Malý průvodce historií integrálu

Teorie integrálu ve dvacátém století u nás

In: Štefan Schwabik (author); Petra Šarmanová (author): Malý průvodce historií integrálu. (Czech). Praha: Prometheus, 1996. pp. 84–91.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400858

Kapitola V.

Teorie integrálu ve dvacátém století u nás

Věnujme stručně pozornost tomu, jak se u nás v tomto století rozvíjel moderní pohled na integrál a jak byl matematikům a studentům v tištěné podobě předkládán.

První soustavněji a česky napsaná učebnice matematické analýzy je kniha Dr. **F. J. Studničky** (1836 – 1903) *Základové vyšší mathematiky.* Její druhý díl vyšel v roce 1871 s názvem *O počtu integrálním.* Studničkův integrální počet je prakticky orientovaná kniha, v níž podstatnou roli hrály výpočty založené na Newtonově integrálu. Kniha nejde příliš za stav známý z dob Eulerových.

Moderní teorie integrálu v našem geografickém regionu jde zpět ke **Karlu Petrovi** (1868 – 1950), který se ujal sepsání *Počtu integrálního* poté, co takové plány měl Eduard Weyr, který však předčasně zemřel. První vydání Petrova *Počtu integrálního* vyšlo v roce 1915, druhé pak v roce 1931. Nové vydání knihy Petr značně přepracoval a přidal ke knize dodatek napsaný V. Jarníkem *Úvod do teorie množství.* Petrův výklad byl založen na Newtonově a Riemannově koncepci integrálu; vyznačuje se mimořádně silnou stránkou prof. K. Petra, tj. propracovanou a bohatou výpočetní technikou. Ve svém dodatku k Petrově knize se **Vojtěch Jarník** (1897 – 1970) zmiňuje o knihách H. Lebesguea, E. Kamkeho, L. Schlesingera a A. Plesnera, Ch. de la Vallée – Poussina, které jsou vesměs věnovány Lebesgueově teorii integrálu, a píše, že se touto teorií v tomto dodatku nezabýval. (Dodatkem by pak musela být celá nová kniha; Jarníkova poznámka však svědčí o tom, že se v Praze o Lebesgueově teorii integrálu v té době vědělo.)

V roce 1936 vyšla knížka **Eduarda Čecha** (1893 – 1960) *Bodové množiny, část první.* Dodatek k této knize *O derivovaných číslech funkcí jedné proměnné* napsal opět V. Jarník. Čtvrtá kapitola Čechových *Bodových množin,* nazvaná *Míra a integrál* je velmi rozsáhlá, zabírá zhruba polovinu knihy, tj. 220 stran. V době, kdy E. Čech knihu psal, působil v Brně; kniha tedy vypovídá i o tom, jak byl tehdy na brněnské univerzitě Lebesgueův integrál prezentován. Z té doby se dochovaly též konspekty přednášek o Lebesgueově integrálu od dalšího brněnského matematika **Otakara Borůvky** (1899 – 1995).

Kapitola o teorii integrálu a Jarníkův dodatek k Čechově knize se do reedice knihy v roce 1964 nedostaly, reedice byla doplněna o kapitoly druhé části knihy, které se objevily v Čechově pozůstalosti. Kniha tím získala jednotný topologický ráz.

Pro mladší generaci se tím však poněkud zastřelo Čechovo prvenství v knižní prezentaci teorie Lebesgueova integrálu u nás. V Čechových *Bodových množinách* se v naší knižní matematické literatuře totiž poprvé – po více než třiceti letech od jejího vzniku – objevuje výklad Lebesgueovy teorie integrálu. Mimochodem stojí za to připomenout i to, že E. Čech knihu věnoval „Svému učiteli p. prof. K. Petrovi". Čechův výklad integrálu byl náležitě důkladný. Připomeneme jen stručně některá témata: množinová tělesa, σ–tělesa, Borelovy množiny, aditivní a σ–aditivní množinové funkce, obecná teorie míry, obecná teorie integrálu (měřitelné funkce, Fubiniova věta, speciální případ Lebesgueovy míry), množinové funkce s konečnou variací (Vitaliova pokrývací věta, derivace množinové funkce, metrická hustota), bodové funkce s konečnou variací, Stieltjesův integrál.

Čech ve své kapitole o integrálu vykládá podrobně teorii, nejsou to ovšem „počty", ty zainteresovaný čtenář té doby mohl nalézt v Petrově knize. V předmluvě k *Bodovým množinám* Čech uvádí, že byl mimo jiné inspirován francouzskou verzí knihy S. Sakse *Théorie de l'integrale,* a na výkladu je to znát.

Už jsme se zmínili o tom, že Saksova kniha o teorii integrálu sehrála ve třicátých letech velmi důležitou a určující roli nejen v teorii integrálu, ale i v teorii reálných funkcí. Už francouzská verze zjevně vzbudila pozornost E. Čecha a V. Jarníka. S. Saks se o Vojtěchu Jarníkovi zmiňuje v předmluvě k anglickému vydání knihy v roce 1937 v souvislosti s nepřesnostmi ve francouzském vydání, jež V. Jarník odhalil a opravil.

V. Jarník se zřejmě dlouho zabýval myšlenkou napsat knihu o integrálním počtu, která by byla založena na Lebesgueově integrálu. Tuto knihu, vedle ostatních pro nás dnes klasických knih Jarníkovy řady *Diferenciální počet I, II* a *Integrální počet I,* začal připravovat během 2. světové války. V roce 1955 pak skutečně vychází jeho *Integrální počet II,* o němž sám praví: … *tato kniha, přes to, že je založena na moderním pojmu integrálu, je „Integrálním počtem" a nikoliv „Theorií integrálu".* Pokud jde o obecnější teorii, odkazuje Jarník čtenáře na Čechovy *Bodové množiny.* Toto je velmi skromné vyhlášení; Jarníkův *Integrální počet II* je jak teoretický, tak počtářský. Přestože je dnes této knize 40 let, nebyla zatím u nás nahrazena žádnou jinou původní knižní publikací takového dosahu.

Maříkův pohled na integrál

Tím jsme v čase přeskočili popis náhledů na integrál a způsoby jeho prezentace v tištěné podobě u nás. V poválečném období vyrostla celá řada vynikajících českých matematiků; jejich hustota v populaci poválečných studentů a absolventů vysokých škol byla veliká. V oblasti teorie integrálu byl jedním z nich **Jan Mařík** (1920 – 1994). Poté co absolvoval studium matematiky, stal se asistentem na technice a patrně se při práci se studenty setkával s přístupem k integrálu, který jej příliš neuspokojoval. V roce 1952 publikoval Mařík v Časopise pro pěstování matematiky [77 (1952)] do tří částí rozdělenou stať *Základy theorie integrálu v Euklidových prostorech.* Článek má celkem 107 stran, je tedy velmi obsáhlý; vyšel před Jarníkovým *Integrálním počtem II.* Jarník v předmluvě k této své knize existenci Maříkovy statě připomíná. Maříkova česky psaná práce byla zaměřena k integraci přes vícerozměrné intervaly; předložila čtenáři podrobný výklad Perronova integrálu s poukazem na některé nepříjemné závady Lebesgueova integrálu.

Obsáhlý Maříkův spis *Základy theorie integrálu v Euklidových prostorech* má „osvětovou" povahu. Výklad je zcela nezávislý na jiných zdrojích, pro průměrně vzdělaného a trpělivého matematika přístupný, obsahuje všechny užívané pojmy s pečlivým a úsporným výkladem. „Osvětová" je zejména úvodní část, v níž podrobuje „kritice" všechny teorie integrace s poukazem na jejich výhody a nevýhody.

Uveďme některé Maříkovy myšlenky z úvodu k jeho obsáhlému textu:

Budeme se totiž převážně zabývat Perronovým integrálem; proč nebudeme „jako obvykle" vycházet od Riemannova integrálu? Jsou k tomu skutečně dost vážné důvody. Riemannův integrál má sice několik předností; jeho definice – zvláště v jednorozměrném případě – je jednoduchá a dosti „názorná"; ve vícerozměrném případě je pak vhodnou pomůckou při zavádění některých fyzikálních veličin . . . .

Dále je možno říci, že většina funkcí, „s nimiž se počítá", má vlastní nebo nevlastní integrál.

Tím jsme však asi u konce s výpočtem dobrých vlastností Riemannova integrálu.

Dále Mařík říká:

Tím, že jsme vyslovili nějakou definici (na př. definici Riemannova integrálu), jsme vlastně ještě nic nevykonali; to jsme jen zavedli jisté označení. Aby theorie integrálu „k něčemu byla", musí dávat nejen definice, nýbrž hlavně věty; zejména věty, které by nám pomohly v konkrétních případech integrál opravdu vypočítat nebo alespoň odhadnout. Byli bychom ovšem rádi, kdyby tyto věty měly pokud možno obecnou platnost, ne příliš komplikovaná znění a konečně, na to je třeba také brát ohled, kdyby je bylo možno jednoduše a pokud možno elementárně odvodit.

Tímto citátem je vlastně popsán *program* Maříkovy práce.

Kritikou nešetří ani v případě Lebesgueova integrálu:

Je to theorie přehledná a ucelená; její výhodou je, že se jí dá použít i v abstraktních prostorech, v nichž není řeč třeba ani o topologii. Lze však uvěřit, že se nám takovým příliš obecným postupem nepodaří vniknout dost hluboko do toho, co potřebujeme v Euklidových prostorech. Hlavní vadou Lebesgueova integrálu je to, že zachycuje integrály, které konvergují absolutně; není tedy Lebesgueův integrál zobecněním ani nevlastního Riemannova integrálu ani Newtonova integrálu. (Na př. derivace funkce $x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ *doplněná v bodě nula příslušnou limitou nemá v intervalu* $< -1, 1 >$ *Lebesgueův integrál, ač tam má nevlastní Riemannův i Newtonův integrál.) Z tohoto příkladu je zároveň vidět, že nikterak pro Lebesgueův integrál neplatí věta:*

Existuje–li (Perronův) integrál funkce f v každém intervalu $< a, b - \varepsilon >$, kde ε je libovolné kladné číslo menší než $b - a$, a existuje–li vlastní limita $\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, pak existuje též $\int_a^b f(x)dx$ a rovná se této limitě.

(Této větě se dnes někdy říká Hakeova věta a Mařík na tomto místě upozorňuje na známý nedostatek Lebesgueova integrálu jak byl popsán výše.)

Lze se domnívat, že zvláště pro začátečníky je vhodnější theorie integrálu Perronova než integrálu Lebesgueova. Theorii Perronova integrálu lze totiž vybudovat tak, že se pracuje jen s pojmy limity posloupností a vícerozměrného intervalu; ani o míře ani o topologii se přitom nemusí mluvit. Důkazy vět o integrálu vypadají též přirozeněji než u integrálu Lebesgueova a obyčejně jsou značně jednodušší.

Vztah mezi Perronovým a Lebesgueovým integrálem je jednoduchý.

Funkce f má v intervalu K Lebesgueův integrál, když a jen když mají obě funkce f i $|f|$ Perronův integrál.

Mařík pak postupně buduje integrál, přičemž nevynechá nic z toho, co pro své úvahy bude potřebovat.

Myšlenku, že … *zvláště pro začátečníky je vhodnější theorie integrálu Perronova než integrálu Lebesgueova* … Mařík prakticky nerealizoval. V letech 1960 – 61 vyšla dvoudílná skripta (*Integrální počet I a II*), která napsal spolu s I. Černým. Ta byla věnována hlavně alternativnímu (ve srovnání s Jarníkovou učebnicí *Integrální počet II*) budování Lebesgueova integrálu (díl I). Jde o tzv. Daniellovu metodu rozšiřování funkcionálu, kterou Mařík nezávisle objevil ve svých ranných pracích. V druhém díle zmíněného skripta se pak věnoval otázkám k–rozměrného integrálu v m–rozměrném prostoru. Ve druhém díle tohoto skripta se objevuje Perronův integrál v poměrně jednoduché podobě.

Kurzweilův integrál

Je pozoruhodné, že v matematickém prostředí v Praze, v politicky a společensky vypjaté době po válce, vznikl další originální pohled na integrál. Věnujme nyní pozornost této koncepci. Jde o teorii integrace, kterou vypracoval **Jaroslav Kurzweil** (1926).

Buď $-\infty < a < b < +\infty$. Označme symbolem D konečnou posloupnost čísel $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$ takových, že pro ně platí

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{k-1} < \alpha_k = b \tag{1}$$

a

$$\alpha_{j-1} \le \tau_j \le \alpha_j, \quad j = 1, \dots, k. \tag{2}$$

D je zřejmě dělení intervalu $[a, b]$ v tom smyslu, jak jsme o něm mluvili u definice Riemannova integrálu.

Předpokládejme, že je na intervalu $[a, b]$ dána kladná funkce $\Delta : [a, b] \to (0, +\infty)$. Takovou funkci pro potřeby našeho výkladu nazveme *kalibrem*.

Dělení

$$D = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\},$$

které splňuje podmínky (1), (2) a pro které je

$$[\alpha_{j-1}, \alpha_j] \subset (\tau_j - \Delta(\tau_j), \tau_j + \Delta(\tau_j)), \quad j = 1, \ldots, k, \tag{3}$$

nazveme *Δ–jemným dělením intervalu* $[a, b]$. Někdy se o těchto děleních D říká, že jsou *podřízena kalibru* Δ. Množinu všech dělení, která jsou Δ–jemná vzhledem ke kalibru Δ, označme symbolem $A(\Delta, [a, b])$ nebo stručněji $A(\Delta)$. Pro další úvahy je klíčové následující tvrzení (tzv. Cousinovo lemma):

Je–li $\Delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ kalibr, potom je

$$A(\Delta, [a, b]) \neq \emptyset,$$

tj. k danému kalibru Δ existuje dělení, které je Δ–jemné.

Význam dělení, které je Δ–jemné pro nějaký kalibr Δ, je obdobný, jako byl v případě definice Riemannova integrálu pojem dělení s normou menší než dané kladné číslo δ. Tvrzení obdobné jako je Cousinovo lemma však v případě Riemannova integrálu není třeba dokazovat, neboť existence dělení D intervalu $[a, b]$, pro které je $\nu(D) < \delta$, je vcelku zřejmá.

Z výše uvedených skutečností je jasné, že porovnáváme-li dělení Δ–jemná vzhledem k nějakému kalibru Δ a dělení s normou menší než nějaká konstanta δ, pak nové vlastnosti přináší případ kalibru Δ na $[a, b]$, pro který je $\inf_{s \in [a,b]} \Delta(s) = 0$. Když totiž je $\Delta(s) > \delta > 0$ pro $s \in [a, b]$, potom je každé dělení D intervalu $[a, b]$, pro které je $\nu(D) < \delta$, podle a) a c) také Δ–jemné a tak je možné vyhnout se Δ–jemnosti dělení a zůstat u klasického případu dělení s malou normou.

Nechť je dána funkce $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Nechť

$$D = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$$

je libovolné dělení intervalu $[a, b]$. Utvořme integrální součet příslušný k dělení D a k funkci f:

$$\sigma(f; D) = \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}).$$

Integrální součet $\sigma(f; D)$, který zde zavádíme, má stejný tvar jako pro Riemannův integrál.

V některých dalších úvahách se mohou vyskytnout situace, kdy je interval $[a, b]$ prázdný.

Pro prázdné intervaly budeme za jejich dělení považovat prázdnou množinu a příslušný integrální součet bude nulový.

Integrál nyní budeme definovat takto:

Buď $-\infty < a < b < +\infty$. Číslo $I \in \mathbb{C}$ nazveme *Kurzweilovým integrálem funkce* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *od* a *do* b, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\Delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ tak, že pro každé Δ–jemné dělení D platí nerovnost

$$|\sigma(f; D) - I| < \varepsilon.$$

Kurzweilův integrál funkce f od a do b označíme znakem $(K)\int_a^b f(x)dx$.

Když je $-\infty < b < a < +\infty$, položíme $(K)\int_a^b f(x)dx = -(K)\int_b^a f(x)dx$; dále klademe $(K)\int_a^a f(x)dx = 0$ pro $a \in \mathbb{R}$.

Jestliže existuje $(K)\int_a^b f(x)dx$, řekneme, že funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *integrovatelná v Kurzweilově smyslu (K–integrovatelná).*

Cousinovo lemma má pro definici klíčovou úlohu. Podle něj vždy existuje dělení D intervalu $[a, b]$, které je Δ–jemné, a proto má smysl mluvit o integrálních součtech $\sigma(f; D)$ příslušných Δ–jemnému dělení D.

Už jsme se zmínili o tom, že tato definice integrálu pochází od J. Kurzweila, který ji v mírně modifikované podobě podal v roce 1957 v práci *Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter* (Czech. Math. Journal 7(82), 1957). Práce byla věnována některým otázkám závislosti na parametrech pro obyčejné diferenciální rovnice; pojem integrálu v ní měl pomocnou povahu.

Pozoruhodné je, že platí následující tvrzení:

Funkce f má Perronův integrál v intervalu $[a, b]$, právě když má integrál v Kurzweilově smyslu a oba integrály mají stejnou hodnotu.

Vraťme se na okamžik k Maříkovu hodnocení Riemannova integrálu:
... jeho definice – zvláště v jednorozměrném případě – je jednoduchá a dosti „názorná"; ve vícerozměrném případě je pak vhodnou pomůckou při zavádění některých fyzikálních veličin .... „Názorností" zřejmě rozuměl to, že Riemannův integrální součet za předpokladu dostatečné jemnosti dělení dobře přiblíží např. velikost plochy, kterou má integrál vyjádřit, nebo že názorně popíše fyzikální veličinu, kterou popsat má.

Výše uvedené tvrzení ukazuje, že Perronův integrál, kterým se Mařík ve své práci zabýval, lze zavést pomocí Riemannových integrálních součtů, a že tedy má tu z mála vlastností Riemannova integrálu, kterou Mařík pochválil. Navíc můžeme kráčet v Maříkových šlépějích a kriticky prohlásit, že k samotnému zavedení Perronova integrálu pomocí Kurzweilovy definice si vystačíme s daleko elementárnějšími prostředky než použil Perron (nemusíme zavádět horní a dolní derivace, nemusíme se starat o majoranty a minoranty, suprémum a infimum, apod.).

Skutečně, když porovnáme Kurzweilovu definici s definicí Riemannovou, téměř nepoznáme rozdíl, a přesto dostáváme Perronův neabsolutně konvergentní integrál, který v sobě obsahuje Riemannův, Newtonův i Lebesgueův integrál. Podstata věci spočívá v tom, jak chápeme jemnost dělení. Pracujeme s dělením intervalu K, které je δ–jemné vzhledem ke kalibru δ; ten je v našem případě kladnou funkcí definovanou na K. V případě Riemannově jde rovněž o kladnou funkci na K, ale tato funkce je konstantní.

O Perronově integrálu je však třeba kriticky konstatovat, že je velmi nepříjemný např. při integrování přes vícerozměrné oblasti z hlediska transformací (jde přitom pochopitelně o větu o substituci pro integrál). Hlavním důvodem nepříjemností je ta skutečnost, že je integrál definován přes intervaly. Intervaly se ovšem už při velmi jednoduchých transformacích v dimenzích od dvojky výše nemusí transformovat do intervalů.

Integrál, který je určen ve výše dané definici, se dnes nazývá Kurzweil–Henstockův integrál a zabývá se jím mnoho matematiků ve světě. Jméno britského matematika **Ralpha Henstocka** (1923) působícího v Severním Irsku se v této souvislosti objevuje proto, že nezávisle na J. Kurzweilovi zavedl v roce 1960 stejným způsobem novou definici Perronova integrálu. O existenci Kurzweilovy práce tehdy nevěděl, sám říká, že se o ní dozvěděl 3. října 1963 od K. Kartáka.

Tomu se nelze příliš divit. Nová teorie integrálu v uvedené Kurzweilově práci nebyla cílem, nýbrž prostředkem k vysvětlení jistých konvergenčních jevů v teorii obyčejných diferenciálních rovnic. Posloužila k definování tzv. zobecněných diferenciálních rovnic. Specialista v teorii integrálu asi v podobných článcích nehledá věci, které jej zajímají. A už vůbec by tam nehledal zásadně novou definici Perronova integrálu.

Podobný osud měly i práce R. Henstocka, i když Henstock sám pracoval v teorii integrálu.

J. Kurzweil se v té době rozvoji integrálu příliš nevěnoval, vedle prací o diferenciálních rovnicích publikoval spolu s tímto integrálem jen krátkou poznámku o integraci per partes. K teorii integrálu se vrátil v sedmdesátých letech (Fubiniova věta, součin perronovsky integrovatelných funkcí, práce přehledné povahy). Tuto etapu uzavřela pak německy psaná knížka *Nichtabsolut konvergente Integrale,* která vyšla v roce 1980 v nakl. Teubner v Lipsku.

⋆ ⋆ ⋆

Ukončeme tuto kapitolu obecnějším pohledem na objev tohoto integrálu, který má díky osobě J. Kurzweila i velmi zřetelný český kontext.

První velkou metodu, která se v teorii integrování objevila po Newtonovi, vytvořil B. Riemann. Další metoda, která přísluší H. Lebesgueovi, byla v mnoha ohledech velmi důrazným zlepšením Riemannovy teorie a vedla k velmi hezké a ucelené teorii. Výhody Lebesgueova integrálu byly tak výrazné, že matematici byli pevně přesvědčeni o tom, že žádná modifikace Riemannova postupu nemůže dát tak silné výsledky, jaké dává Lebesgueova teorie.

Ve svých prvních pracech k tomuto tématu ani Kurzweil ani Henstock nekladli důraz na to, že zavedli integrál Riemannova typu, který je alespoň tak silný jako integrál Lebesgueův. Recenzenti těchto prací (např. v Mathematical Reviews) na tuto skutečnost rovněž neupozornili. Teprve poté, co R. Henstock v roce 1963 uveřejnil svoji útlou knížku *Theory of integration,* napsal T. H. Hildebrandt v časopise Mathematical Reviews recenzi, která matematikům předložila fakt, že se uskutečnilo to, co považovali za nemožné, a že je k dispozici integrál Riemannova typu, který je stejně dobrý jako integrál Lebesgueův a v mnoha ohledech – zejména v případě integrování reálných funkcí reálné proměnné – jej i předčí, protože je ekvivalentní Perronovu integrálu. Tak se teorie integrálu zhruba po sto letech vrátila k Riemannovým idejím a ukázala, jak je modifikovat, aby byla získána teorie integrálu, která v sobě zahrne Newtonovu, Riemannovu a Lebesgueovu teorii, a přitom techniky zůstanou takové, jak je předložil B. Riemann.