Kapitola 1

Cesty v grafech

V této kapitole se budeme věnovat nejstarším problémům teorie grafů. V první části se seznámíme s Eulerovým řešením problému königsbergských mostů, které považujeme za první příspěvek k teorii grafů. Krátce se pak zmíníme o některých dalších problémech spojených s eulerovskými grafy. Druhá část kapitoly je věnována otázkám spojeným s hamiltonovskými kružnicemi grafu. Seznámíme se také s problematikou hamiltonovsky souvislých grafů, ke které významným způsobem přispěla česká matematika.

1.1 Eulerovské tahy

1.1.1 Problém königsbergských mostů

Ve městě Königsbergu ve Východním Prusku (dnešní Kaliningrad v Rusku) jsou v centru města na řece Pregel dva ostrovy, které v 18. století spojovalo s oběma břehy sedm mostů. Problém königsbergských mostů[1] spočíval v nalezení cesty, která by spojovala všechny části města, začínala a končila ve stejné části, a při které by každý most byl použit právě jedenkrát.

Tento problém se objevil již v 17. století. K. A. Rybnikov v práci [374, str. 110] uvedl, že v literatuře je znám od roku 1650. Podle prací [368, 369] není zřejmé, kdy a jak se s tímto problémem seznámil Leonhard Euler. Obě práce uvádějí, že řešení problému königsbergských mostů předložil Euler 26. srpna 1735 na zasedání Petrohradské akademie. Autoři R. J. Wilson, H. Sachs a M. Steibitz přitom vycházeli z předmluvy k sedmému svazku sebraných prací L. Eulera, kterou napsal Gustav Eneström (1852–1923) (viz. [1]). Zachovaná Eulerova korespondence pak umožňuje nahlédnout do období, kdy vlastně teorie grafů vznikala.

9. března 1736 zaslal Eulerovi dopis jeho přítel Carl Leonhard Gottlieb Ehler a poprosil jej o zaslání řešení tohoto problému. Ehler byl v té době starostou města Danzigu (dnešní Gdańsk) a udržoval s Eulerem korespondenci po mnoho

[1] Městu Königsberg se v minulosti v českých zemích říkalo Královec a v literatuře proto často nacházíme název problém mostů města Královce.

let. Prostřednictvím Ehlera navázal Euler písemný kontakt i s profesorem matematiky akademického gymnázia v Danzigu Heinrichem Kühnem (1690–1769). Zdá se, že to mohl být právě Kühn, který Eulera s problémem seznámil, ovšem jisté to není.

13. března 1736 napsal Euler do Vídně italskému matematiku Giovannimu Jacobovi Marinonimu (1670–1755) o tom, že řešení úlohy neexistuje a stručně naznačil, jak k tomuto závěru došel. Podrobné řešení pak zaslal v dopise Ehlerovi, který je psaný 3. dubna 1736. Euler napsal, že tento úkol nemá mnoho společného s matematikou, ale že bude rád, když dostane nějaké podobné (viz. [375]).

Eulerovo řešení bylo publikováno ve sborníku Petrohradské akademie za rok 1736, který vyšel až v roce 1741 (tento rok byl později v některých pracech uveden jako rok vyřešení problému). V roce 1752 pak práce vyšla v Petrohradě podruhé (viz. [368, str. 265]). Za pozornost jistě stojí, že o Eulerově práci se zmiňuje v 15. díle *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers* Jean Baptiste Le Rond d'Alembert (1717–1783) (viz. [368, str. 270]).

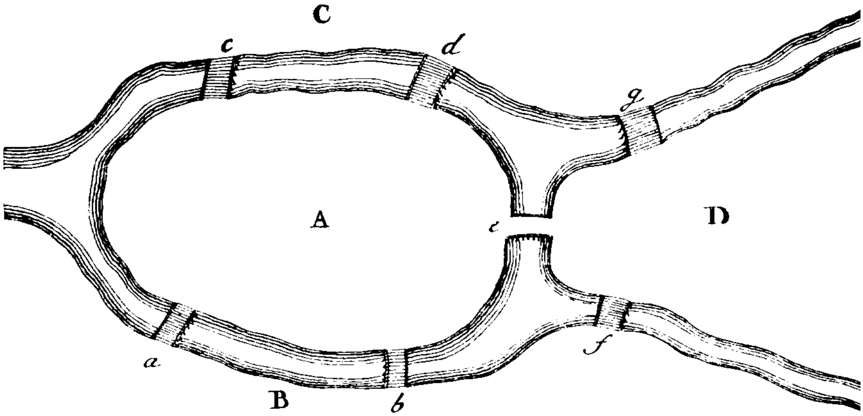


Fig. 1.

Obr. 1.1: Mosty města Königsbergu

Podívejme se, jakým způsobem Euler problém königsbergských mostů vyřešil v práci *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* [1], kterou považujeme za první příspěvek k teorii grafů. Eulerova práce z roku 1736 je rozdělena na 21 číslovaných odstavců. Je poměrně snadno dostupná v anglickém [367] nebo v německém překladu [356].

V úvodu práce Euler píše:[2]

[2] Ve volném překladu:

„*Vedle té části geometrie, která se zabývá velikostmi, a které byla vždy věnována největší pozornost, existuje ještě další část, dříve téměř neznámá, o které se první zmínil Leibniz a nazval ji* geometrie polohy. *Tato část se zabývá pouze určením polohy a jejími vlastnostmi;*

„Praeter illam geometriae partem, quae circa quantitates versatur et omni tempore summo studio est exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit LEIBNITZIUS, quam Geometriam situs *vocavit. Ista pars ab ipso in solo situ determinando situsque proprietatibus eruendis occupata esse statuitur; in quo negotio neque ad quantitates respiciendum neque calculo quantitatum utendum sit.“*

Zdá se, že na souvislost problému königsbergských mostů s leibnizovskou[3] geometrií polohy (*geometriam situs*) upozornil Eulera v dopise Ehler (viz. [369]).

Na obrázku 1.1 vidíme jednoduchý náčrtek sedmi mostů přes řeku Pregel, který nalezneme v původní Eulerově práci. Euler označil čtyři části města Königsbergu velkými písmeny A, B, C a D a mosty malými písmeny a, b, c, d, e, f a g. Euler převedl problém mostů na nalezení posloupnosti 8 písmen (A, B, C a D) takové, že dvojice (AB), (AC) se v ní objeví dvakrát, zatímco dvojice (AD), (BD) a (CD) právě jednou. Písmena představují jednotlivé části města a dvojicím odpovídají mosty přes řeku Pregel. V odstavcích 8 a 9 ukázal, že taková posloupnost nemůže existovat a proto neexistuje ani řešení problému königsbergských mostů. Eulerův důkaz je jednoduchý:

Protože existuje 5 mostů, které končí v části A, pak posloupnost písmen musí obsahovat písmeno A třikrát. Podobně 3 mosty vedoucí do částí B, C a D znamenají, že tato písmena budou v posloupnosti dvakrát. To ovšem není možné, protože posloupnost má jen 8 písmen.

V další části práce Euler vyřešil podobným způsobem problém obecně. Jak sám uvedl, bylo by vždy v podobných jednoduchých situacích možné úkol vyřešit tak, že vyšetříme všechny možné cesty. Pro komplikovanější případy by ovšem tato možnost byla obtížně proveditelná.

Pro snazší vyjadřování si na tomto místě převedeme úlohu do dnešního jazyka teorie grafů. Problém spočívá v nalezení **eulerovského tahu** v grafu, jehož uzly představují jednotlivé části města Königsbergu a hrany odpovídají sedmi mostům přes řeku Pregel (viz. obr. 1.2). Ve většině dnešních učebnic teorie grafů tento graf nalezneme. Někdy i s chybnou poznámkou, že takto situaci graficky zachytil již L. Euler. Ve skutečnosti se souvislost mezi problémem königsbergských mostů a tímto grafem objevila až v knize Waltera Williama Rouse Balla (1850–1925) [101], věnované rekreačním matematickým problémům (viz. [368, str. 272]).

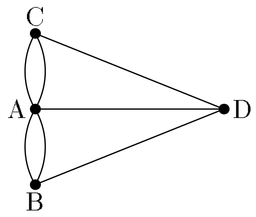
První věta teorie grafů, která byla v Eulerově práci dokázána, zní v dnešní terminologii takto (Odstavec 16):

Nechť $G = (V, E)$ je konečný graf, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je množina jeho uzlů a nechť pro množinu jeho hran E je $|E| = h$. Stupeň uzlu v_i $(i = 1, \ldots, n)$

---

neobsahuje žádné veličiny, ani počítání s nimi.“

[3] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), německý matematik.



Obr. 1.2: Graf k problému königsbergských mostů

označme $d_G(v_i)$*. Pak platí*

$$\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2h.$$

Své další úvahy shrnul Euler ve 20. odstavci do následujících pravidel (jsou opět vyjádřena dnešním jazykem), která umožňují v podobných problémech rozhodnout, zda hledaný tah existuje:

1. *Jsou-li v grafu více než dva uzly lichého stupně, pak eulerovský tah neexistuje.*

2. *Jsou-li v grafu právě dva uzly lichého stupně, pak existuje otevřený eulerovský tah začínající v jednom z těchto uzlů a končící v druhém.*

3. *Jestliže jsou v grafu všechny uzly sudého stupně, pak existuje uzavřený eulerův tah.*

Euler samozřejmě uvažoval jen souvislé grafy, jak vyplývalo z formulace úlohy. Dobře také věděl, že graf může obsahovat jen sudý počet uzlů lichého stupně. Souvislý graf, který obsahuje pouze uzly sudého stupně, dnes nazýváme **eulerovský graf**.

Musíme konstatovat, že Euler dokázal jen první dvě pravidla. Přesto mu byl v minulosti částokrát důkaz třetího tvrzení připisován (např. [148]). Zdá se, že Euler považoval tento důkaz za zcela elementární, jak plyne z posledního odstavce. Zde ukázal způsob, jakým nalezneme eulerovský tah v případě, kdy existuje.

Problém königsbergských mostů se stal součástí většiny knih rekreační matematiky, ale také teorie grafů. Uveďme, že když byl v roce 1875 v Königsbergu postaven další most (spojující části B a C), tak L. Saalschütz v práci [52] napsal, že úloha má už 48 řešení začínajících v části A a končící v části D (viz. [368, str. 273]).

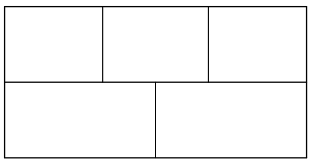
Důkaz třetího Eulerova pravidla podal v práci [45] mladý německý matematik Carl Fridolin Bernhard Hierholzer (1840–1871).[4] Ten nejprve ukázal, že

[4] Práce vyšla až dva roky po Hierholzerově smrti.

pokud graf obsahuje eulerovský tah, pak při každém průchodu libovolným uzlem využíváme dvě různé hrany s ním incidentní. Všechny uzly grafu tedy mají sudý stupeň. Bylo třeba dokázat ještě obrácené tvrzení. Hierholzerův důkaz spočívá v odvození následujícího algoritmu, který umožňuje najít eulerovský tah v eulerovském grafu:

Najdeme libovolný tah, který začíná a končí ve stejném uzlu, a odstraníme hrany, které jsme již prošli. Pak zbývající graf obsahuje buď pouze izolované uzly (v tom případě jsme již našli eulerovský tah), nebo existují uzly, kterými jsme již prošli a které mají i nyní sudý stupeň. Vyberme některý z nich a vytvořme libovolný uzavřený tah, který v daném uzlu začíná a končí. Vložíme-li jej do původního tahu, tento zvětšíme a tímto způsobem můžeme pokračovat tak dlouho, dokud nenalezneme eulerovský tah.

Hierholzer s velkou pravděpodobností Eulerovu práci neznal. Citoval pouze práci Johanna Benedicta Listinga (1808–1882) [15] z roku 1847, v níž se autor mimo jiné zabýval úkolem nakreslit obrázky složené z uzlů a čar jedním tahem. Listing zjistil, že pokud obrázek obsahuje $2p$ ($p > 0$) uzlů lichého stupně, pak k jeho nakreslení je zapotřebí minimálně p otevřených tahů.[5] V konkrétním případě vyslovil toto tvrzení již Thomas Clausen (1801–1885), když v práci [12] ukázal, že obr. 1.3 nelze nakreslit méně jak 4 souvislými tahy. Listingovu větu dokázal až v roce 1882 Édouard Lucas (1842–1891) v knize [81] věnované rekreačním matematickým problémům. V této knize byl uveden také druhý francouzský překlad Eulerova článku. První publikoval Émile Coupy již v roce 1851 v práci [19], kde Eulerův postup ilustroval na řešení problémů mostů přes řeku Seinu v Paříži.



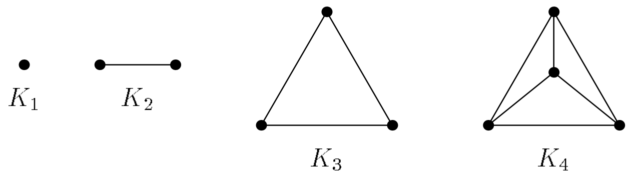
Obr. 1.3: Clausenův graf

Nezávisle na Hierholzerovi podal důkaz Eulerova třetího pravidla i Julius Peter Christian Petersen (1839–1910) v práci [99], která se stala významným mezníkem v teorii faktorizace grafů. O této práci bude podrobně pojednáno v kapitole 4.

Kromě výše zmíněného Listingova problému nalézáme v 19. století i další

[5] Listingova věta tedy říká, že v grafu G, který obsahuje $2p$ uzlů lichého stupně, existuje systém otevřených tahů $T_1, T_2, \ldots, T_p$, ve kterém je každá hrana grafu G obsažena právě v jednom tahu systému. A. Kotzig tento systém nazval *Listingův systém otevřených tahů* a studoval jeho vlastnosti v pravidelných grafech lichého stupně v souvislosti s existencí lineárního faktoru (viz. práce [303, 321]). J. Sedláček zobecnil Listingovu větu na orientované grafy v práci [325].

problémy, které souvisí s eulerovskými grafy. Za zmínku stojí práce [7] Louise Poinsota (1777–1859) z roku 1810, která se zabývá řadou geometrických problémů a mezi nimi i otázkou (řečeno jazykem teorie grafů) existence eulerovského tahu v úplných grafech K_n. **Úplným grafem** K_n přitom rozumíme graf s n uzly, ve kterém je každá dvojice uzlů u, v spojena hranou.[6] Na obrázku 1.4 vidíme nejmenší čtyři úplné grafy. Poinsot podobným způsobem jako Euler ukázal, že pro $n = 4, 6, 8, \ldots$ eulerovský tah neexistuje.



Obr. 1.4: Úplné grafy

Zajímavá interpretace pro úplný graf K_7 se objevila v roce 1849 v Terquemově práci [17], kde autor problém vyjádřil v termínech hry domino. Číslům 0 až 6 přiřadil uzly a jednotlivým kostkám hrany tohoto grafu. Existence kostek se dvěma stejnými čísly, kterým by odpovídaly smyčky grafu, na problému nic nemění. Orly Terquem (1782–1862) studoval i obecný případ „domina“ s čísly $n = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_0 - 1$. Položil otázku, kolik různých tahů v odpovídajících grafech existuje. Pro klasické domino tento problém vyřešil v roce 1871 M. Reiss v práci [43]. Obecnou metodu výpočtu počtu eulerovských tahů v grafech podal v roce 1886 Gaston Tarry (1843–1913) v práci [88].

1.1.2 Eulerovské grafy

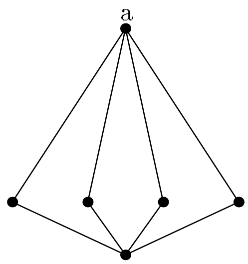
D. Kőnig věnoval eulerovským tahům společně s hamiltonovskými kružnicemi II. kapitolu své knihy. V úvodu této kapitoly definoval základní pojmy a formuloval hlavní Eulerovy a Listingovy výsledky. Uvedl dále známé tvrzení Oswalda Veblena (1880–1960), který v pracích [156, 178] ukázal, že v grafu G existuje konečný systém $S = \{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$ kružnic grafu G takový, že každá hrana grafu G náleží jedné a pouze jedné kružnici K_i, právě tehdy, když je graf G eulerovský. V 70. letech tohoto století pak bylo dokázáno, že každá hrana eulerovského grafu je obsažena v lichém počtu kružnic a že každý eulerovský graf má lichý počet rozdělení množiny hran do kružnic.

Kőnig se dále zabýval problémem eulerovských tahů v orientovaných grafech. Této otázce se budeme věnovat až v kapitole 5.

Zvláštním případem eulerovských grafů jsou grafy, které můžeme nakreslit tak, že vyjdeme z nějakého uzlu a, jdeme po libovolné dosud nenakreslené hraně s ním incidentní do nějakého uzlu b a pokračujeme tímto způsobem libovolně

[6] Název úplný graf pochází od A. Sainte-Laguëho [192].

tak dlouho, dokud nenakreslíme celý graf a nevrátíme se do výchozího uzlu. Příkladem takového grafu je graf, který vidíme na obrázku 1.5.



Obr. 1.5: Libovolně nakreslitelný graf

O. Ore v roce 1951 v práci *A problem regarding the tracing of graphs* [376] nazval tento graf *libovolně nakreslitelný* (arbitrarily traceable) z uzlu a a odvodil nutnou a postačující podmínku, kdy je graf G libovolně nakreslitelný z uzlu a. Ukázal, že v grafu nemusí existovat žádný vhodný uzel a, ale někdy může existovat více takových uzlů. Jediným grafem, který je libovolně nakreslitelný z libovolného uzlu je kružnice. Ore dokázal, že graf G je libovolně nakreslitelný z uzlu a právě tehdy, když libovolná kružnice grafu prochází uzlem a (Věta 4, str. 51). Ore nakonec odvodil jednoduchou konstrukci všech libovolně nakreslitelných grafů, která spočívá v tom, že vezmeme strom T a spojíme každý jeho uzel lichého stupně lichým počtem hran s nějakým novým uzlem a (Věta 6, str. 52). Z uvedené konstrukce vyplývá, že libovolně nakreslitelný graf je rovinný.

F. Baebler o dva roky později dokázal v práci *Über eine spezielle Klasse Euler'schen Graphen* [377], že pokud je graf G libovolně nakreslitelný z uzlu a, pak má uzel a v grafu G maximální stupeň (str. 83). Frank Harary v roce 1966 ukázal v práci [378], že a je buď jediná artikulace grafu G, nebo graf G nemá artikulaci žádnou.

Na výsledky Oreho a Baeblera navázal v roce 1958 Jiří Sedláček v práci *Poznámka k jednomu problému o eulerovských grafech* [326]. Ukázal zde platnost následujícího tvrzení (Věta 2, str. 152):

Nechť G je graf, v němž existuje uzel c takový, že každá kružnice grafu G prochází uzlem c. Buďte O' a O'' dvě různé kružnice grafu G a nechť P je jejich maximální společný podgraf.[7] *Potom platí:*

Je-li P souvislý, je P buď izolovaný uzel nebo cesta v grafu G, přičemž uzel c není vnitřním uzlem této cesty. Není-li P souvislý, má právě dvě komponenty, z nichž jedna je tvořena izolovaným uzlem c.

[7] Maximálním společným podgrafem grafů G_1 a G_2 J. Sedláček rozuměl takový graf P, jenž je podgrafem grafu G_1 i grafu G_2, přičemž platí: Je-li graf Q podgrafem grafu G_1 i grafu G_2, pak je podgrafem grafu P.

Tato Sedláčkova věta je jistým zobecněním Baeblerovy poznámky z práce [377, str. 83].

Zajímavým problémem, který v roce 1960 navrhl a řešil čínský matematik Meigu Guan v práci [379], je známý **problém čínského pošťáka**, který můžeme jednoduše formulovat jako nalezení nejkratšího uzavřeného sledu obsahujícího všechny hrany grafu G. Je zřejmé, že v případě eulerovského grafu je řešením právě eulerovský tah. Pokud graf G obsahuje $2n$ uzlů lichého stupně, pak musíme některé hrany projít vícekrát. Řešení tohoto problému souvisí s otázkami párování v grafech.[8] Této skutečnosti si povšiml jako první v roce 1965 J. Edmonds, který také jako první vytvořil algoritmus pro řešení tohoto problému. Edmonds byl rovněž autorem řešení problému čínského pošťáka v případě ohodnocených grafů. Podrobnosti o tomto problému, který má také orientovanou variantu, najdeme například v práci [380, str. 282–284].

V souvislosti s rozkladem grafů na pravidelné faktory se eulerovskými grafy zabýval v roce 1956 Anton Kotzig v práci *Eulerovské čiary a rozklady pravidelného grafu párneho stupňa na dva faktory rovnakého stupňa* [304].

Kotzig vyšel ze skutečnosti, že hrany souvislého eulerovského grafu G se sudým počtem $2p > 0$ hran je možno rozdělit do dvou tříd H_1, H_2 tak, že libovolný uzel grafu G je incidentní se stejným počtem hran z třídy H_1 jako z třídy H_2.[9]

Důkaz předcházejícího tvrzení je snadný. V souvislém eulerovském grafu G existuje alespoň jeden eulerovský tah. Hrany tohoto tahu střídavě zařazujeme do tříd H_1 a H_2. Každému eulerovskému tahu tak tímto způsobem jednoznačně přiřadíme právě jeden rozklad $R = \{H_1, H_2\}$ hran grafu na dvě třídy tak, že právě polovina těch hran, s kterými je libovolný uzel incidentní, patří do třídy H_1, resp. H_2. Tímto přiřazením je definováno jisté zobrazení φ množiny $\mathfrak{E}$ všech eulerovských tahů grafu G do množiny $\mathfrak{R}$ všech rozkladů množiny hran grafu na dvě třídy s uvedenou vlastností. Kotzig ukázal, že jde o zobrazení množiny $\mathfrak{E}$ na množinu $\mathfrak{R}$, neboť ke každému rozkladu R existuje eulerovský tah E, pro který platí $\varphi(E) = R$ (Věta 1, str. 134).

Přímým důsledkem této věty je následující Kotzigova věta o rozkladech souvislých pravidelných grafů $2n$-tého stupně na dva faktory n-tého stupně (Věta 2, str. 136):

Nechť G je souvislý pravidelný graf $2n$-tého stupně $(n > 0)$, který se dá rozložit na dva faktory n-tého stupně, a nechť R je rozklad množiny hran grafu G odpovídající libovolnému rozkladu grafu G na dva faktory n-tého stupně, pak existuje eulerovský tah E takový, že platí $\varphi(E) = R$.

[8] O párování v grafech se zmíníme v kapitole 4.

[9] Speciálně pro souvislé pravidelné grafy $2n$-tého stupně se sudým počtem hran vyplývá z uvedené věty existence rozkladu takových grafů na dva faktory n-tého stupně.

1.2 Hamiltonovské kružnice

1.2.1 Úloha šachového jezdce

Také problémy spojené s hamiltonovskými kružnicemi mají svůj původ v 18. století. V této době, ale jistě již dříve, byla populární tzv. **úloha jezdce**. V této úloze má šachový jezdec projít prázdnou šachovnici tak, aby na každé pole vstoupil právě jednou a vrátil se při posledním tahu zpět na výchozí pole (tato podmínka se velmi často vynechává). Historie tohoto problému spadá spíše do historie šachové hry a do otázek rekreační matematiky. Velké množství historických poznámek najdeme například v knize Wilhelma Ahrense (1872–1927) [136] věnované rekreační matematice.

Jedno z prvních řešení úlohy jezdce podal Abraham de Moivre (1667–1754) na počátku 18. století. Jeho metoda spočívala v tom, že se jezdec pohybuje nejprve po okraji šachovnice a jen v případě, kdy nemá tuto možnost, provede tah do středního čtverce, který tvoří 16 polí. Dokončení cesty jezdce pak už nebývá problém.

Úloze jezdce se věnoval v polovině 18. století také L. Euler. První zmínku o tom, že řešil tento problém, nacházíme v dopise Christianu Goldbachovi (1690–1764) z roku 1757 (viz. [381, str. 393–394]). Euler později v roce 1759 úlohu zobecnil pro šachovnici $n \times n$ v práci [4].

Dalším významným příspěvkem k řešení úlohy jezdce v 18. století byla práce *Remarques sur les problèmes de situation* [5] Alexandra Théophila Vandermonda (1735–1796) z roku 1771. Vandermonde se zabýval klasickou šachovnicí 8×8 a našel algebraické řešení úlohy. Jeho metoda využívala šachových souřadnic a symetrie šachovnice. To mu také umožnilo úlohu zobecnit na vícerozměrné šachovnice.

Práce Eulera a Vandermonda ocenil v roce 1833 Carl Friedrich Gauss (1777–1855), když napsal, že jde zatím o jediné významné výsledky v *Geometriam situs*. U Eulera není ovšem zřejmé, zda nešlo spíše o řešení problému königsbergských mostů (viz. [367, str. 21]).

Je známa celá řada řešení úlohy jezdce. Připomeňme např. práci šachisty Jänische z roku 1862, který nalezl pozoruhodné řešení ve tvaru magického čtverce (viz. např. [361, str. 92]) a známé řešení Warnsdorffovo[10] z roku 1923, které spočívá v tom, že jezdec vždy táhne na pole, odkud má nejmenší možnost dalších tahů. V situaci, kdy jsou možné různé cesty, může volit další tah libovolně. Důkaz správnosti tohoto postupu neexistuje, ale neznáme ani výjimky z tohoto pravidla.

V roce 1884 interpretoval poprvé grafově úlohu jezdce Peter Guthrie Tait (1831–1901) v práci [85]. Jednotlivým polím šachovnice přiřadil uzly grafu a dva uzly spojil hranou právě tehdy, když mezi odpovídajícími poli může jezdec vykonat jeden tah. Úloha požaduje, abychom v tomto grafu nalezli kružnici (resp. cestu), která obsahuje všechny uzly grafu. Takovou kružnici nazýváme **hamiltonovská kružnice** a v případě cesty hovoříme o **hamiltonovské cestě**. Je

[10] Warnsdorff, H. C.: *Des Rösselsprunges einfachste und allgemeinste Lösung.* — *Schmalkalten*, 1923.

zřejmé, že v tomto případě nám samotné grafové znázornění úlohu příliš neusnadňuje. Graf je totiž značně velký a nepřehledný.

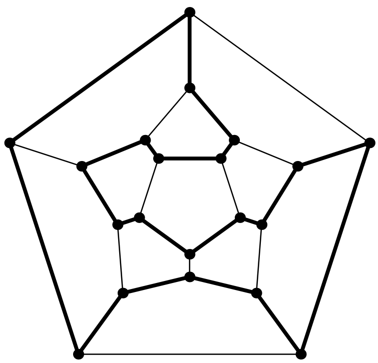
Podobně jako problém königsbergských mostů najdeme úlohu jezdce ve většině základních učebnic teorie grafů, knih s rekreační matematikou a v *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Také v nejstarší ucelené práci z teorie grafů [207] věnoval S. Laguë úloze celou 9. kapitolu. D. Kőnig ve své monografii uvedl Eulerovo řešení (str. 27) a dále popsal Kürschákovo[11] zobecnění úlohy pro nekonečné šachovnice v pracech [203, 216].

Přirozená otázka, kolik je cest jezdce na šachovnici, nebyla dodnes vyřešena (uveďme alespoň dvě z nejstarších prací, které se tímto problémem zabývaly [40, 139]), třebaže existují metody stanovení počtu hamiltonovských kružnic pro některé typy grafů.

Druhou oblastí, ve které se setkáváme v 18. století se zkoumáním hamiltonovských kružnic, je studium kružnic na hranách mnohostěnů.

V roce 1855 napsal svůj první příspěvek k této otázce Thomas Penyngton Kirkman (1806–1895). Kirkman jako kněz přes svoji izolaci a zaneprázdnění duchovní prací byl autorem řady matematických prací. Je znám zejména svým *problémem patnácti školaček*. V práci [20] si položil otázku, zda každý graf, který dostaneme promítnutím nějakého mnohostěnu do roviny, obsahuje kružnici, která prochází všemi uzly tohoto grafu.

Ve svých úvahách se Kirkman dopustil chyb, ale byl první, kdo se takovou úlohou zabýval. Jeho přínos spočívá v tom, že ukázal třídu mnohostěnů, které takovou kružnici nemohou obsahovat. Převedeme-li jeho výsledek do jazyka teorie grafů, jedná se o bipartitní grafy s lichým počtem uzlů. K podobnému výsledku došel v případě úlohy jezdce po nestandardních šachovnicích již L. Euler. Graf, který představuje možnosti tahu jezdce, je totiž rovněž bipartitní.



Obr. 1.6: Icosian game

Ve stejný čas jako Kirkman se podobnými problémy začal zabývat William Rowan Hamilton (1805–1865). Hamilton se v té době věnoval otázkám existence

[11] József Kürschák (1864–1933), maďarský matematik.

nekomutativních algeber. Pro jednu z nich našel model, který představoval cesty v grafu pravidelného dvanáctistěnu a který proto nazval *The Icosian Calculus*. Na jeho základě vznikla hra, která se od roku 1859 prodávala a nesla název *The Icosian Game*. Později vznikla další verze této hry *Cesta kolem světa*. V této hře vrcholy dvanáctistěnu představovaly světová města a každý vrchol byl označen kolíkem. Cílem hry bylo natáhnout vlákno, které by procházelo kolem všech kolíků a tvořilo kružnici.

V pozdější době vznikly spory o to, kdo byl autorem myšlenky zkoumat kružnice dvanáctistěnu. Je třeba říci, že zatímco Euler, Vandermonde a Hamilton zkoumali konkrétní případy grafů, Kirkman byl první, kdo se pokusil o jistá zobecnění. Nicméně na počest Hamiltonových prací dnes hovoříme o hamiltonovské kružnici, resp. hamiltonovském grafu.

D. Kőnig pojednal o hamiltonovských grafech jen velmi stručně ve II. kapitole své knihy. Kromě již zmíněné úlohy jezdce a jejímu zobecnění na nekonečné šachovnice zde nalezneme pouze výsledky práce Lázslo Rédeie (1900–1980) [262], které se týkají hamiltonovských cest v orientovaných grafech. O tomto problému se zmíníme až v kapitole 5.

1.2.2 Postačující podmínky existence hamiltonovské kružnice

Přestože se na první pohled otázka nalezení hamiltonovské kružnice velmi podobá problému nalezení eulerovského tahu, nebyla dosud nalezena nutná a postačující podmínka pro existenci hamiltonovských kružnic. Po roce 1936 byly odvozeny pouze některé postačující podmínky.

Jako první vzpomeňme výsledek G. A. Diraca z roku 1952. V práci *Some theorems on abstract graphs* [382] Dirac ukázal, že konečný graf, ve kterém je stupeň každého uzlu nejméně d (> 1), obsahuje kružnici délky nejméně $d + 1$ (Věta 2, str. 70). Toto tvrzení je pravdivé i pro nekonečné grafy za předpokladu, že neobsahují artikulaci (Lemma 1, str. 71). Na základě těchto výsledků Dirac dokázal (Věta 3, str. 71):

Souvislý graf, ve kterém je stupeň každého uzlu nejméně d (> 1) a který nemá více než $2d$ uzlů, je hamiltonovský.

V další části práce se Dirac zabýval některými otázkami týkajícími se hamiltonovských kružnic v souvislosti s barvením uzlů grafu.

Z předpokladů Diracovy věty se dá při dostatečně velkém počtu uzlů odvodit víc než pouhá existence jediné hamiltonovské kružnice. Tuto skutečnost ukázal v roce 1968 Crispin St. J. A. Nash-Williams v práci *Hamilton Circuits in Graphs and Digraphs* [383]. Nejprve dokázal, že graf, který splňuje podmínky Diracovy věty a má více než 10 uzlů, obsahuje dvě hranově disjunktní hamiltonovské kružnice (Věta 3, str. 238). Poté ukázal, že toto tvrzení se dá zobecnit takto (Věta 4, str. 238):

Ke každému kladnému celému číslu k existuje kladné celé číslo n_k takové, že každý graf s více než n_k uzly, který splňuje Diracovu podmínku, obsahuje *k hranově disjunktních hamiltonovských kružnic.*

Nash-Williams se v závěru své práce věnoval problematice existence hamiltonovských kružnic v orientovaných grafech. O této otázce budeme mluvit v kapitole 5.

V roce 1960 publikoval další známou postačující podmínku existence hamiltonovské kružnice v neorientovaném grafu O. Ore v práci *Note on Hamilton circuits* [384]. Ore citoval krátkou práci [385] Donalda J. Newmana, který v roce 1958 dokázal, že pokud každý z $2n$ uzlů grafu G má stupeň alespoň n, pak graf G musí obsahovat kružnici délky $2n$. Tedy výsledek slabší než je Diracova věta, neboť požaduje sudý počet uzlů grafu G.[12]

Pak Ore dokázal následující větu (Věta 2, str. 55):

Nechť G je graf s n uzly takový, že pro každou dvojici nesousedních uzlů a, b platí

$$d_G(a) + d_G(b) \geq n.$$

Pak G obsahuje hamiltonovskou kružnici.

Jako důsledek uvedl Ore tvrzení Diracovy věty, které z předcházející podmínky snadno vyplývá. Podobně jako v Newmanově práci ovšem Diracův výsledek zmíněn není. Rovněž Oreho postačující podmínku existence hamiltonovské kružnice můžeme vyjádřit pro grafy orientované.

Otázkami hamiltonovských kružnic a cest se O. Ore zabýval dále v práci *Arc coverings of graphs* [386], kde odvodil postačující podmínku existence hamiltonovské cesty v grafu. Ukázal, že platí (Věta 3.1, str. 318):

Nechť G je graf s n uzly, ve kterém pro každou dvojici nesousedních uzlů a, b platí

$$d_G(a) + d_G(b) \geq n - 1.$$

Pak G obsahuje hamiltonovskou cestu.

Úplný graf K_n má vždy hamiltonovskou cestu a v případě $n \geq 3$ i hamiltonovskou kružnici. Je tedy možno předpokládat, že grafy s „dostatečným“ počtem hran budou mít podobné vlastnosti. Ore ukázal, že pokud pro graf G s n uzly a s $\nu_e(G)$ hranami platí

$$\nu_e(G) \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1,$$

resp.

$$\nu_e(G) \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2,$$

pak graf G má hamiltonovskou cestu, resp. hamiltonovskou kružnici (Věty 4.1 a 4.3, str. 318 a 320). Přitom Ore ukázal příklady „maximálních“ grafů bez hamiltonovských cest, resp. hamiltonovských grafů.

Některé z těchto výsledků najdeme v Oreho knize [358, str. 72–79]. Zde také nalezneme zmínku o práci *On maximal paths and circuits of graphs* [387], ve

[12] Newman pravděpodobně Diracův výsledek neznal. Neuvedl totiž žádnou literaturu.

které autoři Pál Erdős (1913–1996) a Tibor Gallai (1912–1992) odvodili řadu výsledků týkajících se nejdelších cest a kružnic v grafech. Ukázali například, že každý graf s n uzly a více než $(n-1)l/2$ hranami ($l \geq 2$) obsahuje kružnici délky větší než l.

V roce 1962 odvodil Lajos Pósa, který byl v té době sotva středoškolského věku, v práci *A theorem concerning Hamilton lines* [388] následující postačující podmínku existence hamiltonovské kružnice (str. 225):

Nechť G je graf s n uzly ($n \geq 3$) takový, že pro každé celé číslo k splňující nerovnost

$$1 \leq k < \frac{n-1}{2}$$

je počet uzlů grafu G, jejichž stupeň není vyšší než k, menší než k a pro liché n počet uzlů stupně $(n-1)/2$ není vyšší než $(n-1)/2$. Potom G obsahuje hamiltonovskou kružnici.

Tuto část věnovanou postačujícím podmínkám existence hamiltonovských kružnic uzavřeme výsledkem, který odvodil v roce 1972 V. Chvátal v práci *On Hamilton's Ideals* [389] (Věta 1, str. 164):

Nechť G je takový graf s n uzly ($n \geq 3$), jehož posloupnost stupňů uzlů je $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. Jestliže platí

$$d_k \leq k < \frac{n}{2} \Rightarrow d_{n-k} \geq n-k,$$

pak graf G obsahuje hamiltonovskou kružnici. Navíc, pokud posloupnost stupňů uzlů grafu nesplňuje uvedenou podmínku, pak existuje graf G', který není hamiltonovský a pro jeho posloupnost stupňů uzlů platí $d_{G'}(i) \geq d_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ve Chvátalově větě narazíme dvakrát na pojem posloupnost stupňů uzlů grafu. Ne každá posloupnost přirozených čísel $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ je posloupností stupňů uzlů nějakého grafu. Například k posloupnosti $1, 2, 2$ nenajdeme žádný graf se třemi uzly, protože neexistuje graf, který by měl pouze jeden uzel lichého stupně.

Posloupnost celých nezáporných čísel $d_1, d_2, \cdots, d_n$ nazýváme **grafová posloupnost**, existuje-li graf G s n uzly, jež mají po řadě stupně $d_1, d_2, \cdots, d_n$. Aby posloupnost $d_1, d_2, \cdots, d_n$ byla grafová, musí platit $d_i \leq n-1$ a také musí být $\sum_{i=1}^{n} d_i$ číslo sudé. Nutnou a postačující podmínku pro grafovou posloupnost odvodil Václav Havel v práci *Poznámka o existenci konečných grafů* [296] z roku 1955. Formulujme ji takto (Věta 4, str. 478):[13]

Nechť je dána posloupnost d

$$d_1, d_2, \cdots, d_n,$$

přičemž pro celá nezáporná čísla d_i platí $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$, $n \geq 2$, $1 \leq d_1 \leq n-1$. Posloupnost d je grafová právě tehdy, je-li grafová též posloupnost d'

$$d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, \ldots, d_n.$$

[13] Formulace je převzatá z 3. vydání Sedláčkovy knihy [361]. V. Havel ve své práci používal pojmy struktura a r-posloupnost, které zde nebudeme definovat.

Věta ukazuje možnost, jak lze v konečném počtu kroků určit zda posloupnost d je grafová. Členy vzniklé posloupnosti d' uspořádáme monotónně a považujeme je za členy nové posloupnosti d. K té pak najdeme novou posloupnost d'. Postup můžeme opakovat tak dlouho, až se v posloupnosti d' objeví záporná čísla, potom ani výchozí posloupnost není grafová, nebo samé nuly. Této posloupnosti odpovídá graf, který je tvořen pouze izolovanými uzly. V tomto případě je výchozí posloupnost grafová.

Nezávisle na Havlovi, který svoji práci napsal v českém jazyce, se k otázce grafových posloupností dostali T. Gallai a P. Erdős v práci [390], která vyšla v maďarštině a byla proto také jazykově těžko přístupná. Autoři ukázali (viz. např. [359, str. 78]), že posloupnost nezáporných celých čísel $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ je grafová právě tehdy, když $\sum_{i=1}^{n} d_i$ je sudé číslo a pro libovolné přirozené číslo r splňující nerovnosti $1 \leq r \leq n-1$ platí:

$$\sum_{i=1}^{r} d_i \leq r(r-1) + \sum_{i=r+1}^{n} \min(r, d_i).$$

Nezávisle na těchto dvou pracích dospěl k řešení tohoto problému i S. Hakimi v práci [391] 7 let po V. Havlovi. Ve své práci uvažoval také případy grafů se smyčkami či grafy, ve kterých může být dvojice uzlů spojena více než jednou hranou.

Problematika grafových posloupností byla v dalším období dále rozvíjena, když na odpovídající grafy byly kladeny další speciální požadavky (viz. [361]).

1.2.3 Hamiltonovsky souvislé grafy

Problematika hamiltonovských grafů může být různým způsobem zobecněna. V souvislosti s rozkladem pravidelných grafů na lineární faktory se hamiltonovskými grafy zabýval v několika pracech A. Kotzig. Odvodil řadu výsledků, se kterými se seznámíme v kapitole 4.

Jak jsme již naznačili v části věnované úloze jezdce, nevyřešeným problémem zůstává určení počtu hamiltonovských kružnic.

C. A. B. Smith v roce 1946 dokázal, že v pravidelném grafu 3. stupně bez smyček a násobných hran je počet hamiltonovských kružnic, které obsahují zvolenou hranu, sudý. Důsledkem této věty je skutečnost, že pokud tento graf obsahuje hamiltonovskou kružnici, pak obsahuje nejméně tři hamiltonovské kružnice. Dále platí, že pokud má graf G dvě hranově disjunktní hamiltonovské kružnice, pak obsahuje nejméně tři hamiltonovské kružnice. Juraj Bosák v roce 1967 dokázal v práci [392], že pravidelné bipartitní grafy 3. stupně mají sudý počet hamiltonovských kružnic (viz. [393, str. 189–192]).

Problém existence hamiltonovských kružnic má zvláštní význam v souvislosti s problémem obarvení oblastí rovinných grafů pomocí čtyř barev. Pokud totiž v rovinném grafu G existuje hamiltonovská kružnice H, pak můžeme oblasti grafu uvnitř a současně i vně kružnice obarvit dvěma barvami tak, že oblasti, které mají společnou hranu, jsou obarveny různými barvami. Na celý graf pak vždy stačí čtyři barvy. Ukázalo se však, že problém čtyř barev touto cestou dokázat nelze.[14]

Jednou z oblastí, ke které výrazně přispěla česká matematika, je studium vlastností grafů, ve kterých libovolnou dvojici uzlů můžeme spojit hamiltonovskou cestou.

Brněnský matematik Milan Sekanina (1931–1987) v práci *On an ordering of the set of vertices of a connected graph* [342] zkoumal v roce 1960 souvislé neorientované grafy (G, ϱ) (G značí spočetnou množinu uzlů, ϱ je symetrická relace na množině G), které mají následující vlastnost: jestliže $G' \subset G$, G' je konečná množina, pak existuje souvislý podgraf G'' v G takový, že $G'' \subset G \setminus G'$ a $G \setminus G''$ je konečná množina. Sekanina symbolem $\mu(a, b)$ označil délku nejkratší cesty v grafu G, která spojuje uzly a, b. Ukázal, že množinu uzlů G takového grafu můžeme uspořádat do posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že pro každé n platí $\mu(a_n, a_{n+1}) \leq 3$ (Věta 1, str. 139).

Při důkazu tohoto tvrzení odvodil následující pomocnou větu (Lemma 3, str. 138):

Nechť G je konečný souvislý graf, a, b jsou dva jeho různé uzly. Pak množinu uzlů grafu G můžeme uspořádat do posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n$ (n je počet uzlů grafu G), kde $a_1 = a$, $a_n = b$ a $\mu(a_i, a_{i+1}) \leq 3$ pro $i = 1, \dots, n-1$.

Zaveďme nyní nový pojem, který nám umožní vyjádřit Sekaninův výsledek tak, jak bývá formulován dnes. Nechť $G = (V, E)$ je daný graf a nechť n je dané přirozené číslo. Definujme ***n*-tou mocninu** grafu G (označení G^n) takto: množina uzlů grafu G^n je V a hrana u, v existuje v grafu G^n právě tehdy, platí-li v G vztah

$$1 \leq \mu(u, v) \leq n.$$

Z obsahu Sekaninova tvrzení tedy vyplývá, že třetí mocnina konečného souvislého grafu G musí obsahovat hamiltonovskou cestu spojující uzly a a b. Grafy, ve kterých můžeme libovolnou dvojici různých uzlů spojit hamiltonovskou cestou, nazýváme **hamiltonovsky souvislé**. Je zřejmé, že každý hamiltonovsky souvislý graf s více než 2 uzly je hamiltonovský. Platí tedy:

Třetí mocnina libovolného souvislého grafu s více než 2 uzly je hamiltonovský graf.

Stejný výsledek jako Sekanina odvodil v roce 1968 Jerome J. Karaganis v práci [394]. Je zřejmé, že o Sekaninově práci nevěděl. Píše:

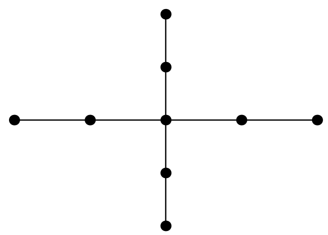
„It has been conjectured by M. D. Plummer, among others, that the square of every nonseparable (2-connected) graph is hamiltonian; however, it is known (although evidently never published) that the cube of any connected graph (with 3 or more points) is hamiltonian. In this note we prove the stronger result that the cube of any connected graph is hamiltonian-connected, i. e., every two points are joined by some hamiltonian path.“

[14] Problému čtyř barev se budeme věnovat v kapitole 3.

Při důkazu svého tvrzení, využili Sekanina i Karaganis skutečnost, že stačí pouze dokázat, že třetí mocnina každého stromu je hamiltonovsky souvislý graf. Je-li totiž T kostra grafu G a je-li T^3 hamiltonovsky souvislý graf, pak zřejmě i G^3 je hamiltonovsky souvislý.

Obě práce citoval Claude Berge v knize [393]. V ruském překladu knihy F. Hararyho [359] je uvedena pouze Karaganisova práce.

Sekanina ukázal, že není možno nahradit číslo tři dvojkou. Uvedl jednoduchý příklad stromu, jehož druhá mocnina není hamiltonovsky souvislý graf (viz. obr. 1.7).



Obr. 1.7: Příklad grafu, jehož druhá mocnina není hamiltonovsky souvislý graf

Existují ovšem stromy, jejichž druhá mocnina je hamiltonovsky souvislá. Tuto třídu stromů charakterizoval František Neuman v roce 1964 v práci *On a certain ordering of the vertices of a tree* [395], když dokázal (Věta 1, str. 332):

Nechť T je konečný strom, a, b dva jeho různé uzly. Množina uzlů stromu T může být uspořádána do prosté posloupnosti $a = t_1, t_2, \dots, t_s = b$ takové, že $\mu(t_i, t_{i+1}) \leq 2$ pro $i = 1, \dots, s-1$, tehdy a jen tehdy, když pro strom T_1, který obdržíme ze stromu T odebráním koncových uzlů s výjimkou uzlů a a b, platí:
1) stupeň všech uzlů je nejvýš roven 4 (v T_1),
2) uzly stupně 3 a 4 (v T_1) se vyskytují pouze uvnitř cesty spojující a a b,
3) mezi dvěma uzly stupně 4 (v T_1) existuje alespoň jeden uzel stupně 2 (v T). Stupeň uzlu a je 1 (v T) nebo existuje uzel stupně 2 (v T) mezi a a nejbližším uzlem stupně 4 (v T_1). Podobně pro b. Když současně stupeň uzlu a i uzlu b je větší než 1 (v T), pak mezi nimi existuje alespoň jeden uzel řádu 2 (v T).

Neumanovu práci citoval např. H. V. Kronk v práci [396], který ovšem zřejmě neznal Sekaninovu práci a citoval pouze Karaganisův výsledek.

Je jistě zajímavé konstatovat, že ani Sekanina ani Neuman neuvedli své výsledky v souvislosti s pojmem hamiltonovská kružnice nebo hamiltonovská cesta. Přitom tyto pojmy jistě dobře znali z klasických učebnic D. Kőniga nebo C. Berge.

M. Sekanina vystoupil na mezinárodní konferenci ve Smolenicích v roce 1963 s otázkou, jaká je struktura souvislých grafů G, jejichž druhá mocnina je hamiltonovsky souvislý graf. Problém byl publikován ve sborníku konference a stal se tak známým i ve světě.[15]

C. St. J. A. Nash-Williams vyslovil v roce 1966 hypotézu, že druhá mocnina libovolného 2-souvislého grafu je hamiltonovský graf. Nezávisle tuto hypotézu vyslovili i L. W. Beineke a M. D. Plummer. Kronk v práci [396] vyslovil hypotézu, že je-li G 2-souvislý graf, pak totální graf (total graph) $T(G)$ grafu G[16] je hamiltonovský graf. Důkaz této hypotézy se stal součástí důkazu tvrzení, že druhá mocnina 2-souvislého grafu je hamiltonovský graf. Tento důkaz podal v roce 1971 Herbert Fleischner v práci [398].

[15] V předcházející části jsme se seznámili s pojmem libovolně nakreslitelný graf. Anna Sekaninová a Milan Sekanina ukázali v 80. letech v práci *Arbitrarily traceble Eulerian graph has the Hamiltonian square* [397], že druhá mocnina každého libovolně nakreslitelného grafu je hamiltonovský graf.

[16] Pojmem totální graf grafu G Kronk rozuměl graf $T(G)$, ve kterém uzly odpovídají uzlům a hranám grafu G. Uzly grafu $T(G)$ jsou spojeny hranou právě tehdy, když odpovídající uzly či hrany grafu G jsou sousední nebo odpovídající uzel a hrana grafu G jsou incidentní.