7. Přebytek a nedostatek

In: Jiří Hudeček (author): Matematika v devíti kapitolách. Sbírka početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfenga a dalších z doby Tang. Překlad, vysvětlivky a úvod. (Czech). Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2008. pp. 168–184.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400844

7 Přebytek a nedostatek

Ying Buzu 盈不足 – Pro určení skrytého a různorodého, vzájemně se vyjevujícího

Tato kapitola je založená na jedné centrální metodě, která je nicméně užívána pro různé účely na celé řadě mnohdy velmi pozoruhodných úloh.

Úvodní skupina úloh, na kterých je metoda a její varianty demonstrována, se týká společného nákupu nebo prodeje. Jde vlastně o soustavu dvou lineárních rovnic typu: odhad podílu na osobu krát počet přispívajících = cena věci plus přebytek (nebo mínus nedostatek). Hledaná je vždy skutečná cena věci a počet přispívajících, reálný podíl na osobu výslovně ne. Metoda je založena na vyrovnání přebytku a nedostatku při vyšším množství kupovaných věcí, což odpovídá přizpůsobení a sjednocení zlomků, jak upozorňuje Liu Hui, ale také modernímu Cramerovu pravidlu.

Ve většině úloh kapitoly však předpoklady a přebytek a nedostatek nejsou součástí zadání, nýbrž se částečně volí a částečně vypočítávají z nějakého implicitního vztahu. Výsledek v těchto případech odpovídá „podílu na osobu“ ve standardní metodě (naopak zde nemají smysl ekvivalenty „skutečné ceny“ a „počtu přispívajících“). Tato metoda je přesná, pokud je definiční vztah lineární, a dává rozumné aproximace i pro nelineární vztahy, pokud se předpoklady zvolí blízko správného výsledku.

Pořadí v kapitole i fakt, že metody za pozdějšími úlohami pouze odkazují na standardní metodu a nepopisují průběh výpočtu, by naznačovalo větší stáří standardní metody. Na druhou stranu výpočet „skutečné ceny“ pomocí dvou odhadů podle vlastní volby je intuitivnější než příklad se „společným nákupem“ a bližší praktickému použití. *Kniha výpočtů* již obsahuje oba typy úloh, však většinu tvoří úlohy druhého typu (3 ze 4, z toho jedna nelineární – odhad strany čtverce, přičemž přesná metoda výpočtu odmocnin v *Knize výpočtů* není) a řešení všech úloh je podrobně rozvedeno. Navíc úlohy druhého typu jsou jednodušší v tom, že vhodnou volbou odhadů lze vždy získat přebytek a nedostatek – není nutné odlišovat případy dvou přebytků, dvou nedostatků, případně správné hodnoty a chyby. Proto se domnívám, že toto druhé použití je základní a úloha „společného nákupu“ z něj byla odvozena.

Použití centrální metody v druhé části této kapitoly je velmi podobné metodě dvojího chybného předpokladu, která byla pod jménem al-chátajn velmi populární mezi arabskými kupci nejpozději od 9. století a ve 12. století se dostala i do Evropy, například do *Liber abaci* Leonarda Fibonacciho. Řada historiků matematiky se domnívala, že metoda byla přenesena z Číny do islámských zemí, ale neexistuje pro to žádný přímý doklad a zpracování této metody v arabských dílech se ve skutečnosti dosti liší od čínského (viz [Schwartz 2004]).

Zajímavá místa:

- ☐ Metoda (7.I) a Liu Huiův komentář.
- ☐ Úloha (7.14) se složitějším lineárním vztahem $4x = 3y$, $(3 - x)/5 = y/4$.

- ☐ Úloha (7.18) s nelineárně, ale diskrétně narůstající rychlostí dvou koní. Zajímavá je také následující metoda svou obšírností a slovníkem, patrně jedna z nejmladších v celé sbírce.
- ☐ Úloha (7.19) s postupným umořováním dluhu, kdy se ze splátek zpětně zjišťuje výše jistiny a úroku (úloha zjevně nepochází z praxe, ale byla motivována interně matematicky).
- ☐ V úloze nejsou Li Chunfengovy komentáře.

Důležité pojmy této kapitoly (k. = „pouze v komentářích“):

Deficit (*nü* k. 朒) – speciální termín pro „nedostatek“. Viz pozn. 7.

Křížem násobit (*wei cheng* 維乘) – násobit předpoklad vedoucí k nedostatku přebytkem a obráceně.

Menší předpoklad (*shao she* 少設) – rozdíl předpokladů, kterým se krátí čitatel i jmenovatel, aby se získaly skutečná cena a počet přispívajících (nutné v případě, kdy rozdíl předpokladů je větší než 1 a při jejich vyrovnání je tak nutno předpokládat nákup více než jedné věci).

Nedostatek (*bu zu* 不足) – kladný rozdíl požadovaného výsledku nějaké operace a výsledku dosaženého pro nějaký předpoklad.

Stanovme, jako by … (*jia ling* 假令) – původně formule, která uvádí v metodách (7.IV) – (7.XV) volbu první předpokladu, Liu Hui a také metoda (7.XIII) ji používá i jako jmenné označení předpokladů samých („neskutečná stanovení“).

Poměry vydání (*suo chu lü* 所出率) – v úlohách společného nákupu zadané podíly přispívajících na sumě, která vede k přebytku, nedostatku, případně správnému množství.

Porovnat (*ke* k. 課) – úkon, kterým zjistíme přebytek nebo nedostatek výsledku zkusmého proti žádanému.

Právě dost (*shi zu* 適足) – případ, kdy předpoklad je správný (nevede ani k přebytku, ani nedostatku), potažmo i správný předpoklad.

Přebytek (*ying* 盈) – záporný rozdíl požadovaného výsledku operace a výsledku dosaženého pro nějaký předpoklad.

Předpoklad (*she* k. 設) – zkusmá nebo zadaná hodnota operandu nějaké operace, jehož správná hodnota není známá, v rámci metody „Přebytku a nedostatku“.

Správné množství (*zheng shu* k. 正數) – též „spr. mn. bez přebytku i deficitu“ – neoznačuje hledaný výsledek, ale správnou velikost dělence, danou vyrovnáním přebytku a nedostatku.

(7.1) Mějme společný nákup věci, když každý člověk vydá 8, je přebytek 3, když každý člověk vydá 7, je nedostatek 4. Ptáme se, kolik je množství lidí a cena věci?

Odpověď zní:
7 lidí.
Cena věci je 53.

(7.2) Mějme společný nákup kuřete, když každý člověk vydá 9, je přebytek 11, když každý člověk vydá 6, je nedostatek 16. Ptáme se, kolik je množství lidí a cena kuřete?

Odpověď zní:
9 lidí.
Cena kuřete je 70.

(7.3) Mějme společný nákup nefritového kamene,[1] když každý člověk vydá polovinu, je přebytek 4, když každý člověk vydá třetinu, je nedostatek 3. Ptáme se, kolik je množství lidí a cena nefritového kamene?

Odpověď zní:
12 lidí.
Cena kamene je 17.

Komentář říká:[2] Pokud oba předpoklady[3] mají díly, přizpůsobíme čitatele a sjednotíme jmenovatele. V této úloze se v obou předpokladech objevují drobné díly,[4] proto přizpůsobíme jejich čitatele a sjednotíme jejich jmenovatele. Dále říká: Necháme dolní křížem vynásobit horní, poté to krátíme sjednoceným. Zde nelze krátit, proto se násobením sjednotí.

(7.4) Mějme společný nákup buvola, když [každých][5] 7 rodin společně vydá 190, je nedostatek 330, když [každých] 9 rodin společně vydá 270, je přebytek 30. Ptáme se, kolik je množství rodin a cena buvola?

Odpověď zní:
126 rodin.
Cena buvola je 3750.

Poznámka: V této metodě přebytek a nedostatek[6] jsou rozdíl za všechny rodiny, proto to vezmeme za obsah. Položíme poměry vydání a každý zmenšujeme množstvím

---

[1] *Jin* 瑨 – kámen podobný drahému nefritu, ale podstatně nižší skutečné ceny..

[2] Nezvyklé uvození glosy, která byla navíc původně – zřejmě chybně – zařazena za předchozí úlohu, vypadá jako pozůstatek „kompletování“ komentáře a klasického textu v některé fázi vzniku celého souboru.

[3] „Předpoklad“ je původně sloveso „ustavit“ *she* 設.

[4] „Drobné díly“ *ling fen* 零分 je zdůrazněné synonymum běžného „díly“ *fen*.

[5] Slovo „každý“ není explicitně použito ani v zadání úloh předchozích, tam se však logicky rozumí ze skladby věty, totiž z absence číslovky před slovem „člověk“. Zde číslovky jsou, a proto by bylo normální chápat zadání ve smyslu „jistých 7 rodin zaplatí 190“ resp. „jistých 9 rodin zaplatí 270“. Tak, jak je to myšleno (a jak to jedině dává matematicky smysl), lze formulace v tomto zadání chápat jen díky kontextu, proto píšu slova „každých“ do kontextových hranatých závorek.

[6] Rozumí se jejich součet.

rodin, tím pro každý získáme poměr vydání jedné rodiny, odečtením menšího od většího získáme rozdíl za jednu rodinu. Tím zmenšujeme [rozdíl za všechny rodiny] a to je množství rodin. Násobíme poměrem přebytku, odečteme přebytek, proto získáme cenu buvola.

(7.I) Přebytek a nedostatek

Metoda zní: Položíme poměry vydání, přebytek a nedostatek leží pod nimi.

Poznámka: Přebytku se říká exces, nedostatku se říká de cit,[7] poměrům vydání se říká neskutečná stanovení.[8]

Necháme je křížem vynásobit poměry vydání, sečteme na obsah. Sečteme přebytek a nedostatek na pravidlo. [Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1.[9]

Když přebytek a de cit křížem vynásobí oba předpoklady, myšlenka je, že chceme přizpůsobit a sjednotit. Podle „společného nákupu věci, když každý člověk vydá 8, je přebytek 3, když každý člověk vydá 7, je nedostatek 4“ přizpůsobíme zkusmé volby a sjednotíme přebytek a de cit, přebytek i de cit jsou pak oba 12. Po uvedení do propojení přizpůsobené už jsou správná množství bez přebytku i de citu, proto je možné je sečíst na obsah a sečíst přebytek a nedostatek na pravidlo. Přizpůsobené na 32 je po čtyřnásobení zkusmé volby, přebytek je 12. Přizpůsobené na 21 je po ztrojnásobení zkusmé volby s de citem také 12. Součet 7 zkusmých voleb odpovídá 1 obsahu, proto součet 3 a 4 je dělitel.[10]

Kde jsou díly, uvedeme je do propojení.

Pokud oba předpoklady mají díly, přizpůsobíme jejich čitatele a sjednotíme jejich jmenovatele. Necháme spodní křížem vynásobit horní,[11] pak krátíme sjednoceným.

Když jsou přebytek a nedostatek vztažené vůči sobě tak, že sdílejí [množství] kupujících,[12] položíme poměry vydání, odečteme menší od většího,

---

[7] „Přebytek“ je doslova „přeplněné“ *ying* 盈, „nedostatek“ je překlad původně slovesného „nestačit“ *bu zu* 不足. „Exces a deficit“ *tiao nü* 朓朒 jsou úzce odborné termíny z kalendářní astronomie (pozice měsíce na obloze na začátku a konci lunárního měsíce). Druhý z nich se později ujal jako standardní označení nedostatku, takže některé pozdější knihy kapitolu nazývají „Přebytek a deficit“ *ying nü*, zřejmě ve snaze dodržet dvojslabičnost názvů.

[8] V originále *jia ling* 假令. *Jia* znamená „neskutečný, vymyšlený“, *ling* „učinit, přikázat, stanovit“. Tento termín tedy silně konotuje jednak nepravdivost a nereálnost předpokladu, jednak jeho vynucenost a „svévolnost“. Slovesně (v metodách) překládám toto spojení „Stanovit jako by...“

[9] Výsledkem je, kolik má každý zaplatit, aby se přesně pokryla cena. Tato první část metody je pravděpodobně vývojově starší a sloužila k řešení úloh typu lineární rovnice s jednou neznámou metodou dvojího chybného odhadu (al-chátajn nebo regula falsi propositione). V zadání úloh (7.1) až (7.8) se naklade otázka po skutečném potřebném příspěvku jednotlivce, tedy i zde předepisované dělení je zbytečné.

[10] Každý předpoklad znamená koupi 1 věci (s určitým přebytkem nebo nedostatkem). Když první předpoklad čtyřnásobíme a druhý trojíme, znamená to koupi celkem 7 věcí (přebytek a nedostatek se přitom vyruší). V děliteli musí tedy být součet koe cientů, kterými se násobily předpoklady, a ty jsou nutně právě rovny přebytku a nedostatku.

[11] „Spodní“ a „horní“ zde označují čitatele předpokladů na jedné straně a přebytek/nedostatek na druhé straně. „Sjednocené“ je společný jmenovatel předpokladů, kterým je třeba nakonec vydělit součet součinů.

zbytkem krátíme obsah a pravidlo. Obsah je cena věci, pravidlo je množství lidí.

Po odečítání menšího poměru vydání od většího se zbytek nazývá rozdíl předpokladů. To vezmeme jako menší předpoklad, pak součet přebytku a de citu je určený obsah.[13] Proto když se malým předpokladem krátí určený obsah, je pak pravidlo množství lidí. Obsah, kdy je právě dost, je proto cena věci. Přebytek a de cit by se měly uvést do propojení s malým obsahem.[14] Pokud je nejde zcela zkrátit, je nutné násobit jmenovatelem dílů, rozdílem předpokladů se krátí pravidlo a obsah.[15]

---

[12] Úplnější interpretace by zněla: Pokud předpoklad, kdy je přebytek, a předpoklad, kdy je nedostatek, sdílejí ty, kdo nakupují. Jde každopádně o popis zadání úloh (7.1) až (7.8), kde pevné, ale neznámé množství lidí kupuje věc neznámé hodnoty.

[13] Jako „určené" se v Liu Huiově komentáři obvykle označují hypotetická množství, která jsou potřeba pro daný algoritmus, i když reálně jim nic neodpovídá. Srv. „určené pravidlo" v kapitole 4.

[14] Tj. krátit „menším předpokladem".

[15] Zrekapitulujme si, jak se postupuje v této metodě a jak to vysvětluje ještě komplikovanější komentář:

Formulace úlohy je takováto: Máme a_1 a b takové, že $a_1x - b = y$, a zároveň známe a_2 a c takové, že $a_2x + c = y$.

(Zde a_1 a a_2 jsou poměry vydání, b je přebytek, c nedostatek, y cena věci a x počet zúčastněných.)

Přitom se hledá a takové, že $a = y/x$. Algebraické řešení symbolickými úpravami rovnic by začalo vyjádřením x a y:

$$(a_1 - a_2)x = b + c\,, \qquad x = \frac{b+c}{a_1 - a_2}\,;$$

$$y = a_1\frac{b+c}{a_1-a_2} - b\,, \quad y = \frac{a_1b + a_1c - a_1b + a_2b}{a_1 - a_2} = \frac{a_1c + a_2b}{a_1 - a_2}$$

$$a = \frac{a_1c + a_2b}{b + c}$$

Metoda konstruuje nejprve výsledný předpis, a to – jak Liu Hui vysvětluje – na základě této úvahy:

$$a_1cx - bc = cy,\ a_2bx + cb = by \qquad => \quad (a_1c + a_2b)x = (b + c)y$$

Tento výsledek se následně využívá pro řešení většiny úloh 7. kapitoly, v nichž není ani x ani y v tom smyslu, v němž jsme je zde zavedli, jak ukážeme u metody (7.IV).

Úlohy, které kapitolu otevírají, ale přikládají x i y konkrétní význam. Metoda se proto potřebuje dobrat i předpisu pro jejich výpočet. Autoři *Devíti kapitol* postupovali zřejmě takto: Když x lidí zmenšilo svůj příspěvek o $a_1 - a_2$, ztratil se přebytek b a ještě se vytvořil nedostatek c. Tyto rozdíly spolu tedy přímo souvisí (tvoří „poměry"), z čehož vyplývá rovnice $x = \frac{b+c}{a_1 - a_2}$. Protože x je „poměr" dělitele a y „poměr" dělence podílu $a = \frac{a_1c + a_2b}{b+c}$, musí platit $y = \frac{a_1c + a_2b}{a_1 - a_2}$.

Závěrečná slova Liu Huiova komentáře se týkají případu, kdy v přebytku, nedostatku nebo rozdílu poměrů jsou zlomky. Pak je třeba rozšiřovat jmenovatelem rozdílu předpokladů dělenec i dělitel podílu a, aby bylo možné vykrátit.

(7.Ia) Jiná metoda zní: Sečteme přebytek a nedostatek na obsah. Odečítáme menší z poměrů vydání od většího, zbytek je pravidlo. [Za každý] obsah jako pravidlo získáme 1 [člověka]. Násobíme to poměry vydání, odečteme přebytek, navýšíme o nedostatek a to je cena věci.[16]

Myšlenka této metody je, že přebytek a nedostatek je rozdíl všech lidí, když odečítáme menší z poměrů vydání od většího, zbytek je rozdíl na jednoho člověka. Rozdílem na jednoho člověka se krátí rozdíl na všechny lidi, proto získáme množství lidí.[17]

(7.5) Mějme společný nákup zlata, když každý člověk vydá 400, je přebytek 3400, když každý člověk vydá 300, je přebytek 100. Ptáme se, kolik je množství lidí a cena zlata?

Odpověď zní:
33 lidí.
Cena zlata je 9800.

(7.6) Mějme společný nákup ovce, když každý člověk vydá 5, je nedostatek 45, když každý člověk vydá 7, je nedostatek 3. Ptáme se, kolik je množství lidí a cena ovce?

Odpověď zní:
21 lidí.
Cena ovce je 150.

(7.II) Dva přebytky, dva nedostatky

Metoda zní: Položíme poměry vydání, přebytky nebo nedostatky leží pod nimi. Necháme je křížem vynásobit poměry vydání, odečteme menší od většího, zbytek je obsah. Menší z obou přebytků nebo nedostatků odečteme od většího, zbytek je pravidlo. [Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1. Když jsou díly, uvedeme je do propojení. Když jsou přebytek a nedostatek vztažené vůči sobě tak, že sdílejí [množství] kupujících, položíme poměry vydání, odečteme menší od většího, zbytkem krátíme obsah a pravidlo. Obsah je cena věci, pravidlo je množství lidí.

Poznámka: V této metodě dvou nedostatků oba předpoklady nestačí na dosažení správného množství. Jiná varianta tohoto jsou dva přebytky. Jejich rozložení sil je shodné, ale povaha protichůdná. Když vytváříme obsah, vždy necháme nedostatky křížem vynásobit [poměry vydání] a odečíst se, pak se ztrácí to, co se jim do něj [správného množství] nedostává. Proto jejich zbytek, který tvoří obsah, nemá žádný de cit, který by ho snižoval. Když jsou z vydání dva přebytky, jsou oba předpoklady vyšší než správné množství. Dejme tomu, že při společném nákupu každý člověk vydá 8, přebytek je 3. Když každý člověk vydá 9, přebytek je 10. Přizpůsobíme zkusmé

---

[16] Tj. násobíme poměrem vydání při přebytku a odečteme přebytek nebo násobíme poměrem vydání při nedostatku a přičteme nedostatek.

[17] Tato metoda je založená na postupném dosazování vypočítaných výsledků do úvodní metody kapitoly – nejprve se vypočte x a následně se dosadí do některého ze vztahů $a_1x - b = y$ nebo $a_2x + c = y$ a vypočte se y. Tento postup nemá už celkem nic společného s obecnou metodou Přebytku a nedostatku a bylo by zajímavé vědět, jestli vznikl až na jejím základě, nebo byl pro tento typ úloh běžnější a *Devět kapitol* je řeší metodou Přebytku a nedostatku z jakýchsi pedagogických důvodů.

volby a sjednotíme oba přebytky. Pak oba přebytky jsou 30. Vezmeme přizpůsobené a odstraníme z nich úplně [přebytky], zbytek vytvoří obsah a nemá přebytek. Menší z obou přebytků se odečte od většího, zbytek je pravidlo. Přizpůsobené na 80 je 10 zkusmých hodnot a celkový přebytek 30 je 10 třikrát. Přizpůsobené na 27 jsou 3 zkusmé hodnoty a celkový přebytek 30 je tři 10krát. Daná neskutečná stanovení pro oba přebytky jsou celkem 13, odečteme 3 od 10, zbytek 7 je jeden obsah. Proto necháme odečíst 3 od 10 a zbytek 7 je pravidlo. Menší z poměrů vydání se odečte od většího, zbytek je rozdíl předpokladů. Protože rozdíl předpokladů je menší předpoklad, je rozdíl obou přebytků určený obsah.[18] Proto krátíme menším předpokladem pravidlo a získáme množství lidí, krátíme obsah a tím získáme množství zlata.

(7.IIa) Jiná metoda zní: Položíme poměry vydání, odečteme menší od většího, zbytek je pravidlo. Z obou přebytků nebo nedostatků menší odečteme od většího, zbytek je obsah. [Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1, získáme množství lidí. Násobíme to poměry vydání, odečteme přebytek, navýšíme o nedostatek a to je cena věci.[19]

„Položíme poměry vydání, odečteme menší od většího“, získáme rozdíl na jednoho člověka. Když se odečtou od sebe oba přebytky nebo nedostatky, je to rozdíl na všechny lidi. Proto když to zmenšujeme rozdílem na jednoho člověka, získáme množství lidí. Když to násobíme poměrem vydání, odečteme přebytek nebo navýšíme o nedostatek, získáme tím cenu.

(7.7) Mějme společný nákup psa, když každý člověk vydá 5, je nedostatek 90, když každý člověk vydá 50, je to právě dost.[20] Ptáme se, kolik je množství lidí a cena psa?

Odpověď zní:

2 lidé.

Cena psa je 100.

(7.8) Mějme společný nákup prasete, když každý člověk vydá 100, je přebytek 100, když každý člověk vydá 90, je to právě dost. Ptáme se, kolik je množství lidí a cena prasete?

Odpověď zní:

10 lidí.

Cena prasete je 900.

(7.III) Přebytek a právě dost, nedostatek a právě dost

Metoda zní: Množství přebytku a nedostatku je obsah. Položíme poměry vydání, odečteme menší od většího, zbytek je pravidlo. [Za každý] obsah jako pravidlo získáme 1 [člověka]. Když hledáme cenu věci, násobíme [vydáním, když je] právě dost[,] množství lidí a získáme cenu věci.

---

[18] Zde „menší předpoklad“ je pouze technické označení „zmenšeného“ předpokladu, nikoli „menší z předpokladů“. Jde o propojení s obecně vyloženou metodou ze začátku komentáře k (7.I).

[19] Stejně jako v metodě (7.Ia) se operuje s přebytkem nebo nedostatkem příslušným k použitému poměru vydání (jedno který se použije).

[20] V originále *shi zu* 適足, což bychom také mohli přeložit v protikladu k *bu zu* jako „přesně dostatek“.

Myšlenkou této metody je, že když vezmeme poměry vydání a odečteme menší od většího, zbytek je rozdíl nedostatků na jednoho člověka. Množství nedostatku je rozdíl na všechny lidi. Krátíme to rozdílem na jednoho člověka, proto získáme množství lidí.

„Množství přebytku a nedostatku je obsah“, jelikož množství je zjevné samostatně,[21] je to už rozdíl na všechny lidi, proto je to obsah. Poměry vydání se odečtou menší od většího, to je rozdíl na jednoho člověka, proto vytvoří pravidlo. Zmenšíme jím rozdíl všech lidí a získáme množství lidí, když to násobíme [vydáním, když je] právě dost, získáme cenu věci.

(7.9) Mějme zrno[22] v sudu na 10 *dou*, neznáme jeho množství. Doplníme vrchovatě vymláceným obilím a umeleme ho, získáme 7 *dou*. Ptáme se, kolik bylo původně zrna?

Odpověď zní: 2 *dou* a 5 *shengů*.

(7.IV) (Neznámé množství zrna v sudu)

Metoda zní: Hledáme to metodou přebytku a nedostatku.[23] Stanovme, jako by bylo původně 2 *dou* zrna, pak je nedostatek 2 *shengy*. Když stanovíme 3 *dou*, přebývají 2 *shengy*.

---

[21] V originále *dan* 單, tj. „jednoduše“, v jediném údaji (nikoli ve spojení dvou).

[22] Jako obvykle když není uvedena kvali kace, i zde se myslí nejhrubší oloupané zrno, tedy v poměru ku vymlácenému obilí 3:5.

[23] Následující třída úloh by často šla řešit také metodou „Mějme“. Například v úloze (7.10) bychom součet rychlostí růstu považovali za poměr daného, 1 den za množství daného, 9 *chi* za poměr hledaného a provedením metody „Mějme“ bychom získali množství hledaného, tedy počet dní, po nichž se rostliny sejdou. Jeho vynásobením příslušnými rychlostmi růstu bychom věděli i to, o kolik obě rostliny vyrostly.

V jiných případech, jako v této úloze, by byla aplikace metody „Mějme“ složitější, vyžadovala by umělé kroky, kterými by se dosáhlo stejného efektu jako převedením členů z jedné strany rovnice na druhou. Označíme-li původní objem zrna X, pak zjevně platí $X + 3/5(10 - X) = 7$. Našimi symbolickými metodami nebo rétorickou algebrou arabského stylu bychom dospěli k rovnici $2/5X = 1$. Metodou „Mějme“ bychom mohli položit 2/5 (poměr ztráty objemu umletím) jako poměr daného, 3 (úbytek objemu) jako množství daného, 1 (poměr původního objemu) jako poměr hledaného a provedením metody „Mějme“ bychom získali původní objem vymláceného obilí. Jeho odečtením od objemu sudu bychom zjistili původní objem zrna. Metoda „Přebytku a nedostatku“ je však zjevně méně náročná na promýšlení řešení podle situace.

V předchozích kapitolách *Devíti kapitol* nejsou metody, které by se dokázaly vyrovnat se soustavou podmínek typu $X + 3/5Y = 7$, $X + Y = 10$. V 6. kapitole sice jsou úlohy, které obsahují více neznámých, ale jejich výpočet je možný postupně, nejsou tedy „skryté a různorodé vzájemně se vyjevující“, jak charakterizuje velmi trefně předmět úloh v této kapitole Liu Hui. Typický příklad je úloha (6.22), jejíž zadání lze zapsat třemi rovnicemi ve tvaru $38X = 76Y = Z$, $X + Y = 1$, kde X je část dne věnovaná samičím taškám, Y část dne věnovaná samčím taškám a Z počet celkem vyrobených tašek. Při řešení této soustavy můžeme postupovat jednoduchou eliminací neznámých, tj. $Z = 38X$, $3/2X = 1$ a z toho $Z = 76/3$. Připomeňme zde také reálný postup, jak tuto úlohu řeší – dle Liu Huiova výkladu – metoda (6.XXII): do rovnice $X + Y = 1$ elegantně dosazuje $X/Z + Y/Z = 1/Z$, tj. $(1/76 + 1/38) = 1/Z$. Metody 6. kapitoly postupují všechny takto (násobením a dělením) a vyhýbají se tím

Poznámka: Sud pojme 1 *hu*, kdybychom učinili[24] původního zrna 2 *dou*, musíme doplnit 8 *dou* vymláceného obilí, abychom ho zaplnili. Z 8 *dou* získáme 4 *dou* a 8 *shengů* oloupaného zrna, když to porovnáme se 7 *dou*, je to nedostatek 2 *shengů*. Kdybychom dali původního zrna 3 *dou*, musíme doplnit 7 *dou* vymláceného obilí, abychom ho zaplnili. Ze 7 *dou* získáme 4 *dou* a 2 *shengy* oloupaného zrna, když to porovnáme se 7 *dou*, je to navíc o 2 *shengy*. Přebytkem a nedostatkem křížem násobíme množství neskutečných stanovení, to je s významem přizpůsobení a sjednocení. Když přizpůsobujeme a sjednocujeme, přizpůsobujeme neskutečná stanovení a sjednocujeme přebytek a de cit. Po uvedení do propojení už přizpůsobené jsou správná množství bez přebytku i de citu, proto je možné je sečíst na obsah a sečíst přebytek a nedostatek na pravidlo. Když je obsah jako pravidlo, získáme množství *dou* původního zrna, což je správné množství bez přebytku a de citu.

(7.10) Mějme zeď vysokou 9 *chi*, na níž roste meloun [směrem dolů] a denně se jeho stonky prodlouží o 7 *cunů*. Pod ním roste tykev [směrem nahoru] a denně se její stonky prodlouží o 1 *chi*. Ptáme se, po kolika dnech se spolu setkají? O kolik vyroste meloun a tykev?

Odpověď zní:
5 celých a 5 ze 17 dílů dne.
Meloun vyroste o 3 *chi*, 7 celých a 1 ze 17 dílů *cunu*.
Tykev vyroste o 5 *chi*, 2 celé a 16 ze 17 dílů *cunu*.

(7.V) (Meloun a tykev)

Metoda zní: Stanovme jakoby 5 dní, nedostatek je 5 *cunů*. Když stanovíme 6 dní, přebývá 1 *chi* a 2 *cuny*.

Poznámka: „Stanovme jakoby 5 dní, nedostatek je 5 *cunů*“ znamená, že když meloun poroste 5 dní, budou jeho stonky viset dolů na 3 *chi* a 5 *cunů*. Když tykev poroste 5 dní, budou její stonky dosahovat nahoru na 5 *chi*. Když to porovnáme se zdí 9 *chi* vysokou, je to nedostatek 5 *cunů*. „Když stanovíme 6 dní, přebývá 1 *chi* a 2 *cuny*“ znamená, že kdybychom nechali meloun růst 6 dní, budou jeho stonky viset dolů na 4 *chi* a 2 *cuny*, když poroste tykev 6 dní, budou její stonky dosahovat nahoru na 6 *chi*. Když to porovnáme se zdí 9 *chi* vysokou, je to navíc o 1 *chi* a 2 *cuny*. Přebytkem a nedostatkem křížem násobíme hodnoty zkusmých voleb, myšlenka je, že chceme přizpůsobit a sjednotit. Když přizpůsobujeme a sjednocujeme, přizpůsobujeme zkusmé volby a sjednocujeme přebytek a de cit. Po uvedení do propojení už přizpůsobené jsou správná množství bez přebytku i de citu, proto je možné je sečíst na obsah a sečíst přebytek a nedostatek na pravidlo. [Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1, a to je správné množství rozdílu předpokladů bez přebytku a de citu, čili získáme množství dní. Vynásobíme to růstem melounu a tykve za jeden den a proto pro každý získáme velikost jeho přírůstku.[25]

---

převádění neznámé, spojeného nutně se změnou znaménka. Případy, kde to není možné, vhodně řeší metoda „Přebytku a nedostatku“.

[24] Liu Hui používá sloveso „způsobit, nařídit“ *shi* 使, synonymum *ling* 令, které je standardní v klasickém textu.

[25] Přebytek a nedostatek jsou zde vyjádřeny pro různá trvání růstu. „Přizpůsobení a sjednocení“ znamená, že vypočítáme počty dní, po který by na jinak velké zdi byl přebytek rovný nedostatku. Výsledek je, že na 1,2krát vyšší zdi za 6 dní (1,2 krát delší dobu) by chyběl stejný kus k srůstu (6 *cunů*), jaký by na poloviční zdi za 3 dny (poloviční dobu) přebýval. Z toho

(7.11) Mějme orobinec, který v den, kdy vyroste, se prodlouží o 3 *chi*, a rákos, který v den, kdy vyroste, se prodlouží o 1 *chi*. Přírůstek orobince se denně půlí, přírůstek rákosu se denně dvojnásobí. Ptáme se, po kolika dnech budou stejně dlouhé?

Odpověď zní:

2 celé a 6 z 13 dílů dne.

Budou dlouhé 4 *chi*, 8 celých a 6 z 13 dílů *cunu*.

(7.VI) (Orobinec a rákos)

Stanovme jakoby 2 dny, nedostatek je 1 *chi* a 5 *cunů*. Když stanovíme 3 dny, přebývá 1 *chi* a 7 a půl *cunu*.[26]

Poznámka: „Stanovme jakoby 2 dny, nedostatek je 1 *chi* a 5 *cunů*" znamená, že když orobinec roste 2 dny, je dlouhý 4 *chi* a 5 *cunů*, když rákos roste 2 dny, je dlouhý 3 *chi*, to jest nedosahují k sobě o 1 *chi* a 5 *cunů*, proto se to nazývá nedostatek. „Když stanovíme 3 dny, přebývá 1 *chi* a 7 a půl *cunu*" znamená, že orobinec přidá k předchozímu 7 a půl *cunu*, rákos přidá k předchozímu 4 *chi*, to jest přesahují o 1 *chi* a 7 a půl *cunu*, proto se to nazývá mít navíc. Násobíme a zmenšujeme to přebytkem a nedostatkem, dále pro každý násobíme čitatele dílů dne růstem za poslední den, když [dokud je] to jako jmenovatel dílů, [přidáváme] 1, získáme pro každý délku za čitatele dílů dne.[27] Proto když [tím] každému navýšíme určený přírůstek za dva dny, získáme příslušná množství.

(7.12) Mějme silné víno, jehož 1 *dou* stojí 50 měďáků, a obyčejné víno, jehož 1 *dou* stojí 10 měďáků. Nyní za 30 měďáků získáme 2 *dou* vína. Ptáme se, kolik je silného a obyčejného vína?

Odpověď zní:

Silného vína je 2 a půl *shengu*.

Běžného vína je 1 *dou* a 7 a půl *shengu*.

---

vyplývá, že za 9 dní by se na 1,7krát vyšší zdi obě rostliny právě srostly. 9 dní je v tomto případě „správné množství bez přebytku a de citu."

Dodejme, že 9 je výška zdi a 1,7 je součet rychlostí růstu obou rostlin, takže použití metody „Přebytku nedostatku" na tuto úlohu muselo být motivováno čistě snahou ukázat její univerzálnost, která je v tomto případě vykoupena zbytečnými výpočty. Komentátoři na toto kupodivu nijak neupozorňují.

[26] Tato úloha je nelineární a metoda „Přebytku a nedostatku" proto poskytuje jen přibližné řešení. Délky obou rostlin jsou součty geometrických řad s prvními členy 3 a 1 a kvocienty 0,5 a 2. Platí tedy $3\dfrac{1-0{,}5^n}{1-0{,}5}=\dfrac{2^n-1}{2-1}$, kde n je počet dnů růstu, z čehož získáme $6-\dfrac{6}{2^n}=2^n-1$ a to je kvadratická rovnice $\left(2^n\right)^2-7\cdot 2^n+6=0$. Počet dnů n pak odpovídá logaritmu se základem 2 z toho řešení kvadratické rovnice, které je větší než 1 (tzn. má kladný logaritmus), konkrétně 6. Druhé řešení odpovídá začátku růstu – dni 0. Skutečné řešení je 2,58496..., přibližné lineární řešení *Devíti kapitol* je $2,\overline{461538}$. Rozdíl mezi přesným a tímto přibližným řešením jsou asi 3 hodiny.

[27] Tj. délku, o kterou vyroste během části posledního dne před srůstem.

(7.VII) (Silné a běžné víno)

Metoda zní: Stanovme, jako by silného vína bylo 5 *shengů*, běžného vína 1 *dou* a 5 *shengů*, pak přebývá 10. Když stanovíme silného vína 2 *shengy* a běžného 1 *dou* a 8 *shengů*, je nedostatek 2.

Na základě toho, že 5 *shengů* silného vína stojí 25 měďáků a 1 *dou* a 5 *shengu* stojí 15 měďáků, porovnáme s 30, to je navíc o 10. Na základě toho, že 2 *shengy* silného vína stojí 10 měďáků a 1 *dou* a 8 *shengů* běžného vína stojí 18 měďáků, porovnáme s 30, to je nedostatek 2. Hledáme to metodou přebytku a nedostatku. V této úloze již jsou opakované předpoklady a myšlenka jejich přizpůsobení a sjednocení.[28]

(7.13) Mějme 5 velkých nádob a 1 malou nádobu, které [dohromady] pojmou 3 *hu*, přičemž 1 velká nádoba a 5 malých nádob pojmou 2 *hu*. Ptáme se, kolik pojme velká a malá nádoba?[29]

Odpověď zní:
Velká nádoba pojme 13 z 24 dílů *hu*,
malá nádoba pojme 7 z 24 dílů *hu*.

(7.VIII) (Malá a velká nádoba)

Metoda zní: Stanovme, jako by velká nádoba měla 5 *dou* a malá nádoba také 5 *dou*, pak je přebytek 10 *dou*. Když stanovíme velkou nádobu 5 *dou* a 5 *shengů* a malou nádobu 2 *dou* a 5 *shengů*, je nedostatek 2 *dou*.

Poznámka: Velká nádoba pojme 5 *dou*, 5 velkých nádob pojme 2 *hu* a 5 *dou*. Odečteme to od 3 *hu*, zbývá 5 *dou*, to pojme malá nádoba, proto se říká „malá nádoba také 5 *dou*." 5 malých nádob pojme 2 *hu* a 5 *dou*, *s* 1 velkou nádobou celkem 3 *hu*. Když to porovnáme se 2 *hu*, je to víc o 10 *dou*. Když necháme velkou nádobu 5 *dou* a 5 *shengů*, 5 velkých nádob pojme 2 *hu*, 7 *dou* a 5 *shengů*. Odečteme to od 3 *dou*, zbývají 2 *dou* a 5 *shengů*, to pojme malá nádoba. Proto se říká „malá nádoba 2 *dou* a 5 *shengů*." Jedna velká nádoba pojme 5 *dou* a 5 *shengů*, 5 malých nádob celkem 1 *hu*, 2 *dou* a 5 *shengů*, celkem je to 1 *hu* a 8 *dou*. Když to porovnáme se 2 *hu*, je to méně o 2 *dou*. Proto se říká „je nedostatek 2 *dou*." Násobíme přebytkem a nedostatkem křížem [předpoklady], zmenšujeme to.

(7.14) Mějme lak, za jehož 3 [díly] získáme 4 [díly] oleje, 4 [díly] oleje smícháme [s] 5 [díly] laku. Mějme 3 *dou* laku, chceme je rozdělit a [část] směnit za olej, který vrátíme a smícháme se zbylým lakem. Ptáme se, kolik vydáme laku, získáme oleje a smícháme laku?

Odpověď zní:
Vydáme 1 *dou*, 1 celý a 1 ze 4 dílů *shengu* laku.
Získáme 1 *dou* a 5 *shengů* oleje.
Smícháme 1 *dou*, 8 celých a 3 ze 4 dílů *shengu* laku.

---

[28] Liu Hui upozorňuje na to, že metoda řeší dvě neznámé, proto jsou potřeba oba předpoklady. Je to rozdíl proti předchozím 2 úlohám, kde se vypočítávala jediná neznámá (čas). V této úloze celkový objem obou druhů vín není předem znám a objemy obou druhů spolu souvisí jen přes celkovou cenu.

[29] Touto úlohou začíná blok úloh, které předznamenávají soustavy lineárních rovnic v 8. kapitole.

(7.IX) (Míchání laku s olejem)

Metoda zní: Stanovme, jako bychom vydali 9 *shengů* laku, pak je nedostatek 6 *shengů*. Když stanovíme 1 *dou* a 2 *shengy* vydaného laku, přebývají 2 *shengy*.

Poznámka: V této metodě z 3 *dou* laku vydáme 9 *shengů* a získáme 1 *dou* a 2 *shengy* oleje, to lze smíchat s 1 *dou* a 5 *shengy* laku, zbývají 2 *dou* a 1 *sheng*, tedy k 6 *shengům* [z toho] není olej na smíchání, proto se říká „nedostatek je 6 *shengů*." Když necháme vydat 1 *dou* a 2 *shengy* laku, vyměníme to za 1 *dou* a 6 *shengů* oleje, to lze smíchat s 2 *dou* laku. Ze 3 *dou* již jsme vydali 1 *dou* a 2 *shengy*, zbytek je 1 *dou* a 8 *shengů*. Nyní bychom však olej měli smíchat s 2 *dou* laku, což je víc o 2 *shengy*. Násobíme to křížem přebytkem a nedostatkem, to je obsah. Sečteme přebytek a nedostatek na pravidlo. [Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1, získáme množství *shengů* vydaného laku. Když hledáme olej a smíchaný lak, jsou 4 a 5 poměry hledaného a 3 resp. 4 poměry daného, pak provedeme metodu „Mějme" a získáme to.

(7.15) Mějme nefritovou krychli [s hranou] 1 *cun*, která váží 7 *liangů*, a kamennou krychli 1 *cun*, která váží 6 *liangů*. Mějme krychli z kamene [s hranou] 3 *cuny*, uvnitř níž je nefrit, která celkem váží 11 *jinů*. Ptáme se, kolik je váha nefritu a kamene?

Odpověď zní:

Nefritu je 14 *cunů*, váží 6 *jinů* a 2 *liangy*.

Kamene je 13 *cunů*, váží 4 *jiny* a 14 *liangů*.

(7.X) (Kamenná krychle s nefritovým jádrem)

Metoda zní: Stanovme, jako by byla celá z nefritu, pak je víc o 13 *liangů*. Když ji stanovíme celou z kamene, je nedostatek 14 *liangů*. Nedostatek je nefrit, o co je víc, je kámen. Každý násobíme váhou *cunu* a získáme celkovou váhu nefritu a kamene.[30]

Krychle 3 *cuny* – to je strana jedné stěny, z toho spočítáme sebrání 27 *cunů*. Nefritová krychle [s hranou] 1 *cun* váží 7 *liangů*, kamenná krychle [s hranou] 1 *cun* váží 6 *liangů*, tedy rozdíl váhy nefritu a kamene je 1 *liang*. Předpokládejme, že je celá z nefritu, to je celkem 189 *liangů*. Když to porovnáme s 11 *jiny*, je navíc 13 *liangů*. Nefrit je těžší a kámen lehčí, proto je to tento přebytek. Tedy ve 27 *cunech* je 13 *cunů*, pro každý z nich je třeba ubrat 1 *liang*, tedy to vezmeme za váhu kamene, proto se říká, že co je navíc, je kámen. Tím se vyjadřuje, že množství, které je navíc, je za kámen, který jsme brali jako nefrit. Předpokládejme, že je to celé kámen, to je celkem 162 *liangů*. Když to porovnáme s 11 *jiny*, je to méně o 14 *liangů*. Proto se tomu říká nedostatek. Tento nedostatek je z toho, že jsme za těžší vzali lehčí. Proto když necháme odečíst množství, které je míň, od součtu vah, je ve 27 *cunech* 14 *cunů*, tj. pro 14 *cunů* se navyšuje o 1 *liang*.[31]

(7.16) Mějme dobré pole, jehož 1 *mu* má cenu 300, a špatné pole, jehož 7 *mu* má cenu 500. Mějme nákup 1 *qingu*, jehož cena je 10 000. Ptáme se, kolik je dobrého a špatného pole?

---

[30] Jak vyplývá z této metody, *cuny* v odpovědi jsou opět krychle o hraně 1 *cun*, tedy krychlové *cuny*.

[31] Tato metoda představuje jednu z nejefektivnějších aplikací metody přebytku a nedostatku. Řešení zde v podstatě kopíruje eliminačně-substituční řešení soustavy rovnic $7x + 8y = 11$, $x + y = 27$.

Odpověď zní:
Dobrého pole je 12 a půl *mu*.
Špatného pole je 87 a půl *mu*.

(7.XI) (Dobré a špatné pole)

Metoda zní: Stanovme, jako by dobrého pole bylo 20 *mu*, špatného pole 80 *mu*, pak je víc o 1714 celých a 2 ze 7 dílů měďáku. Když stanovíme dobré pole 10 *mu* a špatné pole 90 *mu*, je nedostatek 571 celých a 3 ze 7 dílů měďáku.

Poznámka: 20 *mu* dobrého pole má cenu 6000 měďáků. 80 *mu* špatného pole má cenu 5714 celých a 2 ze 7 dílů měďáku. Když to porovnáme s 10 000, je to navíc o 1714 a 2 ze 7 dílů měďáku. Když necháme 10 *mu* dobrého pole, má cenu 3000, 90 *mu* špatného pole má cenu 6428 a 4 ze 7 dílů měďáku. Když to porovnáme s 10 000, je to nedostatek 571 a 3 ze 7 dílů měďáku. Hledáme to metodou „Přebytku a nedostatku“.

(7.17) Mějme 9 kousků zlata a 11 kousků stříbra, když je zvážíme, jsou si právě rovny. Jeden za jeden vyměníme a zlato je o 13 *liangů* lehčí. Ptáme se, kolik váží 1 kousek zlata a stříbra?

Odpověď zní:
Zlata 2 *jiny*, 3 *liangy* a 18 *zhu*.
Stříbra 1 *jin*, 13 *liangů* a 6 *zhu*.

(7.XII) (Váha zlata a stříbra)

Metoda zní: Stanovme zlato jakoby 3 *jiny* a stříbro 2 *jiny* a 5 z 11 dílů *jinu*, pak je nedostatek 49, je v pravém sloupci. Když stanovíme zlato 2 *jiny*, stříbro 1 celý a 7 z 11 dílů *jinu*, je to víc o 15, je v levém sloupci. Násobíme jmenovatelem každého množství v jeho sloupci, přebytkem a nedostatkem násobíme křížem poměry vydání, sečteme, to je obsah. Sečteme přebytek a nedostatek na pravidlo. Za části obsahu, které jsou jako pravidlo, získáme váhu zlata. Jmenovatel násobí pravidlo a pak se jím dělí, získáme váhu stříbra. Zkrátíme to a získáme díly.[32]

Poznámka: V této metodě předpokládáme, že zlata je 9 a stříbra 11, celkem váží 27 *jinů*. Pro zlato krátíme 9 a získáme 3 *jiny*. Pro stříbro krátíme 11 a získáme 2 *jiny* a 5 z 11 *jinů* stříbra. To jsou váhy jednoho kousku zlata a stříbra. Z váhy zlata 27 *jinů* odečteme váhu 1 [kousku] zlata, přidám k tomu stříbro, z 27 *jinů* stříbra odečteme váhu 1 [kousku] stříbra a přidáme k tomu zlato, pak je váha zlata 26 celých a 5 z 11 dílů *jinů*, váha stříbra 27 celých a 6 z 11 dílů *jinu*. Odečteme menší od většího a zlato je lehčí o 17 celých a 5 z 11 dílů *liangu*. Když to porovnáme se 13 *liangy*, je to víc o 4 celé a 5 z 11 dílů *liangu*. Když to vyjádříme po uvedení dílů do propojení a zahrnutí čitatelů, je to nedostatek 49. Dále necháme 9 kousků zlata vážit každý kousek 2 *jiny*, pak 9 kousků váží 18 *jinů*. 11 kousků stříbra také celkem váží 18 *jinů*. Když potom

---

[32] Tato úloha by také šla poměrně jednoduše řešit metodou „Mějme“. Ze zadání plyne, že poměr váhy zlata je 11, poměr váhy stříbra 9. Při výměně kousku za kousek zlatu ubude 11 – 9 = 2 a ke stříbru přibude 11 – 9 = 2, tzn. poměr rozdílu je 4, což je poměr daného. Rozdíl 13 *liangů* je množství daného a 11 resp. 9 jsou poměry hledané váhy kousku zlata a stříbra.

Metoda Přebytku a nedostatku byla na těchto úlohách vykládána a cvičena ve skutečnosti pro zcela jiné použití, totiž pro lineární interpolaci ve své podstatě nelineárních dějů, hlavně v astronomických pozorováních. Proto také Liu Huiův komentář k celé kapitole je velmi věcný a nepouští se do žádných polemik s klasickým textem.

zmenšujeme 11, získáme 1 celý a 7 z 11 dílů *jinu*, to je váha 1 kousku stříbra. Nyní z váhy zlata 18 *jinů* odečteme 1 kousek zlata, přidáme k tomu stříbro. Znovu odečteme 1 kousek stříbra [z váhy stříbra] a přidáme k tomu zlato. Potom váha zlata je 17 celých a 7 z 11 dílů *jinu*, váha stříbra je 18 celých a 4 z 11 dílů *jinu*. Odečteme menší od většího a pak je zlato lehčí o 8 z 11 dílů *jinu*. Když to porovnáme se 3 *liangy*, je to méně o 1 celý a 4 z 11 dílů *liangu*. Když to vyjádříme po uvedení dílů do propojení a zahrnutí čitatelů, je to navíc o 15. Provedeme to „Přebytkem a nedostatkem“, [obsah je] jako pravidlo a získáme váhu zlata. Když „Jmenovatel násobí pravidlo a pak se jím dělí“, je to jmenovatel *liangů* stříbra, proto se sjednocuje. Musí se uvést do propojení s pravidlem a pak teprve dělit a tím získáme váhu stříbra. Zbytky se vždy krátí, aby byla metoda úspornější.

(7.18) Mějme dobrého koně a špatného koně, kteří vyrazí z Chang'anu a dorazí do Qi. Qi je od Chang'anu 3000 *li*. Dobrý kůň první den ujede 193 *li*, denně to vzroste o 13 *li*. Špatný kůň první den ujede 97 *li*, denně to klesne o půl *li*. Dobrý kůň dorazí jako první do Qi, obrátí se a vyjede vstříc špatnému koni. Ptáme se, po kolika dnech se potkají a kolik každý ujedou?

Odpověď zní:
Po 15 celých a 135 ze 191 dílů dne se potkají.
Dobrý kůň ujede 4534 celých a 46 ze 191 dílů *li*.
Špatný kůň ujede 1465 celých a 145 ze 191 dílů *li*.[33]

(7.XIII) (Dobrý a špatný kůň)

Metoda zní: Stanovme jakoby 15 dní, nedostatek je 337 a půl *li*. Když stanovíme 16 dní, je to víc o 140 *li*. Přebytkem a nedostatkem násobíme křížem neskutečně stanovená množství, sečteme a vytvoří obsah. Sečteme přebytek a

[33] Pokud koně zrychlují skokově ze dne na den, je úsek posledního dne, kdy se sejdou, skutečně dán jako podíl zbylé dráhy (nedostatku) po 15 dnech a součtu rychlosti obou koní po 15 dnech, čili 337,5/(193 + 97 + 12,5 · 15) = 135/191. Klasický text ani Liu Hui se ovšem nezmiňují o tom, jak zjistíme, že máme vybrat předpoklady právě 15 a 16 (musí být v rámci posledního dne, kdy jedině platí lineární závislost). Nejjednodušší je samozřejmě zkoušet, které předpoklady vzdálené od sebe o 1 právě vytvoří jeden přebytek, druhý nedostatek. Takové zkusmé řešení je přitom ekvivalent numerického řešení kvadratické rovnice:

$$S_{dk} = 193x + 13\frac{x(x-1)}{2}$$

$$S_{sk} = 97x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x(x-1)}{2}$$

$$S_{dk} = 3000 + \left(3000 - S_{sk}\right)$$

$$193x + 13\frac{x^2}{2} - \frac{13}{2}x = 3000 + \left(3000 - 97x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x\right)$$

$$\frac{25}{4}x^2 + \frac{1135}{4}x - 6000 = 0$$

$$x^+ \doteq 15{,}7095$$

(S_{dk} – dráha dobrého koně, S_{sk} – dráha špatného koně, x – počet dní.)

Autoři *Devíti kapitol* dokázaly takovéto rovnice numericky řešit úpravou algoritmu odmocniny, kde by se na začátku použilo „podélné pravidlo“ (viz (9.XI), pozn. 16). Zdá se velmi pravděpodobné, že takto postupovali i zde pro výpočet celého počtu dnů.

nedostatek a vytvoří pravidlo. [Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1, získáme množství dní. Co se nevyčerpá, zmenšujeme společným množstvím a označíme jako díly.

Hledání dráhy dobrého koně: 14 násobí množství *li*, o které se zrychlí, půlíme to, přičteme množství *li*, které dobrý kůň ujede první den, násobíme tím 15 dní a získáme celkovou dráhu dobrého koně za 15 dní. Dále 15 dny násobíme množství *li*, o které se zrychlí, a přičteme to k množství *li*, které ujede dobrý kůň první den. Tím násobíme čitatel dnů, každá část, která je jako jmenovatel dnů, dá 1. Výsledek přičteme k celkovému množství *li*, které dobrý kůň ujel, a získáme to. Co se nevyčerpá, označí se jako díly.

Hledání dráhy špatného koně: 14 násobí půl *li*, dále to půlíme, odečteme od množství *li*, které špatný kůň ujede první den, násobíme tím 15 dní a získáme celkovou dráhu špatného koně za 15 dní. Dále 15 dny násobíme půl *li* a odečteme to od množství *li*, které ujede špatný kůň první den. Zbytkem násobíme čitatel dnů, každá část, která je jako jmenovatel dnů, dá 1. Výsledek přičteme k předchozím *li*, a to je množství *li* určené dráhy špatného koně. Zbylá půlka *li* je polovina pravidla, o polovinu pravidla zvětšíme zbylé díly a získáme to.[34] Co se nevyčerpá, označí se jako díly.[35]

Poznámka: „Stanovíme 15 dní a nedostatek je 337 a půl *li*“ podle toho, že dobrý kůň za 15 dní ujede celkem 4260 *li*, odečteme prvních 3000 *li* cesty do Qi, určená dráha naproti špatnému koni je 1260 *li*; špatný kůň za 15 dní celkem ujede 1402 a půl *li*, sečteme, kolik ujeli dobrý a špatný kůň a získáme 2662 a půl *li*. Když to porovnáme s 3000 *li*, je to méně o 337 a půl *li*, proto se říká [tento] nedostatek.

Když stanovíme 16 dní, je to víc o 140 *li* podle toho, že dobrý kůň za 16 dní ujede celkem 4648 *li*, odečteme prvních 3000 *li* cesty do Qi, určená dráha naproti špatnému koni je 1648 *li*; špatný kůň za 16 dní celkem ujede 1492 *li*, sečteme, kolik ujeli dobrý a špatný kůň a získáme 3140 *li*. Když to porovnáme s 3000 *li*, přebývá 140 *li*, proto se říká, že je o toto víc. [Řešíme] to „Přebytkem a nedostatkem“. [Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1, získáme množství dní – to je správné množství rozdílu předpokladů bez přebytku a nedostatku. Množstvím *li*, který koně ujeli první den, násobíme 15 dní, to je množství, které rovně urazili během 15 dnů.[36] Když hledáme množství, o které se mezi začátkem a koncem zrychlili nebo zpomalili, sečteme 1 a 14, násobíme 14 a půlíme, to je sebrání průměru. Dále ho necháme vynásobit množstvím *li* zrychlení nebo zpomalení, to jsou pro každého [koně] střední *li* zrychlení nebo zpomalení, proto když je odečteme nebo přičteme k množství, které rovně urazili, získáme určené množství *li*, které urazili za 15 dní. Když hledáme poslední den, násobíme určeným množstvím *li* čitatel dne, [dokud] je to jako jmenovatel dne, [přidáváme] 1, pro každého získáme určené množství *li* ve dílu dne. Proto když pro

[34] „Zbylá“ zde lze rovněž přeložit jako „lichá“, je to tedy polovina, která nevytvoří celou část. K výsledku předchozích výpočtů 1465 a 50/191se tedy přičte 95,5/191.

[35] Toto je jedna z nejdelších metod v *Devíti kapitolách.* Stejně jako u ostatních dlouhých metod, jako jsou (4.XIII), (4.XV) nebo (8.I), se lze domnívat, že byla do textu zařazena až při některé z posledních redakcí. Tomu nasvědčuje i fakt, že úloha zmiňuje Chang'an, hlavní město dynastie západní Han, které před 2. st. př. n. l. neexistovalo.

[36] Liu Hui zde používá slovo *ping* 平, které jinde znamená také průměr, ale zde představuje spíš jakousi „srovnávací hladinu“, tedy základní rychlost, ke které se v průběhu pohybu koní přičítá nebo odčítá.

každého [toto] sečteme s určeným množstvím *li* pro 15 dní, získáme [výsledek]. Co se týče zbylé poloviny *li* pro špatného koně, protože pravidlo dělí celé *li*, zlomíme polovinu *li* na polovinu pravidla a zvětšíme o to zbylé díly, což je v souladu se zadáním.

(7.19) Mějme člověka, který jde s penězi do Shu nakupovat, jeho úrok je 3 [z] 10. Při prvním návratu vrátí 14 000, při dalším 13 000, při dalším 12 000, při dalším 11 000 a při posledním 10 000. Součet všech 5 splátek vyčerpá jistinu i úrok. Ptáme se, kolik měl původně peněz a kolik byl úrok?

Odpověď zní:
Jistina je 30 468 celých a 84 876 z 371 293 dílů měďáku.
Úrok je 29 531 celých a 286 417 z 371 293 dílů měďáku.

(7.XIV) (Postupné splátky jistiny a úroku)

Metoda zní: Stanovme, jako by jistina byla 30 000, pak je nedostatek 1738 a půl měďáku. Když stanovíme 40 000, je to víc o 35 390 a 8 desetin měďáku.

Poznámka: „Stanovme, jako by jistina byla 30 000,“ spolu s úrokem je to 39 000, odečteme vrácené peníze při prvním návratu, ke zbytku přičteme úrok a to je 32 500. Odečteme vrácené peníze při druhém návratu, ke zbytku znovu přičteme úrok a to je 25 350. Odečteme vrácené peníze při třetím návratu, ke zbytku znovu přičteme úrok a to je 17 355. Odečteme vrácené peníze při čtvrtém návratu, ke zbytku znovu přičteme úrok a to je 8261 a půl měďáku. Odečteme vrácené peníze při pátém návratu, tomu by odpovídalo 10 000 měďáků, nedostatek je 1738 a půl měďáku.

Když stanovíme jistinu 40 000, spolu s úrokem je to 52 000, odečteme vrácené peníze při prvním návratu, ke zbytku přičteme úrok a to je 49 400. Odečteme vrácené peníze při druhém návratu, ke zbytku znovu přičteme úrok a to je 47 320. Odečteme vrácené peníze při třetím návratu, ke zbytku znovu přičteme úrok a to je 45 916. Odečteme vrácené peníze při čtvrtém návratu, ke zbytku znovu přičteme úrok a to je 45 390 a 8 dílů [desetin] měďáku. Odečteme vrácené peníze při pátém návratu, tomu by odpovídalo 10 000 měďáků, Zbude 35 390 a 8 dílů měďáku, proto se říká, že je o to víc.

Další metoda: Položíme splátku při posledním návratu 10 000, násobíme ji 10, 13 dá 1, a to je jistina při posledním návratu. Přičteme 11 000, násobíme to 10, 13 dá 1, to je jistina při čtvrtém návratu. Přičteme 12 000, znovu to násobíme 10, 13 dá 1, to je jistina při třetím návratu. Přičteme 13 000, znovu to násobíme 10, 13 dá 1, to je jistina při druhém návratu. Přičteme 14 000, znovu to násobíme 10, 13 dá 1, to je jistina na začátku. Sečteme peníze za 5 návratů a toto od nich odečteme, to je úrok.[37]

[37] Obě metody jsou skutečně ekvivalentní. Když označíme jistinu X a splátky A, B, C, D, E, platí zřejmě $1{,}3(1{,}3(1{,}3(1{,}3(1{,}3X - A) - B) - C) - D) - E) = 0$. To je lineární rovnice pro X a metoda „Přebytku a nedostatku“ zde tedy poskytuje přesné řešení, ovšem pracnější, než Liu Huiův přímý výpočet.

Tato úloha je zajímavá tím, že se jedná očividně o hříčku, která pouze předstírá spojení s reálným světem: přesnost vyjádření i samotná otázka jsou ve skutečnosti zcela nerealistické (ve všech kontextech představitelných v Číně doby Han by bylo logické zjišťovat výši úroku nebo splátek, nikoli zpětně z výše splátek podíl úroku a jistiny; zde jistina i podle své číselné hodnoty není primární údaj). Může se jednat o úlohu, která vede k aplikacím v jiné oblasti, spíše se však zdá, že jejím hlavním cílem je ukázat, jak složité věci se dají metodou „Přebytku a nedostatku“ řešit a povzbudit tak také profesionální sebevědomí studenta matematiky, jak

(7.20) Mějme zeď tlustou 5 *chi*, kterou pronikají dvě myši proti sobě. Velká myš denně o 1 *chi*, malá myš také denně o 1 *chi*. Velká myš [rychlost] denně zdvojnásobí, malá myš [rychlost] denně půlí. Ptáme se, po kolika dnech se potkají? O kolik každá pronikne?

Odpověď zní:

2 celé a 2 ze 17 dílů dne.

Velká myš pronikne o 3 *chi*, 4 celé a 12 ze 17 dílů *cunu*.

Malá myš pronikne o 1 *chi*, 5 celých a 5 ze 17 dílů *cunu*.[38]

(7.XV) (Myši pronikající zdí)

Metoda zní: Stanovme jakoby 2 dny, pak je nedostatek 5 *cunů*. Když stanovíme 3 dny, přebývá 3 *chi* a 7 a půl *cunu*.

Velká myš denně zdvojnásobí, tomu za dva dny odpovídá průnik o 3 *chi*. Malá myš denně půlí, tomu za dva dny odpovídá průnik o 1 *chi* a 5 *cunů*, když to sečteme s průnikem velké myši, odpovídá to 4 *chi* a 5 *cunům*. Když to porovnáme s tloušťkou zdi 5 *chi*, je to nedostatek 5 *cunů*. Když to necháme 3 dny, získáme průnik velké myši 7, průnik malé myši 1 *chi*, 7 a půl *cunu*, sečteme a odečteme od toho tloušťku zdi 5 *chi*, zbývá navíc 3 *chi*, 7 a půl *cunu*. Když to hledáme metodou „Přebytku a nedostatku“, získáme výsledek. Násobíme průnikem za poslední den čitatel dílů dne, [dokud] je jako jmenovatel dílů dne, [přidáváme] 1, tím získáme pro každou, o kolik pronikla v dílech dne. Proto když pro každou přidáme určený průnik za dva dny, je to v souladu se zadáním.

---

tomu bylo u podobně nepraktických úloh v babylonské matematice (viz [Høyrup 1994], s. 80–83).

[38] Podobně jako v úloze (7.18) lineární závislost platí jen v rámci posledního dne, proto musí být oba předpoklady v jeho hranicích. Pro úplnost dodejme, že dolní mez je celá část řešení rovnice $5 = 1 + 2^x - 2^{-x+1}$, zatímco lineární část je dána rovnicí $1/2 = (4 + 1/4)\, y$.