

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j,$$

---

[82] *Über den Rang einer Matrix*, Sitz.-ber. Königl. Preuss. Akad. d. Wiss. Berlin 1911, str. 20–29, 128–129 (Gesammelte Abh. III, str. 479–490).

[83] Například O. Borůvka: *Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty*, Časopis pro pěstování matematiky 79(1954), str. 151–155, a *Sur les matrices singulières*, Comptes rendus de l'Académie des sciences Paris 203(1936), str. 600–602, 762.

[84] M. Novotný: *O zobecnění Weyrovy theorie charakteristických čísel matic*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 74(1949), str. 239–241; J. Čermák: *O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic*, Práce moravskoslezské akademie věd přírodních, sv. XXV, spis 12, sešit 6, 1953, str. 337–356, *O systémech lineárních diferenčních rovnic s periodickými koeficienty*, Časopis pro pěstování matematiky 79(1954), str. 141–150, a *Poznámka o limitním přechodu diferenčních rovnic v rovnice diferenciální*, Časopis pro pěstování matematiky 81(1956), str. 224–228.

[85] Academia, Praha, 1971.

[86] Věstník Královské české Společnosti nauk, třída mathematicko-přírodovědná, 1887, č. 18, str. 358–400.

pak je definována i matice

$$\varphi(M) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j M^j,$$

a platí $\varphi(M) = \alpha M + \beta E$; skaláry α, β se určí pomocí řady $\varphi(z)$.

Ed. Weyr převádí matici M na některý z tvarů

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 1 & \mu \end{pmatrix};$$

jedná se vlastně o Jordanův kanonický tvar. Dále vyšetřuje exponenciální a logaritmickou funkci s maticovým argumentem, ukazuje, že matice druhého řádu tvoří systém hyperkomplexních čísel se čtyřmi základními jednotkami, a rozebírá souvislosti teorie matic a teorie kvaternionů. Pracuje s kvaterniony s reálnými i komplexními koeficienty (tzv. bikvaterniony) a rovněž uvádí, kdy řada

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j q^j$$

pro daný kvaternion q konverguje.

Roku 1889 vydal Ed. Weyr spis *O theorii forem bilinearných.*[87] Vyložil v něm základní partie teorie matic a uvedl je do souvislosti s teorií bilineárních a kvadratických forem. Podal zde obecnější výklad, než ve své práci *O binarných matricích* (1887), a popularizoval výsledky svých dřívějších prací. Vysvětlil základní fakta o maticích, operacích s maticemi, o lineární závislosti n-tic a soustavách lineárních rovnic, podrobně zpracoval svoji teorii charakteristických čísel a typických tvarů matic, zobecnil svoji větu o nulitě součinu dvou matic. Zavedl pojem normální soustavy příslušné k dané matici a ukázal, jak lze k dané matici všechny její normální soustavy nalézt. Weyrovou metodou je možno převést každou komplexní matici na typický tvar (Jordanův kanonický tvar) a současně najít příslušnou transformační matici či dokonce všechny tyto transformační matice.

Dále se Ed. Weyr zabýval některými dalšími problémy teorie matic. K danému polynomu f nalezl všechny matice daného řádu, pro něž je $f(M) = 0$. Pomocí teorie charakteristických čísel podal řešení klasického problému teorie forem, který vyřešili K. T. W. Weierstrass roku 1868 a Leopold Kronecker (1823–1891) v letech 1868 a 1874;[88] v maticové řeči je možno tento problém vyslovit takto:[89]

[87] Ed. Weyr: *O theorii forem bilinearných*, Spisův poctěných jubilejní cenou Královské české Společnosti nauk v Praze č. II., Praha, 1889, 111 stran.

[88] K. T. W. Weierstrass: *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*, M'ber. d. Berlin Akad. d. Wiss. 1868, str. 310–338 (Werke 2, str. 19–44); L. Kronecker: *Ueber Schaaren quadratischer Formen*, M'ber. d. Berlin Akad. d. Wiss. 1868, str. 339–346 (Werke I, str. 163–174), a *Ueber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen*, M'ber. d. Berlin Akad. d. Wiss. 1874, str. 59–76, 149–165, 206–232 (Werke I, str. 349–413).

[89] Roku 1901 se Ed. Weyr k této problematice vrátil v krátkém článku *O theorii forem bilineárných*, Věstník III. sjezdu českých přírodozpytcův a lékařů v Praze, 1901, str. 164–167.

Nechť P, Q, P', Q' jsou matice řádu n. Najděte nutnou a postačující podmínku pro existenci regulárních matic H, K, pro které je

$$P' = HPK, \qquad Q' = HQK,$$

a udejte metodu k nalezení transformačních matic H, K.

S tímto problémem se matematici setkávali např. v analytické geometrii a analýze. Ve speciálních případech jej řešili A. L. Cauchy roku 1829, C. G. J. Jacobi roku 1834, J. J. Sylvester roku 1851 a K. T. W. Weierstrass roku 1858.[90] O deset let později pak K. T. W. Weierstrass podal řešení v případě existence čísel p, q, pro která je $\det(pP + qQ) \neq 0$; hledanou ekvivalentní podmínkou je v tomto případě podobnost matic

$$Q(pP + qQ)^{-1}, \qquad Q'(pP' + qQ')^{-1}.$$

Leopold Kronecker pak vyřešil zbývající případ, kdy pro každou dvojici čísel p, q je $\det(pP + qQ) = 0$.[91]

Ed. Weyr ve studii *O binarných matricích* též uvedl nutné a postačující podmínky, aby pro danou čtvercovou matici M konvergovala mocninná řada

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j M^j;$$

obecnější výsledky své dřívější práce tak přenesl do teorie matic. Tento výsledek je obecně připisován až K. Henselovi (1926).[92] Ed. Weyr rovněž ukázal, jak vyjádřit řadu $\sum_{j=0}^{\infty} a_j M^j$ jako lineární kombinaci matic $E, M, M^2, \ldots, M^{m-1}$, kde m je stupeň minimálního polynomu matice M. Výsledky aplikoval na exponenciální a logaritmickou funkci matice druhého řádu; s těmito funkcemi již pracoval dříve.[93]

---

[90] A. L. Cauchy: *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes*, Exer. de math. 4(1829)(Oeuvres (2) 9, str. 175–195); C. G. J. Jacobi: *De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares …*, Journal für reine und angewandte Mathematik 12(1834), str. 1–69 (Werke 3, str. 191–268); J. J. Sylvester: *An enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order*, Phil. Mag. 1(1851), str. 119–140 (Coll. Mathem. Papers, Vol. I, str. 219–240); K. T. W. Weierstrass: *Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen*, M'ber. d. Berlin Akad. d. Wiss. 1858, str. 207–220 (Werke 1, str. 233–246).

[91] K. T. W. Weierstrass: *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*, M'ber. d. Berlin Akad. d. Wiss. 1868, str. 310–338 (Werke 2, str. 19–44).

[92] K. Hensel: *Über Potenzreihen von Matrizen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 155(1926), str. 107–110.

[93] *Sur la théorie des quaternions*, Comptes rendus de l'Académie des sciences Paris 98(1884), str. 1320–1323; *O binarných matricích*, Věstník Královské české Společnosti nauk, třída mathematické-přírodovědná, 1887, č. 18, str. 358–400.

Ukázal rovněž možnosti využití typických tvarů matic v teorii lineárních diferenciálních rovnic. Soustředil se na otázky, které se týkaly fundamentálních systémů lineárních diferenciálních rovnic

$$y^{(m)} = p_1 y^{(m-1)} + p_2 y^{(m-2)} + \cdots + p_m y,$$

kde $p_1, \ldots, p_m$ jsou funkce komplexní proměnné.[94]

Hyperkomplexní čísla

Představy o komplexních číslech jako bodech roviny inspirovaly ve čtyřicátých letech 19. století k hledání větších číselných oborů, tzv. hyperkomplexních čísel. Tak objevil W. R. Hamilton roku 1843 kvaterniony[95], John T. Graves (1806–1870)[96] a A. Cayley[97] nalezli roku 1843 a 1845 oktávy, Auguste de Morgan (1806–1871) a Charles Graves (1810–1860) studovali některé typy trojsložkových čísel.[98] A. Cayley publikoval roku 1858 svůj memoár o teorii matic – rovněž množina čtvercových matic daného řádu byla chápána jako množina hyperkomplexních čísel. Dvě obsáhlé Hamiltonovy monografie *Lectures on quaternions*[99] a *Elements of quaternions*[100] a řada časopiseckých prací předních světových matematiků inspirovala širokou matematickou obec ke studiu hyperkomplexních čísel (kvaterniony, oktávy, triplety, bikvaterniony, duální a dvojná čísla, Grassmannova a Cliffordova čísla, matice, ...). Benjamin Peirce (1809–1880) vytvořil roku 1870 obecný pojem lineární asociativní algebry v práci *Linear associative algebra*[101]; koncem 19. století se tak tato problematika postupně měnila v teorii algeber.[102]

---

[94] Více o výsledcích Ed. Weyra v teorii matic viz [Bj1], str. 91–119 a 121–127.

[95] *On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra*, The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 3. série, 25(1844), str. 11–13, 241–246, 489–495.

[96] Viz článek v Trans. Roy. Irish Acad. 21(1848), str. 338–341.

[97] *On Jacobi's elliptic funtions, in reply to Rev. Brice Brouwin and on quaternions*, Phil. Mag. J. Sci. 3(1845), str. 210–213 (Coll. Mathem. Papers, Vol. I, str. 127, Vol. XI, str. 368–371.)

[98] A. de Morgan: *On the foundation of algebra*, Trans. Cambridge. Phil. Soc. 8(1847), str. 241–254; Ch. Graves: *On algebraical triplets*, Proc. Irish. Acad. 3(1874), str. 51–54, 57–64, 80–84, 105–108.

[99] Hodges and Smith, Dublin, 1853, 736 stran.

[100] Dublin, 1866, 802 stran; nové anglické vydání Ch. J. Joly, Longmans, Green, and Co., London, 1. díl 1899, 583 stran, 2. díl, 1901, 502 stran; německý překlad P. Glan, Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1882, 1. díl a 2. díl, 1283 stran.

[101] *Linear associative algebra*, Washington, 1870 (litografie); *Linear associative algebra*, American Journal of Mathematics 4(1881), str. 97–221.

[102] O vzniku, vývoji a aplikacích teorie hyperkomplexních čísel viz např. M. Deuring: *Algebren*, Berlin, 1935; L. E. Dickson: *Algebren und ihre Zahlentheorie*, Leipzig, 1927; L. E. Dickson: *History of the theory of numbers*, Vol. I., II., New York, 1934; M. Kline: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972; L. Nový: *Origins of Modern Algebra*, Leyden, 1973; B. A. Rozenfel'd: *Istorija neevklidovoj geometrii. Razvitie ponjatija o geometričeskom prostranstve*, Izdatel'stvo Nauka, Moskva, 1976; B. L. van der Waerden: *A history of algebra. From al-Khwárizmí to Emmy Noether*, Springer, Berlin, 1985; D. Flament: *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie*, CNRS Editions, Paris, 2003. V českém jazyce je historie hyperkomplexních čísel popsána např. v [Bj3], [Bj4], [Bj7] a [Bj8].

Problematika hyperkomplexních čísel zaujala i některé naše matematiky; několik prací publikovali F. J. Studnička, August Seydler (1849–1891), Eduard Weyr, Anton Puchta a Jan Odstrčil (1837–1888).

F. J. Studnička se teorii kvaternionů věnoval v několika článcích. Byly sepsány hlavně pro středoškolské studenty a širší veřejnost; jejich cílem bylo informovat čtenáře o kvaternionech a jejich vlastnostech. První dva vyšly v letech 1875 a 1876 s názvem *Über die reducirte Form der Quaternionen*[103] a *O kvaternionech*[104]. V roce 1883 v článku *Neuer Beweis des Satzes, dass das Produkt der Summe von acht Quadratzahlen mit der Summe von acht Quadratzahlen sich als Summe von acht Quadratzahlen darstellen lasse*[105] F. J. Studnička zveřejnil důkazy známých vzorců, které vyjadřují součin dvou součtů dvou, čtyř, osmi čtverců opět jako součet dvou, čtyř, osmi čtverců. V tomto článku se však dopustil dvou zásadních chyb; za zmínku stojí, že na ně neupozornil Max Simon (1844–1918), recenzent Studničkovy práce, v referativním časopise *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Špičkovým českým matematikům proto patrně Studničkovy chyby nebyly známy, neboť proti němu nebyly použity v kritických článcích, které v osmdesátých a devadesátých letech vyšly v časopisech *Athenaeum* a *Čas*.[106]

F. J. Studnička částečně podlehl anglo-americkému kultu kvaternionů. V devadesátých letech se stal tajemníkem *International Association for Promoting the Study of Quaternions and Allied Systems of Mathematics* pro Rakousko-Uhersko. V letech 1893 a 1894 sepsal F. J. Studnička šest článků, ve kterých se mimo jiné pokusil vyložit řešení kvadratické rovnice s reálnými koeficienty v nekomutativním tělese kvaternionů a vypracovat teorii nejjednodušších algebraických a transcendentních funkcí, jejichž argumentem je kvaternion. Jeho články kritizoval v referativním časopise *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* Matyáš Lerch.[107]

Roku 1881 rozpracoval August Seydler v článku *Zur Theorie der complanaren Biquaternionen oder der doppelt-complexen Grössen*[108] teorii bikvaternionů. Mimo jiné zde elementárním způsobem ukázal, že komplexní čísla nelze rozšířit na trojsložková hyperkomplexní čísla.[109] Jde o následující vtipný obrat.

Uvažujme trojsložková čísla $k + lh + mi$, kde k, l, m jsou reálná čísla a $i^2 = -1$ (položíme-li $l = 0$, dostáváme komplexní čísla). Součin *hi ideální*

---

[103] Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1875, č. 5, str. 183–188.

[104] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 5(1876), str. 49–57, 97–102, 145–151.

[105] Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1883, č. 46, str. 475–481.

[106] Podrobné hodnocení Studničkovy práce v teorii kvaternionů, rozbor jeho chyb a historie jejich odhalení viz [Be1], str. 94–107.

[107] Viz [Be1], str. 101–104.

[108] Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, 1881, str. 80–104.

[109] Ukázal tedy, že dlouholeté Hamiltonovo hledání „rozumného“ číselného oboru trojsložkových čísel bylo marné. O mnoho let později ukázal totéž K. O. May v článku *The impossibility of a division algebra of vectors in three dimensional space*, American Mathematical Monthly 73(1966), str. 289–291.

jednotky h a *imaginární jednotky* i musí být opět trojsložkové číslo, tj. musí být $hi = a + bh + ci$, kde a, b, c jsou konkrétní reálná čísla. Po vynásobení této rovnosti imaginární jednotkou i zprava a následném dosazení získáme rovnost

$$-h = ai + b(a + bh + ci) - c.$$

Porovnáním koeficientů dostáváme soustavu rovnic

$$ab - c = 0, \qquad b^2 = -1, \qquad a + bc = 0,$$

která je v reálném oboru neřešitelná.

Eduard Weyr publikoval roku 1884 dvě krátké práce se společným názvem *Sur la théorie des quaternions*[110]. Ukázal v nich, jak lze převést řešení tzv. *bilaterální rovnice* tvaru

$$a_0x^nb_0 + a_1x^{n-1}b_1 + \cdots + a_{n-1}xb_{n-1} = r,$$

kde koeficienty $a_0, b_0, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}, r$ jsou kvaterniony a x hledaný kvaternion, na řešení obyčejných číselných rovnic. Zobecnil tak výsledky, ke kterým dospěl v témže roce J. J. Sylvester; ten hledal řešení tzv. *unilaterárních rovnic*, kdy mocniny neznámého kvaternionu x jsou násobeny koeficienty pouze z jedné a téže strany.[111] J. J. Sylvester ocenil Weyrův výsledek roku 1884 v časopise *Nature*[112]:

Předmět nemůže býti v lepších rukou. Míč jest vržen a nejzkušenější a nejobratnější hráči – Cayleyové, Lipschitzové, Poincaréové, Weyrové, Buchheimové (a kdo ví, kolik jich ještě?) – stojíce kolem a připraveni lapiti jej, sledují let jeho ve vzduchu.

Roku 1887 studoval Eduard Weyr v práci *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales*[113] n-dimenzionální lineární asociativní algebru A nad tělesem reálných, resp. komplexních čísel a dokázal následující závažný výsledek.

Pro daný prvek $x \in A$ definuje nekonečný součet $\sum_{i=j}^{\infty} a_j x^j$ určitý prvek y algebry A právě tehdy, když kořeny minimálního polynomu prvku x leží uvnitř kruhu konvergence mocninné řady $\sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$. Prvek y vyjádřil Ed. Weyr jako lineární kombinaci prvků $x, x^2, \ldots, x^{m-1}$, kde m je stupeň minimálního polynomu prvku x, a ukázal, že k minimálnímu polynomu lze dospět postupnou eliminací základních jednotek $e_1, \ldots, e_n$ algebry A z rovnic

$$\begin{aligned} x &= a_{11}e_1 + \cdots + a_{1n}e_n, \\ x^2 &= a_{21}e_1 + \cdots + a_{2n}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

[110] Comptes rendus de l'Académie des sciences Paris 98(1884), str. 906–907; Comptes rendus de l'Académie des sciences Paris 98(1884), str. 1320–1323.

[111] W. R. Hamilton řešil pouze unilaterální rovnice tvaru $x^2 + px + q = 0$, $x^2 + xp + q = 0$.

[112] J. J. Sylvester: *The genesis of an idea, or story of a discovery relating to equations in mupltiple quantity*, Nature 31(1884/1885), str. 35–36.

[113] Bulletin des Sciences Mathématiques 11(1887), 2. série, str. 205–215

Ed. Weyr zformuloval i nutnou a postačující podmínkou pro konvergenci řady $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j x^j$ v případě, kdy má algebra A jednotkový prvek a prvek x je invertibilní.

Vzhledem k tomu, že matice řádu n tvoří lineární asociativní algebru dimenze n^2, je možno tyto výsledky vyjádřit maticově; Ed. Weyr to ostatně udělal ve svých pracích *O binarných matricích* a *O theorii forem bilinearných* z let 1887 a 1889.

Weyrova věta o konvergenci je patrně jeho nejvýznamnějším výsledkem; roku 1926 byla znovu dokázána německým matematikem Kurtem Henselem, s jehož jménem je často spojována.[114]

Roku 1887 sestrojil Eduard Weyr v práci *Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices*[115] reprezentaci n-dimenzionální lineární asociativní algebry A v algebře matic. Je-li násobení prvků $e_1, \ldots, e_n$ báze algebry A dáno vzorcem

$$e_h e_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}^{h} \cdot e_j, \qquad h, k \ = 1, \ldots, n,$$

kde α_{kj}^{h} jsou tzv. strukturní konstanty algebry A, potom je pro každé $k, h, i, s \ = 1, \cdots, n$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{k} \cdot \alpha_{js}^{h} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}^{h} \cdot \alpha_{is}^{j},$$

neboť násobení prvků algebry A je asociativní. Definujme matice E_h rovnostmi

$$E_h = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{h} & \ldots & \alpha_{n1}^{h} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n}^{h} & \ldots & \alpha_{nn}^{h} \end{pmatrix}, \qquad h = 1, \ldots, n;$$

pro každé $h, k = 1, \ldots, n$ je potom

$$E_h E_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}^{h} \cdot E_j.$$

Násobení jednotek $e_1, \ldots, e_n$ a matic $E_1, \ldots, E_n$ je tedy „stejné“; proto je zobrazení

$$\sum_{j=1}^{n} a_j e_j \longmapsto \sum_{j=1}^{n} a_j E_j$$

reprezentací algebry A v algebře čtvercových matic řádu n. K obdobnému výsledku jako Ed. Weyr dospěli již dříve Charles Sanders Peirce (1839–1914) a Henri Poincaré (1854–1912).[116]

---

[114] K. Hensel: *Über Potenzreihen von Matrizen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 155(1926), str. 107–110.

[115] Věstník Královské české Společnosti nauk, třída mathematicko-přírodovědná, 1887, č. 11, str. 616–618.

[116] Viz např. H. Poincaré: *Sur les nombres complexes*, Comptes rendus de l'Académie des sciences Paris 99(1884), str. 740–742 (Oeuvres, Vol. V, str. 77-79). O Weyrových pracích z teorie kvaternionů viz [Bj1], str. 91–119.

Anton Puchta se v práci *Ueber einen Satz von Euler-Brioschi-Genocchi*[117] z roku 1887 zabýval problematikou vzorců vyjadřujících součin dvou součtů čtyř čtverců opět jako součet čtyř čtverců a určil všechna řešení této úlohy.

Kvaternionům věnovali naši matematici také dvě knížky elementárního charakteru; jedna byla psána německy, druhá česky. Studničkův přítel Jan Odstrčil vydal roku 1879 v Halle a. S. menší spis *Kurze Anleitung zum Rechnen mit den (Hamilton'schen) Quaternionen*[118], který byl prvním větším pokusem českého autora o výklad teorie kvaternionů. Jeho první část pojednává o skládání vektorů, druhá o vytváření kvaternionů jako součtů skalárů a vektorů, třetí o sčítání a odčítání kvaternionů, čtvrtá o násobení vektorů, pátá o násobení kvaternionů, šestá je věnována součinu více vektorů a sedmá příkladům užití kvaternionů v analytické geometrii prostoru. V roce 1894 vydal F. J. Studnička drobný spis *O kvaternionech*; pojednává pouze o elementárních partiích teorie kvaternionů, jeho cílem je uvést čtenáře do případného dalšího studia této zajímavé disciplíny. Odstrčilův přístup ke kvaternionům byl geometrický, Studničkův spíše aritmetický.

Teorie čísel

Ve druhé polovině 19. století věnovali čeští matematici pozornost i teorii čísel. V řadě prací se pokoušeli vyložit některé elementární poznatky širšímu okruhu čtenářů. Jen výjimečně se objevovaly práce obsahující původní výsledky, které přirozeným způsobem navazovaly na evropské číselně-teoretické práce.

V padesátých letech ještě pracoval J. F. Kulik. Svoji pozornost zaměřil na problémy stanovení počtu prvočísel menších než je dané přirozené číslo n. Dospěl k závěru, že tento počet $\pi(n)$ lze vyjádřit vzorcem

$$\pi(n) = N\big[p_\mu\big] + \mu,$$

kde p_μ je největší prvočíslo, pro které platí $p_\mu^2 \leq n$, p_μ je μ-té prvočíslo a

$$N\big[p_\mu\big] = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (p_\mu - 1)}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_\mu} \cdot n.$$

Výsledek není správný, poskytuje však dosti dobrý odhad.[119]

V šedesátých a sedmdesátých letech 19. století byly u nás o teorii čísel sepsány jen elementární učebnice, jejichž autory byli G. Skřivan (1862), M. Pokorný (1864) a F. J. Studnička (1875).[120] Ve stejné době byly uveřejněny

[117] Sitzungsberichte d. math.-natur. Classe d. k. Akademie d. Wissenschaften in Wien 96(1887), II. Abteilung, Heft I. bis V., str. 110–133.

[118] Nebert, Halle a. S., 1879, VIII + 79 stran.

[119] Tato Kulikova práce tiskem nevyšla; zachoval se jen neúplný záznam jeho přednášky, z něhož není jasné, jak k tomuto výsledku dospěl. Rukopis je uložen v Archívu akademie věd ve Vídni.

[120] Více viz kapitola této knihy věnovaná učebnicím a překladům.

některé vzdělávací a metodické články (V. Šimerka, A. Slavík, J. Novák, J. Bezdíček, F. J. Studnička, A. Pleskot, A. Hass a další), neměly však hlubší vědecký význam. Nejdůležitější a nejhodnotnější studie z teorie čísel sepsal koncem 19. století Matyáš Lerch; této problematice věnoval 52 pojednání, která publikoval v domácích i prestižních zahraničních časopisech (česky, francouzsky, německy a polsky). Soustředil se především na dva okruhy problémů; studoval počet dělitelů daného čísla a počet tříd binárních kvadratických forem daného diskriminantu.

V letech 1887 až 1896 uveřejnil více než deset prací, v nichž rozvíjel metody nalezení dělitelů daného přirozeného čísla, zjišťoval jejich součet, součet jejich mocnin apod. Tato problematika byla v teorii čísel systematicky studována již od 17. století; v 19. století dostala nový charakter, neboť začaly být studovány vlastnosti speciálních funkcí, které udávaly počet dělitelů (resp. jejich součet atd.) vyhovujících předem daným podmínkám. Tuto problematiku zpracovávali Adrien-Marie Legendre (1752–1833), Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), C. G. J. Jacobi, Charles Hermite (1822–1901), Viktor Jakovlevič Bunjakovski (1804–1889), Joseph Liouville (1809–1882) a další.

Lerchovy práce udivovaly elegancí a jednoduchostí důkazů. Například v roce 1887 v práci *Deux théorèmes d'arithmétique*[121] popsal řadu vlastností funkce $\psi(a,b)$ udávající počet dělitelů čísla a větších než číslo b. Dokázal, že platí rovnosti

$$\sum_{\varrho=0}^{[\frac{n}{2}]} \psi(n-\varrho,\varrho) = n \qquad \text{a} \qquad \sum_{\varrho=0}^{n} \psi(n+\varrho,\varrho) = 2n.$$

O rok později v práci *Sur une formule d'arithmètique*[122] studoval funkci $\chi(a,b)$ udávající počet dělitelů čísla a, které jsou menší nebo rovny číslu b. Nejprve odvodil vzorec

$$\sum_{\alpha=0}^{a+1} \big\{\psi(m+\alpha n,a) - \psi(m-\alpha n,\alpha)\big\} = \sum_{k=1}^{a}(k,m;n),$$

kde $(k,m;n)$ je rovno největšímu společnému děliteli d čísel k a m, pokud je d dělitelem čísla n, resp. nule, pokud d není dělitelem n. Vztah mezi funkcemi ψ a χ je podle M. Lercha dán rovnicí:

$$\sum_{\alpha=0}^{c} \psi(m-\alpha n,\alpha) = \sum_{\alpha=0}^{c} \chi(m-\alpha n,n), \quad \text{kde} \quad c = \Big[\frac{m-1}{n}\Big].$$

V devadesátých letech M. Lerch studoval různé modifikace těchto vztahů, odvozoval nové vzorce a popisoval další vlastnosti funkcí ψ a χ. Současně zahájil

[121] Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, 1887, str. 683–688.

[122] Comptes rendus de l'Académie des sciences Paris 106(1888), str. 186–187.

studium funkce $\sigma(a, b)$, která udává součet dělitelů čísla a větších než číslo b, a funkce $\rho(k, n)$, která udává počet sudých dělitelů čísla k větších než číslo n.

Na Lerchovy výsledky u nás navázali např. Alois Strnad (1852–1911) a František Nachtikal (1874–1939), ze zahraničních matematiků Leopold Bernhard Gegenbauer (1849–1903), Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder (1841–1902), Gustav de Vries (1866–1934) a Nikolaj Vasilievič Bugajev (1837–1903).

Druhou oblastí číselně teoretického zájmu M. Lercha byla teorie binárních kvadratických forem, konkrétně otázka zjišťování počtu tříd daného diskriminantu. M. Lerch se zde zařadil do proudu systematicky studovaného od konce 18. století. Základy položil již Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) ve svých *Disquisitiones arithmeticae* roku 1801. Formuloval zde následující zajímavý problém: máme-li kvadratickou formu

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

s celočíselnými koeficienty a, b, c a diskriminantem $D = b^2 - 4ac$ (pro $D < 0$ budeme v dalším místo D psát $-\Delta$), pak lineární transformace

$$x = \alpha x' + \beta y', \qquad y = \gamma x' + \delta y',$$

s celočíselnými koeficienty α, β, γ, δ,

$$\text{pro niž platí} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \pm 1,$$

převede kvadratickou formu $F(x, y)$ na formu $F(x', y') = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$ se stejným diskriminantem. Takové dvě kvadratické formy se nazývají ekvivalentní. Všechny navzájem ekvivalentní formy tvoří jistou třídu kvadratických forem se stejným diskriminantem. Dvě formy, které mají stejný diskriminant, však mohou patřit do různých tříd. C. F. Gauss dokázal, že tento počet tříd je konečný a pokoušel se jej ve speciálních případech určit. Z jeho prací dále vycházeli C. G. J. Jacobi, J. P. G. Lejeune Dirichlet a L. Kronecker. Kroneckerovy výsledky zobecnil a utřídil Ch. Hermite a na něj navázal M. Lerch; ten je však někdy považován za přímého pokračovatele Kroneckerova. M. Lerch se nejprve snažil zobecňovat výsledky svých předchůdců, svoji pozornost však brzy obrátil k dokazování nových vět, které by neměly jen teoretickou hodnotu, ale daly se použít i k numerickým výpočtům.

V článku *Sur quelques formules relatives au nombre des classes*[123] z roku 1897 vyšel z Dirichletovy základní rovnice popisující vztah mezi různými vyjádřeními počtu tříd binárních kvadratických forem daného diskriminantu. Pro počet tříd $Cl(-\Delta)$[124] binárních kvadratických forem se záporným diskriminantem získal ve speciálních případech vztahy

$$\frac{2}{\tau}\left[m - \Big(\frac{-\Delta}{m}\Big)\right] Cl(-\Delta) = -\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \Big(-\frac{\Delta}{\alpha}\Big) E\Big(\frac{\alpha m}{\Delta}\Big),$$

[123] Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 21(1897), 2. série, str. 209–304.

[124] V následujícím textu budeme pro počet tříd binárních kvadratických forem se záporným diskriminantem používat Lerchovo značení $Cl(-\Delta)$, které je odvozeno od zkratky francouzského slova classe, tj. třída.

kde m je libovolné celé číslo nedělitelné Δ; $\tau = 6$ pro $\Delta = 3$, $\tau = 4$ pro $\Delta = 4$ a $\tau = 2$ v ostatních případech, $E(x)$ je celá část čísla x, a

$$Cl(-\Delta) = \frac{\tau\sqrt{\Delta}}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big(-\frac{\Delta}{\nu} \Big) \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu},$$

kde $0 \leq x \leq \frac{1}{\Delta}$.[125]

V roce 1900 získal Matyáš Lerch za práci *Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers* tzv. „velkou cenu“ Francouzské akademie věd.[126] Bezpochyby jde o nejvýznamnější Lerchovu číselně-teoretickou studii. Připomeňme, že Francouzská akademie každoročně vypisovala nějaké soutěžní téma; v roce 1900 jím bylo „zdokonalení vyšetřování počtu tříd binárních kvadratických forem s celočíselnými koeficienty“.

M. Lerch chtěl původně odvodit obecné formule pro výpočet počtu tříd binárních kvadratických forem libovolného diskriminantu. Podařilo se mu to jen ve speciálních případech, odvodil však nové a pro další výzkum použitelné vzorce pro určení počtu některých tříd.[127] Například pro třídy se záporným diskriminantem odvodil M. Lerch dva ekvivalentní vzorce:

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{-\Delta}{n} \Big) \frac{1}{n} e^{\frac{n^2\pi}{\Delta}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{-\Delta}{n} \Big) \int_{n\sqrt{\frac{\pi}{\Delta}}}^{\infty} e^{-x^2}\, dx,$$

$$\frac{1}{\tau} Cl(-\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{-\Delta}{m} \Big) \frac{1}{1 + e^{\frac{m\pi\sqrt{2\Delta}}{\Delta}}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\frac{-\Delta}{m} \Big) \frac{1}{\sinh \frac{2m\pi}{\sqrt{2\Delta}}}$$

pro $\Delta > 0$. Obdobné komplikované vztahy nalezl i pro některé třídy s kladnými diskriminanty.[128]

M. Lerch volil k dosažení svých cílů nejrůznější prostředky, s úspěchem např. užíval vlastnosti funkce gamma, některé Hermiteovy výsledky, pokročilé partie teorie funkcí apod. Právě díky těmto pracím, které jsou napsány srozumitelně a s vysokou matematickou i jazykovou kulturou, se M. Lerch stal jedním z mála českých matematiků, jejichž práce získaly světový ohlas.

Na tyto Lerchovy práce navázal roku 1900 Karel Petr; pomocí theta funkce znovu dokázal osm Kroneckerových rekurentních formulí pro počet tříd binárních kvadratických forem záporného diskriminantu.[129] Na počátku

[125] Poznamenejme, že pro $x = 0$ obdržíme známou Dirichletovu rovnici.

[126] Tato rozsáhlá práce vyšla ve dvou ročnících časopisu Acta Mathematica 29(1905), str. 333–424, 30(1906), str. 203–293, a rovněž v Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences A. d. l'Institute National de France 33(1906), 244 stran.

[127] Dřívější Dirichletovy a Kroneckerovy formule se příliš nehodily pro další výpočty zejména v případě kladného diskriminantu.

[128] Podrobný popis Lerchových výsledků viz [Le2], str. 46–48.

[129] *O užití nauky o funkcích elliptických na theorii forem kvadratických záporného diskriminantu*, Rozpravy České akademie věd a umění 9(1900), č. 38, 17 stran.

20. století se k této problematice ještě několikrát vrátil.[130] Jeho práce však nedosahovaly kvalit M. Lercha.

Dvě vynikající práce věnoval Matyáš Lerch Fermatovým kvocientům a zákonům reciprocity.[131] V článku *Zur Theorie der Fermatschen Quotienten* $\frac{a^{p-1}-1}{p} = q(a)$[132] z roku 1905 nejprve poměrně jednoduchými prostředky dokázal následující vztah mezi tzv. Fermatovými a Wilsonovými kvocienty[133]:

$$\sum_{a=1}^{p-1} q(a) \equiv N \pmod p,$$

kde a je přirozené číslo, p liché prvočíslo, $q(a)$ Fermatův kvocient a

$$N = \frac{(p-1)!+1}{p}$$

Wilsonův kvocient. Dokázal též důležitou kongruenci

$$q(a) \equiv \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\nu a} \left[\frac{\nu a}{p}\right] \pmod p,$$

kde p je liché prvočíslo, a přirozené číslo nesoudělné s p. Vyšetřoval součty typu $\sum_{a=1}^{p-1} a^k q(a)$, kde k je celé číslo splňující podmínku $0 \le k < p$, a studoval i případ tzv. „složeného modulu“, tj.

$$q(a) = \frac{a^{\varphi(m)}-1}{m},$$

kde $\varphi(m)$ je Eulerova funkce. Obdobný problém řešil i v práci *Sur les théorèmes de Sylvester concernant le quotient de Fermat*[134] z roku 1906.

Lerchovy práce z teorie čísel byly na světové úrovni a zcela nově řešily řadu speciálních i velmi složitých otázek.

---

130 Např. *O počtu tříd forem kvadratických záporného diskriminantu*, Rozpravy České akademie věd a umění 10(1902), č. 40, 22 stran; *Über die Klassenzahl der quadratischen Formen mit negativer Diskriminante*, Bulletin International. Résumés des traveaux presentés 7(1903), str. 180–187; *O užití nauky o funkcích elliptických na odvození Dirichletových výsledků pro počet tříd forem kvadratických záporného diskriminantu*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 37(1908), str. 24–41; *O relacích pro počet tříd forem kvadratických záporného diskriminantu*, K sedmdesátým narozeninám dvorního rady prof. Dra. Karla Vrby, Nákladem České akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění, 1915, č. 22, 10 stran; *O relacích pro počet tříd forem kvadratických záporného diskriminantu*, Rozpravy České akademie věd a umění 25(1916), č. 23, 7 stran.

131 Lerchův přínos v této oblasti zpracoval K. Lepka v publikacích [Le1] a [Le2].

132 Mathematische Annalen 60(1905), str. 471–490.

133 Je-li p prvočíslo a a celé číslo nesoudělné s p, je podíl $q(a) = \frac{a^{p-1}-1}{p}$, celé číslo. Pro tento podíl se ujal název Fermatův kvocient. Je-li p prvočíslo, je $N = \frac{(p-1)!+1}{p}$ celé číslo, které se nazývá Wilsonův kvocient.

134 Comptes rendus de l’Académie des sciences Paris 142(1906), str. 35–38.

Geometrie

Rozvoj klasické geometrie na konci 18. století vedl ke vzniku syntetické projektivní geometrie, která se od dvacátých let 19. století rozvíjela jako samostatný obor. Základní principy zkoumající vlastnosti křivek, ploch a jejich transformací byly v popředí zájmu předních evropských geometrů; této problematice se věnovali např. Jean Victor Poncelet (1788–1867), Karl Georg Christian von Staudt (1798–1867), Jacob Steiner (1796–1863), Theodor Reye (1838–1919). Během padesátých a šedesátých let byla syntetická geometrie rozpracována a postavena na solidních základech a stala se součástí standardních učebnic. Ve druhé polovině 19. století se pozornost geometrů soustředila na studium vlastností speciálních křivek a ploch vyšších řádů, na jejich transformace apod.

Souběžně se syntetickou projektivní geometrií se rozvíjela i algebraická projektivní geometrie; využívány přitom byly algebraické a analytické postupy. August Ferdinand Möbius (1790–1868), Julius Plücker (1801–1868), Michael Chasles (1793–1880), A. Cayley a další matematici studovali křivky a plochy s použitím algebraických rovnic a analytických metod. To jim umožnilo vyjádřit řadu vztahů známých z deskriptivní geometrie pomocí algebraických vzorců.

Od druhé poloviny 19. století se pozornost geometrů obrátila k obecné teorii algebraických křivek v rovině a prostoru. Jejich snahy se zaměřily na vypracování klasifikace objektů a popis jejich vlastností. Poněkud stranou zájmu stála zpočátku neeukleidovská geometrie, jejíž základy položili ve dvacátých letech 19. století Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856) a János Bolyai (1802–1860), a k níž dospěl rovněž C. F. Gauss. Po celá desetiletí zůstávala nesrozumitelnou, pochopena byla až začátkem druhé poloviny 19. století zejména zásluhou Georga Friedricha Bernharda Riemanna (1826–1866). Její větší rozvoj nastal až v sedmdesátých letech.

Ve druhé polovině 19. století se pozornost soustředila na budování základů n-rozměrné geometrie nejprve v afinním a později v metrickém prostoru; rozpracovali je A. Cayley, Hermann Günter Grassmann (1809–1877), J. Plücker, G. F. B. Riemann, Felix Christian Klein (1849–1925), Hermann Minkowski (1864–1909). K všeobecnému uznání a rozvoji vícerozměrné geometrie došlo až koncem 19. století; umožnilo to další rozvoj algebraické geometrie a nástup geometrie diferenciální.

Koncem 19. století došlo pod vlivem *Erlangenského programu* F. Kleina (1872) k velké syntéze dřívějších poznatků a značné proměně geometrie.[135] Zájem o syntetickou geometrii postupně klesal, do popředí se dostávala n-dimenzionální geometrie, diferenciální geometrie, vektorový a tenzorový počet, algebraická geometrie křivek vyšších stupňů a axiomatická výstavba geometrických teorií.

Geometrie byla jednou z oblastí matematiky, v níž se u nás ve druhé polovině 19. století aktivně a úspěšně pracovalo, pozornost byla věnována hlavně

[135] F. Klein: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, A. Deichert, Erlangen, 1872 (též Gesammelte mathematische Abhandlungen, Springer-Verlag, Berlin, 1973, str. 460–497).

projektivní a deskriptivní geometrii. Naši nejlepší geometři sepsali řadu prací, které přinesly původní výsledky a svou úrovní odpovídaly tehdejší evropské produkci. Nová témata, např. z neeukleidovské a diferenciální geometrie, se však neobjevila.

Deskriptivní geometrie

Zcela originální myšlenky se v padesátých letech objevily ve třech článcích R. Skuherského.[136] Byla v nich rozpracována nová speciální názorná zobrazovací metoda, tzv. *ortogonální projekce*. Jejím základem je kolmé promítání na dvě roviny, které nejsou navzájem kolmé, jedna z nich je zvolena za *hlavní průmětnu*, druhá za *vedlejší*. Kolmý průmět P' libovolného bodu P do hlavní průmětny je jeho *hlavní průmět*, kolmý průmět P_1 bodu P do vedlejší průmětny je jeho *vedlejší průmět*. Bodu P je pak přiřazena uspořádaná dvojice (P', P_1') v hlavní průmětně, kde P_1' je hlavní průmět bodu P_1.

Skuherského zobrazovací metoda je do jisté míry ekvivalentní s *kolmou axonometrií*, která však tehdy ještě nebyla rozvinuta. R. Skuherský ji odvodil z klasické Mongeovy projekce postupnou transformací průměten; umožnilo mu to používat konstruktivní postupy Mongeova promítání.

Nejprve pečlivě vyložil princip nové metody, pak s její pomocí vyřešil některé elementární úlohy deskriptivní geometrie, nakonec ukázal její aplikace na studium vlastností křivek a ploch používaných v technické praxi.[137] Skuherského myšlenky byly šířeny v učebnicích A. Schnedara (1856), R. Staudigla (1875) a G. A. Peschky (1883, 1885), v sedmdesátých letech je však postupně vytlačila rozvíjející se kolmá axonometrie.

Axonometrií se na vysoké úrovni zabýval K. Pelz. Pomocí kolmé axonometrie vyřešil některé obtížné úlohy (např. středové osvětlení koule, vržený stín do duté polokoule) a zjednodušil některé konstruktivní postupy.[138] Velký ohlas měly i jeho práce z kosoúhlé axonometrie (např. Pelzův důkaz Pohlkeovy věty z roku 1877), klinogonální axonometrie (nový důkaz Pohlkeovy věty (1898) a konstrukce obrysů některých rotačních ploch z roku 1895.[139] Na

---

[136] *Die orthographische Parallelperspektive*, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe 5(1850), 56 stran; *Die orthographische Parallel-Perspektive*, F. Tempsky, Prag, 1855–1858, 106 stran; *Die Methode der orthogonalen Projektion auf zwei Ebenen, die keinen rechten Winkel miteinander einschliessen, als Grundlage für jede auf dem Prinzipe der orthogonalen (orthographischen) Projektion beruhende perspektivische Projektionsart oder Parallel-Perspektive*, Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, 1858, 21 stran.

[137] Více viz [Fo1], [Sk1] a J. Folta: *Vytváření ortografických názorných zobrazovacích metod a přínos R. Skuherského k jejich vypracování*, Sborník pro dějiny přírodních věd a techniky 7(1962), str. 27–61.

[138] K. Pelz: *Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Achsnometrie*, Sitzungsberichte d. math.-natur. Classe d. k. Akademie d. Wissenschaften in Wien, II. Abteilung, 81(1880), str. 300–330, 83(1881), str. 375–384, 90(1884), str. 1060–1075; *Beiträge zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie*, Zprávy ze zasedání Královské české Společnosti nauk, 1885, str. 648–661.

[139] K. Pelz: *Ueber einen neuen Beweis des Fundamental-Satze von Pohlke*, Sitzungsberichte d. math.-natur. Classe d. k. Akademie d. Wissenschaften in Wien, II. Abteilung,

tyto Pelzovy práce úspěšně navázal koncem 19. století J. Sobotka, který se zobrazovacími metodami zabýval prakticky po celý život. Studoval rovnoběžné promítání ploch druhého stupně, středové promítání kružnice, kulové plochy a obecných křivek vyšších řádů. Nejlepší jsou jeho práce z axonometrie z let 1900 až 1901, v nichž předvedl tzv. „Sobotkovy konstrukce“ převádějící obrazy z kosoúhlé axonometrie na sdružené pravoúhlé průměty.[140] Poznamenejme, že další důležité Sobotkovy práce s deskriptivní tématikou jsou až z dvacátých let 20. století. J. Sobotka v nich zvláštní pozornost věnoval důkazům různých známých vět, soustředil se především na důkazy Pohlkeovy-Schwarzovy věty. Důkazy nejprve modifikoval, pak s použitím netradičních přístupů uváděl nové.

Problémy konstruktivní teorie osvětlování ploch rozpracoval F. Tilšer v práci *Die Lehre der geometrischen Beleuchtungs-Constructionen und deren Anwendung auf das technische Zeichnen*.[141] V první části této rozsáhlé studie se věnoval osvětlování těles, vyložil známé metody konstrukce obrazů mezí vlastního a vrženého stínu tělesa. Úspěšně modifikoval Olivierovy a Leroyovy principy konstrukce čar spojujících body osvětlené stejnou intenzitou (tzv. *izofoty*) z let 1843 a 1844, nepodařilo se mu však najít obecnou metodu aplikovatelnou na libovolné těleso.[142] Ve druhé části práce F. Tilšer zkonstruoval izofoty na některých typech ploch a na mnohostěnech; vždy se snažil nalézt co nejefektivnější metodu. Studoval např. izofoty válců a kuželů, rozvinutých ploch šroubových, ploch zborcených, rotačních, translačních a obalových při rovnoběžném osvětlení. Užíval *desetistupňovou škálu intenzity osvětlení*, která odpovídá rozdělení hodnot sinu úhlu sevřeného světelným paprskem a tečnou rovinou po desetinách. Zabýval se rovněž poměrně speciální otázkou tzv. *lesklých bodů* a *křivek lesklých bodů* na osvětlených plochách, významnějších výsledků však nedosáhl.[143]

Na Tilšerovu práci navázali čeští geometři různými studiemi o centrálním osvětlení (např. Č. Jarolímek (1870, 1871)[144], K. Pelz v sérii prací ze sedmdesátých let[145]), o speciálních konstrukčních metodách řešících problém „lesklých

---

76(1877), str. 123–138; *Herr Küpper und der Pohlke'sche Beweis des Satze von Pohlke*, Gräz, 1889, 14 stran; *Zur klinogonalen Darstellung der Rotationsflächen*, Zprávy ze zasedání Královské české Společnosti nauk, 1895, 15 stran.

[140] J. Sobotka: *Zur rechnerischen Behandlung der Axonometrie*, Zprávy ze zasedání Královské české Společnosti nauk, 1900, 20 stran; *Axonometrische Darstellungen aus zwei Riessen und Coordinatentransformationen*, Zprávy ze zasedání Královské české Společnosti nauk, 1901, 27 stran.

[141] Vydáno v nakladatelství K. Gerolda syna, Wien, 1862.

[142] Díky Mongeovým a Lambertovým pracím bylo známo, že intenzita osvětlení v daném bodě plochy je závislá na kosinu úhlu sevřeného dopadajícím světelným paprskem a normálou plochy a na kosinu úhlu sevřeného „pohledem pozorovatele“ a normálou plochy.

[143] Více viz [Fo1], [No] a [Sk1].

[144] *Centrálné osvětlení geometrických ploch*, Soukromé realné gymnasium Dra. Ignáce Maadea, Praha, 1870; *Čáry světlosti ploch měřických*, Třetí zpráva Jednoty českých mathematiků, 1871, str. 63–72

[145] Například práce *Beiträge zur Bestimmung der Selbstschatten- und Schlagschattengrenzen der Flächen zweiten Grades bei Centralbeleuchtung*, 27. Jahresbericht d. Steier. Landesoberrealschule in Graz, 1878, 23 stran; *Zur Konstrukzionen der Selbst- und Schlagschattengrenzen von Flächen zweiten Grades unter Voraussetzung centraler Beleuchtung*, Sit-

bodů“ (např. A. Hoza (1872, 1873)[146], A. Sucharda (1897, 1902)[147], K. Pelz (1871)[148]), o konstrukci obrysových ploch (K. Pelz v sérii prací ze sedmdesátých let)[149]. Na počátku 20. století se problematice stínů věnovali J. Sobotka[150] a B. Procházka[151].

Druhou oblastí, které se F. Tilšer věnoval, byla perspektiva a perspektivní vidění. V práci *System der technisch-malerischen Perspektive* z let 1865 a 1866[152] vyložil základní zobrazovací metody (především centrální projekci) a některé z nich zdokonalil, vysvětlil nejen zobrazování základních geometrických útvarů, ale i složitějších ploch (např. elipsoid, anuloid, konoid), a připojil praktické pokyny pro kresliče a malíře. Zajímavé jsou jeho úvahy o fyziologickém a geometrickém procesu vidění; ocenil je i J. E. Purkyně. F. Tilšer objasnil funkce jednotlivých částí oka a geometricky popsal vytváření obrazu viděného předmětu na sítnici. Vyložil rovněž souvislosti perspektivního zobrazování a vidění. Této problematice se v osmdesátých a devadesátých letech věnoval hlavně M. Pelíšek.[153] Porovnal obraz zkonstruovaný podle zákonů perspektivy a obraz vytvořený lidským okem a snažil se ukázat, že „nepřirozenost“ geometrické perspektivy je podmíněna procesem vidění a vnímání. Jeho úvahy vzbudily ohlas a diskuse i v zahraničí.[154]

---

zungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, 1879, str. 514–534.

[146] *Kleinere mathematische Mittheilungen*, Archiv der Mathematik und Physik 54(1872), str. 164–174; *Constructionen der Intensitätslinien bei centralen Beleuchtung*, Archiv der Mathematik und Physik 55(1873), str. 319–331.

[147] *Kterak sestrojit tečny ke křivkám intensitním ploch translačních vůbec a kuželosečkových zvlášť*; Rozpravy České akademie věd a umění 6(1897), č. 24, 36 stran; *O isophotách rotačních ploch při rovnoběžném osvětlení*, Rozpravy České akademie věd a umění 11(1902), č. 25, 21 stran.

[148] *Über das Problem der Glanzpunkte*, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe 69(1871), str. 730–740.

[149] Nejvýznamnější jsou práce *Über eine allgemeine Bestimmungsart der Brennpunkte von Konturen der Flächen zweiten Grades*, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe 75(1877), str. 175–217; *Ergänzungen zur allgemeinen Bestimmungsart der Brennpunkte von Konturen der Flächen zweiten Grades*, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe 77(1878), str. 259–288; *Zur Tangentenbestimmung der Selbstschattengrenze von Rotazionsflächen*, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe 79(1879), str. 447–471.

[150] Více viz [Bh] a [Vy].

[151] Například práce *Konstrukce tečny ke křivce vlastního stínu na plochách rotačních*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 36(1907), str. 1–8.

[152] B. Tempsky, Prag, 1866, 1 + 344 stran, 2. vydání, B. Tempsky, Prag, 1883, 26 + 344 stran.

[153] Například práce *Ueber perspektivische Restitution, Bewegung und Verzerrung*, Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, 1886, str. 290–298; *Ueber eine specielle, durch ein dioptrisches System bestimmte Raumcollineation*, Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, 1886, str. 302–314; *Untersuchungen perspectivischer Darstellungen der Wirkungen*, Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, 1886, str. 360–390.

[154] M. Pelíšek vedl v devadesátých letech 19. století diskuse s profesorem berlínské univerzity Q. Hauckem, z nichž vzniklo několik zajímavých prací. Více viz [Fo1], str. 74.

Tilšerův zájem o filozofické problémy spjaté se zobrazováním se odvinul z deskriptivní geometrie a vyvrcholil kuriózní snahou o přestavbu základů deskriptivní geometrie; výsledkem byla tzv. *ikonognosie* zkoumající podstatu a zákonitosti veškerých druhů zobrazení. Tilšerovy komplikované a málo názorné myšlenky přímé pokračovatele neměly, vyvolaly však v českých kruzích diskuse, o něž se zajímala i širší veřejnost. Podrobně píše o vývoji deskriptivní geometrie Gino Loria (1862–1954) v knize [Lo]. Poznamenejme, že zde uvádí výsledky téměř všech výše uvedených české geometrů; K. Pelzovi, F. Tilšerovi a R. Skuherskému věnuje dokonce samostatné kapitoly.

Projektivní geometrie

V šedesátých letech 19. století se u nás pod vlivem přednášek W. Fiedlera (a později K. J. Küppera) zrodil zájem o projektivní geometrii. Tato disciplína byla rozvíjena zejména v Itálii, Německu a Francii. Naši matematici se nechali inspirovat hlavně jejími syntetickými přístupy; analytické a algebraické metody se objevovaly v menší míře.

Na počátku sedmdesátých let sepsali J. Šolín (1872) a bratři Eduard a Emil Weyrové (1871, 1874, 1878) české učebnice geometrie. Emil Weyr je v letech 1872 a 1873 doplnil překlady dvou prací Luigi Cremony (1830–1903).[155] V osmdesátých letech vydal Emil Weyr dvoudílnou učebnici *Die Elemente der projektivischen Geometrie* (Wien, 1883, 1887)[156] a koncem století Eduard Weyr učebnici *Projektivná geometrie základných útvarů prvého řádu* (Praha, 1898)[157]. Tyto knihy podaly základy projektivní geometrie doplněné původními výsledky jejich autorů; staly se solidním základem pro další studium projektivní geometrie.[158]

Nejvýznamnějším představitelem naší projektivní geometrie byl Emil Weyr. Pod vlivem Fiedlerových přednášek a ročního studijního pobytu u L. Cremony v Itálii se jeho zájem soustředil na tzv. Cremonovy transformace. Studoval jedno-víceznačné geometrické transformace. V několika článcích dokázal, že vedle bilineární příbuznosti, která popisuje jedno-jednoznačnou projektivní závislost geometrických útvarů, existují příbuznosti, které danému prvku jednoho útvaru přiřazují více prvků druhého útvaru a naopak. Emil Weyr dospěl k závěrům, že příbuznosti jedno-dvojznačné se hodí k vyšetřování speciálních vlastností křivek třetího stupně a v řadě článků tyto příbuznosti s úspěchem využíval. Jeho menší práce byly přípravnou cestou ke studiu speciálních druhů transformací, které nazval *involucemi vyšších stupňů a tříd.*[159] Tyto involuce

[155] Více viz sedmá kapitola této knihy.

[156] Wilhelm Braumüller, Wien, 1883, 231 stran; Wilhelm Braumüller, Wien, 1887, 228 stran.

[157] Sborník Jednoty českých mathematiků č. 1, Praha, 1898, 192 stran; 2. nezměněné vydání, JČM, Praha, 1911.

[158] Více viz kapitola této knihy věnovaná učebnicím a překladům.

[159] Involucí n-tého stupně k-té třídy nazýval takový vztah mezi prvky daného geometrického útvaru rodu nula, při němž vhodnou volbou k prvků je stanoveno $n - k$ prvků $(n > k)$ tohoto útvaru tak, že kterýkoliv z k-prvků lze považovat za prvky určující všechny prvky tohoto n-členného souboru.

využíval ke studiu vlastností speciálních křivek; výsledky svých studií přehledně zpracoval v pojednání *Beiträge zur Curvenlehre* (Wien, 1880)[160], které přispělo k dotvoření teorie racionálních křivek a ploch. Teorii vyšších involucí aplikoval i na křivky vyšších stupňů a podařilo se mu získat nové výsledky v oblasti křivek třetího až pátého stupně.[161] V osmdesátých a devadesátých letech 19. století patřil Emil Weyr k předním evropským geometrům. Na konci 19. století se však projektivní geometrie vydala jinou cestou. Syntetické přístupy vyžadující značnou matematickou invenci a intuici, které prosazoval Emil Weyr, se vyčerpaly a byly nahrazeny přístupy analytickými a algebraickými. Proto jsou dnes výsledky i jméno Emila Weyra skoro zapomenuty.

Pod vlivem Emila Weyra se řada našich geometrů soustředila na projektivní geometrii, především na její syntetické přístupy. Pozornost byla zaměřena na teorii algebraických křivek a ploch, na výzkum jejich speciálních vlastností; omezení na syntetické metody však kladlo vysoké nároky na zkušenost a nápaditost autorů. Práce mnoha autorů (B. Procházka, Č. Jarolímek, J. S. Vaněček, M. N. Vaněček, M. Pelíšek, A. Sucharda, K. Zahradník a J. Sobotka) se týkaly křivek a ploch různých stupňů.[162]

K nejčastěji studovaným tématům patřily konstrukce tečen a normál, středů křivosti a hledání speciálních transformací nejrůznějších křivek. Zmiňme jen práce o oskulacích křivek druhého a třetího stupně (F. Machovec, K. Pelz, M. Pelíšek, J. Sobotka, A. Sucharda)[163] a problém normál rovinných křivek

---

[160] Alfred Hölder, Wien, 1880, 64 stran.

[161] Až do jeho prací se obyčejně studovaly jen křivky druhého stupně.

[162] Například B. Procházka: *O jistém druhu křivek*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 24(1895), str. 291–295; *Příspěvek ku plochám šroubovým*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 39(1910), str. 7–15; Č. Jarolímek: *Nová konstrukce plochy druhého stupně z devíti tečných rovin*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 41(1912), str. 371–374; *Některé konstrukce ploch druhého stupně*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 42(1913), str. 145–150; *Jak strojiti plochu druhého stupně danou sedmi rovinami tečnými a dotyčným bodem v jedné z nich*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 44(1915), str. 24–28; *Některé konstrukce ploch stupně druhého*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 46(1917), str. 16–22; *Tři příspěvky k theorii ploch druhého stupně*, Rozpravy České akademie věd a umění 30(1921), č. 13, 8 stran; A. Sucharda: *Ueber die Pascal'sche Spirale*, Archiv für Mathematik und Physik (2) 4(1884), str. 197–206; *Poznámka o křivce vratu jisté plochy různosměrek šestého stupně*, Zprávy ze zasedání Královské české Společnosti nauk, 1891, 5 stran; K. Zahradník: *Zur Theorie der Lemniskate*, Archiv der Mathematik und Physik 16(1898), str. 327–332; *Beitrag zur Theorie der rationalen Kurven dritter Ordnung*, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe 113(1904), str. 973–986; *Descartesův list jako cissoidala*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 34(1905), str. 19–21; J. Sobotka: *Poznámka o jisté vlasnosti křivek prostorových*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 43(1914), str. 359–363; *O konstrukci plochy druhého stupně z devíti bodů*, Rozpravy České akademie věd a umění 25(1916), č. 48, 13 stran.

[163] Například A. Sucharda: *Dvě konstrukce tečny a středu křivosti jisté křivky*, Rozpravy České akademie věd a umění 8(1899), č. 40, 6 stran; *Kterak se sestrojí tečna a kružnice oskulační jistých křivek*, Zprávy ze zasedání Královské české Společnosti nauk, 1901, 7 stran; *Konstrukce tečny, normály a poloměru zakřivení křivek normálových čili Mannheimových dané křivky*, Rozpravy České akademie věd a umění 12(1903), č. 40, 16 stran; J. Sobotka: *Construction von hyperosculirenden Kugeln der kubischen Raumcurven*, Monatshefte für Mathematik und Physik 5(1894), str. 349–366; *Beitrag zur Construction von Krümmungskugel an Raumcurven*, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-

(M. Pelíšek, F. Machovec, A. Strnad, A. Sucharda, J. Sobotka).[164] V osmdesátých a devadesátých letech se objevila „záplava“ prací výše zmíněných autorů; nepřinášely sice nové podnětné myšlenky, ale postupně rozšiřovaly počet typů prostudovaných křivek.

Jiný přístup k projektivní geometrii zvolil Eduard Weyr, který obrátil svoji pozornost k algebraicko-analytickému směru projektivní geometrie a více se zaměřil na studium invariantů křivek a ploch. Tento směr zvolil pravděpodobně pod vlivem svého stipendijního pobytu v Německu. Navázal na práce Rudolfa Friedricha Alfreda Clebsche (1833–1872), který úspěšně spojil německý syntetický přístup s algebraickým přístupem prosazovaným především anglosaskými matematiky (A. Cayley a J. J. Sylvester). Připomeňme, že první výraznější práce v teorii obecných vlastností křivek dvojí křivosti algebraicko-analytickou metodou podal A. Cayley (1845).[165] Odvodil vztahy svazující počty singularit prostorových křivek a o něco později prostudoval prostorové křivky stupně n s pomocí zvláštní plochy n-tého stupně, kterou nazýval monoid. Křivka stupně m a rodu p vzniká jako průmět monoidu (pro který je počátek soustavy souřadnic $(n-1)$-násobný bod) a kuželu m-tého stupně s vrcholem v počátku souřadné soustavy. A. Cayley také navrhl první klasifikační principy pro křivky vyšších stupňů. Eduard Weyr, inspirován Clebschovými výsledky a tím, že se mu podařilo zobecnit jeden důsledek Abelovy věty a přenést jej z rovinných křivek na křivky prostorové, dospěl až k popisu některých vztahů prostorových křivek stupně m a rodu p. Ukázal, jak lze provádět klasifikaci křivek šestého a sedmého stupně.[166] Nespokojil se jen se studiem křivek, ale přešel i k plochám. Zkoumal plochy vytvořené pohybující se kuželosečkou s cílem prostudovat uspořádání tečných rovin těchto ploch podél jedné vytvořující kuželosečky. Zobecnil tak teorii přímkových ploch a své výsledky shrnul v monografii *O theorii ploch* (Praha, 1891).[167]

Kinematická geometrie

Novou tématiku do české geometrické produkce přinesli v osmdesátých letech bratři Vaněčkové. Ve Francii vyslechli přednášky předních geometrů (Victor

---

naturwiss. Classe 104(1895), str. 144–168; *Kružnice a kuželosečky, které danou kuželosečku oskulují*, Rozpravy České akademie věd a umění 28(1919), č. 13, 10 stran.

[164] Například M. Pelíšek: *Ueber die Normalen der Kegelschnitte und damit verwandte Probleme*, Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, 1883, str. 126–156; A. Strnad: *O normálách určitého druhu křivek*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 2(1873), str 239–242; A. Sucharda: *Kterak sestrojí se normála a střed křivosti k radiále libovolné křivky rovinné*, Rozpravy České akademie věd a umění 6(1897), č. 25, 3 strany; J. Sobotka: *K problemu normal při ellipse a hyperbole*, Rozpravy České akademie věd a umění 21(1912), č. 20, 15 stran.

[165] *Mémoire sur les courbes a double courbure et les surfaces développables*, Journal de mathématiques pures et appliquées 10(1845), str. 245–250.

[166] Více viz Z. Nádeník: *O geometrických pracích Eduarda Weyra*, in [Bj1], str. 67–89, a [Fo1].

[167] Spisův poctěných jubilejní cenou Královské české Společnosti nauk v Praze č. 6, Praha, 1891, 84 stran. Více viz Z. Nádeník: *O geometrických pracích Eduarda Weyra*, in [Bj1], str. 67–89.

Mayer Amédée Mannheim (1831–1906), Jean Gaston Darboux (1842–1917) aj.) a pod jejich vlivem se začali zajímat o kinematickou geometrii.

Poznamenejme, že kinematická geometrie u nás v té době nebyla zcela neznámá. Na přelomu šedesátých a sedmdesátých let se Eduard Weyr v několika článcích věnoval studiu vlastností úpatnic a evolut; problémy sice neřešil kinematickými metodami, ale s kinematickými pojmy běžně pracoval. V roce 1872 se v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky objevily první české příspěvky k teorii trochoid (F. J. Studnička a F. Hoza)[168], které sice nepřinesly nové výsledky, ale nastínily kinematický přístup a ovlivnily českou terminologii.

J. S. Vaněček roku 1880 přehledně zpracoval Mannheimovy přednášky v monografii *Pošinování geometrických útvarův*[169], a tak tuto problematiku uvedl do české literatury. Vyložil vlastnosti různých druhů pohybů, pokusil se o jejich klasifikaci a předložil vlastní řešení několika úloh, např. konstrukce středů křivosti kotálnic. V osmdesátých letech se objevily další práce věnované kinematickým způsobům vytváření křivek (J. S. Vaněček[170] a A. Sucharda[171]).

V devadesátých letech se kinematickou geometrií okrajově zabývali i Eduard Weyr[172] a B. Procházka.[173] Jejich práce zapadly do tématiky konstruktivní teorie křivek, která byla tehdy v evropské geometrii běžně rozvíjena.

Na počátku 20. století se na rovinnou kinematiku soustředil M. Pelíšek; studoval kotálnice, asteroidy, poloměry křivosti drah vytvořených určitým typem pohybů apod.[174] Snažil se o co nejobecnější konstrukci středů křivostí

[168] F. J. Studnička: *Poznámka k theorii trochoid*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 1(1872), str. 252–253; F. Hoza: *Příspěvek k dějepisu trochoid*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 1(1872), str. 54–60.

[169] Jičín, 1880, 184 stran.

[170] Více viz J. S. Vaněček: *Přehled prací geometrických*, Jičín, 1895.

[171] A. Sucharda: *Kinematische Studien*, Archiv für Mathematik und Physik 69(1881), str. 321–325; *O některých plochách polárných plochy posouvání kruho-kruhové*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 13(1884), str. 1–12; *O šestnácti přímkách ploch posouvání stupně čtvrtého*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 15(1886), str. 149–157; *O souvislosti jistých ploch posouvání stupně čtvrtého s komplexními plochami obecného komplexu druhého stupně*, Věstník Královské české Společnosti nauk, 1888, 7 stran; *O plochách normál ku plochám posouvání stupně čtvrtého podle proniků s rovinou bitangentiálnou*, Věstník Královské české Společnosti nauk, 1890, 43 stran + 15 obrázků.

[172] *Strojení středů křivosti trochoid*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 23(1894), str. 4–8; *Úvahy o pohybu v theorii ploch a čar*, Věstník České akademie věd a umění 3(1894), str. 81–103, 149–169; *Zur Theorie der Bewegung eines starren Systems*, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe 104(1895), II. Abteilung, str. 298–299.

[173] *Příspěvek ku sestrojení středu křivosti trochoid*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 23(1894), str. 236–240; *Kinematický způsob sestrojování tečen a středů křivosti křivek stupně druhého*, Rozpravy České akademie věd a umění 3(1894), č. 19, 5 stran; *Kinematický způsob sestrojení středu křivosti ovalu Cartesiova*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 24(1895), str. 230–239.

[174] *O středech křivosti kotálnic*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 30(1901), str. 17–28, 101–123; *Sur la podaire de l'astéroide*, Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, 1907, č. 9, 7 stran; *O vztahu mezi délkami oblouků kotálnic a úpatnic*, Rozpravy České akademie věd a umění 18(1909), č. 2, 21 stran; *O poloměru křivosti drah vytvořených libovolným pohybem neproměnné rovinné soustavy*, Rozpravy České akademie věd a umění 19(1910), č. 19, 24 stran, č. 54, 6 stran.

vzniklých trajektorií; jeden jeho elegantní výsledek přešel do učebnic jako *Pelíškova konstrukce.* Později svůj zájem obrátil k prostorové kinematické geometrii; studoval například pohyb zborceného kloubového čtyřúhelníku, plochy vzniklé kotálením hyperboly po shodné hyberbole, šroubovice po shodné šroubovici atd.[175]

Zájem o deskriptivní a projektivní geometrii u nás přetrvával i v první třetině 20. století. V té době už naši geometři, např. J. Sobotka, B. Procházka a Č. Jarolímek, publikovali učebnice, v nichž vyložili nejen základní poznatky, ale přehledně shrnuli světové i české výsledky dosažené ve druhé polovině 19. století.

Pražští němečtí geometři

Poznamenejme, že projektivní geometrii na vysoké úrovni pěstovali také němečtí geometři. Ve srovnání s našimi geometry více vycházeli z analyticko-algebraických metod a tento přístup se v jejich projektivně geometrické tématice udržel až do počátku druhé světové války.[176]

K. J. Küpper tvůrčím způsobem rozpracoval Möbiovy a Chaslesovy charakteristiky, studoval vlastnosti křivek třetího stupně a kinematickou problematiku elementárních křivek. Teorii křivek třetího stupně detailně rozpracoval H. J. K. Durège v monografii *Die ebenen Curven dritter Ordnung* (1871)[177]; uveřejnil v ní své i Küpperovy výsledky. Speciální vlastnosti křivek třetího stupně v mnoha pracích popisovali také K. Bobek, A. Puchta, E. Janisch, G. Pick, W. Weiss. V osmdesátých letech 19. století se objevily v Durègeově práci *Ueber Körper von vier Dimension* (1881)[178] myšlenky vícerozměrných geometrických systémů, na které navázal O. Biermann (1884, 1887)[179]. Jejich práce však nevyvolaly v našem prostředí žádnou odezvu.

V letech 1878 až 1882 se teorií konfigurací, problematikou na naše poměry neobvyklou, zabýval S. Kantor. V několika článcích publikovaných ve vídeňské akademii věd studoval incidenční vztahy mezi body a přímkami v rovině.[180]

---

[175] *O ploše osmého řádu vzniklé kotálením*, Rozpravy České akademie věd a umění 25(1916), č. 8, 31 stran; *Kotálení šroubovice po shodné šroubovici*, Rozpravy České akademie věd a umění 40(1931), č. 46, 27 stran.

[176] O práci pražských německých geometrů viz např. [Fo1] a [No1].

[177] Teubner, Leipzig, 1871, XII + 343 stran.

[178] Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe 83(1881), str. 1110–1125.

[179] *Ueber die regelmässigen Körper höherer Dimension*, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe 90(1884), str. 144–159; *Ueber die regelmässigen Punktgruppen in Räumen höherer Dimension und die zugehörigen linearen Substitutionen mehrerer Variabeln*, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe 95(1887), str. 523–548.

[180] Zajímavé jsou například práce: *Ueber eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume*, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe 80(1879), str. 227; *Ueber die Configurationen* $(3,3)$ *mit den Indices* $8,9$ *und ihren Zusammenhang mit den Curven dritter Ordnung*, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe 84(1881), str. 915–932; *Die Configurationen* $(3,3)_{10}$, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe 84(1881), str. 1291–1314.

Hlavní pozornost soustředil především na vlastnosti bodových soustav na kružnici. Dospěl k diskrétním seskupením bodů a přímek, v nichž každým bodem prochází stejný počet přímek a na každé přímce leží stejný počet bodů, tj. studoval tzv. *Reyeovy geometrické konfigurace*, a to v době, kdy Reyeovy práce nebyly ještě známé.[181] S. Kantor navázal také na Cayleyovy, Cliffordovy a Noetherovy[182] práce zobecňující Cremonovy transformace. V roce 1883 v práci *La transformazione birazionale* věnované biracionálním transformacím vyřešil úlohu zadanou neapolskou akademií věd.[183]

Matematická analýza

Matematická analýza ve druhé polovině 19. století věnovala pozornost detailnímu rozpracování teorie reálných a komplexních funkcí (upřesnění definic funkcí, studium spojitosti, limit a podmínek existence derivace, konstrukce spojitých funkcí bez derivace apod.), upřesnění teorie integrálu (G. F. B. Riemann, J. G. Darboux), speciálním integrálům (eliptické a hyperbolické), speciálním funkcím (např. analytické a automorfní funkce, eliptické a hyperbolické funkce, hypergeometrické a Abelovy funkce, gamma funkce, theta funkce a dzeta funkce aj.), řadám a posloupnostem (Fourierovy řady, konvergence mocninných řad, stejnoměrná konvergence funkcí apod.), diferenciálním rovnicím v komplexním oboru apod. Nejlepší tehdejší matematici (J. P. G. Lejeune Dirichlet, J. G. Darboux, Ch. Hermite, F. Klein, H. Poincaré, G. F. B. Riemann, K. T. W. Weierstrass aj.) usilovali o zpřesnění, doplnění a rozšíření diferenciálního, integrálního a variačního počtu.[184]

Teorie funkcí[185]

Z obecné teorie funkcí se u nás objevilo na přelomu osmdesátých a devadesátých let 19. století jen několik málo článků v *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky*; pokoušely se ukázat českým čtenářům, jaká témata jsou studována ve světové matematice.

Pozornost zaslouží práce Matyáše Lercha, které navázaly na Weierstrassovy výzkumy spojitých funkcí nemajících v některých, resp. žádných bodech

[181] Ve 20. století se problematikou konfigurací zabýval B. Bydžovský (viz [Fr]).

[182] Max Noether (1844–1921) byl významný německý algebraický geometr.

[183] Nalezněte v rovině periodické Cremonovy transformace, které po n-násobném použití převedou objekt sám na sebe. Více viz Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche 22(1883).

[184] Více viz Š. Schwabik: *Několik postřehů k vývoji matematické analýzy v 19. století*, in J. Bečvář a F. Fuchs (ed.): *Matematika v 19. století*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 3, Prometheus, Praha, 1996, str. 7–37; I. Netuka, Š. Schwabik: *Vznik a vývoj matematické analýzy*, in J. Šedivý (ed.): *Světonázorová výchova v matematice*, JČMF, Praha, 1987, str. 127–156; [KJ2] a [KJ3].

[185] Tento název je převzat z německého *Funktionentheorie* a na konci 19. století v oblastech ovlivněných německou matematikou měl převážně význam teorie funkcí komplexní proměnné.

derivaci. V roce 1886 v článku *Contributions à la théorie des fonctions*[186] dokázal, že funkce

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos 2^\nu \pi x}{2^\nu}, \qquad \text{resp.} \qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos \nu! \pi x}{\nu!},$$

které jsou spojité v oboru reálných čísel, nemají derivaci v bodech

$$x = \frac{a}{2^q}, \qquad \text{resp.} \qquad x = \frac{a}{q!},$$

kde a a q jsou celá čísla. Tyto výsledky o dva roky později M. Lerch rozpracoval v článku *Über die Nichtdifferentierbarkeit gewisser Funktionen*.[187]

Ve stejné publikaci M. Lerch doplnil du Bois-Reymondovy[188] myšlenky o rozvoji funkcí v Taylorovu řadu.[189] Zkonstruoval funkci

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos a^\nu x}{\nu!}, \qquad a \text{ je liché číslo},$$

která má v celém svém definičním oboru derivace všech řádů a přitom ji není možno v žádném bodě rozvinout v Taylorovu řadu. K tématice spojitých funkcí bez derivace v některých bodech a funkcí, které mají derivace, ale nedají se rozvinout v Taylorovu řadu, se M. Lerch během devadesátých let 19. století několikrát vrátil.

M. Lerch se také věnoval funkcím, které nemají analytické pokračování přes hranici oblasti, na níž jsou definovány. Touto problematikou se zabýval v letech 1886 až 1910 a sepsal o ní osm prací. Nejcennější výsledky jsou obsaženy v článku *Über Funktionen mit beschränktem Existenzbereiche*,[190] v němž M. Lerch zobecnil Goursatovu-Poincaréovu větu (1882), odvodil dvě nové věty umožňující konstrukce funkcí komplexní proměnné s omezeným definičním oborem, pro něž je hranice oblasti tzv. přirozenou hranicí, a nakonec zkonstruoval funkce, které jsou holomorfní na jednotkovém kruhu a které nemají analytické pokračování přes žádný bod jednotkové kružnice. M. Lerch ukázal, že funkce

---

[186] Zprávy ze zasedání Královské české Společnosti nauk, 1886, str. 571–583.

[187] Journal für die reine und angewandte Mathematik 103(1888), str. 126–138.

[188] Paul David Gustav du Bois-Reymond (1831–1889) byl německý matematik, který se věnoval teorii funkcí, difrenciálním rovnicím a základům matematické analýzy (např. objevil spojitou funkci bez derivace). Svými studiemi přispěl ke upřesnění základů diferenciálního počtu. Výsledky prací shrnul v monografii *Die allgemeine Functionentheorie*, Laupp, Tübingen, 1882; reprint 1968. Více viz G. H. Hardy: *Orders of infinity the „Infinitärcalcül" of Paul du Bois-Reymond*, University Press, Cambridge, 1910; reprint 1971.

[189] P. D. G. du Bois-Reymond: *Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwickelung*, Mathematische Annalen 21(1882), str. 109–117, 253–254.

[190] Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, 1888, 20 stran.

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{2^\nu} \qquad \text{a} \qquad f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu!},$$

definované na jednotkovém kruhu mají jednotkovou kružnici za přirozenou hranici a tedy nedají se přes žádný její bod analyticky prodloužit.[191]

Důležitým Lerchovým výsledkem z teorie funkcí je *Lerchova věta* uveřejněná roku 1900[192] a v úplné obecnosti dokázaná o tři roky později v práci *Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel*.[193] M. Lerch jako první vyřešil komplikovanou otázku z teorie vytvořujících funkcí,[194] které jsou definovány integrály tvaru

$$J(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\varphi(x)dx, \qquad a \in (0,\infty),$$

a φ je určující funkce. Před Lerchovou prací bylo známo, že určující funkce není definována funkcí J jednoznačně, dokonce existuje nekonečně mnoho určujících funkcí. Nebylo však známo, jakou povahu má tato „nejednoznačnost". M. Lerch dokázal, že se funkce φ při dané vytvořující funkci J mohou navzájem lišit nejvýše o funkci N, pro kterou platí

$$\int_0^x N(t)dt = 0, \qquad x \in (0,\infty).$$

Ve světové literatuře je tato věta označována Lerchovým jménem.[195]

Z obecné teorie funkcí je zajímavá práce *O jisté nespojité funkci*[196] od Eduarda Weyra z roku 1893; Weyr sestrojil reálnou funkci φ reálné proměnné, která je spojitá v každém iracionálním bodě a zprava spojitá a zleva nespojitá v každém racionálním bodě. Takové funkce byly již známé, příklady zkonstruovali například Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) a Ulisse Dini (1845–1918). Weyrova funkce je však zajímavá, neboť hodnoty $\varphi(x)$ a $\varphi(x_-) - \varphi(x)$, kde $\varphi(x_-)$ značí limitu funkce φ v bodě x zleva, lze

---

[191] Tento příklad nepokračovatelné funkce bývá uváděn v klasických i moderních monografiích z komplexní analýzy. Viz např. S. Saks, A. Zygmund: *Analytic functions*, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1965; R. Remmert: *Theory of complex functions*, Springer-Verlag, New York, 1991; A. Hurwitz: *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1925.

[192] *Poznámka z theorie funkcí*, Rozpravy České akademie věd a umění 9(1900), č. 8, str. 1–5.

[193] Acta Mathematica 27(1903), str. 339–351.

[194] Vytvořující funkce lze najít již u P. S. Laplace a N. H. Abela; mají fundamentální význam v teorii Laplaceovy transformace.

[195] O Lerchových výsledcích v obecné teorii funkcí viz J. Čermák: *Lerchův přínos k obecné theorii funkcí*, in [Bo1], str. 419–433.

[196] Rozpravy České akademie věd a umění 2 (1893), č. 12, 21 stran.

explicitně vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Weyrova funkce je definována předpisem

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + n_0} \right) \quad \text{pro } x \neq 0, \quad \varphi(0) = 0,$$

kde $n_0 = -n \, (\mathrm{mod}\, x)$ a Ed. Weyr velmi podrobně vyšetřoval její vlastnosti.[197]

Teorie řad a speciální funkce

Určité pozornosti našich matematiků se těšila rovněž teorie řad. Dva zajímavé články věnované vyčíslení nekonečných řad a součinů, jejichž obecný člen je racionální funkcí indexu, sepsal Ed. Weyr.[198] Méně významné studie publikovali v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky a ve výročních zprávách různých středních škol středoškolští profesoři A. Pleskot, O. Ježek a A. Sýkora, kteří vyšetřovali součty speciálních řad, studovali podmínky absolutní a stejnoměrné konvergence, podmínky, kdy lze řadu nahradit jinou řadou apod. Přehledové články z teorie řad uveřeňoval v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky A. Pánek[199].

Podstatně větší význam měly originální studie M. Lercha, který se ve 49 pracích pokoušel zpřesnit základy teorie řad. Zkoumal kritéria konvergence a dospěl k nelimitnímu vyjádření d'Alembertova podílového kritéria.[200]

M. Lerch rozpracoval teorii *malmsténovských řad*[201], což mu usnadnilo cestu ke studiu funkce gamma.[202] Malmsténovské řady zapisoval ve tvaru

$$Ml(v, \omega, u, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2n\nu\pi i}}{[(\omega + n)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}}.$$

---

[197] Více o Weyrových příspěvcích k teorii funkcí viz J. Daneš: *Další práce z analýzy*, in [Bj1], str. 134–140.

[198] Ed. Weyr: *Stanovení součtů jistých nekonečných řad*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 21(1892), str. 161–180; *Vyčíslení nekonečných součinů o racionálních členech pomocí funkce* Γ, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 22(1893), str. 161–178. Podrobné hodnocení Weyrových prací viz J. Fuka: *Eliptické funkce, nekonečné řady a součiny*, in [Bj1], str. 129–134.

[199] Např. *O součtu čísel kubických*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, 4(1875), 85–87, a *O jisté řadě nekonečné*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, 17(1888), str. 227–229). Tyto Pánkovy práce předkládají jen drobná vylepšení již dříve známých odvození a důkazů. Jsou však podávána tak, aby byla srozumitelná i středoškolským studentům. Více viz [Be4].

[200] Lerchova priorita je zde sporná. Spor rozpoutaný mezi ním a německým matematikem A. Pringsheimem (1850–1941) sice přispěl k objasnění některých dalších otázek teorie řad, ale nepříznivě ovlivnil Lerchovu pozici v české matematické obci. Viz L. Frank: *Spor Matyáše Lercha s Alfredem Pringsheimem*, in [Bo1], str. 532–538.

[201] Řady jsou pojmenovány po švédském matematikovi C. J. Malmsténovi (1814–1886).

[202] Např. *Základové theorie Malmsténovských řad*, Rozpravy České akademie věd a umění 1(1892), č. 27, str. 1–70; *Studie v oboru Malmsténovských řad a invariantů forem kvadratických*, Rozpravy České akademie věd a umění 2(1893), č. 4, str. 1–12; *Další studie v oboru Malmsténovských řad*, Rozpravy České akademie věd a umění 3(1894), č. 28, str. 1–61.

Nezabýval se jen obecnými řadami tohoto tvaru, ale studoval i jejich speciální případy, např. dzeta-funkci, a zkoumal různá vyjádření malmsténovských řad.[203] Omezením proměnných v malmsténovské řadě odvodil některé nové i dříve známé vztahy. Pravděpodobně nejdůležitějším výsledkem jeho úvah je nalezení souvislosti mezi malmsténovskou řadou a funkcí gamma. Studiem funkce $R(\omega, s) = Ml(0, \omega, 0, s)$ definované vztahem

$$R(\omega, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\omega + n)^s}$$

dospěl M. Lerch k rozvojům

$$R(\omega, s) = \frac{1}{s-1} - \frac{\Gamma'(\omega)}{\Gamma(\omega)} + \dots,$$

resp.

$$R(\omega, s) = \Big(\frac{1}{2} - \omega\Big) + \log \frac{\Gamma(\omega)}{\sqrt{2\pi}} s + \dots,$$

které ukázaly jasnou souvislost mezi jistými malmsténovskými řadami a funkcí gamma. M. Lerch věnoval funkci gamma více než třicet prací, odvodil řadu zajímavých výsledků a přispěl tak ve světovém měřítku k poznání jejích obdivuhodných vlastností. Studium malmsténovských řad mu umožnilo mimo jiné vyjádřit logaritmus funkce gamma a dojít k novým vyjádřením Binetovy funkce $\tilde{\omega}$, odvodil například vztah

$$\tilde{\omega}(u) = \int_0^1 \Big(x - \frac{1}{2}\Big) \frac{\Gamma'(u+x)}{\Gamma(u+x)} dx.$$

Také Binetovou funkcí se M. Lerch intenzivně zabýval a dokázal o ní mnoho závažných vět. Studiem malmsténovských řad získal i nová vyjádření tzv. logaritmické derivace funkce gamma; v souvislosti s vyjádřením funkce gamma studoval také trigonometrické řady.[204]

Na počátku 20. století se vlastnostmi theta funkce zabýval Karel Petr. V roce 1904 v šestistránkovém článku *Bemerkung zu einer Gauss'schen Formel über die Thetafunctionen*[205] zjednodušil odvození vztahu známého z Gaussovy pozůstalosti, totiž

$$\frac{3\Theta_3^2(0, 3\tau) - \Theta_3^2(0, \frac{\tau}{3})}{2} = \Theta_3^4 - 4\Big(\frac{\Theta_3\Theta_2\Theta_1}{2}\Big)^{\frac{4}{3}}.$$

---

[203] O Lerchových pracích z teorie řad viz J. Čermák: *Lerchův přínos k theorii nekonečných řad*, in [Bo1], str. 433–455.

[204] O Lerchovu přínosu k teorii speciálních funkcí viz O. Borůvka: *Dílo Matyáše Lercha v theorii funkce gamma*, in [Bo1], str. 455–501.

[205] Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, 1904, č. 37, 6 stran.

Získané výsledky aplikoval na určení počtu celočíselných řešení speciálních rovnic, např. rovnice

$$x^2 + y^2 + 9(z^2 + u^2) = N.$$

Integrály, eliptické funkce a eliptické integrály

Na konci 19. století se v české matematice, pravděpodobně pod vlivem prací L. Kroneckera a Ch. Hermitea, pokusilo několik matematiků (Ed. Weyr, A. Strnad, M. Lerch) proniknout do tehdy již rozpracované teorie eliptických funkcí. Jejich pojednání však přinesla jen nová odvození známých vztahů nebo drobná vylepšení již existujících důkazů.

V integrálním počtu navazovali naši matematici od sedmdesátých let 19. století např. na práce Leo Königsbergera (1837–1921) a Ch. Hermitea. Snažili se počítat některé integrály novými metodami, využívali různé vtipné substituce, některé integrály převáděli na integrály eliptické.

Augustin Pánek napsal dvanáct článků věnovaných především pseudoeliptickým a hypereliptickým integrálům a integrálům iracionálních funkcí, které se daly vhodnou substitucí vypočítat pomocí elementárních funkcí. Své výsledky shrnul roku 1899 ve spise *Studie z počtu integrálního*[206]; velkou pozornost věnoval především pseudoeliptickým integrálům typu

$$\int \frac{x^2}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}}\,dx, \qquad \int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx,$$

$$\int \frac{1+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}\,dx, \qquad \int \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}\,dx$$

a tzv. „neomezeným Eulerovým integrálům"

$$\int \frac{(A_1 + A_2 x^{\alpha\omega m})^r}{(B_1 + B_2 x^{\beta\omega n})^s} \cdot \frac{x^{\omega m - 1}}{\sqrt[n]{(\alpha + b x^{\omega n})^m}}\,dx,$$

kde α, β, m, n, r, s jsou celá čísla a ω číslo racionální. Pánkovy práce nemají elementární charakter, ale významné původní výsledky neosahují.[207]

Poměrně zajímavou prací byla česká studie *Důkaz obecnější věty o střední hodnotě omezených integrálů* A. Pleskota z roku 1893[208], v níž zobecnil du Bois-Reymondovu větu o střední hodnotě pro některé určité integrály. Několik prací o této problematice sepsali také G. Blažek a V. Láska; nepřinesli však v podstatě žádné nové výsledky.

V průběhu třiceti let sepsal M. Lerch více než dvacet prací věnovaných integrálnímu počtu. Ani jeho práce však nepřinesly zásadní poznatky; obsahovaly jen drobnější příspěvky ke studiu vlastností speciálních integrálů. M. Lerch

[206] Vlastním nákladem, Praha, 1899, 88 stran.
[207] Více viz [Be4].
[208] Rozpravy České akademie věd a umění 2(1893), č. 6, 6 stran.

někdy zobecnil známé výsledky, jindy nalezl nové metody umožňující výpočet nebo transformace integrálů; jeho postupy byly jednodušší a efektivnější než staré metody.[209] Poznamenejme na závěr, že Matyáš Lerch uvažoval o sepsání dvoudílné učebnice teorie eliptických funkcí a integrálů. Po jeho smrti byl v jeho pozůstalosti nalezen rukopis prvního svazku; Eduard Čech (1893–1960) ho vydal pod názvem *Elliptické funkce.*[210]

Na počátku 20. století se některým typům integrálů a jejich výpočtům věnoval Karel Petr. Například v roce 1909 sepsal elegantní příspěvek[211] o použití reziduové věty pro výpočet integrálu

$$\int_0^\pi \log \frac{A_1\cos^2\varphi + 2B_1\cos\varphi\sin\varphi + C_1\sin^2\varphi}{A_2\cos^2\varphi + 2B_2\cos\varphi\sin\varphi + C_1\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{a\cos^2\varphi + 2b\cos\varphi\sin\varphi + c\sin^2\varphi}.$$

V roce 1913 byl K. Petr inspirován Láskovým článkem[212] o tzv. „Poissonově integrálu“. Vyšel z Cauchyovy integrální formule a vhodnými transformacemi dostal vztah

$$u(r,\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\cdot\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi-\psi) + r^2}\,d\varphi,$$

kde $u(r,\psi) = \mathrm{Re} f(re^{i\psi})$ a f je analytická funkce v kruhu $\{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq R\}$.[213]

O rok později K. Petr v článku *O výpočtu elliptických integrálů ...*[214] přesně a přehledně vysvětlil pojem aritmeticko-geometrického středu eliptických integrálů prvního a druhého druhu a objasnil použití tzv. Landenovy transformace na výpočet eliptických integrálů typu

$$\int_0^{\Phi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2\sin^2\varphi}} \quad \text{a} \quad \int_0^{\Phi_0} \frac{a_0^2\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{b_0^2 - a_0^2\sin^2\varphi}}.$$

Petrovy výsledky v matematické analýze v první třetině 20. století nebyly ani nové, ani příliš významné, ale ukazovaly, že sledoval vývoj analýzy a dobře

---

[209] O Lerchových studiích z teorie eliptických funkcí a integrálního počtu viz V. Radochová: *Lerchův přínos k theorii funkcí eliptických*, in [Bo1], str. 502–515, a V. Radochová: *Lerchův přínos k integrálnímu počtu*, in [Bo1], str. 516–531.

[210] M. Lerch: *Elliptické funkce*, Přírodovědecká fakulta Masarykovy Univerzity v Brně, Brno, bez data, 159 stran.

[211] K. Petr: *Poznámka ku předcházejícímu článku*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 38(1909), str. 434–438. Karel Petr reagoval na článek A. Pleskota *O jistém integrálu omezeném* (tamtéž, str. 427–434), s nímž nebyl spokojen.

[212] V. Láska: *Integrál Poissona jako přímý důsledek integrálu Cauchyho*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 42(1913), str. 398–401.

[213] K. Petr: *Integrál Poissonův jako přímý důsledek integrálu Cauchyova*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 42(1913), str. 556–558. Poznamenejme, že Poissonův integrál má významné místo v teorii harmonických funkcí.

[214] K. Petr: *O výpočtu elliptických integrálů 1. a 2. druhu pomocí středu arithmeticko-geometrického*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 43(1914), str. 332–350.

mu porozuměl. To dokládají i jeho učebnice *Počet integrální* (1915, 1931)[215] a *Počet differenciální* (1923)[216], jejichž obsah i podání odpovídaly evropskému standardu. Matematická analýza však nebyla hlavním Petrovým zájmem.

Na počátku 20. století studoval eliptické funkce a jejich integrály také Bohumil Bydžovský; často je používal v algebraické geometrii.[217]

Diferenciální rovnice

Téměř na okraji zájmu našich matematiků byly v 19. století diferenciální rovnice. Pokud již o této problematice psali, jednalo se jen o podružné statě didaktického charakteru nebo o články, které mírně modifikovaly již známé výsledky. Např. G. Blažek se pokusil odvodit rovnici tzv. „obalující plochy", je-li známa rovnice původní plochy a způsob jejího pohybu v prostoru. Eliminací parametrů charakterizujících danou plochu získal diferenciální rovnici, která obalující plochu popisuje.[218]

Významnější byla jen práce Eduarda Weyra. V roce 1875 ve více než čtyřicetistránkovém článku *Zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung*[219] studoval diferenciální rovnici prvního řádu

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

pro jejíchž n libovolných partikulárních řešení

$$y_1 = F(x, C_1), \quad y_2 = F(x, C_2), \quad \ldots, \quad y_n = F(x, C_n),$$

kde $C_1, \ldots, C_n$ jsou konstanty, platí

$$\mu(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \text{konstanta}$$

a μ je vhodná funkce n proměnných.

Ed. Weyr si vlastně položil otázku, jaký tvar musí mít funkce $f(x, y)$, aby jejích n partikulárních řešení splňovalo výše uvedenou podmínku. Označíme-li $\mu_k = \frac{\partial \mu}{\partial y_k}$, potom platí

$$\mu_1 f(x, y_1) + \cdots + \mu_n f(x, y_n) = 0$$

---

[215] JČMF, Praha, 1915, 638 stran; 2. vydání, JČMF, Praha, 1931, 725 stran.

[216] JČMF, Praha, 1923, 466 stran.

[217] Podrobněji viz [Fr].

[218] Viz *Über die partiellen Differentialgleichungen der durch Bewegung von Linien entstandenen Flächen*, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe 51(1865), Zweite Abteilung III., str. 186–197; *O differenciálních rovnicích ploch obalujících*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 2(1873), str. 167–172. Podrobněji viz [Be2], str. 37–40.

[219] Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, VI. Folge, 8(1875), 44 stran.

pro libovolná $x, y_1, \dots, y_n$. Považujeme-li $y_2, \dots, y_n$ za konstanty, pak můžeme psát

$$-\frac{\mu_k}{\mu_1} = \Phi_{k-1}(y_1), \quad \varphi_{k-1}(x) = f(x, y_k), \quad k = 2, \dots, n.$$

Potom

$$f(x, y_1) = \varphi_1(x) \cdot \Phi_1(y_1) + \dots + \varphi_{n-1}(x) \cdot \Phi_{n-1}(y_1).$$

Výchozí rovnice musí proto mít tvar

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x) \cdot \Phi_1(y) + \varphi_2(x) \cdot \Phi_2(y) + \dots + \varphi_{n-1}(x) \cdot \Phi_{n-1}(y);$$

to je nutná, ale nikoli postačující podmínka, aby rovnice měla požadované vlastnosti. Ve druhé části práce dokázal, že pro případ $n = 2$ je jím odvozená podmínka postačující. Pak se věnoval aplikacím výsledku na teorii rozvinutelných a šroubovitých ploch a teorii homogenních rovnic prvního řádu. Ve třetí části studoval případ $n = 3$; ukázal transformace, které rovnici $\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x) \cdot \Phi_1(y) + \varphi_2(x) \cdot \Phi_2(y)$ převedou na lineární diferenciální rovnici.

Ve čtvrté a páté části práce studoval rovnici

$$\frac{dx}{dy} + Ly^2 + My + Ndx = 0$$

a ukázal, že dvojpoměr každých čtyř jejích řešení, tj.

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} \cdot \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2}$$

je konstatní. Studovaná rovnice v sobě zahrnuje i tzv. Riccatiovu rovnici.[220] Tuto vlastnost dvojpoměru předpověděl již Leonhard Euler (1707–1783), ale dokázána byla poprvé patrně Ed. Weyrem.[221]

Diferenciálními rovnicemi prvního a druhého řádu a geometrickou interpretací jejich řešení se v osmdesátých a devadesátých letech 19. století v souvislosti s algebraickou geometrií křivek a ploch a geometrickými transformacemi kubických křivek zabýval též Karel Zahradník.[222]

---

[220] Riccatiova rovnice je obyčejná diferenciální rovnice tvaru $y' = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2$, kterou poprvé studoval italský matematik Jacopo Francesco Riccati (1676–1754).

[221] V roce 1877 ji nezávisle dokázal také Ch. E. Picard (1856–1941). Více viz J. Daneš: *Další práce z analýzy*, in [Bj1], str. 134–140.

[222] Např. *O krivuljah u ravnini*, Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu 64(1882), str. 1–65, 75(1885), str. 79–180; *Prilog k teoriji krivulja trecéga stupnja i trecéga razreda*, Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu 123(1895), str. 1–16; *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Zprávy ze zasedání Královské české Společnosti nauk, 1905, č. 16, 5 stran; *Příspěvek k theorii differenciálních rovnic lineárních*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 36(1907), str. 9–13.

Funkcionální rovnice

Zcela novému tématu se v letech 1898 až 1903 věnoval Jan Vilém Pexider; v pěti článcích[223] zkoumal skupinu funkcionálních rovnic typu

$$
\begin{aligned}
f_1(z) + \varphi_1(u) &= \psi_1(z+u),\\
f_2(z) \times \varphi_2(u) &= \psi_2(z+u),\\
f_3(z) \times \varphi_3(u) &= \psi_3(zu),\\
f_4(z) + \varphi_4(u) &= \psi_4(zu).
\end{aligned}
$$

Řešil otázku, jaké spojité funkce f_j, φ_j, ψ_j (reálné nebo komplexní proměnné) těmto rovnicím vyhovují.[224]

V práci *Notiz über Functionaltheoreme*[225] z roku 1903 dokázal, že jednotlivé rovnice, které jsou navzájem provázané, lze vhodnou eliminací a substitucí zredukovat na jednodušší funkcionální rovnice pro jednu lineární funkci. Zároveň ukázal, že jím řešená obecnější úloha neposkytuje podstatně jiné výsledky, než ty, které získal již A. L. Cauchy. Tato Pexiderova práce vešla v obecnou známost; uvedla do matematiky rovnice, které dnes nesou jeho jméno.[226] Poznamenejme na okraj, že v souvislosti s funkcionálními rovnicemi dospěl J. V. Pexider také k problematice Abelovy věty, která byla oblíbeným tématem konce 19. století.[227]

J. V. Pexider vsadil na nové nepropracované téma, na funkcionální rovnice, o které je do dnešní doby velký zájem. Jeho jméno dodnes žije ve světové matematice, přestože J. V. Pexider významných výsledků nedosáhl.[228]

---

[223] *Studie o funkcionálních rovnicích*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 29(1900), str. 153–195; *Studie o funkcionálních rovnicích, část II.*, Dr. Ed. Grégr, Praha, 1900, 34 stran; *Abelův theorém, jeho obsah algebraický a geometrický, jeho význam a applikace a historická noticka*, Fr. Řivnáč, Praha, 1901, 67 stran; *Übersicht über die Literatur des Abelschen Theorems*, Bibliotheca Mathematica (3. Folge) 4(1904), str. 52–64; *Notiz über FunctionalTheoreme*, Monatshefte für Mathematik und Physik 14(1903), str. 293–301.

[224] J. V. Pexider zobecnil úlohu, kterou řešil již A. L. Cauchy pro případ $f_j = \varphi_j = \psi_j$, $j = 1, 2, 3, 4$.

[225] *Notiz über FunctionalTheoreme*, Monatshefte für Mathematik und Physik 14(1903), str. 293–301.

[226] Podrobné hodnocení Pexiderových matematických výsledků viz Š. Schwabik: *Pexiderovy matematické výsledky*, in [Bj2], str. 37–44, a I. Netuka: *Pexiderova rovnice*, in [Bj2], str. 51–60.

[227] Abelova věta stručně řečeno tvrdí, že součet tzv. Abelových integrálů $\int R(u,z)dz$, kde $R(u,z)$ je racionální funkce proměnných u a z a vazba mezi nimi je dána vztahem $f(u,z) = 0$, kde f je polynom neurčitých u a z, je možno zapsat jako p integrálů, ke kterým je třeba přidat algebraické a logaritmické členy, přičemž p je závislé jen na funkci f.

[228] Viz J. Veselý: *O malém experimentu se jménem Pexider*, in [Bj2], str. 61–64, a *Pokračování experimentu*, in [Bj2], str. 65–66.

Pravděpodobnost, statistika, pojistná matematika

Pravděpodobnosti, statistice a pojistné matematice nebyla u nás v 19. století věnována dostatečně velká pozornost.

V sedmdesátých a osmdesátých letech publikoval několik metodických a vzdělávacích článků Augustin Pánek; všímal si rovněž geometrické pravděpodobnosti. Jeho rozsáhlejší články *O mathematické a morální naději* (1877, 1878)[229] a *Pravděpodobnost a posteriori* (1883)[230] je možno považovat za malé učebnice klasické teorie pravděpodobnosti, ve kterých je navíc standardní text doplněn řadou historických komentářů. Tyto texty mohly velmi dobře sloužit na středních školách a nahrazovat nedokonalé partie tehdejších učebnic.

V. Šimerka[231] uveřejnil roku 1882 pojednání *Síla přesvědčení. Pokus v duchovní mechanice.*[232] Jeho práci dnes řadíme k subjektivní interpretaci pravděpodobnosti; V. Šimerka se tak stal naším prvním matematikem, který se pokusil aplikovat matematiku v psychologii a filozofii. Subjektivní pravděpodobnost nazval *přesvědčení* (*přesvědčenost*)[233] a přiřazoval jí hodnoty mezi 0 a 1. Příčiny přesvědčení pojmenoval *důvody* a jejich sílu *věrojatnost*. Důvody byly podle něho příčinou přesvědčení ν, ν', ν'', … a nedokonalosti (nejistoty) jim příslušející označil $\epsilon = 1 - \nu$, $\epsilon' = 1 - \nu'$, $\epsilon'' = 1 - \nu''$, … . Výsledná síla přesvědčení V je potom dána vztahem $1 - V = (1 - \nu)(1 - \nu')(1 - \nu'')$ … . Jsou-li všechny důvody nulové, potom je *mysl prázdná* a síla přesvědčení je nulová, což Šimerka komentoval slovy: *prázdné důvody nepodávají žádného přesvědčení*. Pokud je jen $\nu \neq 0$ (a $\nu' = 0$, $\nu'' = 0, \dots$), obdržel $V = \nu$, což ho vedlo k zajímavému závěru: *V prázdné mysli ujímá se každý důvod plnou silou. … Dle toho může prázdná mysl i planými důvody oklamána býti, což jinak není snadno. Že se na tom i nemravná zásada: calumniare audacter, tamen aliquid haerebit*[234] *– zakládala, patrno samo sebou.*[235] Pak V. Šimerka počítal stupeň jistoty a popsal zápas dvou opačných mínění.

Poznamenejme, že obecně známý výklad subjektivní pravděpodobnosti podal až roku 1926 Frank Plumpton Ramsey (1903–1930) v práci *The Foundations*

---

[229] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 6(1877), str. 69–76, 122–130, 218–224; 7(1878), str. 78–91.

[230] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 12(1883), str. 227–232, 281–294.

[231] O životě a díle V. Šimerky viz A. Pánek: *Život a působení P. Václava Šimerky*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 17(1888), str. 253–256, a *Svěcení pomníku P. Václava Šimerky v Praskačce*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 19(1890), str. 273–277; J. Fiala: *Síla přesvědčení Václava Šimerky*, in L. Pátý (ed.): *Jubilejní almanach Jednoty čs. matematiků a fyziků*, JČSMF, Praha, 1987, str. 97–106.

[232] Vyšlo v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky 11(1882), str. 75–111. Šimerkovu práci vydala roku 1883 vídeňská akademie věd pod názvem *Die Kraft der Überzeugung. Ein mathematisch-philosophischer Versuch.*

[233] Zahrnoval do ní tušení, domněnku, možnost, pravděpodobnost, hypotézu, víru, vědění a jistotu.

[234] Jen drze pomlouvej, však něco ulpí.

[235] V. Šimerka: *Síla přesvědčení. Pokus v duchovní mechanice*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 11(1882), str. 75–111; citováno ze stran 85 a 86.

of Mathematics zveřejněné roku 1931. K rozšíření teorie subjektivní pravděpodobnosti postupně dochází od třicátých let 20. století v pracích Bruna de Finetti (1906–1985) a zvláště v padesátých letech (Henry E. Kyburg (nar. 1928)[236] a Leonard Jimmie Savage (1917–1971)[237]).

Emanuel Czuber, který vyšel z českého prostředí, ale téměř celý svůj aktivní život strávil na německých školách, se zabýval pravděpodobností a statistikou, teorií chyb a vyrovnávacím počtem, pojistnou matematikou, geodézií, geometrií a analýzou. V prestižních německých časopisech *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *Archiv der Mathematik und Physik*, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, *Monatshefte für Mathematik und Physik* a *Technische Blätter* uveřejnil řadu speciálních studií, kterými na sebe v osmdesátých letech 19. století upozornil evropské matematiky.

Ucelený výklad teorie pravděpodobnosti doplněný vlastními výsledky pak podal v knize *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte*[238] z roku 1884, která byla roku 1902 přeložena do francouzštiny. Během svého brněnského působení připravil do tisku dvě monografie – *Zum Gesetze der großen Zahlen. Untersuchung der Ziehungsergebnisse der Prager und Brünner Lotterie vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Praha, 1889)[239] a *Theorie der Beobachtungsfehler* (Lipsko, 1891)[240].

V devadesátých letech 19. století a na počátku 20. století jeho odborná činnost v teorii pravděpodobnosti a statistice kulminovala. Czuberovy výsledky byly oceněny tím, že byl roku 1894 na bibliografickém kongresu matematiků pověřen sepsáním přehledového článku, který měl zachytit vývoj a současný stav teorie pravděpodobnosti, její úkoly a problémy. Roku 1899 Emanuel Czuber tento úkol splnil; v časopise *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* uveřejnil studii o téměř 300 stranách nazvanou *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihre Anwendungen*[241] a o rok později článek *Wahrscheinlichkeitsrechnung* v jednom ze svazků *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.*[242]

Na počátku 20. století publikoval pod vlivem svého působení ve Svazu rakousko-uherských pojistných techniků[243] několik článků z oblasti pojišťovnictví, z nichž komentovaný německý překlad de Moivreovy knihy *Annuities* z roku 1756[244], studie o statistice obyvatelstva[245] a příspěvky k teorii statis-

---

[236] H. E. Kyburg, H. Smoklers (editors): *Studies in subjective probability*, J. Wiley, New York, 1954; H. E. Kyburg: *Probability and inductive logic*, The Macmillan Co., London, 1970; ruský překlad *Věrojatnosť i induktivnaja logika*, Progress, Moskva, 1978.

[237] L. J. Savage: *The foundations of statistics*, J. Wiley, New York, 1954.

[238] Teubner, Leipzig, 1884, 244 stran.

[239] Dominivas, Prag, 1889, 99 stran.

[240] Teubner, Leipzig, 1891, 418 stran.

[241] Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 7(1901), str. 1–279.

[242] Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, vol. 1, 1901/1902, str. 733–767.

[243] Matematicko-statistické sdružení rakousko-uherských soukromých pojišťovacích společností.

[244] *A. de Moivres Abhandlung über die Leibrenten*, Nach der 3. Aufl. von 1756 ins Deutsche übertragen, mit Anmerkungen Czubers, Wien, 1906.

[245] *Bevölkerungsstatistische Studien*, Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen (Mit-

tických řad[246] významně ovlivnily rozvoj pojistné vědy. Dalším Czuberovým dílem je rozsáhlá monografie *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung* (Lipsko, 1903)[247], která ho zařadila mezi přední evropské odborníky na teorii pravděpodobnosti a její aplikace v technice, zemědělství, pojistné a finanční praxi.[248] Ještě ve dvacátých letech vydal E. Czuber tři významné knihy, *Die statistische Forschungsmethoden*[249], *Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*[250] a *Mathematische Bevölkerungstheorie*[251], kterými svoji práci ve statistice a pravděpodobnosti završil. Czuberovo matematické dílo nebylo dosud řádně zhodnoceno.

Tři práce z oblasti pojistné matematiky uveřejnil na počátku 20. století Jan Vilém Pexider,[252] který byl patrně k této disciplíně přiveden při svém působení na univerzitě v Bernu. Jeho zájem se soustředil na životní, důchodové, invalidní a kapitálové pojištění. Pomocí netriviálních úprav nahradil značně nepřesné aproximace, které se tehdy používaly při stanovování pojišťovacích částek pro sjednávání doživotních a invalidních důchodů, životního a kapitálového pojištění, přesnějšími vztahy. Například v článku *Fundamentale Beziehung ...*[253] nahradil aproximaci

$$a_i(x) = a(x) - a_a(x),$$

kde $a(x)$ je hodnota nároků x-letého člověka na jednotkový předlhůtní doživotní důchod, $a_a(x)$ hodnota nároků x-letého aktivního člověka na jednotkový předlhůtní aktivní důchod a $a_i(x)$ hodnota nároků x-letého aktivního člověka na jednotkový předlhůtní invalidní důchod, přesným vztahem

$$a_i(x) = a(x) - a_a(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}(a(x) - a_u(x)),$$

---

teilungen des öst.-ungar. Verbandes der Privatversicherungsanstalten) 7(1912).

246 *Beitrag zur Theorie statistischer Reihen*, Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen (Mitteilungen des öst.-ungar. Verbandes der Privatversicherungsanstalten) 9(1914).

247 Teubner, Leipzig, 1903, 304 stran.

248 Poznamenejme, že poslední, páté vydání této monografie je z roku 1938. Obdobně kvalitní a oblíbená byla jeho dvoudílná učebnice *Vorlesungen über Differential und Integralrechnung* (Wien, 1898, Band 1, 526 stran, Band 2, 428 stran), která se dočkala pěti vydání (poslední vydání je z roku 1924), a rozsahem menší učebnice *Einführung in die höhere Mathematik* (Teubner, Leipzig, 1909, 328 stran), jež měla tři vydání (poslední vydání je z roku 1922). Tyto učebnice měly vysokou teoretickou úroveň, látka v nich byla systematicky uspořádána a pečlivě vyložena.

249 Seidel, Wien, 1921, 238 stran.

250 Teubner, Lepzig, 1923, 343 stran.

251 Teubner, Leipzig, 1923, 357 stran.

252 Jde o práce *Fundamentale Beziehung zwischen den Prämien den Lebens-, Invaliden- und Todesfallversicherung*, Zeitschrift für schweizerische Statistik. Organ der schweizerischen statistischen Gesellschaft (Journal de statistique suisse. Organe de la société suisse de statistique) 41(1905), 2. Band, str. 345–354; *Beitrag zur Zinstheorie*, Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft 7(1907), str. 298–307; *Zur Invalidenversicherung*, Zeitschrift für Mathematik und Physik 55(1907), str. 27–59.

253 J. V. Pexider: *Fundamentale Beziehung zwischen den Prämien der Lebens-, Invaliden- und Todesfallversicherung*, Zeitschrift für schweizerische Statistik. Organ der schweizerischen statistischen Gesellschaft (Journal de statistique suisse. Organe de la société suisse de statistique) 41(1905), 2. Band, str. 345–354.

kde $a_u(x)$ je hodnota nároků x-letého invalidního člověka na jednotkový předlhůtní invalidní důchod, $l_i(x)$, resp. $l_a(x)$ jsou hodnoty, z nichž se určí pravděpodobnost, že člověk, který se dožil věku i, resp. a, zemře, aniž by dovršil věk $i+1$, resp. $a+1$.[254]

Pexiderovy práce vycházející z tradic švýcarské a německé pojistné školy mají standardní evropskou úroveň, jsou v nich precizně formulovány pojmy a detailně rozebrány vztahy mezi jednotlivými pojistnými veličinami. Dokládají, že J. V. Pexider dobře znal a ovládal tehdejší aktuárskou problematiku, a to jak z teoretické, tak i praktické stránky. Jeho logicky uspořádané a detailně promyšlené práce reagovaly na praktické potřeby a byly ve své době velmi užitečné.[255]

Na počátku 20. století se pojistnou matematikou zabývali Gabriel Blažek, který však v této disciplíně nepublikoval žádnou odbornou práci, a Josef Beneš, jehož významnější práce spadají až do období po první světové válce. Oba byli především skvělými praktiky díky dlouholetému působení v různých pojišťovacích ústavech.[256]

Literatura:

[AD] Aczél J., Dhombers J., *Functional equations in several variables*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[Be1] Bečvářová-Němcová M., *František Josef Studnička (1836–1903)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 10, Prometheus, Praha, 1998.

[Be2] Bečvářová M., *Z historie Jednoty 1862–1869*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 13, Prometheus, Praha, 1999.

[Be3] Bečvářová M., *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 20, Prometheus, Praha, 2002.

[Be4] Bečvářová M., *Augustin Pánek (1843–1908)*, in Bečvář J., Fuchs E. (ed.): *Matematika v proměnách věků III*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 24, Výzkumné centrum pro dějiny vědy, Praha, 2004, 206–234.

[Be5] Bečvářová M., *Life and Work of Karel Zahradník (1848–1916)*, in Motlíček T., Rechcígl M., Jr. (editors): *Morava viděna z vnějšku – Moravia from World Perspective*, 22. světový kongres Československé společnosti pro vědy a umění – 22$^{\text{th}}$ World Congress of Czechoslovak Society of Arts and Sciences, Ostrava, Repronis, 2006, 276–283.

[Be6] Bečvářová M., *Život i djelo Karel Zahradníka*, in Mardešič S. (editor): *Karel Zahradník 1848.–1916.*, Hrvatska Akademija znanosti i umjetnosti, Spomenica preminulim akademicima, Svezak 134, Zagreb, 2007, 9–36.

[Bj1] Bečvář J. a kol., *Eduard Weyr (1852–1903)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 2, Prometheus, Praha, 1995.

[Bj2] Bečvář J. (ed.), *Jan Vilém Pexider (1874–1914)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 5, Prometheus, Praha, 1997.

---

[254] Laicky řečeno, J. V. Pexider chtěl co nejlépe vyjádřit, že hodnota doživotního důchodu každého pojištěnce se skládá z nároků na aktivní a invalidní důchod.

[255] Hodnocení Pexiderových prací z pojistné matematiky viz T. Cipra: *Pexiderovy práce z pojistné matematiky*, in [Bj2], str. 45–50.

[256] Více viz druhá kapitola této knihy a [Be2].

[Bj3] Bečvář J., *150 let od objevu kvaternionů*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **38** (1993), 305–317.

[Bj4] Bečvář J., *Normované algebry a součty čtverců*, in Fuchs E. a kol.: *Světonázorové problémy matematiky IV*, SPN, Praha, 1987, 17–30.

[Bj5] Bečvář J., *Soustavy lineárních rovnic a determinanty*, in Šedivý J. (ed.): *Světonázorová výchova v matematice*, JČMF, Praha, 1987, 187–217.

[Bj6] Bečvář J., *Lineární algebra*, Matfyzpress, Praha, 2000 (2. vydání, 2003).

[Bj7] Bečvář J., *Teorie algeber*, in Folta J. (ed.): *Filozofické a vývojové problémy matematiky*, JČMF, Praha, 1988, 93–111.

[Bj8] Bečvář J., *Je možno z bodů prostoru udělat čísla?*, in Fuchs E., Hrubý D., Trojánek A. (ed.): *VI. seminář o filozofických otázkách matematiky a fyziky*, JČMF, Brno, 1992, 81–97.

[BK] Bečvář J., Kohoutová Z., *Vladimír Kořínek (1899–1981)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 27, Ústav pro soudobé dějiny AV ČR, Praha, 2005.

[BBŠ1] Bečvář J., Bečvářová M., Škoda J., *Emil Weyr a jeho pobyt v Itálii v roce 1870/71*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 28, Nakladatelství ČVUT, Praha, 2006.

[Bo1] Borůvka O. a kol., *Dílo Matyáše Lercha v oboru matematické analysy*, Práce brněnské základny ČSAV **29** (1957), 417–540.

[Bo2] Borůvka O., *Dílo Matyáše Lercha v theorii funkce gamma*, in Borůvka O. a kol.: *Dílo Matyáše Lercha v oboru matematické analysy*, Práce brněnské základny ČSAV 29(1957), 455–501.

[Bo3] Borůvka O., *Základy teorie matic*, Academia, 1971.

[Bh] Boušková H., *Život a dílo Jana Sobotky (1862–1931)*, diplomová práce, MFF UK, Praha, 1995.

[BŠ] Brdička M., Schwabik Š., *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky a jeho pokračovatelé*, in Pátý L. (ed.): *Jubilejní Almanach Jednoty čs. matematiků a fyziků*, Jednota čs. matematiků a fyziků, Praha, 1987, 30–83.

[Ci] Cipra T., *Pexiderovy práce z pojistné matematiky*, in Bečvář J. (ed.): *Jan Vilém Pexider (1874–1914)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 5, Prometheus, Praha, 1997, 45–50.

[Cr] Crkalová Z., *Život a dílo Karla Petra*, diplomová práce, MFF UK, Praha, 1992.

[Če] Čermák J., *Lerchův přínos k obecné theorii funkcí*, in Borůvka O. a kol.: *Dílo Matyáše Lercha v oboru matematické analysy*, Práce brněnské základny ČSAV 29(1957), 419–433.

[Da] Daneš J., *Další práce z analýzy*, in Bečvář J. a kol.: *Eduard Weyr (1852–1903)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 2, Prometheus, Praha, 1995, 134–140.

[De] Deuring M., *Algebren*, Berlin, 1935.

[Di1] Dickson L. E., *History of the theory of numbers*, Carnegie Institution of Washington, Washington, 1919.

[Di2] Dickson L. E., *Algebren und ihre Zahlentheorie*, Leipzig, 1927.

[Fl] Flament D., *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie*, CNRS Editions, Paris, 2003.

[Fo1] Folta J., *Česká geometrická škola. Historická analýza*, Academia, Praha, 1982.

[Fo2] Folta J., *Základy geometrie v pracích českých matematiků v první polovině 19. století*, Sborník DPVT 11, Praha, 1967, 169–202.

[Fo3] Folta J., *Local and general developments in mathemematics. The case of Czech lands*, in Goldstein C., Gray J., Ritter J. (eds.): *L'Europe Mathématique. Histoires, Mythes, Identités*, Maison des sciences de l'homme, Paris, 1996, 269–288.

[Fo4] Folta J., *Němečtí matematici a československý region*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **38** (1993), 165–173.

[Fr] Francová-Provazníková L., *Život a dílo Bohumila Bydžovského (1880–1969)*, disertační práce, MFF UK, Praha, 2001.

[Fu] Fuka J., *Eliptické funkce, nekonečné řady a součiny*, in Bečvář J. a kol.: *Eduard Weyr (1852–1903)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 2, Prometheus, Praha, 1995, 129–134.

[Ga] Gantmacher F. R., *Teorija matric*, Moskva, 1953, 1966.

[Ha1] Hawkins T., *Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory*, Arch. Hist. Exact. Sci **8** (1972), 243–287.

[Ha2] Hawkins T., *The Theory of Matrices in the 19th Century*, Proc. Int. Congress of Mathematics, Vancouver, 1974, 561–570.

[Ho] Houdek F., *Dějepis jednoty českých mathematiků v Praze*, Jednota českých mathematiků, Praha, 1872.

[Ja] Jarník V., *Diferenciální počet II.*, NČSAV, Praha, 1956.

[Kl] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.

[Kn] Knobloch E., *From Gauß to Weierstraß: Determinant Theory and Its Historical Evaluations*, in Sasaki Ch., Sugiura M., Dauben J. W. (ed): *The Intersection of History and Mathematics*, Science Networks, Historical Study, Vol. 15, Birkhäuser, 1994, 51–66.

[KJ1] Kolmogorov A. N., Juškevič A. P., *Matematika XIX veka. Matematičeskaja logika, algebra, teorija čisel, teorija verojatnostej*, Nauka, Moskva, 1978; angl. překlad: Mathematics of the 19th Century, Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory, Birkhäuser, Basel, 1992.

[KJ2] Kolmogorov A. N., Juškevič A. P., *Matematika XIX veka. Geometrija, teorija analitičeskich funkcij*, Nauka, Moskva, 1981; angl. překlad: Mathematics of the 19th Century, Geometry, Analytic Function Theory, Birkhäuser, Boston, 1996.

[KJ3] Kolmogorov A. N., Juškevič A. P., *Matematika XIX veka*, Nauka, Moskva, 1987; angl. překlad: Mathematics of the 19th Century, Function theory according to Chebyshev, Ordinary differential equations, Calculus of variations, Calculus of finite differences, Birkhäuser, Basel, 1998.

[Ko] Košťál R., *Vznik a vývoj pobočky JČMF v Brně*, JČMF, Praha, 1968.

[La] Lavička V., *Deskriptiva ze stanoviště historicko-paedagogického*, F. & V. Hoblík, Pardubice, 1883.

[Le1] Lepka K., *Matyáš Lerch's work on Number Theory*, Masaryk University, Faculty of Science, Brno, 1995.

[Le2] Lepka K., *Historie Fermatových kvocientů (Fermat–Lerch)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 14, Prometheus, Praha, 2000.

[Lo] Loria G., *Storia della geometria descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*, Ulrico Hoepli, Editore-Libraio della Real Casa, Milano, 1921.

[Mc] Mačák K., *Vývoj teorie pravděpodobnosti v českých zemích do roku 1938*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 26, Ústav pro soudobé dějiny AV ČR, Praha, 2005.

[Ma] May K. O., *Růst matematické literární produkce a její kvalita*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **15** (1970), 220–228.

[Mu1] Muir T., *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development I.–IV.*, London, 1906, 1911, 1920, 1923, 11 + 491, 16 + 475, 26 + 503, 31 + 508 stran.

[Mu2] Muir T., *Contributions to the History of Determinants 1900–1920*, London, 1930, 24 + 408 stran.

[Na] Nádeník Z., *O geometrických pracích Eduarda Weyra*, in Bečvář J. a kol.: *Eduard Weyr (1852–1903)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 2, Prometheus, Praha, 1995, 67–89.

[Ne] Netuka I., *Pexiderova rovnice*, in Bečvář J. (ed.): *Jan Vilém Pexider (1874–1914)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 5, Prometheus, Praha, 1997, 51–60.

[NS] Netuka I., Schwabik Š., *Vznik a vývoj matematické analýzy*, in Šedivý J. (ed.): *Světonázorová výchova v matematice*, JČMF, Praha, 1987, 127–156.

[Nu] Neuman F., *Funkcionální rovnice*, SNTL, Praha, 1986.

[No1] Nový L. a kol., *Dějiny exaktních věd v českých zemích*, ČSAV, Praha, 1961.

[No2] Nový L., *Origins of Modern Algebra*, Academia, Praha, 1973.

[No3] Nový L., *Mathematics of the 1^{st} half of the 19^{th} c.: New trends and their historical significance*, Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum, Prague, Special Issue 13 (1981), 211–221.

[No4] Nový L., *Les mathématiques et l'évolution de la nation tchéque (1860–1918)*, in Goldstein C., Gray J., Ritter J. (eds.): *L'Europe Mathématique. Histoires, Mythes, Identités*, Maison des sciences de l'homme, Paris, 1996, 501–518.

[Pa] Pátý L., *Jubilejní almanach Jednoty čs. matematiků a fyziků*, Jednota čs. matematiků a fyziků, Praha, 1987.

[Ra] Radochová V., *Lerchův přínos k integrálnímu počtu*, in Borůvka O. a kol.: *Dílo Matyáše Lercha v oboru matematické analysy*, Práce brněnské základny ČSAV 29(1957), 516–531.

[Ro] Rozenfel'd B. A., *Istorija neevklidovoj geometrii. Razvitie ponjatija o geometričeskom prostranstve*, Izdatel'stvo Nauka, Moskva, 1976.

[Sch1] Schwabik Š., *Bernard Bolzano a matematická analýza*, in Bečvář J., Fuchs E. (ed.): *Matematika v 19. století*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 3, Prometheus, Praha, 1996, 7–37.

[Sch2] Schwabik Š., *Několik postřehů k vývoji matematické analýzy v 19. století*, in *IX. seminář o filozofických otázkách matematiky a fyziky*, Prometheus, Velké Meziříčí, 2000, 63–85.

[Sch3] Schwabik Š., *Pexiderovy matematické výsledky*, in Bečvář J. (ed.): *Jan Vilém Pexider (1874–1914)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 5, Prometheus, Praha, 1997, 37–44.

[Sk1] Sklenáriková Z., *Z dejín deskriptívnej geometrie v Rakúsko-Uhorsku*, in Bečvář J., Fuchs E. (ed.): *Matematika v proměnách věků II*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 16, Prometheus, Praha, 2001, 15–45.

[Sk2] Sklenáriková Z., *Zo života a diela Karla Pelza*, in Fuchs E. (ed.): *Matematika v proměnách věků IV*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 16, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2007, 197–215.

[Sm] Smith D. E, *History of modern Mathematics*, New York, 1906.

[St] Studnička F. J., *Mathematika. Fysika s lučbou. Závěrek. Astronomie a meteorologie.*, in *Památník na oslavu padesátiletého panovnického jubilea Jeho Veličenstva císaře a krále Františka Josefa I.*, Česká akademie věd a umění, Praha, 1898, 3–41.

[Ši] Šišma P., *Matematika na německé technice v Brně*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 21, Výzkumné centrum pro dějiny vědy, Praha, 2002.

[Tv] Tvrdá J., *Vznik teorie matic*, DVT **3** (1970), 11–23.

[Va] Vaněček J. S., *O dějinách geometrie*, Jičín, 1882.

[Vy] Vyčichlo F., *Studium a hodnocení díla prof. J. Sobotky*, MÚ ČSAV, Praha, 1958.

[Wa] van der Waerden B. L., *A history of algebra. From al-Khwárizmí to Emmy Noether*, Springer, Berlin, 1985.

[Wl] Walter W., *Analysis 1.*, Springer, Berlin, 1992.