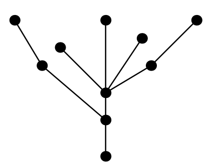
Kapitola 2

Kostra grafu

V první části této kapitoly se krátce zmíníme o historii vyšetřování vlastností grafů, které neobsahují kružnice. Budeme hovořit o souvislých grafech, kterým říkáme stromy. Druhou část věnujeme otázkám fundamentálního systému kružnic grafu, pojmu, který s kostrou grafu úzce souvisí. V krátké třetí části se zmíníme o počtu koster v některých typech grafů. V poslední části pojednáme o problému minimální kostry, k jehož řešení významným způsobem přispěli čeští a slovenští matematici.

2.1 Stromy

Pojem **strom** se objevil v matematické literatuře v druhé polovině 19. století. Byl nejčastěji definován jako souvislý graf, který neobsahuje jako podgraf žádnou kružnici. Objevily se ovšem i jiné definice. Např. Camille Armand de Polignac (1832–?) definoval v pracech [69, 70] strom jako konečný graf, ve kterém je libovolná dvojice jeho uzlů spojena právě jednou cestou. Název strom byl jistě zvolen proto, že znázornění takového grafu někdy připomíná obrázek stromu (viz. obr. 2.1). Také se poměrně rychle ustálil. J. J. Sylvester užíval pro stromy název *ramification* a slovem *tree* nazýval pouze kořenové stromy. Podobně ve francouzštině nacházíme kromě pojmu *arbre* i název *ramification* a Camille Jordan (1838–1922) užíval názvu *assemblage (de lignes) à continuité simple.* D. Kőnig použil ve své knize klasický německý název *Baum.*

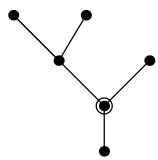


Obr. 2.1: Strom

Charakteristickou vlastností stromů je, že jsou to souvislé grafy, ve kterých je počet hran vždy o jedničku menší než počet uzlů. Kőnig připisoval první důkaz tohoto jednoduchého tvrzení J. B. Listingovi [33]. Snadno se také ukáže, že strom, který má více než jeden uzel, musí obsahovat alespoň dva uzly prvního stupně.

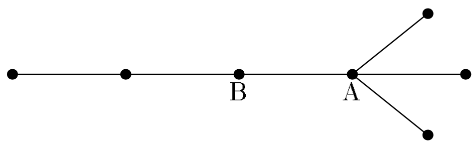
Studium vlastností stromů bylo jednou z prvních částí teorie grafů, která se již v minulém století rozvíjela na teoretickém základě (nešlo pouze o hříčky typu königsbergských mostů či tahu jezdce) a nalezla praktické aplikace zejména v organické chemii. Vzpomeňme otázky stanovení počtu stromů, které poutaly pozornost matematiků a také chemiků poté, co chemie začala zhruba v polovině 19. století užívat grafu jako prostředku znázornění a zkoumání vlastností chemických látek. Připomeňme v této souvislosti např. jméno německého chemika Augusta Kekulého (1829–1896) (potomka starého českého šlechtického rodu, jehož příslušníci po roce 1620 nuceně opustili svoji vlast), který výrazným způsobem přispěl k otázkám chemické vazby.

Významnými matematickými pracemi, které se v 19. století zabývaly stanovením počtu stromů, byly práce anglického matematika Arthura Cayleyho (1821–1895). Ten již v roce 1857 v práci *On the theory of the analytical forms called trees* [25] použil název strom (tree), když zkoumal počet tzv. kořenových stromů (stromů, v nichž je jeden uzel označen jako kořen) s n hranami. Příkladem kořenového stromu je graf na obr. 2.2. Cayley přitom nebyl inspirován chemickými problémy, ale Sylvesterovými výsledky v oblasti diferenciálních operátorů. Je možné, že názvy řady pojmů, které se v práci objevily, pocházejí právě od Sylvestera, který je autorem velkého počtu dnes běžně užívaných matematických termínů. Cayleyho studium počtu stromů dále pokračovalo pracemi [30, 47]. V první z nich se zabýval kořenovými stromy, jejichž každá volná hrana (hrana incidentní s uzlem prvního stupně) je stejně vzdálená od kořene. Ve druhé dal autor své výsledky do souvislosti s problematikou isomerů alkanů C_nH_{2n+2}. Snadno se totiž ukáže, že grafem těchto chemických látek je vždy strom. V roce 1875 objevil Cayley obecnou metodu určení počtu těchto isomerů [49, 50], ale odvodit vzorec pro výpočet počtu isomerů v závislosti na počtu atomů uhlíku se mu nepodařilo. Jak ukázal D. Kőnig v knize [275, str. 77], je tato úloha ekvivalentní problému nalezení počtu stromů, ve kterých je každý z n uzlů incidentní nejvýše se čtyřmi hranami.



Obr. 2.2: Kořenový strom

Při zkoumání počtu stromů bylo v 19. století využito pojmů centroid a bicentroid grafu. Jako první tyto pojmy zavedl C. Jordan v roce 1869. V práci [41] ukázal, že každý strom má buď uzel, nebo dvojici sousedních uzlů, které jsou jistým způsobem centrální. Jordan označil m počet hran stromu a každému uzlu přiřadil číslo q, které udává maximální počet hran větví, které z tohoto uzlu vycházejí. Pak každý strom obsahuje uzel (**centroid**), pro který platí $q \leq \frac{1}{2}m$, nebo dva uzly spojené hranou (**bicentroid**), pro které $q = \frac{1}{2}(m+1)$. Pro všechny ostatní uzly je $q > \frac{1}{2}(m+1)$. Kromě těchto pojmů zavedl Jordan ještě další dva pojmy, které definoval následující konstrukcí: Odstraňme ze stromu všechny volné hrany a tento postup opakujme tak dlouho, dokud nezůstane jediný uzel (**centrum**), resp. dvojice hranou spojených uzlů (**bicentrum**). Výsledkem této konstrukce nemusí být vždy centroid nebo bicentroid, jak ukazuje obr. 2.3. Na obrázku vidíme strom s centroidem A a centrem B.



Obr. 2.3: Centroid a centrum stromu

V roce 1874 oznámil J. J. Sylvester, že stejnou konstrukci použil nezávisle na Jordanovi při studiu vztahu stromů k tehdejším nejnovějším výsledkům organické chemie. A. Cayley nejprve využíval při stanovení počtu nekořenových stromů pojmů centrum a bicentrum (např. v [49, 50]). Později v práci [76] použil pojmy centroid a bicentroid a dosáhl lepších výsledků.

Uveďme, že D. Kőnig ve své knize definoval tyto pojmy pod názvy *Massenzentrum, Massenachse, Zentrum* a *Bizentrum* a věnoval těmto problémům celou 5. kapitolu. Stručně se zde zmínil o historii těchto pojmů. Další podrobnosti k pracem Sylvestera, Cayleyho a Jordana nalezneme v [367, Kapitola 3.].

Hlavním nástrojem určování počtu stromů byly dlouhou dobu vytvořující funkce. Významným mezníkem nejen v teorii grafů, ale i v celé matematice, byl objev Pólyovy enumerační teorie, která se stala mocným nástrojem pro řešení těchto problémů. Jednou z prvních prací, která se této problematice věnovala, byla Pólyova práce [268]. Ve své době zůstala zcela nepovšimnuta práce [212] J. H. Redfielda z roku 1927, která obsahovala celou řadu Pólyových myšlenek.

George Pólya (1887–1985) odvodil vztah pro počet stromů s využitím pojmů centroid a bicentroid v práci [399]. Po druhé světové válce dosáhl podobného výsledku R. Otter, který v práci [400] užil k výpočtu vztah pro počet kořenových stromů.

Na závěr uveďme, že otázky stanovení počtu různých typů grafů byly řešeny v 50. a 60. letech 20. století zejména americkými matematiky (F. Harary, E. M. Palmer, G. Prins, W. T. Tutte). Podrobnosti o výsledcích získaných v tomto období podává Hararyho kniha [359, Kapitola 15], ve které také nalezneme znázornění všech stromů s méně než 11 uzly.

2.2 Kostra a fundamentální systém kružnic

2.2.1 Fundamentální systém kružnic

Jednou z prvních prací v oblasti teorie grafů byla práce Gustava Roberta Kirchhoffa (1824–1887) z roku 1847. Kirchhoff ještě jako student objevil v roce 1845 dva fyzikální zákony, které umožňují stanovit velikosti proudů v elektrické síti. Na základě těchto zákonů můžeme pro každou elektrickou síť sestavit soustavu lineárních rovnic, ve kterých jako neznámé vystupují velikosti proudů v jednotlivých obvodech sítě. Tato soustava však obsahuje rovnice, které jsou lineárně závislé na ostatních. Druhý Kirchhoffův zákon totiž neříká, pro které obvody máme rovnice psát, a tak je píšeme pro všechny. Bylo by tedy vhodné najít pouze ty obvody, pro které by soustava byla lineárně nezávislá. Problémem stanovení minimálního počtu těchto nezávislých obvodů se Kirchhoff zabýval ve své práci *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird* [13] v roce 1847.

Při zkoumání topologických vlastností elektrických sítí přiřazujeme síti neorientovaný graf G, který ignoruje fyzikální podstatu elektrických prvků v jednotlivých obvodech. Uzlům sítě pak odpovídají uzly grafu G a elektrickým vodičům, které spojují dva uzly, odpovídají hrany grafu G.

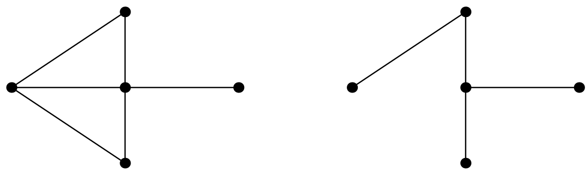
Kirchhoff dokázal, že počet nezávislých obvodů v síti je roven číslu $\mu(\mathrm{G}) = m - n + 1$, kde m udává počet hran a n počet uzlů odpovídajícího grafu. Toto číslo dnes nazýváme **cyklomatické číslo grafu** a nacházíme je již v pracích Carla Georga Christiana Staudta (1798–1867) [16], J. B. Listinga [33] a později u mnoha dalších autorů. O. Veblen ve své práci [178] zavedl tento pojem i pro nesouvislé grafy. D. Kőnig ve své knize číslo $\mu(\mathrm{G})$ označil Zusammenhangszahl.

Můžeme na tomto místě uvést, že užitím teorie grafů při zkoumání elektrických sítí se v roce 1952 zabýval Vladimír Knichal v práci [291] a v 60. letech v pracích [352, 353, 401] Václav Doležal, Josef Prokop a Zdeněk Vorel. Výsledky jejich práce lze nalézt také v knize [362, Kapitola III].

Podívejme se nyní, jakým způsobem definoval pojem kostra grafu (Gerüst) ve své knize D. Kőnig a jak zobecnil Kirchhofovy výsledky. V definici kostry přitom připouštěl i nesouvislé grafy (str. 56):

„Podgraf G' libovolného (konečného nebo nekonečného) grafu G nazveme kostrou grafu G, když má následující dvě vlastnosti:
1. G' neobsahuje kružnici;
2. pokud ke grafu G' přidáme libovolnou hranu grafu G, která není obsažena v G', pak vzniklý graf obsahuje právě jednu kružnici.“

Pro souvislé grafy takto definovaný pojem odpovídá dnes běžné definici kostry souvislého grafu. Kostrou souvislého grafu G rozumíme podgraf G', který je stromem a obsahuje všechny uzly grafu G (viz. obr. 2.4). Kőnig ukázal (Věta 25, str. 58), že každý konečný graf G s cyklomatickým číslem $\mu(\mathrm{G})$ má kostru, kterou dostaneme tak, že z G odstraníme právě $\mu(\mathrm{G})$ hran. Tento fakt byl znám již Kirchhoffovi.



Obr. 2.4: Graf a jeho kostra

Kőnig ukázal (Věta 28, str. 61):

Nechť G' je kostra grafu G a k libovolná hrana grafu G, která nepatří do G', pak existuje právě jedna kružnice K_k v grafu G, která obsahuje hranu h a všechny její ostatní hrany patří do G'.

Kružnice, které takto přiřadíme jednotlivým hranám, které nepatří do kostry G', tvoří tzv. **fundamentální systém kružnic**[1] grafu G, který má $\mu(G)$ prvků. Každé kostře tak odpovídá právě jeden fundamentální systém kružnic. Tento vztah mezi kostrou grafu a fundamentálním systémem kružnic ukázal O. Veblen v práci [178]. Kőnig dokázal, že každá kružnice tohoto systému obsahuje hranu, která nepatří do jiné kružnice systému (Věta 29, str. 61).

Vraťme se nyní zpět k problému stanovení nezávislých obvodů elektrické sítě. Nejprve síti výše uvedeným způsobem přiřadíme graf G. Sestrojíme kostru G' tohoto grafu a k ní postupně přidáváme hrany, které do G' nepatří. Dostáváme vždy graf, který obsahuje právě jednu kružnici a ta představuje jeden nezávislý obvod vyšetřované sítě.

Otázkou kompozice kružnic grafu se D. Kőnig zabýval v X. kapitole své knihy. **Kompozici grafů** $G_1, G_2, \ldots, G_r$ definoval[2] jako graf, který obsahuje právě ty hrany, které jsou obsaženy v lichém počtu grafů $G_1, G_2, \ldots, G_r$. Je zřejmé, že takto definovaná kompozice je komutativní a asociativní. Grafy systému $S = \{G_1, G_2, \ldots, G_r\}$ nazval vzhledem ke kompozici **vzájemně nezávislé**, když žádný z těchto grafů se nedá vytvořit kompozicí z některých ostatních grafů tohoto systému.

Systém $S^* \subset S$ Kőnig nazval **kompoziční bází** pro systém S, když grafy z S^* jsou vzhledem ke kompozici vzájemně nezávislé a každý graf systému S je kompozicí jistých grafů z S^*. Pak dokázal (Věta 5, str. 147):

Každý fundamentální systém kružnic grafu G představuje kompoziční bázi systému všech kružnic tohoto grafu.

Kirchhoffův výsledek formulovaný pro nezávislé obvody sítě je pak možno vyjádřit tímto způsobem:

V případě konečného grafu G s cyklomatickým číslem $\mu(G)$ obsahuje každá kompoziční báze všech kružnic tohoto grafu $\mu(G)$ prvků.

[1] Název fundamentální systém kružnic grafu pochází od W. Ahrense [117].

[2] Definice pojmu kompozice grafů pochází od Alberta Thoralfa Skolema (1887–1963) [213].

2.2.2 Práce A. Kotziga

Otázkami fundamentálního systému kružnic grafu a zobecněním pojmu kostra grafu se zabýval slovenský matematik A. Kotzig.

V práci *Význam kostry grafu pre konštrukciu kompozičných báz istých čiastočných grafov* [302], která vyšla v roce 1956, dokázal některá tvrzení pro fundamentální systém řezů grafu, která jsou analogická k větám o fundamentálním systému kružnic. Přitom vycházel přímo z X. kapitoly Kőnigovy knihy.

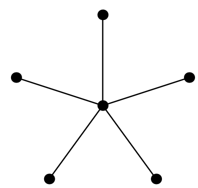
Důležitým podgrafem grafu G je podgraf G', který má tuto vlastnost: každá kružnice grafu G obsahuje sudý počet hran grafu G'. Množinu všech takových podgrafů grafu G Kotzig označil $\mathfrak{P}_G$. Pro tyto podgrafy použil Kőnig označení p-Teilgraph a ukázal, že kompozice p-Teilgraphů je opět p-Teilgraph (viz. [275], Věta 9, str. 149).

Kotzig definoval obvyklým způsobem pojem **řez** G' souvislého grafu G jako nenulový podgraf grafu G, který má tyto dvě vlastnosti:

(i) když odstraníme z grafu G všechny hrany grafu G', vznikne graf, který má právě dvě komponenty;

(ii) pokud odstraníme z grafu G všechny hrany grafu G' s výjimkou libovolné jediné hrany, vznikne graf, který je souvislý.

Kotzig dokázal, že každý takto definovaný řez G' grafu G je prvkem množiny $\mathfrak{P}_G$ (Lemma 2, str. 69). Také libovolná **hvězda**[3] grafu G (tímto pojmem rozumíme podgraf G' grafu G, který je tvořen všemi hranami incidentními s libovolně pevně zvoleným uzlem u a z uzlů, které jsou s těmito hranami incidentní (viz. obr. 2.5)) je prvkem této množiny (Lemma 3, str. 69).



Obr. 2.5: Hvězda

V další části Kotzig uvedl definice kompozice grafů, kompoziční báze a řadu vět, které převzal z Kőnigovy knihy.

Platí například ([302], Lemma 6, str. 70):

Každý podgraf G' konečného grafu G můžeme vytvořit kompozicí hvězd právě tehdy, když G' je prvkem množiny $\mathfrak{P}_G$.

[3] Kotzig používal název *krík*, když vycházel z Kőnigova názvu *Büschel*. Název hvězda (*étoile*) použil poprvé Sainte-Laguë v práci [207]. Také James Wanddel Alexander (1888–1971) používal označení *star* [198].

Tato věta zůstává v platnosti, když místo o grafech množiny $\mathfrak{P}_G$ mluvíme o eulerovských grafech a pojem hvězda nahradíme pojmem kružnice.

Kotzig dále definoval pojem kostra grafu a fundamentální systém kružnic odpovídající nějaké kostře S. Ukázal, že mohou existovat kompoziční báze kružnic grafu G, které nejsou fundamentálním systémem kružnic žádné kostry grafu G, stejně jako existují kompoziční báze kružnic, které jsou fundamentálním systémem kružnic více koster. Platí (Věta 1, str. 71):

Nechť $C = \{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$ je systém kružnic tvořící kompoziční bázi kružnic pro všechny kružnice jistého konečného souvislého grafu G. Nechť M_i je množina těch hran kružnice K_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, které se již nevyskytují v žádné jiné kružnici systému C, μ_i počet hran množiny M_i.

Platí:

a) Pokud je některá z množin M_i prázdná, pak v G neexistuje kostra, jejímž fundamentálním systémem kružnic by byl systém C.

b) Nechť $M_i \neq \emptyset$ pro všechna i. Vyberme z každé množiny M_i po jedné hraně (vybranou hranu z M_i označme h_i). Množina všech hran grafu, které nebyly vybrány (tedy hrany grafu, které nepatří do množiny $M_0 = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$), je množinou hran kostry S, jejímž fundamentálním systémem kružnic je systém C.

c) Pro počet různých koster $\varkappa(C)$, jejichž fundamentálním systémem kružnic je systém C, platí: $\varkappa(C) = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n$.

d) Když $\varkappa(C) > 1$, pak v G existuje alespoň jedna množina hran T_ε nejméně se dvěma prvky taková, že platí: každá kružnice grafu, která obsahuje hranu z T_ε, obsahuje všechny hrany z T_ε.

Dále platí (Věta 2, str. 73):

Nechť S je kostra souvislého grafu G a h libovolná hrana z S, pak existuje právě jeden řez R_h grafu G, který obsahuje hranu h, a jeho ostatní hrany nepatří do S.

Tato věta nám říká, že každé hraně kostry S můžeme přiřadit právě jeden řez, který už neobsahuje jinou hranu této kostry. Označme E_S systém všech řezů, které takto odpovídají jednotlivým hranám kostry S. Tento systém Kotzig nazval **fundamentální systém řezů konstruovaný pomocí kostry *S***. Platí podobná tvrzení jako pro fundamentální systém kružnic (Věty 3 a 4, str. 74):

Nechť E_S je fundamentální systém řezů konstruovaný pomocí libovolné kostry S souvislého grafu G. Pak E_S je kompoziční bází pro všechny řezy grafu G.

Nechť systém řezů $B = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ je kompoziční bází všech řezů jistého souvislého grafu G a nechť M_i je množina těch hran řezu R_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, které se nevyskytují už v žádném jiném řezu systému B, μ_i nechť udává jejich počet.

Platí:

a) Pokud je některá z množin M_i prázdná, pak v G neexistuje taková kostra, pomocí které konstruovaný fundamentální systém řezů by byl systém B.

b) Nechť $M_i \neq \emptyset$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$. Vyberme z každé množiny M_i

po jedné hraně h_i a vytvořme z nich množinu $M_0 = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$. Graf, který je tvořen hranami množiny M_0, je kostrou grafu G, pomocí které konstruovaný fundamentální systém řezů je systém B.

c) Pro počet různých koster $\varkappa(B)$, pomocí kterých konstruovaný fundamentální systém řezů je systém B, platí: $\varkappa(B) = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_n$.

d) Když $\varkappa(B) > 1$, pak v G existuje alespoň jedna dvojice uzlů u, v, taková, že s oběma těmito uzly jsou incidentní nejméně dvě hrany.

Otázkám spojeným s kostrou grafů se Kotzig zabýval dále o několik let později v práci *Ob osnovach grafov porjadka vysšego, čem pervogo* [348], která vyšla v roce 1961.

V této práci definoval nový pojem **kostra k-tého řádu**:

Kostrou k-tého řádu nazýváme podgraf G^* grafu G (který je tvořen alespoň dvěma uzly) s vlastnostmi:
1) G^* obsahuje všechny uzly grafu G;
2) G^* je souvislý a po odstranění méně než k libovolných hran (k – přirozené číslo) zůstává souvislý;
3) neexistuje vlastní podgraf grafu G^* s vlastnostmi 1, 2.

Kotziga k zavedení tohoto pojmu přivedlo zřejmě zobecnění problému minimální kostry, který se v té době stal všeobecně známým po vydání Kruskalovy práce [402].

Je zřejmé, že běžně užívaný pojem kostra grafu můžeme chápat jako kostru prvního řádu. Izolovaný uzel za kostru nepovažujeme.

V úvodu práce Kotzig zopakoval definici stupně hranové souvislosti $\sigma_G(u, v)$ mezi dvěma uzly u, v grafu G, kterou zavedl již dříve v práci [298].[4] Kotzig tímto pojmem označoval minimální počet hran, po jejichž odstranění z grafu G leží uzly u, v v různých komponentách takto vytvořeného grafu. Pomocí tohoto pojmu pak takto definoval funkci $\sigma_G(h)$ na množině hran grafu G: jestliže h je hrana grafu G, která spojuje uzly u, v, pak $\sigma_G(h) = \sigma_G(u, v)$. Pro libovolné přirozené číslo k pak definoval množinu $H_G(k)$ jako množinu hran grafu G, pro které platí $\sigma_G(h) = k$.

Souvislost mezi kostrou k-tého řádu a touto množinou ukazuje následující věta (Věta 1, str. 291):

Podgraf G^* grafu G je kostrou k-tého řádu grafu G právě tehdy, když
a) G^* obsahuje všechny uzly grafu G;
b) G^* je souvislý graf;
c) $\sigma_{G^*}(h) = k$ pro všechny hrany grafu G^*.

V souvislém grafu G s minimálně dvěma uzly existuje kostra k-tého řádu G^* právě tehdy, když pro každou hranu z G platí $\sigma_G(h) \geq k$ (Věta 2, str. 291). Tato kostra obsahuje všechny hrany množiny $H_G(k)$ (Věta 3, str. 291).

Kotzig ukázal, že platí (Věta 4, str. 292):

[4] Rozboru této práce se budeme věnovat v kapitole 4. Zde také uvedeme přesnou definici pojmu stupeň souvislosti mezi dvěma uzly.

Nechť G je libovolný graf, ve kterém existuje kostra $(k+1)$-ního řádu G^*, a nechť h je libovolná hrana G^*. Potom existuje nejméně jedna kostra k-tého řádu, která obsahuje hranu h.

Kotzig konstatoval, že některé věty, které jsou známy pro kostry prvního řádu, neplatí pro kostry k-tého řádu ($k > 1$). Platí ovšem následující tvrzení (Věta 5, str. 293):

Nechť G^* je kostra k-tého řádu grafu G a nechť G_i je libovolný člen[5] *grafu G. Pak podgraf G_i^* grafu G, který obsahuje všechny prvky z G^*, které jsou obsaženy v G_i, a pouze tyto prvky, je kostrou k-tého řádu grafu G_i.*

V další části Kotzig věnoval pozornost pravidelným **pravidelně souvislým** grafům k-tého stupně, ve kterých pro libovolnou dvojici uzlů $u \neq v$ platí $\sigma_G(u,v) = k$. Takové grafy jsou zřejmě kostrou k-tého stupně, ale obrácené tvrzení neplatí. Existují kostry k-tého řádu, které nemají pravidelnou souvislost.

Kotzig definoval následující operaci:

Nechť G je libovolný graf a $\bar{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ libovolný rozklad množiny uzlů grafu G. Z grafu G vytvořme graf $\bar{G}$ takto:

(1) graf $\bar{G}$ obsahuje uzly $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$; $\bar{u}_i$ vznikne spojením všech uzlů třídy $U_i \in \bar{U}$.

(2) graf $\bar{G}$ obsahuje všechny hrany z G, které spojují v G uzly z různých tříd rozkladu $\bar{U}$, a pouze tyto hrany.
Řekneme, že graf $\bar{G}$ vznikl z grafu G splynutím uzlů podle rozkladu $\bar{U}$.

Kotzig odvodil několik vět, zabývajících se existencí kostry k-tého řádu v grafech, které vznikly touto operací.

V další části práce Kotzig studoval problém kostry k-tého řádu v souvislosti s řezy grafu. Definoval pojem **jednoduchý řez**, kterým rozuměl řez, jehož všechny hrany jsou incidentní s jistým uzlem grafu. Kostru k-tého řádu G^* nazval **jednoduchou**, jestliže neobsahuje žádnou artikulaci a každý její řez obsahující k hran je jednoduchý. Triviálním příkladem jednoduché kostry k-tého řádu je graf se dvěma uzly spojenými k hranami. Je zřejmé, že žádná kostra prvního řádu není jednoduchá.

Kotzig ukázal, že libovolnou kostru k-tého řádu, která není jednoduchá, můžeme jistým postupem převést na kostru, jejíž každý člen je kostrou k-tého řádu. Ukázal dále konstrukci jednoduchých koster druhého řádu.

V poslední části Kotzig zobecnil problém nalezení minimální kostry na problém nalezení minimální kostry k-tého řádu libovolného souvislého grafu, jehož hrany jsou ohodnoceny kladnými reálnými čísly. Problémem minimální kostry se budeme zabývat v poslední části této kapitoly. Na tomto místě pouze uveďme, že Kotzig si uvědomoval, že dosud známé metody použitelné pro kostry prvního řádu k vyřešení tohoto problému nevedou. Znalosti vlastností kostry k-tého řádu odvozené v této práci dosud neumožňovaly tento problém vyřešit.

[5] Místo staršího názvu člen se dnes používá název blok. Blokem grafu G rozumíme maximální uzlově 2-souvislý podgraf nebo hranu.

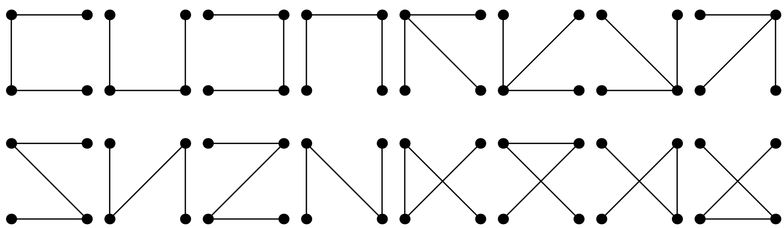
Dalším problémem, který Kotzig formuloval, je nalezení všech hran souvislého grafu G, ve kterém pro každou hranu h platí $\sigma_G(h) \geq k$, takových, že neleží v žádné kostře k-tého řádu grafu G. Vyřešení tohoto problému by nám samozřejmě usnadnilo řešení předcházejícího problému.

Na závěr uveďme, že o některých výsledcích týkajících se koster k-tého řádu přednášel v *Diskusích o nových pracích brněnských matematiků* Karel Čulík již v roce 1959 a jeho referát *K jednomu minimálnímu problému O. Borůvky* [338] byl publikován v roce 1960, tedy dříve než vyšla vlastní Kotzigova práce.

V úloze [337] pak Čulík formuloval požadavek spolehlivosti elektrické sítě a vyzval k řešení problému, ve kterém hledáme v úplném ohodnoceném grafu K_n souvislý podgraf, který obsahuje všechny uzly grafu, jehož každá hrana leží alespoň na jedné kružnici a součet ohodnocení jeho hran je minimální. Je zřejmé, že řešením bude kostra druhého řádu.

2.3 Počet koster

Již z Kirchhoffových výsledků vyplývá, že každý konečný souvislý graf obsahuje kostru. Vzniká otázka, kolik koster graf obsahuje. Je zřejmé, že strom je sám sobě kostrou. Proslulý výsledek odvodil v roce 1889 A. Cayley v práci [91], když ukázal, že počet koster úplného grafu K_n je roven n^{n-2}. Tento vztah byl v úplně jiné souvislosti znám již o něco dříve. Samotný Cayley ukázal na jistou souvislost tohoto výsledku s vlastnostmi determinantů. Dnes existuje mnoho způsobů odvození tohoto vzorce. Přehled o nich podává práce J. W. Moona [403]. Všech 16 koster grafu K_4 vidíme na obrázku 2.6.



Obr. 2.6: Kostry grafu K_4

V roce 1954 H. M. Trent ukázal v práci [404], jakým způsobem je možno určit počet koster grafu G pomocí tzv. **Laplaceovy matice sousednosti** grafu G. Grafu G o uzlech $1, 2, \ldots, n$ ($n \geq 2$) přiřadil čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ řádu n, kde pro $i \neq j$ je $a_{ij} = a_{ji} = -1$ (resp. 0), je-li (resp. není-li) v G hrana ij. Prvky a_{ii} jsou rovny stupni uzlu i v G. Trent ukázal, že počet koster grafu G je roven libovolnému hlavnímu minoru stupně $n-1$. Poznamenejme, že jednoduchou metodu výpočtu tohoto determinantu ukázal L. Weinberg v práci [405].[6]

[6] Poznámky k této metodě stanovení počtu koster grafu najdeme v knize [362, str. 92–96]

V roce 1958 podali nový důkaz Trentovy metody stanovení počtu koster grafu M. Fiedler a J. Sedláček v práci *O W-basích orientovaných grafů* [319]. Na příkladu pak ukázali (str. 221), že úplný bipartitní graf K_{n_1,n_2} má

$$n_1^{n_2-1}n_2^{n_1-1}$$

koster. Tento vztah nezávisle na jejich práci odvodil později H. I. Scoins v práci [406] (viz.[393, str. 48]).

Výsledek pro bipartitní grafy zobecnil T. Austin v práci [407] na k-chromatické grafy.[7] Mějme graf G s n uzly, které jsou obarveny k barvami tak, že hrany grafu spojují všechny uzly různých barev. Nechť c_i $(i = 1, \ldots, k)$ označuje počet uzlů obarvených barvou i. Austin dokázal (Věta II, str. 537):

Počet koster grafu G je

$$n^{k-2}(n-c_1)^{c_1-1}(n-c_2)^{c_2-1}\ldots(n-c_k)^{c_k-1}.$$

Odhad počtu koster grafu G, je-li znám počet uzlů n a chromatické číslo $\chi(G) = c$, odvodil J. Sedláček později v práci *O kostrách konečných grafů* [408] (Věta 2, str. 223):

Nechť graf G má n uzlů a chromatické číslo $c \geq 2$. Potom platí

$$k(G) \leq n^{n-2}\left(\frac{c-1}{c}\right)^{n-c},$$

kde $k(G)$ udává počet koster grafu G.

Sedláček v této práci odvodil ještě některé další zajímavé výsledky. Ukázal například, že úplný graf K_n $(n \geq 2)$ má $\lfloor n/2 \rfloor$ hranově disjunktních koster (Věta 3, str. 223).[8]

Začneme-li v souvislém grafu G sestrojovat kostru tak, že vyjdeme z nějakého stromu S, který je podgrafem grafu G, pak můžeme konstrukci dokončit různými způsoby. Sedláček ukázal, že v případě úplného grafu K_n platí (Věta 4, str. 224):

Nechť K_n je úplný graf. Nechť S je jeho podgraf, který je stromem a obsahuje s uzlů. Pak K_n obsahuje právě sn^{n-s-1} koster takových, že každá z nich obsahuje S jako podgraf.

V závěru své práce Sedláček ukázal, že dva navzájem duální rovinné multigrafy bez smyček a mostů mají stejný počet koster (Věta 5, str. 224).[9]

Přehled dalších prací z počátku 60. let nalezneme v článku I. Rohlíčkové [409], kde autorka uvedla vzorec pro výpočet počtu koster jistého speciálního typu grafů, a např. v knize [393].

[7] k-chromatickým grafem rozumíme graf, jehož uzly lze obarvit k barvami takovým způsobem, že hrany grafu spojují pouze uzly různých barev. Bipartitní graf tak můžeme považovat za graf 2-chromatický.

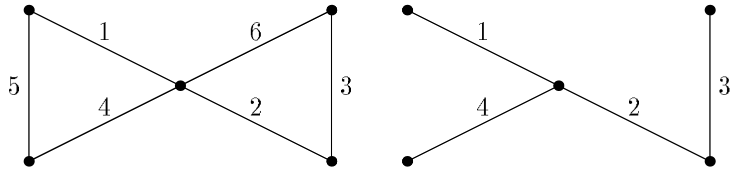
[8] Symbolem $\lfloor x \rfloor$ budeme v celé naší práci označovat dolní celou část čísla x.

[9] Mějme souvislý rovinný graf bez izolovaných uzlů G, který je v rovině nakreslen tak, že žádné dvě hrany nemají společný vnitřní bod. Uvnitř každé oblasti s grafu G umístíme

2.4 Minimální kostra grafu

Uvažujme nyní graf, který má hrany ohodnoceny reálnými čísly. Objevuje se otázka, jak najít kostru tohoto grafu, která má součet ohodnocení na svých hranách minimální. Této kostře říkáme **minimální kostra**. Příklad grafu a jeho minimální kostry vidíme na obr. 2.7.

Nalezení minimální kostry má praktický význam např. při budování rozvodu elektrické energie, plynu ap. Pokud uzly grafu představují odběratele a ohodnocení hran odpovídá nákladům na vybudování elektrického vedení mezi těmito odběrateli, pak nalezení minimální kostry tohoto grafu odpovídá nalezení optimální elektrické sítě.



Obr. 2.7: Minimální kostra grafu

2.4.1 Práce O. Borůvky

Problém minimální kostry patří mezi starší grafové úlohy. Jako první se touto úlohou zabýval brněnský matematik Otakar Borůvka koncem roku 1925, právě inspirovaný úkolem nalézt optimální elektrickou síť. Bylo to v době, kdy se na jižní a západní Moravě prováděla elektrifikace několika desítek obcí. Z důvodu úspory materiálu a ztrát elektrické energie bylo třeba najít optimální elektrické spojení. K řešení tohoto problému vyzval Borůvku pracovník Západomoravských elektráren Jindřich Saxel. Borůvka problém snadno vyřešil a v roce 1926 publikoval o problému dvě práce [284, 285], které považujeme za první příspěvky československé matematiky k teorii grafů. Borůvka podal první algoritmus nalezení minimální kostry grafu. Vzhledem k praktické aplikaci uvažoval úplný graf, který je ohodnocen tak, že žádné dvě hrany nemají stejné ohodnocení. Takovému ohodnocení říkáme ostré ohodnocení. V práci *O jistém problému minimálním* [284] formuloval úkol v pojmech teorie matic takto:

„Budiž dána matice M čísel $r_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n; n \geq 2)$*, až na podmínku* $r_{\alpha\alpha} = 0, r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}$*, kladných a vzájemně různých.*

Jest vybrati z ní skupinu čísel vzájemně a od nuly různých takovou, aby

---

uzel u' grafu G'. Každé hraně h grafu G přiřadíme hranu h' grafu G', spojující dva uzly u', v', které odpovídají oblastem s a t, majícím společnou hranu h. Grafy G a G' nazýváme navzájem duální (Viz. [357, str. 235–236]). Multigrafem nazýváme graf, ve kterém existují dvojice uzlů spojené více než jednou hranou.

1^0 *bylo možno, jsou-li p_1, p_2 libovolná od sebe různá přirozená čísla $\leq n$, vybrati z ní skupinu částečnou tvaru*

$$r_{p_1 c_2}, r_{c_2 c_3}, r_{c_3 c_4}, \ldots, r_{c_{q-2} c_{q-1}}, r_{c_{q-1} p_2},$$

2^0 *součet jejích členů byl menší než součet členů kterékoliv jiné skupiny čísel vzájemně a od nuly různých, hovící podmínce 1^0.“*

Samotný popis řešení tohoto problému zahrnuje asi 5 stran textu a není možno ho na tomto místě uvést. Konstatujme pouze, že celé řešení bylo v závěru práce přeloženo do němčiny a bylo tak (alespoň jazykově) dostupné i zahraničním matematikům.

Podrobný popis Borůvkova algoritmu je možno najít v knize [362, str. 31]. Zde se hledá minimální kostra $[V, K]$ grafu $[U, H]$ s ohodnocením hran φ tak, že se postupně konstruují podgrafy $[U_i, H_i]$, které splňují některé z následujících podmínek: A) jsou souvislé, B) $U_i = U$, C) jsou to lesy a D) jejich komponenty jsou minimálními kostrami těch podgrafů daného grafu, které obsahují právě všechny uzly komponent a všechny je spojující hrany. Borůvkův algoritmus pak můžeme formulovat takto:

„(i) Zvolíme libovolný uzel $u_1 \in U$ a vybereme takovou hranu, která má za koncový uzel u_1 a přitom má co nejmenší hodnotu (říkejme krátce minimální hranu); nechť je to hrana $u_1 u_2$. Tím je určena cesta (u_1, u_2). Jestliže už jsme určili nějakou cestu $C_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, pak zase vybereme minimální hranu, která má koncový uzel u_n; nechť je to hrana $u_n u_{n+1}$. Jestliže platí $\varphi(u_{n-1} u_n) > \varphi(u_n u_{n+1})$, prodloužíme uvažovanou cestu C_1 na cestu $(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})$ a zkoušíme ji zase prodlužovat. Jestliže platí $\varphi(u_{n-1} u_n) \leq \varphi(u_n u_{n+1})$, cestu C_1 dále neprodlužujeme, ale znovu zvolíme libovolný uzel $u_{n+1} \in U \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ a pokračujeme jako na začátku; sestrojíme cestu C_2 a její prodlužování ukončíme buď z toho důvodu, jak tomu bylo s C_1, nebo z toho důvodu, že její poslední uzel je uzlem cesty C_1. Takto sestrojujeme dále cesty C_3, C_4 atd. dokud to jde, tj. dokud není každý uzel daného grafu uzlem některé ze sestrojených cest. Touto množinou cest je jednoznačně určen podgraf $[U_1, H_1]$, který zřejmě splňuje B), C), a lze ukázat, že i D).

(ii) Jestliže jsme již určili podgraf $[U_i, H_i]$, který splňuje BCD), pak zjistíme, zda splňuje také A). Jestliže ano, pak jsme hotovi a položíme $[U_i, H_i] = [V, K]$, neboť z ABD) plyne, že jsme určili hledanou minimální kostru. Jesliže ne, tj. $[U_i, H_i]$ není souvislý, pak ke každým dvěma různým jeho komponentám $[V_p, K_p]$ a $[V_q, K_q]$ vybereme minimální hranu, která je spojuje, tj. hranu $v_p v_q$, kde $v_p \in V_p$ a $v_q \in V_q$, a přitom $\varphi(v_p v_q)$ je co nejmenší. Dále si všímáme jenom těchto vybraných hran spojujících různé komponenty a postupujeme jako v (i) jen s tím rozdílem, že místo uzlů u_j volíme komponenty G_j a sestrojujeme posloupnosti $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ místo cest, tj. G_1 je libovolná komponenta a z ní vychází minimální hrana uv, kde u patří ke G_1, zatímco v patří k nějaké komponentě G_2, atd. Skončíme zase, až každá komponenta patří nějaké posloupnosti a množinou všech určených posloupností komponent spolu s hranami, které je spojují, je určen podgraf $[U_{i+1}, H_{i+1}]$, a začneme zase jako v (ii).“

V krátké práci *Příspěvek k řešení otázky ekonomické stavby elektrovodných sítí* [285] v časopise *Elektrotechnický obzor*, která časově těsně předchází vydání práce [284], formuloval Borůvka problém i řešení srozumitelněji:

„V rovině (v prostoru) jest dáno n bodů, jejichž vzájemné vzdálenosti jsou vesměs různé. Jest je spojiti sítí tak, aby:
1. každé dva body byly spojeny buď přímo, nebo prostřednictvím jiných,
2. celková délka sítě byla co nejmenší.
Řešení je následující:
Každý z daných bodů spojím s bodem nejbližším. Obdržím řadu polygonálních tahů. Každý z nich spojím nejkratším způsobem s tahem nejbližším. Obdržím řadu polygonálních tahů. Takto postupuji stále dál, až obdržím konečně jediný polygonální tah, jenž řeší danou úlohu.“

O. Borůvka práci [284] zařadil do seznamu svých publikací při konkurzu na místo profesora matematiky na univerzitě v Záhřebu na přelomu let 1925–1926. Ve školním roce 1926–1927 byl Borůvkovi umožněn studijní pobyt u profesora Élie Josepha Cartana (1869–1951) v Paříži, kde s problémem nalezení minimální kostry vystoupil v semináři profesora Juliana Lowella Coolidge (1873–1954). Citujme na tomto místě samotného Borůvku:[10]

„V semináři profesora Coolidge jeho členové většinou přednášeli o výsledcích své práce. Já jsem se k přednášce přihlásil na jaře roku 1927. Profesoru Coolidgemu jsem dal na výběr tři témata a on mne bez váhání požádal, abych přednášel o výsledcích mé práce o algoritmickém určení minimální kostry konečného grafu, což pro tu dobu byla přednáška velmi nekonvenčního obsahu.
Navzdory tomu, nebo možná právě proto, dopadla velice dobře a vzbudila živou diskusi.“

2.4.2 Příspěvek V. Jarníka

Na Borůvkovu práci reagoval 12. února 1929 Vojtěch Jarník, který mu v dopise (jeho část byla později publikována v práci *O jistém problému minimálním* [286]) popsal své „jednodušší řešení“. Ani Jarník neuvažoval v pojmech teorie grafů. Oba autoři se touto problematikou nezabývali a literatura prakticky neexistovala. Jarník dokázal existenci minimální kostry a našel algoritmus, který ji nalezne. Opět uvažoval úplný graf, který má ostré ohodnocení hran. Ve svém článku užíval tehdy běžné názvy *množství* a *částečné množství* pro pojmy, které dnes nazýváme množina a podmnožina.

„Budiž dáno n (≥ 2) *prvků, jež označím čísly* $1, 2, \ldots, n$. *Z těchto prvků sestrojím* $\frac{1}{2}n(n-1)$ *dvojic* $[i,k]$, *kde* $i \neq k$; $i,k = 1,2,\ldots,n$; *dvojici* $[k,i]$ *považuji za totožnou s* $[i,k]$. *Každé dvojici* $[i,k]$ *budiž přiřazeno číslo kladné* $r_{i,k}$ $(r_{i,k} = r_{k,i})$. *Tato čísla* $r_{i,k}$ $(1 \leq i < k \leq n)$ *v počtu* $\frac{1}{2}n(n-1)$ *buďte navzájem různá.*

[10] B. Půža, P. Šarmanová, Z. Třešňák: *Otakar Borůvka.* Universitas Masarykiana. Brno 1996.

Množství všech dvojic $[i, k]$ označme M. Jsou-li p, q dvě přirozená čísla $\leq n$, $p \neq q$, nazvu každou skupinu dvojic z M tvaru

$$[p, c_1], [c_1, c_2], [c_2, c_3], \ldots, [c_{s-1}, c_s], [c_s, q]$$

řetězcem (p, q). *Také jedinou dvojici $[p, q]$ nazývám řetězcem (p, q).*

Částečné množství H z množství M nazvu kompletní částí *(značka kč), jestliže ke každé dvojici přirozených čísel p, q, jež jsou $\leq n$ a od sebe různá, existuje v H řetězec (p, q), jehož všechny dvojice patří k H. Existují kč; neboť M samo je kč.*

Je-li

$$[i_1, k_1], [i_2, k_2], \ldots, [i_t, k_t]$$

nějaké částečné množství K z množství M (nechť je každá dvojice z K napsána jen jednou), označme

$$\sum_{j=1}^{t} r_{i_j, k_j} = R(K).$$

Jestliže pro nějakou kompletní část K má $R(K)$ hodnotu menší nebo rovnou než pro kteroukoliv jinou kompletní část, nazvu K minimální kompletní částí *množství M (značka mkč).*

Ježto existuje aspoň jedna kč a pouze konečný počet kč, existuje patrně aspoň jedna mkč.

Úkol, který jste[11] *řešil ve své práci, lze pak formulovati takto:*

Dokázati, že existuje jen jedna mkč a udati předpis pro její konstrukci."

Jarníkův algoritmus je dán následující definicí:

„Jest

$$J \equiv [a_1, a_2], [a_3, a_4], \ldots, [a_{2n-3}, a_{2n-2}],$$

kde $a_1, a_2, \ldots$ jsou definována takto:

1. krok. Za a_1 zvolme kterýkoliv z prvků $1, 2, \ldots, n$; a_2 budiž definováno vztahem

$$r_{a_1, a_2} = \min r_{a_1, l}$$
$$l = 1, 2, \ldots, n$$
$$l \neq a_1.$$

k-tý krok. Je-li již definováno $(*)$ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2k-3}, a_{2k-2}$ $(2 \leq k < n)$, definujme (a_{2k-1}, a_{2k}) vztahem

$$r_{a_{2k-1}, a_{2k}} = \min r_{i,j},$$

kde i probíhá všechna čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{2k-2}$; j všechna ostatní z čísel $1, 2, \ldots, n$. Přitom budiž a_{2k-1} jedno z čísel $(*)$, takže a_{2k} není obsaženo mezi čísly $(*)$."

[11] O. Borůvka. Poznámka autora.

Jarník dokázal, že takto definované množství J je jedinou mkč a skládá se z $n-1$ dvojic. Nakonec podává názornou interpretaci problému:

„Je dáno n kuliček, jež jsou očíslovány čísly $1, 2, \ldots, n$, a jež jsou po dvou spojeny tyčemi v počtu $\frac{1}{2}n(n-1)$. Hmota tyče, jež spojuje kuličku a s kuličkou b, budiž $r_{a,b}$. Ty tyče buďte eventuelně tak prohnuty, aby se navzájem nestýkaly. Jest odstraniti z tohoto systému tyčí některé tak, aby těch n kuliček drželo pohromadě a aby hmota zbylých tyčí byla co nejmenší.“

Ještě ve 30. letech se problémem nalezení minimální kostry zabýval G. Choquet v práci [410]. Jeho algoritmus je podobný jako algoritmus Borůvkův a zřejmě vznikl pod vlivem Borůvkova vystoupení v semináři profesora Coolidge.

Další podobný postup navrhl brzy po válce Jan Lukasziewicz (1878–1956) [411]. Jeho konstrukce je však oprávněna jen za předpokladu, že jde o ostře ohodnocený graf (viz. [362, str. 32]).

2.4.3 Kruskalův algoritmus

Základními příspěvky k problému minimální kostry se v 50. letech staly práce Josepha B. Kruskala z roku 1956 a práce R. C. Prima z roku 1957. Zejména díky Kruskalově práci se problém nalezení minimální kostry stal známým. Kruskal znal Borůvkovu práci, která se opsaná na psacím stroji objevila v USA. Kruskal ve své práci *On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem* [402] studoval rovněž ostře ohodnocené grafy, ale požadavek úplnosti grafu nepovažoval za nutný. Uvedl, že chybějící hrany se dají nahradit hranami s dostatečně velkým ohodnocením.

Kruskal dokázal správnost tří konstrukcí minimální kostry:

„A. Provádějme následující krok tolikrát, kolikrát je to možné: Mezi hranami grafu G, které ještě nejsou vybrány, vybereme nejkratší, která netvoří kružnici s těmi, které už byly vybrány. Množina nakonec vybraných hran tvoří minimální kostru grafu G.

B. Buď V libovolná, ale pevná neprázdná podmnožina uzlů grafu G. Provádějme následující krok tolikrát, kolikrát je to možné: Z hran grafu G, které doposud nebyly vybrány a které jsou incidentní buď s některým uzlem z V nebo s hranou, která již vybrána byla, vybereme nejkratší z těch, které s již vybranými hranami netvoří kružnici. Množina nakonec vybraných hran tvoří minimální kostru grafu G. V případě, že množina V je rovna množině všech uzlů grafu G, pak konstrukce B odpovídá konstrukci A.

A'. (V jistém smyslu duální k A). Provádějme následující krok tolikrát, kolikrát je to možné: Mezi hranami, které dosud nebyly vybrány, vybereme nejdelší z těch, jejichž odstranění neporuší souvislost. Pak množina hran, které po provedení posledního kroku zůstanou nevybrány, tvoří minimální kostru grafu G.“

Kruskal napsal, že mu není známo, zda konstrukce B má také duální formu.

Konstrukci A' použil A. Kotzig v práci *Súvislé podgrafy s minimálnou hodnotou v konečnom súvislom grafe* [347]. Kotzig znal Kruskalovu práci; zobecnil konstrukci s poukazem na skutečnost, že tato (patřičně pozměněná) konstrukce je možná i pro grafy, které nejsou ohodnoceny ostře. V takových grafech může existovat více než jedna minimální kostra. Kotzig našel nutnou a postačující podmínku, kdy v grafu existuje právě jedna minimální kostra (Věta 2, str. 4):

Nechť G je souvislý ohodnocený graf a G_0 je libovolná minimální kostra grafu G. Nechť $H_0 = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ je množina všech těch hran $\in G$, které nepatří do G_0. Sestrojme množinu kružnic $\bar{K} = \{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$ takto: kružnice $K_i \in \bar{K}$ je ta kružnice grafu G, která obsahuje hranu $h_i \in H_0$ a všechny ostatní její hrany patří do G_0.

Platí: v grafu G existuje jedna minimální kostra právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ má hrana h_i větší hodnotu než libovolná jiná hrana z K_i.

Uvedený Kotzigův příspěvek je zřejmě první prací, ve které je citována Jarníkova práce [286]. Do redakce *Časopisu pro pěstování matematiky* byl zaslán v roce 1958. Dříve než v roce 1961 vyšel, zmiňuje se o Jarníkově práci K. Čulík v práci [338].

Na tomto místě znovu vzpomeňme pozdější Kotzigovu práci [348], ve které ukázal obtíže, které vznikají při zobecnění problému minimální kostry na kostry vyšších řádů. K řešení tohoto problému vyzval K. Čulík v [337], kde citoval práce [284, 411, 402]. Čulík dále v práci *K jednomu minimálnímu problému O. Borůvky* [338] zobecnil Kotzigovu nutnou a postačující podmínku existence jediné minimální kostry i pro minimální kostry k-řádu (Věta 3, str. 94). Dále ukázal, že v případě neostrého ohodnocení hran grafu můžeme dostatečně malou změnou ohodnocení dosáhnout ohodnocení ostrého, aniž to bude mít vliv na minimální kostru co do její minimality (Věta 4, str. 94).

2.4.4 Primův–Dijkstrův algoritmus

Stejný postup řešení problému minimální kostry jako dokázal V. Jarník na počátku roku 1929, odvodil v roce 1957 R. C. Prim v práci [412] a nezávisle na něm E. W. Dijkstra v roce 1959 v práci [413].

Primova práce *Shortest connection networks and some generalizations* byla motivována úkolem spojit nejkratší souvislou sítí (SCN – Shortest Connection Network) terminály nacházející se ve Washingtonu a v dalších 48 hlavních městech jednotlivých států USA. Při výkladu užil pojmů izolovaný terminál (isolated terminal) a část (fragment), kterými rozuměl terminál dosud nespojený s jinými terminály, resp. množinu terminálů, které jsou již spojeny dohromady. Algoritmus, který nalezl, vychází ze dvou nutných podmínek:

1. Každý terminál je v SCN přímo spojen nejméně s jedním nejbližším terminálem.

2. Každá část je v SCN spojena nejméně s jedním nejbližším terminálem pomocí nejkratší možné cesty.

Tyto podmínky odpovídají dvěma pomocným větám, které ve své práci dokázal V. Jarník pro ostře ohodnocený graf. Prim nejprve dokázal, že tyto podmínky jsou splněny v případě, že každý terminál má právě jednoho nejbližšího souseda. Pak ukázal, že toto omezení není nutné. Na základě těchto podmínek získáme nejkratší souvislou síť (minimální kostru) postupnou aplikací dvou konstrukčních principů:

P1. Každý izolovaný terminál můžeme spojit s nejbližším terminálem.
P2. Každou izolovanou část můžeme spojit s nejbližším terminálem.

Izolovanou částí přitom Prim rozuměl část, která v daném okamžiku ještě není spojena s okolními terminály. Pokud použijeme P1 pouze jedenkrát na počátku konstrukce a pak již používáme pouze P2 dostáváme Jarníkův algoritmus. Kruskalův algoritmus je pak speciální případ postupu, kdy po prvním kroku P1 se v další fázi mohou užít oba konstrukční principy. Prim cituje v této souvislosti Kruskalovu práci a zmiňuje se také o práci Borůvkově (str. 1401):

„Kruskal refers to an obscure Czech paper as giving a construction and uniqueness proof inferior to his.“

Prim také ukázal, že jeho postup lze užít i v případě, kdy hrany jsou ohodnoceny obecně reálnými čísly.

E. W. Dijkstra publikoval algoritmus nalezení minimální kostry poprvé v práci *A note on two problems in connexion with graphs* [413], ve které současně uvedl známý algoritmus nalezení nejkratší cesty mezi dvěma uzly grafu. Podobně jako Kruskal uvažoval grafy, které nemusí být nutně úplné. Jeho řešení problému nalezení minimální kostry je následující:

Hrany grafu rozdělíme do tří množin:

I. Hrany, které jsou definitivně zařazeny do minimální kostry.

II. Hrany, ze kterých vybíráme následující hranu, která bude zařazena do množiny I.

III. Zbývající hrany (vyřazené či ještě neuvažované).

Uzly grafu rozdělíme do dvou množin:

A. Uzly incidentní s hranami množiny I.

B. Zbývající uzly (jedna a pouze jedna hrana z množiny II bude incidentní s každým z těchto uzlů).

Konstrukce začíná tím, že vybereme libovolný uzel za jediný prvek množiny A. Všechny hrany s ním incidentní přesuneme do množiny II. Opakovaně provádíme následující dva kroky:
Krok 1. Nejkratší hranu z množiny II přesuneme do množiny I. Současně se tím jeden uzel přesune z množiny B do množiny A.
Krok 2. Uvažujme hrany incidentní s uzlem, který byl právě přesunut do množiny A, které vedou k uzlům v množině B. Je-li uvažovaná hrana ohodnocena více než odpovídající hrana v množině II, pak ji vyřadíme. Je-li kratší, pak nahradí odpovídající hranu v množině II a ta je vyřazena.

Pak se vrátíme ke kroku 1 a celý proces opakujeme tak dlouho, než jsou množiny II a B prázdné. Hrany množiny I tvoří minimální kostru grafu.

Druhou Dijkstrovou prací o minimální kostře je práce *Some theorems on spanning subtrees of a graph* [414], která vyšla v roce 1960. V této práci studoval problém na ohodnoceném grafu G s n uzly, ve kterém je libovolná dvojice uzlů spojena nejméně jednou hranou. Nevyloučil tedy ani možnost multigrafu. Přitom uvažoval taková ohodnocení hran, kdy v grafu G neexistují kostry se stejným ohodnocením. Jednotlivé kostry pak můžeme seřadit podle jejich rostoucího ohodnocení do posloupnosti $T_0, T_1, T_2, \ldots$.

Dijkstra nejprve dokázal, že hrana s největším ohodnocením v libovolné kružnici nepatří nikdy do minimální kostry (Věta 1, str. 196). Dále ukázal, že tato podmínka stačí k tomu, aby bylo možné určit minimální kostru (Věta 2, str. 197). Důkaz tohoto tvrzení je dán následující konstrukcí:

Vyjdeme z grafu, který obsahuje pouze n izolovaných uzlů grafu G. Postupně k tomuto grafu přidáváme jednotlivé hrany grafu G v libovolném pořadí tak dlouho, dokud nevznikne kružnice. Odstraníme nejdelší hranu této kružnice a pokračujeme v přidávání zbývajících hran. Při vytvoření další kružnice z ní opět odstraníme nejdelší hranu a tímto způsobem postupujeme tak dlouho, dokud nevyšetříme všechny hrany grafu G. Vzniklý graf je minimální kostrou grafu G.

V podstatě stejný postup navrhl i R. Kalaba v práci [415]. Popis jeho algoritmu lze nalézt v [362, str. 34].

Poznamenejme, že Dijkstra znal Kruskalův algoritmus i Lobermanovu–Weinbergerovu práci, o které se zmíníme za okamžik. Uvedl, že Kruskalova a Lobermanova–Weinbergerova konstrukce jsou speciální případy výše uvedeného postupu, ve kterém hrany vybíráme v libovolném pořadí. Primovu a pochopitelně Jarníkovu práci Dijkstra neznal.

2.4.5 Některé další otázky

Postupy hledání minimální kostry, které jsme doposud uvedli, neukazují možnosti, jak provádět toto řešení na počítačích. To nepřekvapuje, uvědomíme-li si v jaké době většinou vznikaly.

První prací, ve které je algoritmus nalezení minimální kostry vyložen tak, aby byl snadno proveditelný na počítači, je článek H. Lobermana a A. Weinbergera *Formal procedures for connecting terminals with a minimum total wire lenght* [416], který vznikl v roce 1957 nezávisle na pracích Kruskala a Prima, které jej časově těsně předcházely. Autoři v něm odvodili dva algoritmy, z nichž první odpovídá Kruskalově konstrukci A a druhý Primovu algoritmu. Oba algoritmy již dokonce vyjádřili i pomocí vývojových diagramů.

Ukažme, jakým způsobem Loberman a Weinberger popsali např. Kruskalův algoritmus:[12]

Hrany grafu nejprve seřadíme podle velikosti ohodnocení do neklesající posloupnosti a v tomto pořadí je vyšetřujeme. První hranu této posloupnosti zařadíme do minimální kostry. Postupně vyšetřujeme další hrany. Pro každou zkoumanou hranu s koncovými uzly u, v nastane jedna z následujících možností:

[12] V případě tohoto algoritmu jde o volnou formulaci Lobermanova–Weinbergerova postupu.

1. *Žádný z uzlů u, v se dosud nenachází v minimální kostře.*

2. *Pouze jeden z uzlů u, v již byl zařazen do minimální kostry.*

3. *Oba uzly u, v již byly zařazeny do minimální kostry, ale leží dosud v různých komponentách.*

4. *Oba uzly u, v již byly zařazeny do minimální kostry a leží ve stejné komponentě.*

V případech 1, 2 a 3 hranu uv zařadíme do minimální kostry. Proces se zastaví tehdy, když zjistíme, že již bylo zařazeno všech n uzlů nebo bylo zařazeno $n-1$ hran.

Podobným způsobem je možno popsat i Primův algoritmus. Autoři ukázali, že pokud je ohodnocení hran ostré, pak oba algoritmy dávají stejný výsledek (jedinou minimální kostru). V případě neostrého ohodnocení můžeme stejně ohodnocené hrany vyšetřovat v libovolném pořadí a výsledek se může lišit i při použití stejného algoritmu. Součet ohodnocení hran je ovšem vždy stejný.

Problematika minimální kostry byla v dalších letech dále studována. David Cheriton a Robert Endre Tarjan ukázali v práci *Finding minimum spanning trees* [417], že Kruskalův a Primův algoritmus jsou speciálními případy tohoto obecného algoritmu:

Hledejme minimální kostru souvislého grafu G.

První krok. *Zvolme nějaký uzel. Vezměme nejkratší hranu, která je s tímto uzlem incidentní. To je první hrana minimální kostry.*

Obecný krok. *Dosud vybrané hrany tvoří les, který je podgrafem grafu G. (Izolované uzly, které nejsou incidentní s dosud vybranými hranami, považujeme za stromy s jediným uzlem.) Zvolme nějaký strom T z tohoto lesa. Vyberme nejkratší nevybranou hranu $\{v, w\}$ incidentní s nějakým uzlem v T a s nějakým uzlem, který leží v jiném stromě T'. Odstraňme všechny hrany kratší než $\{v, w\}$, které jsou incidentní s T (tyto hrany tvoří kružnice s hranami stromu T). Hranu $\{v, w\}$ přidáme k minimální kostře (dochází ke změně lesa spojením stromů T a T'). Opakujme obecný krok tak dlouho, dokud všechny uzly nejsou spojeny.*

Mazací krok. *(Tento volitelný krok může být vykonán po kterémkoliv obecném kroku. Zjednodušuje budoucí výpočet odstraněním zbytečných hran.) Vymažme všechny nevybrané hrany, které mají oba koncové uzly ve stejném stromu lesa. Pro každou dvojici stromů spojených nevybranými hranami, odstraňme všechny tyto hrany s výjimkou nejkratší.*

Autoři dále ukázali, že Kruskalův i Primův algoritmus lze implementovat tak, že jejich složitost je $O(|E| \log |V|)$.[13] V další části uvedli algoritmus, který má složitost $O(|E| \log\log |V|)$. Dále se jim podařilo zkonstruovat algoritmus

[13] Algoritmy posuzujeme podle počtu elementárních operací (času), které potřebují k vyřešení problému. Pro dvě kladné funkce $g(n)$ a $h(n)$ píšeme $g(n) = O(h(n))$, když existují $c_0 > 0$ a n_0 tak, že $g(n) \leq c_0 h(n)$ pro každé $n \geq n_0$. Pak řekneme, že algoritmus má složitost $O(f(L))$, když pro dostatečně velké L vyřeší úlohu velikosti L v čase $O(f(L))$.

pro nalezení minimální kostry rovinného grafu, který má složitost $O(V)$, a algoritmus složitosti $O(|E|)$ pro tzv. husté grafy (takové grafy splňují pro nějaké kladné konstanty c a ε nerovnost $|E| > c|V|^{1+\varepsilon}$).

První algoritmus minimální kostry, který měl složitost $O(|E| \log\log |V|)$ nalezl krátce předtím Andrew Chi-chih Yao v práci [418], který modifikoval Borůvkův algoritmus z roku 1925. Yao ovšem vycházel z knihy [419], kde autoři C. Berge a A. Ghouila-Houri připisují tento algoritmus M. Sollinovi.

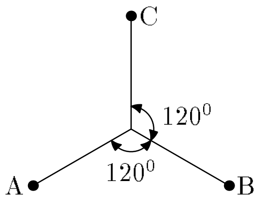
Ukazuje se tedy, že v Borůvkově práci komplikovaně vyjádřený algoritmus je mnohem lepší než se v minulosti předpokládalo. Tuto skutečnost potvrdily v poslední době i praktické testy prováděné na počítačích v USA.[14]

Další historické podrobnosti o těchto otázkách, které patří spíše do Computer Science, najdeme v práci [420], kde autoři dosáhli dalšího zlepšení složitosti algoritmů nalezení minimální kostry.

Historické aspekty problému minimální kostry nalezneme jednak ve všech výše zmíněných článcích, dále např. v knihách [421, 362] a v neposlední řadě v práci *On the history of the minimum spanning tree problem* [373] R. L. Grahama a P. Hella z roku 1985.

Je třeba se zmínit ještě o jednom starém problému, který s minimální kostrou úzce souvisí. Na počátku 19. století vyřešil Jakob Steiner (1796–1863) následující úlohu:

Pro dané tři body A, B, C v rovině máme najít spojovací síť nejkratší možné délky.



Obr. 2.8: Steinerův strom

Zobecnění této úlohy pro n ($n \geq 2$) bodů studovali Vojtěch Jarník a Miloš Kössler (1884–1961) v roce 1934 v práci *O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů* [287] a nyní je známa jako **Steinerův problém** v rovině (resp. obecněji v n-rozměrném euklidovském prostoru). Každá optimální síť má tvar stromu a proto hovoříme o steinerovském stromu. Další podrobnosti lze nalézt v Plesníkově knize [421, str. 163–172].

[14] O těchto testech přednášel Donald Knuth v březnu 1996 na Masarykově univerzitě v Brně.