4 Menší šířka

Shao Guang 少廣 – Pro určení sebrání a výplní pravoúhlých a kruhových

Tato kapitola obsahuje dvě velmi odlišné části. První se zabývá efektivními metodami součtu řetězových zlomků. Toto je tradiční téma, doložené již v *Knize výpočtů*, které dalo kapitole název. Kupodivu zapsané postupy často nejsou ideální a komentátoři je modifikují. Druhá část začíná úlohou (4.12) a zabývá se výpočtem odmocnin. Byla zjevně přidána k původní čtvrté kapitole až během redakce *Devíti kapitol* za dynastie Han čistě proto, aby byla zachována „magická" devítka. Metody „rozložení kruhu" a zejména „rozložení koule", přidané za příslušné odmocniny, se zdají být pouhou teoretickou spekulací bez praktické motivace, a Liu Huiovy a Zu Gengovy výzkumy, které poslední metoda inspirovala, patří k nejabstraktnějším výsledkům čínské matematiky.

Zajímavá místa:

- ☐ Úvodní obecná metoda součtu posloupnosti jednotkových zlomků a komentář k ní – (4.I).
- ☐ Algoritmus druhé odmocniny – (4.XIII) – viz též ilustrační rozpis kroků v pozn. 33.
- ☐ Liu Huiovo doporučení aproximace iracionálního kořene desetinným rozvojem v komentáři za metodou (4.XIII) – str. 112.
- ☐ Liu Huiovo odvození „Rozkladu kruhu" jako inverzní operace k výpočtu „Kruhového pole" – komentář k (4.XIV).
- ☐ Algoritmus třetí odmocniny – (4.XV), ilustrační rozpis v pozn. 42.
- ☐ Metoda „Rozkladu koule" a komentáře k ní, včetně citací ztracených spisů Zhang Henga a Zu Genga – (4.XVI). Pozoruhodná jsou mimo jiné rezignace Liu Huie na vyřešení problému a Zu Gengův triumfalismus poté, co řešení nalezl.

Důležité pojmy této kapitoly (k. = „pouze v komentářích"):

Drobná množství (*wei shu* k. 微數) – desetinné zlomky aproximující odmocninu.

Krokovat (*bu* 步) – posunovat „vypůjčenou tyčinku" a případně další členy odmocňovací tabulky o určitý počet míst do vyšších řádů.

Kružnice, vykroužit (*gui* k. 規) – termín použitý Zu Gengem v souvislosti s konstrukcí (ořezáním) „kostek" pro odvození metody „rozkladu koule",

Nerozložitelné (*bu ke kai* 不可開) – číslo, které nemá celou (nebo po úpravách racionální) odmocninu.

Obal (*lian* k. 廉) – Liu Hui tak nazývá hranoly, jejichž podstava je na krychli posledně určeného „usouzeného" a výška je určena již dříve vypočtenou částí odmocniny.

Označit (*ming* 命) – 1. V metodě „Rozkladu čtverce" se „nerozložitelný" zbytek spojí s dosud vypočítanou celou částí odmocniny, „označí se stranou" (jde zřejmě o aproximaci zlomkem). Liu Hui nicméně „označení stranou" chápal jako abstraktní pojmenování iracionální mocniny „strana z ...". 2. (k.) Liu Hui takto nazývá násobení

„usouzeného" obsahem „spodního", čímž se získá obsah čtverce nebo objem krychle k odečtení.

Pevný bod (*shu* k. 樞) – střed kružnice při konstrukci „spojených čtvercových kleneb" v Zu Gengově komentáři.

Redukovat (*zhe* 折) – V této kapitole znamená posunou „určené pravidlo" o řád níž. Běžnější význam je „půlit".

Roh (*yu* k. 隅) – Liu Huiův termín pro čistou mocninu „usouzeného" (čtverec nebo krychli se stranou velikosti poslední usouzené číslice).

Rozpínat (*zhang* k. 張) – Liu Hui používá toto sloveso pro konstrukci pomocných ploch nebo těles podél čtverce nebo krychle, odpovídajícího již vypočtené části odmocniny.

Spodní (*xia* 下) – 1. V aplikacích metody „Menší šířky" se tak označuje nejmenší zlomek, tj. zlomek s největším jmenovatelem, od nějž se začíná roznásobovat. 2. V metodách odmocnin spodní řádek pomocné odmocňovací tabulky, který obsahuje vypůjčenou tyčinku a po usouzení se do něj pokládá příslušná mocnina „usouzeného" (o stupeň nižší, než je stupeň počítané odmocniny).

Spojené čtvercové klenby (*mou he fang gai* k. 牟合方蓋) – Liu Huiův termín pro útvar, složený z opsaných čtverců kolem jednotlivých vodorovných řezů koulí (viz pozn. 47).

Střední řádka (*zhong hang* 中行) – pozice v odmocňovací tabulce třetí odmocniny, kde se vytváří trojnásobek součinu „usouzeného" s již dříve získanou částí odmocniny. Odpovídá kvadratickému členu binomického rozvoje třetí mocniny.

Stupeň (*deng* 等) – řád nebo pozice v rámci jednoho čísla na početní desce.

Tloušťka (*hou bo* k. 厚薄) – v algoritmu třetí odmocniny je synonymní se stranou „rohu", tj. „usouzeným", ale vztahuje se k příčnému rozměru „desek" podél již odečtené části „obsahu".

Usoudit (*yi* 議) – zkusmo nalézt nejvyšší koeficient, jenž násoben sám sebou a případně „určeným pravidlem" dává číslo menší než momentální základ odmocniny („obsah"). Například při odmocňování 5 bychom „usoudili" číslo 2, protože 2 x 2 je menší než 5, ale 3 x 3 už ne. Stejné slovo označuje i výsledek usouzení, překládám „usouzené".

Určená délka (*ding chang* k. 定長) – v algoritmu odmocniny označuje již vypočtenou část odmocniny.

Určené pravidlo (*ding fa* 定法) – pomocné číslo při výpočtu odmocnin, které se násobí „usouzeným" a výsledek se poté odečítá od „obsahu", podobně jako se při dělení „pravidlo" (dělitel) násobí posledně získanou číslicí podílu a následně odečítá od dělence.

Válec (*yuan qun* k. 圓囷) – Liu Hui používá tento termín při diskusi o kouli. Klasický text nazývá (v 5. kapitole) stejný typ útvaru „kruhové *baodao*".

Vypůjčená tyčinka (*jie suan* 借筭) – číslo 1 v určitém řádu. Označení řádu původního čísla (tj. mocniny), který odpovídá právě počítanému řádu odmocniny.

(4.I) Menší šířka

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Pole o 1 *mu* má šířku 1 krok a podélnou 240 kroků. Chceme ubrat z jeho podélné něco málo a přidat to k šířce, proto se říká „menší šířka“.

Metoda zní: Položíme celé kroky a čitatele a jmenovatele dílů [kroků], nejnižším jmenovatelem po řadě vynásobíme všechny čitatele i celky.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Násobení celku jmenovatelem je uvádění do propojení s příslušným zlomkem. Násobení čitatelů jmenovatelem je přizpůsobování příslušných čitatelů.

V každém se vydělí čitatel jmenovatelem a položí se vlevo. Po označení a uvedení dílů do propojení znovu jmenovatelem po řadě vynásobíme všechny čitatele i [celou část] již uvedenou do propojení, všechny uvedeme do propojení a sjednotíme [jejich jmenovatele], součet je pravidlo.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Když jsou všechny čitatele uvedeny do propojení, lze je sečíst na pravidlo. Měla by se také[1] použít metoda „Spojení dílů“, [ale] jednotlivých množství by bylo velice mnoho. Pokud bychom [jen] násobili, byly by výpočty nanejvýš pracné,[2] proto byla [pro tento případ] vytvořena navíc tato metoda, aby byla úspornější a kratší.

Položíme množství kroků hledaného,[3] násobené sebráním dílů celé části[4] tvoří obsah.

Zde je šířka pole pravidlo, sebrané kroky pro 1 *mu* tvoří obsah. [Protože] v pravidle jsou díly, bylo by na místě sjednotit jejich jmenovatele, přizpůsobit jejich čitatele, sjednoceným [jmenovatelem] násobit pravidlo i obsah a součet přizpůsobených [čitatelů] vzít jako pravidlo. Zde se jmenovatelem násobí celé kroky i čitatele dílů, a pak [pro všechny čitatele] [dokud je] čitatel jako jmenovatel, [přidáváme] 1. Dále se [tyto podíly] sečtou s celou částí pravidla, tím pádem pravidlo i obsah narostou a jejich význam je totožný [jako na začátku]. Proto když [dokud jsou] jako pravidlo, [přidáváme] 1, získáme množství kroků podélné.

[Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1 a získáme kroky podélné.

(4.1) Mějme pole široké 1 a půl kroku. Hledáme pole velikosti 1 *mu*, ptáme se, kolik bude podélná?

---

[1] Zde je v Bao Huanzhi’ově edici mezera mezi znaky *yi* 亦 a *yi* 宜. Většina edic vkládá do této mezery záporku *bu*, protože Li Chunfeng vysvětluje, proč se nepoužívá metoda „Spojení dílů“. Nicméně i původní text je přijatelný, naopak znění 亦不宜 je problematické (lze říci, že znaky 不 a 亦 tu nemohou být oba zároveň). Proto [Guo Shuchun 2004b] i [Chemla & Guo Shuchun 2004] používají původní text Bao Huanzhi’ovy edice a Dai Zhenových vydání. Přikláním se k zachování kontrastu mezi „možným použitím“ a jeho nevýhodností.

[2] Bylo by také možné překládat konkrétněji, že „počty použitých početních tyčinek by byly příliš velké“. Vazba počítání na manipulaci konkrétními objekty byla velmi silným důvodem pro úspornost. Zde je tento aspekt zdůrazněn použitím znaku 筭, tedy „početní tyčinka“.

[3] Jedná se o plochu, která se dělí. Viz následující příklad.

[4] „Sebrání dílů celé části“ (v originále *quan bu ji fen* 全部積分) je rovné jmenovateli sjednoceného zlomku. Klasický text se vyhýbá tomuto označení, protože v průběhu této metody se jednotný jmenovatel formálně vůbec nezavádí. Navíc ve dvou případech (viz metoda (4.XII)) se jako *ji fen* používá jiný než nejmenší společný jmenovatel, což metodu obecně odlišuje od prostého sčítání zlomků.

Odpověď zní: 160 kroků.

(4.II) (Šířka s jedním zlomkem)

Metoda zní: Spodní[5] je polovina, to je 1 ze 2 dílů. Z 1 budou 2, z poloviny bude 1, jejich sečtením vznikne 3, to je pravidlo. Položíme pole 240 kroků, také jej násobíme 2 za 1, jako obsah, [kolikrát je] obsah jako pravidlo, takové získáme množství kroků podélné.

(4.2) Mějme pole široké 1 a půl a 1 ze 3 dílů kroku. Hledáme pole velikosti 1 *mu*, ptáme se, kolik bude podélná?

Odpověď zní: 130 celých a 10 z 11 dílů kroku.

(4.III) (Šířka se dvěma zlomky)

Metoda zní: Spodní jsou 3 díly, z 1 bude 6, z poloviny bude 3, z 1 ze 3 dílů budou 2, jejich sečtením vznikne 11, to je pravidlo. Položíme pole 240 kroků, také jej násobíme 6 za 1, jako obsah, [kolikrát je] obsah jako pravidlo, takové získáme množství kroků podélné.

(4.3) Mějme pole široké 1 a půl, 1 ze 3 dílů a 1 ze 4 dílů kroku. Hledáme pole velikosti 1 *mu*, ptáme se, kolik bude podélná?

Odpověď zní: 115 celých a 1 z 5 dílů kroku.

(4.IV) (Šířka se třemi zlomky)

Metoda zní: Spodní jsou 4 díly, z 1 bude 12, z poloviny bude 6, z 1 ze 3 dílů budou 4, z 1 ze 4 dílů budou 3, jejich sečtením vznikne 25, to je pravidlo. Položíme pole 240 kroků, také jej násobíme 12 za 1, jako obsah, [kolikrát je] obsah jako pravidlo, takové získáme množství kroků podélné.[6]

(4.4) Mějme pole široké 1 a půl, 1 ze 3 dílů, 1 ze 4 dílů a 1 z 5 dílů kroku. Hledáme pole velikosti 1 *mu*, ptáme se, kolik bude podélná?

Odpověď zní: 105 celých a 15 z 137 dílů kroku.

(4.V) (Šířka se čtyřmi zlomky)

Metoda zní: Spodní je 5 dílů, z 1 bude 60, z poloviny bude 30, z 1 ze 3 dílů bude 20, z 1 ze 4 dílů bude 15, z 1 z 5 dílů bude 12, jejich sečtením vznikne 137, to je pravidlo. Položíme pole 240 kroků, také jej násobíme 60 za 1, jako obsah, [kolikrát je] obsah jako pravidlo, takové získáme množství kroků podélné.

(4.5) Mějme pole široké 1 a půl, 1 ze 3 dílů, 1 ze 4 dílů, 1 z 5 dílů a 1 ze 6 dílů kroku. Hledáme pole velikosti 1 *mu*, ptáme se, kolik bude podélná?

Odpověď zní: 97 celých a 47 ze 49 dílů kroku.

---

[5] Tj. s nejvyšším jmenovatelem. Patrně se výpočet prováděl při rozložení zlomků nad sebou od nejmenšího po největšího jmenovatele. Podobně i v dalších metodách.

[6] Výsledek má jenom jmenovatel 5, protože v čitateli 240 = 5 x 48 a ve jmenovateli 25 = 5 x 5.

(4.VI) (Šířka s pěti zlomky)

Metoda zní: Spodní je 6 dílů, z 1 bude 120,[7] z poloviny bude 60, z 1 ze 3 dílů bude 40, z 1 ze 4 dílů bude 30, z 1 z 5 dílů bude 24, z 1 ze 6 dílů bude 20, jejich sečtením vznikne 294, to je pravidlo. Položíme pole 240 kroků, také jej násobíme 120 za 1, jako obsah, [kolikrát je] obsah jako pravidlo, takové získáme množství kroků podélné.[8]

(4.6) Mějme pole široké 1 a půl, 1 ze 3 dílů, 1 ze 4 dílů, 1 z 5 dílů, 1 ze 6 dílů a 1 ze 7 dílů kroku. Hledáme pole velikosti 1 *mu*, ptáme se, kolik bude podélná?

Odpověď zní: 92 celých a 68 ze 121 dílů kroku.

(4.VII) (Šířka se šesti zlomky)

Metoda zní: Spodní je 7 dílů, z 1 bude 420,[9] z poloviny bude 210, z 1 ze 3 dílů bude 140, z 1 ze 4 dílů bude 105, z 1 z 5 dílů bude 84, z 1 ze 6 dílů bude 70, z 1 ze 7 dílů bude 60, jejich sečtením vznikne 1089, to je pravidlo. Položíme pole 240 kroků, také jej násobíme 420 za 1, jako obsah, [kolikrát je] obsah jako pravidlo, takové získáme množství kroků podélné.[10]

(4.7) Mějme pole široké 1 a půl, 1 ze 3 dílů, 1 ze 4 dílů, 1 z 5 dílů, 1 ze 6 dílů, 1 ze 7 dílů a 1 z 8 dílů kroku. Hledáme pole velikosti 1 *mu*, ptáme se, kolik bude podélná?

Odpověď zní: 88 celých a 232 ze 761 dílů kroku.

(4.VIII) (Šířka se sedmi zlomky)

Metoda zní: Spodní je 8 dílů, z 1 bude 840, z poloviny bude 420, z 1 ze 3 dílů bude 280, z 1 ze 4 dílů bude 210, z 1 z 5 dílů bude 168, z 1 ze 6 dílů bude 140, z 1 ze 7 dílů bude 120, z 1 z 8 dílů bude 105, jejich sečtením vznikne 2283, to je pravidlo. Položíme pole 240 kroků, také jej násobíme 840 za 1, jako obsah, [kolikrát je] obsah jako pravidlo, takové získáme množství kroků podélné.[11]

(4.8) Mějme pole široké 1 a půl, 1 ze 3 dílů, 1 ze 4 dílů, 1 z 5 dílů, 1 ze 6 dílů, 1 ze 7 dílů, 1 z 8 dílů a 1 z 9 dílů kroku. Hledáme pole velikosti 1 *mu*, ptáme se, kolik bude podélná?

Odpověď zní: 84 celých a 5964 ze 7129 dílů kroku.

---

[7] 120 není nejmenší společný násobek, výpočet zde proběhl mechanickým „jmenovatele se spolu vynásobí". Pro součet těchto zlomků by stačil jmenovatel 60. Tato metoda tedy zjevně nebyla vytvořena aplikací obecné metody (4.I). Srv. naopak (4.VII) níže.

[8] Výsledek má jenom jmenovatel 49, protože v čitateli 240 x 120 = 6 x 4800 a ve jmenovateli 294 = 6 x 49.

[9] Toto již je nejmenší společný násobek jmenovatelů, stejně tak v následujících čtyřech metodách. Nedokonale je postup proveden opět v závěrečné metodě (4.XII). Viz též pozn. 7 a Li Chunfengovu glosu za metodou (4.XII).

[10] Výsledek má jenom jmenovatel 121, protože v čitateli 240 x 420 = 9 x 1120 a ve jmenovateli 1089 = 9 x 121.

[11] Výsledek má jenom jmenovatel 762, protože v čitateli 240 x 840 = 3 x 6720 a ve jmenovateli 2283 = 3 x 761.

(4.IX) (Šířka s osmi zlomky)

Metoda zní: Spodní je 9 dílů, z 1 bude 2520, z poloviny bude 1260, z 1 ze 3 dílů bude 840, z 1 ze 4 dílů bude 630, z 1 z 5 dílů bude 504, z 1 ze 6 dílů bude 420, z 1 ze 7 dílů bude 360, z 1 z 8 dílů bude 315, z 1 z 9 dílů bude 270, jejich sečtením vznikne 7129, to je pravidlo. Položíme pole 240 kroků, také jej násobíme 2520 za 1, jako obsah, [kolikrát je] obsah jako pravidlo, takové získáme množství kroků podélné.

(4.9) Mějme pole široké 1 a půl, 1 ze 3 dílů, 1 ze 4 dílů, 1 z 5 dílů, 1 ze 6 dílů, 1 ze 7 dílů, 1 z 8 dílů, 1 z 9 dílů a 1 z 10 dílů kroku. Hledáme pole velikosti 1 *mu*, ptáme se, kolik bude podélná?

Odpověď zní: 81 celých a 6939 ze 7381 dílů kroku.

(4.X) (Šířka s devíti zlomky)

Metoda zní: Spodní je 10 dílů, z 1 bude 2520, z poloviny bude 1260, z 1 ze 3 dílů bude 840, z 1 ze 4 dílů bude 630, z 1 z 5 dílů bude 504, z 1 ze 6 dílů bude 420, z 1 ze 7 dílů bude 360, z 1 z 8 dílů bude 315, z 1 z 9 dílů bude 270, z 1 z 10 dílů bude 252, jejich sečtením vznikne 7381, to je pravidlo. Položíme pole 240 kroků, také jej násobíme 2520 za 1, jako obsah, [kolikrát je] obsah jako pravidlo, takové získáme množství kroků podélné.

(4.10) Mějme pole široké 1 a půl, 1 ze 3 dílů, 1 ze 4 dílů, 1 z 5 dílů, 1 ze 6 dílů, 1 ze 7 dílů, 1 z 8 dílů, 1 z 9 dílů, 1 z 10 dílů a 1 z 11 dílů kroku. Hledáme pole velikosti 1 *mu*, ptáme se, kolik bude podélná?

Odpověď zní: 79 celých a 39 631z 83 711 dílů kroku.

(4.XI) (Šířka s deseti zlomky)

Metoda zní: Spodní je 11 dílů, z 1 bude 27 720, z poloviny bude 13 860, z 1 ze 3 dílů bude 9240, z 1 ze 4 dílů bude 6930, z 1 z 5 dílů bude 5544, z 1 ze 6 dílů bude 4620, z 1 ze 7 dílů bude 3960, z 1 z 8 dílů bude 3465, z 1 z 9 dílů bude 3080, z 1 z 10 dílů bude 2772 a z 1 z 11 dílů bude 2520, jejich sečtením vznikne 83 711, to je pravidlo. Položíme pole 240 kroků, také jej násobíme 27 720 za 1, jako obsah, [kolikrát je] obsah jako pravidlo, takové získáme množství kroků podélné.

(4.11) Mějme pole široké 1 a půl, 1 ze 3 dílů kroku, 1 ze 4 dílů kroku, 1 z 5 dílů kroku, 1 ze 6 dílů kroku, 1 ze 7 dílů kroku, 1 z 8 dílů kroku, 1 z 9 dílů kroku, 1 z 10 dílů kroku, 1 z 11 dílů kroku a 1 z 12 dílů kroku. Hledáme pole velikosti 1 mu, ptáme se, kolik bude podélná?

Odpověď zní: 77 celých a 29 183 z 86 021 dílů kroku.

(4.XII) (Šířka s jedenácti zlomky)

Metoda zní: Spodní je 12 dílů, z 1 bude 83 160,[12] z poloviny bude 41 580, z 1 ze 3 dílů bude 27 720, z 1 ze 4 dílů bude 20 790, z 1 z 5 dílů bude 16 632, z 1

[12] Tento jmenovatel také není nejmenším společným násobkem, násobit předchozí společný jmenovatel 27 720 třemi bylo zcela zbytečné, protože jmenovatel 12, který přibyl jako poslední zlomek, je samozřejmě již zahrnut ve jmenovateli, který musel být soudělný jak se 3, tak se 4. Je pozoruhodné, jak se mohli autoři této pasáže klasického textu dopustit takto elementární chyby, a není divu, že Li Chunfeng na ni upozorňuje. Připomeňme, že Li Chunfeng byl

ze 6 dílů bude 13 860, z 1 ze 7 dílů bude 11 880, z 1 z 8 dílů bude 10 395, z 1 z 9 dílů bude 9 240, z 1 z 10 dílů bude 8 316, z 1 z 11 dílů bude 7 560 a z 1 z 12 dílů bude 6 930, jejich sečtením vznikne 258 630, to je pravidlo. Položíme pole 240 kroků, také jej násobíme 83 160 za 1, jako obsah, [kolikrát je] obsah jako pravidlo, takové získáme množství kroků podélné.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Při vytváření metod vždy platí, že krátké a úsporné jsou nejlepší. Bylo by možné říci: „Spodní je 12 dílů, z 1 bude 27 720, z poloviny bude 13 867, z 1 ze 3 dílů bude 9 240, z 1 ze 4 dílů bude 6 930, z 1 z 5 dílů bude 5 544, z 1 ze 6 dílů bude 4 620, z 1 ze 7 dílů bude 3 960, z 1 z 8 dílů bude 3 465, z 1 z 9 dílů bude 3 080, z 1 z 10 dílů bude 2 772, z 1 z 11 dílů bude 2 520 a z 1 z 12 dílů bude 2 310. Sečteme-li je, je to 86 021, to je pravidlo. Položíme pole 240 kroků, také jej násobíme 27 720 za 1, jako obsah, [kolikrát je] obsah jako pravidlo, takové získáme množství kroků podélné.“ Touto metodou také získáme [výsledek] a není [tak] pracná.

(4.12) Mějme sebrání 55 225 kroků. Ptáme se, kolik to tvoří čtverce?[13]
Odpověď zní: 225 kroků.

(4.13) Dále mějme sebrání 25 281 kroků. Ptáme se, kolik to tvoří čtverce?
Odpověď zní: 159 kroků.

(4.14) Dále mějme sebrání 71 824 kroků. Ptáme se, kolik to tvoří čtverce?
Odpověď zní: 268 kroků.

(4.15) Dále mějme sebrání 564 752 kroků. Ptáme se, kolik to tvoří čtverce?
Odpověď zní: 751 kroků.

(4.16) Dále mějme sebrání 3 972 150 625 kroků. Ptáme se, kolik to tvoří čtverce?
Odpověď zní: 63 205 kroků.

(4.XIII) Rozklad čtverce[14]

Hledání jedné strany čtvercové výplně.

Metoda zní: Položíme sebrání jako obsah.[15] Vypůjčíme si jednu tyčinku,[16] krokujeme ji o jeden stupeň navíc.

To znamená, že strana 100 je 10, strana 10 000 je 100.

---

astronom a hledání nejmenších společných násobků a soudělností bylo jedním z nejčastějších úkonů při astronomických a kalendářních výpočtech. Zajímavé ovšem je, že první případ použití zbytečně velkého jmenovatele nijak nekomentuje.

Ze zbytečně velkého společného jmenovatele také vyplývá, že výsledek má jmenovatel menší (odpovídající součtu čitatelů, pokud by se jako jmenovatel použil nejmenší společný násobek).

[13] Tedy kolik je strana čtverce dané plochy.

[14] V originále *kai fang* 開方. *Kai* je doslova „otevřít“, ale má i celou řadu méně konkrétních významů, například „oddělit“, proto zde překládám takto.

[15] Všimněme si totožnosti termínů pro dělení a odmocnění.

[16] V originále *jie yi suan* 借一算. Toto spojení se záhy lexikalizovalo ve významu značky právě odmocňovaného řádu, v některých metodách pozdější čínské matematiky pak vystupovalo přímo jako proměnná, která mohla paradoxně nabývat i jiných hodnot než 1.

Usoudíme,[17] výsledkem vynásobíme [jen] jednou vypůjčenou tyčinku, to je pravidlo, a zmenšujeme jím.[18]

Nejprve získáme stranu hnědé [výplně] A.[19] Spodní a vrchní se spolu označí,[20] takže se odečítá [pravidlo] násobené samo sebou.

Po dělení zdvojením pravidla vytvoříme určené pravidlo.[21]

Zdvojení předem rozpíná určený rozsah[22] rumělkových výplní u obou stran, která se použije v dalším dělení, proto se tomu říká „určené pravidlo".

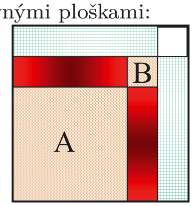
Pokud opět zmenšujeme [rozkladem čtverce],[23] redukujeme [určené] pravidlo a položíme dolů.[24]

---

[17] V originále *yi* 議. „Usouzení" znamená zkusmé nalezení nejvyššího čísla, jehož mocnina je menší než část „obsahu" oddělená značkou („vypůjčenou tyčinkou"). Podobnost tohoto postupu s dělením není náhodná.

[18] Zde narážíme na dvojí význam slovesa *chu*, totiž původní „odebírat, odčítat" a z něj odvozený „dělit". Klasický text popisuje odmocňování jako dělení, takže nejprve připraví situaci, podobnou dělení, tím, že uměle vytvoří „pravidlo", kterým se pak má „zmenšovat". Hlavní operací dělení je odčítání součinu „usouzené číslice" a „pravidla" od „obsahu". V tomto případě „zmenšování pravidlem" znamená právě tento krok, jinak řečeno, „zmenšování", které tu text zmiňuje, neznamená výpočet podílu, ale odečtení součinu momentálně vypočítaného podílu a pravidla od obsahu.

[19] V originále *huang jia zhi mian* 黄甲之面. V ilustrativním obrázku jsou jednotlivé kroky výpočtu odmocniny znázorněny barevnými ploškami:



Prvním usouzením získáme stranu hnědé (šrafované) plochy A, tu umocníme a odečteme od sebrání (velký čtverec). Následně se usoudí strana hnědé plochy B, umocní a odečte od sebrání spolu s dvojnásobkem součinu stran ploch A a B (rumělkové – stínované – plochy). V dalším kroku by se totéž opakovalo s plochou C (neoznačena) a odpovídajícími tyrkysovými (síťovanými) „obaly".

[20] V originále *shang xia xiang ming* 上下相命. Se slovem *ming* jsme se setkali při vytváření zlomku z nesoudělného čísla, kde ho překládám označit. Zde se jedná zjevně o násobení, *ming* tedy obecněji znamená něco jako „vytvořit vztah měnící hodnotu", případně „udílet [změnu hodnoty]".

[21] V originále *dingfa* 定法. Při dalším dělení se musí dělit nejen pravidlem, které získáme až po usouzení další číslice, ale i již daným, určeným pravidlem, které vyplývá z předchozích kroků. V algebraickém vyjádření rozvojem dvojčlenu $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ je „pravidlo" b a „určené pravidlo" $2a$, metoda je ale složitější kvůli ošetření řádových posuvů.

[22] Zde Liu Hui používá termín *mao* 袤, který se jinak objevuje u prostorových těles.

[23] Zde se výpočet zastavuje v případě, že po dělení/odečtení nezbyl žádný zbytek. Pozoruhodné je, že se nejprve vytváří „určené pravidlo", které bude potřeba pouze v případě pokračování operace. Jedna iterace výpočtu je tím úplně popsána, a proto se v následujících popisech už říká jen „postupujeme jako v prvním kroku." Určené pravidlo je navíc možné použít pro aproximaci výsledku v případě, že odmocnina je iracionální. Viz [Chemla & Guo Shuchun 2004] str. 326, [Fu Hailun 2003], str. 42.

Když chceme odečíst rumělkové výplně, v zásadě by bylo na místě vedle položit výsledek, který tvoří čtverec, zdvojit ho na určené pravidlo, redukovat a násobit usouzeným a toto pak odečíst. Tím by bylo na místě znovu posunovat [určený dělitel od jednotek] až se zastaví, teprve poté se mohou spolu označit, proto se učiní, že se z vyššího redukuje dolů.[25]

Znovu položíme vypůjčenou tyčinku, krokujeme ji jako prve, dalším usouzeným ji jednou násobíme.

Chceme odečíst hnědou výplň B v rohu rumělkových výplní, myšlenka je jako u prvního získaného výsledku.

Výsledek v kopii přičteme k určenému pravidlu a zmenšujeme jím. Kopii výsledku přiřadíme k určenému pravidlu.[26]

Strana hnědé B [výplně] se přidává k určenému pravidlu podruhé, tím se rozpíná rozsah dvou tyrkysových výplní.

Pokud opět zmenšujeme [rozkladem čtverce], redukujeme stejně jako předtím. Pokud nelze rozložit do konce, je to nerozložitelné a je na místě označit to stranou.[27]

Některé metody přičtou vypůjčenou tyčinku k určenému pravidlu a tím se označí díl. I když je to zhruba blízké, nelze to používat. Kdykoli rozkládáme sebrání na jeho stranu, strana násobená sama sebou musí opět vrátit toto sebrání. Pokud se nepřidá vypůjčená tyčinka a takto se označí díly, bude to vždy o něco méně. Pokud se přidá vypůjčená tyčinka a takto se označí díly, bude to naopak o něco více. Toto množství nelze úplně určit. Proto pouze když se označí stranou, nic se neztrácí. Podobně při dělení 10 třemi označujeme zbytek jako 1 ze 3 dílů a lze zpětně získat původní množství.

Pokud se neoznačuje stranou, přičte se určené pravidlo jako v předchozích případech a hledají se drobná množství[28] odmocniny. Bezejmenná drobná množství vytvoří čitatele dílů, po prvním posunu zpět bude mít jmenovatel 10, po druhém

---

[24] V originále *zhe fa er xia* 折法而下. *Zhe* znamená doslova lámat. Míní se tím posun o řád níž, protože se násobí číslem o řád nižším.

[25] Liu Hui vysvětluje, že místo zcela nového určení řádu „určeného pravidla" se posunuje pouze o řád níž a tyto operace jsou ekvivalentní.

[26] „Výsledek" je zde výsledek předchozího násobení vypůjčené tyčinky. Přičítá se „v kopii" (*fu*, jindy překládám „vedle"), protože zároveň zůstává na původním místě. Po „zmenšení" se stejné číslo přičte k určenému pravidlu podruhé, protože tyrkysové obdélníky jsou dva. Slovo „kopie" je v tomto případě možná chybná záměna za podobně znějící „opět".

[27] Další formální paralela s dělením. Stejně jako se po dělení zbytek „označí pravidlem" (tj. vytvoří se zlomek s „pravidlem" ve jmenovateli), zde se „označí stranou". Obsah této paralely je však možné jen odhadovat. V komentářích k dalším metodám, zejména k metodě (4.XVI), se „strana" (*mian*) používá ve významu druhé odmocniny, dokonce se opakuje použití slovesa *ming*. To zde zřejmě nese zbytky významu „pojmenovat", „označit stranou" tedy znamená **vyjádřit jako stranu**. Výhodou tohoto postupu je, že násobením strany sebou samou získáme původní číslo. V tomto smyslu se „nic neztrácí", jak o tom píše Liu Hui, protože mezi mocninou a odmocninou zůstává jednoznačný vztah.

[28] V originále *wei shu* 微數. Z Liu Huiova komentáře nelze z jistotou říci, zda je chápal jako desetinná čísla (s pevnými desetinnými jmenovateli) nebo spíš jen jako zlomky, které bylo možné zkrátit.

posunu zpět bude mít jmenovatel 100. Čím dál zpět budeme posunovat, tím jemnější budou části, a tak i když z rumělkových výplní něco zanedbáme,[29] nestojí to za řeč.

Pokud obsah obsahuje díly, uvedeme je do propojení a zahrneme jmenovatele a to bude určený obsah, který pak rozkládáme. Poté rozkládáme jeho jmenovatel a zmenšujeme na oplátku.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Pokud lze jmenovatel rozložit, znamená to, že sebrání sečtených a do propojení uvedených [množství] na počátku odpovídalo dvěma jmenovatelům.[30] Po rozkladu [čitatele] ještě zbývá jeden jmenovatel [navíc], proto se rozkládá jmenovatel dílů, hledá se jednoduchý jmenovatel, který vytvoří pravidlo, aby se jím vydělilo na oplátku.

Pokud je jmenovatel nerozložitelný, násobíme opět jmenovatelem určený obsah a pak rozkládáme. Poté dáme, [dokud je] jako jmenovatel, [přidávat] 1.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Pokud nelze jmenovatel rozložit, je původně jediný jmenovatel. Znovu ho násobíme jmenovatelem a pak odpovídá dvěma jmenovatelům. Po odmocnění také zbývá jeden jmenovatel, proto dáme, [dokud je] jako jeden jmenovatel, [přidávat] 1 a získáme celou část strany.

Jinak poznamenejme k této metodě:[31] „Rozklad čtverce" je hledání strany čtvercové výplně. „Vypůjčená tyčinka" znamená, že si vypůjčíme jednu početní tyčinku, která pouze označuje pozici, na níž je položena, a nemá skutečný obsah toho, čím se dělí sebrání.[32] Z rohů čtverce získáme stranu, proto umísťujeme vypůjčenou tyčinku do spodní [části tabulky]. „Krokujeme ji o jeden stupeň navíc" znamená, že když se [strana] čtverce 10 vynásobí sama sebou, sebrání je 100, když se [strana] čtverce 100 vynásobí sama sebou, sebrání je 10 000, proto se přeskočí stupeň až na 100, ale říká se tomu 10, až na 10 000, ale říká se tomu 100. „Usoudíme, výsledkem vynásobíme [jen] jednou vypůjčenou tyčinku, to je pravidlo, a zmenšujeme jím" znamená, že nejprve získáme stranu hnědé [výplně] A, která se spolu se čtvercem jakožto sebráním vynásobí. Proto když zmenšujeme rozkladem čtverce, necháme ještě spodní a dolní stranu se spolu označit, takže se odčítá násobená sama sebou. „Po dělení zdvojením pravidla vytvoříme určené pravidlo" znamená, že sebrání obsahu není vyčerpáno, musí se znovu dále dělit, proto se rozepne podél obou stran určený rozsah rumělkových výplní, které se použijí v dalším dělení, proto se říká „určené pravidlo". „Pokud opět zmenšujeme [rozkladem čtverce], redukujeme [určené] pravidlo a položíme dolů" znamená, že když chceme odečíst rumělkové výplně, v zásadě by bylo na místě vedle položit výsledek, který tvoří čtverec, zdvojit ho na určené pravidlo, redukovat a násobit usouzeným a toto pak odečíst. Tím by bylo na místě

---

[29] Zde se přidržuji znění Guo Shuchunovy edice s výhradou. Ve všech edicích až do Qian Baocongovy je zde text 朱冪雖有所乘之數. Qian Baocong považuje sloveso 乘 za chybný opis znaku *qi* 棄. Podle mého názoru však není zcela vyloučeno, že 乘 zde neznamená násobení, ale jedná se o zápis znaku *sheng* 剩 („zbývající"), který patrně vznikl jen o málo později než Liu Huiův komentář (asi nejstarší použití je v kronice dynastie Severní Wei (Wei Shu), která byla sepsána v 2. pol. 6. století).

[30] Tato věta znamená, že odmocnitelnost jmenovatele ukazuje, že obsahuje „dvakrát" (tj. na druhou) nějaký racionální jmenovatel výsledku.

[31] Li Chunfeng rekapituluje metodu i Liu Huiův komentář. To naznačuje, že jeho komentář byl původně oddělený od textu samotného.

[32] Zde je opozice *ming* 名 – *shi* 實, tedy povrchního, konvenčního názvu a reálného, nezávislého, pravého obsahu. „Obsah" zde tedy nenese význam dělence.

znovu krokovat [určené pravidlo od jednotek] až se zastaví, teprve poté se mohou spolu označit, proto se učiní, že se z vyššího redukuje dolů. „Znovu položíme vypůjčenou tyčinku, krokujeme ji jako prve, dalším usouzeným ji jednou násobíme. Výsledek v kopii přičteme k určenému pravidlu a zmenšujeme jím“ znamená, že chceme odečíst hnědou výplň B v rohu rumělkových výplní. „Kopii výsledku přiřadíme k určenému pravidlu“ znamená, že se strana hnědé B [výplně] přidává k určenému pravidlu podruhé, tím se rozpíná rozsah dvou tyrkysových výplní, proto když rozkládáme jako předtím, odpovídá to zadání.[33]

(4.17) Mějme sebrání 1518 kroků. Ptáme se, kolik vytvoří obvodu kruhu?
Odpověď zní: 135 kroků.

Podle mé metody by měl být obvod 138 celých a 1 z 10 dílů kroku.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Zde podle přesných poměrů je obvod 138 celých a 9 z 50 dílů kroku.

(4.18) Dále mějme sebrání 300 kroků. Ptáme se, kolik vytvoří obvodu kruhu?
Odpověď zní: 60 kroků.

[33] Ukážeme celý postup tabulkou na úloze (4.14):

úkon	krokujeme	usoudíme	označíme	dělíme (odčítáme)	zdvojíme na urč. pravidlo
usouzené	1	100	200	200	200
obsah	71824	71824	71824	71824	31824
odčítané					*40000*
pravidlo				20000	20000
půjč. tyč.	1	10000	10000		
úkon	redukujeme, krokujeme	usoudíme, označíme	přičteme	dělíme (odčítáme)	přičteme
usouzené	200	210	260	260	260
obsah	31824	31824	31824	31824	4224
odčítané					*27600*
urč. pravidlo	40000	4000	4000	4600	4600
půjč. tyč./ „vedle“		100	600	600	600
úkon	redukujeme, krokujeme	usoudíme, označíme	přičteme	dělíme (odčítáme)	konec
usouzené	260	261	268	268	268
obsah	4224	4224	4224	4224	
odčítané					*4224*
urč. pravidlo	5200	520	520	528	528
půjč. tyč./ „vedle“		1	8	8	8

Pro ilustraci ještě totéž zkráceně pomocí tyčinek:

𝍠	𝍠	𝍡	𝍡	𝍡𝍩	𝍡𝍮	𝍡𝍮	𝍡𝍮𝍠	𝍡𝍮𝍧	𝍡𝍮𝍧
𝍦𝍩𝍧𝍩𝍣	𝍦𝍩𝍧𝍩𝍣	𝍦𝍩𝍧𝍩𝍣	𝍢𝍩𝍧𝍩𝍣	𝍢𝍩𝍧𝍩𝍣	𝍢𝍩𝍧𝍩𝍣	𝍬𝍡𝍪𝍣	𝍬𝍡𝍪𝍣	𝍬𝍡𝍪𝍣	
		𝍡	𝍣	𝍬	𝍬𝍮	𝍬𝍡	𝍤𝍪	𝍤𝍪𝍧	𝍤𝍪𝍧
𝍠	𝍠			𝍠	𝍮		𝍠	𝍧	𝍧

Podle mé metody by měl být obvod 61 celých a 19 z 50 dílů kroku.

Váš poddaný Chunfeng a další se pokorně drží přesných poměrů, obvod je 61 celých a 41 ze 100 dílů kroku.

(4.XIV) Rozklad kruhu

Metoda zní: Položíme množství kroků sebrání, násobíme ho 12, zmenšujeme rozkladem čtverce a získáme obvod.

Tato metoda používá jako poměry obvod 3 – průměr 1, je převrácená ke staré metodě kruhového pole. Podlé [mé] Huiovy metody se násobí sebrání 314, co je jako 25, dá 1, výsledek zmenšujeme rozkladem čtverce, a to je obvod. Zmenšujeme rozkladem čtverce a to je průměr.[34] Proto když hledáme obvod podle zjevné výplně, je to jako když se odchylujeme o něco do menšího. Když naopak násobíme sebrání 200, 157 dá 1 a zmenšujeme rozkladem čtverce, je to průměr, je to jako když se odchylujeme o něco do většího.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: V postupu hledání obvodu Liu Huiovou metodou v tomto komentáři nemají být slova „Zmenšujeme rozkladem čtverce a to je průměr“. V dnešní verzi textu sice jsou, ale to je jen chybná vložka opisovačů. Podle přesných poměrů se násobí 88 a 7 dá 1. Poznamenejme k poměrům obvod 3 – průměr 1: dejme tomu, že obvod je 6 a průměr 2. Když se násobí polovina obvodu a polovina průměru, získáme výplň 3. Když se obvod 6 násobí sám sebou, získáme 36, obě je zmenšíme množstvím rovnosti, získáme výplň 1 a velikost obvodu je 12. Co se týče tohoto sebrání, když se původně obvod násobil sám sebou, bylo by na místě násobit 1 a dělit 12, pak získáme sebrání 3. Metoda je v tom, že násobením jednou nic nepřibývá, proto když z něho 12 dá 1, získáme toto sebrání. Když se nyní vracíme zpět a položíme sebrání 3, pak násobení 12 je obnovení původního množství jeho obvodu násobeného sebou samým. Kdykoli se věci násobí samy sebou, když je pak zmenšujeme odmocněním, obnovujeme jejich původní množství. Proto když jej zmenšujeme odmocněním, získáme to.

(4.19) Mějme sebrání 1 860 867 *chi*.

Zde jsou *chi* krychlová[35] *chi*. Vždy když mají tělesa výšku a hloubku a hovoří se o jejich sebrání, říká se tomu krychle.

Ptáme se, kolik to tvoří krychle?

Odpověď zní: 123 *chi*.

(4.20) Dále mějme sebrání 1953 celých a 1 z 8 dílů *chi*. Ptáme se, kolik to tvoří krychle?

Odpověď zní: 12 a půl *chi*.

(4.21) Dále mějme sebrání 63 401 celých a 447 z 512 dílů *chi*. Ptáme se, kolik to tvoří krychle?

Odpověď zní: 39 celých a 7 z 8 dílů *chi*.

(4.22) Dále mějme sebrání 1 937 541 celých a 17 z 27 dílů *chi*. Ptáme se, kolik to tvoří krychle?

Odpověď zní: 124 a dvě třetiny *chi*.

---

[34] Tato věta se dostala do Liu Huiova komentáře omylem pozdějších opisovačů, viz následující Li CHunfengovu poznámku.

[35] Doslova „stojící“ nebo „prostorový“ čtverec (*li fang* 立方).

(4.XV) Rozklad krychle

Krychle je právě totožná [ve všech rozměrech], hledáme její jednu stranu.

Metoda zní: Položíme sebrání jako obsah. Vypůjčíme si jednu tyčinku, krokujeme ji o dva stupně navíc.

To znamená, že strana 1000 je 10, strana 1 000 000 je 100.

Usoudíme, výsledkem dvakrát vynásobíme vypůjčenou tyčinku, to je pravidlo, a zmenšujeme jím.

Násobení dvakrát je také hledání výplně čtverce. Označuje se horním usouzeným a zmenšujeme jím, tím je to rovno krychli.

Po dělení ztrojením vytvoříme určené pravidlo.

Pro případ, že je na místě dál dělit, se rozpíná u tří stran, aby se určila výplň čtverce, která vytvoří určené pravidlo.

Pokud opět zmenšujeme [rozkladem krychle], redukujeme pravidlo a položíme dolů.

Při opětném dělení, jsou čtvercové výplně u tří stran všechny množství násobená sama sebou, musí být redukovány a usouzeny jejich tloušťky. Při rozkladu rovinné výplně je 10 strana čtverce 100; při rozkladu stojící výplně je 10 strana krychle 1000. Protože v určeném pravidle je výplň tvořící čtverec, při opětovném dělení z 1000 bude 100, redukuje se o jeden stupeň dolů.

Násobíme množství výsledku třemi a položíme do střední řádky.

Tím se nastavuje určená délka 3 obalů.[36]

Znovu si vypůjčíme jednu tyčinku a položíme ji do spodní řádky.

Chceme jí vytvořit roh čtverce, strana krychle zatím nemá určenou velikost, ale položíme tyčinku, abychom určili její pozici.

Krokujeme je, střední o jeden stupeň, spodní o dva stupně.

V horním čtvercovém pravidle se délka násobí sama sebou a přitom už bylo jednou redukováno. Střední obalové pravidlo má pouze délku, proto se sníží o jeden stupeň. Spodní rohové pravidlo nemá délku strany, proto se sníží ještě o jeden stupeň.

Znovu položíme usouzené, jedenkrát jím násobíme střední [řádek].

To je kompletní výplň 3 obalů.

Dvakrát jím násobíme spodní [řádek].

Necháme roh vynásobit sebe sama a vytvořit čtvercovou výplň.

Ze všech kopie přičteme k určenému pravidlu a zmenšujeme jím.

Tři strany, tři obaly a jeden roh již všechny mají výplň, označíme je horním usouzeným a odečteme ztluštěné tři výplně.[37]

Po dělení zdvojíme spodní, sečteme se středním a přiřadíme k určenému pravidlu.

To, že se celkem přiřadí k určenému pravidlu dvakrát střední a třikrát spodní znamená, že tři obaly by měly každý spojit dvě výplně stran se dvěma stranami

---

[36] V originále *lian* 廉. Tento termín se později stal univerzálním označením všech členů binomického rozvoje, které je potřeba počítat pro výpočet vyšších mocnin. V klasickém textu je však ještě bezejmenný. *Lian* je původně strana nebo vnější část, hrana apod. Název je zjevně motivován geometrickou interpretací odmocňování.

„Délka“ je v tomto případě překlad nejobecnějšího adjektiva „dlouhý“ *chang* 長, které se nepoužívá pro žádné konkrétní rozměry ploch nebo těles,

[37] Liu Hui tím myslí odečtení tří těles, vzniklých „ztluštěním“ tří ploch v určeném pravidle.

čtverce a jeden roh se spojí s konci tří obalů, což se použije v dalším dělení.[38] Slova zde nevyčerpávají smysl, pro rozklad tohoto by se musely použít kostky,[39] pak teprve by to bylo jasné.

[Pokud] opět zmenšujeme [rozkladem krychle], redukujeme spodní jako předtím. Pokud není rozloženo do konce, je to také[40] nerozložitelné.

Také jsou metody, které označí díl určeným pravidlem, ale lepší je rozkládat dále výplň a použít jako díly drobná množství.

Pokud sebrání obsahuje díly, uvedeme je do propojení a zahrneme čitatele a to bude určený obsah. Po určení obsahu jej pak rozkládáme. Poté rozkládáme jeho jmenovatel a zmenšujeme na oplátku.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Pokud lze jmenovatel rozložit, znamená to, že sebrání sečtených a do propojení uvedených [množství] na počátku odpovídalo třem jmenovatelům. Po rozkladu ještě Zbude jeden jmenovatel [navíc], proto se odmocňuje jmenovatel dílu, hledá se jednoduchý jmenovatel, který vytvoří pravidlo, aby se jím vydělilo na oplátku.

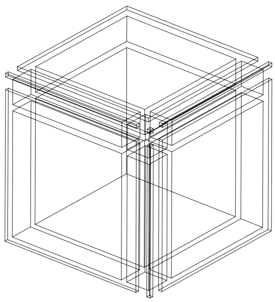
Pokud je jmenovatel nerozložitelný, násobíme opět jmenovatelem dvakrát určený obsah a pak rozkládáme. Poté dáme, [dokud je] jako jmenovatel, [přidávat] 1.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Pokud nelze jmenovatel rozložit, znamená to, že je původně [obsažen jen] jednou. Znovu [díl] dvakrát násobíme jmenovatelem a pak odpovídá třem jmenovatelům. Po odmocnění také zbývá jeden jmenovatel, proto necháme každý jmenovatel dát 1 a získáme celou část strany.

Poznámky k „Rozkladu krychle“: Krychle je právě totožná [ve všech rozměrech], hledáme <u>velikost</u>[41] její jedné strany. „Vypůjčíme si jednu tyčinku, krokujeme ji o dva stupně navíc.“ znamená, že <u>když se hledá sebrání krychle, strana se dvakrát násobí sama sebou, odmocňujeme ji podle sebrání, proto se posunuje o dva stupně</u>, to

[38] Skutečně, k původním třem čtvercovým deskám se před dělením přičetla délka „obalů“ (tří) a čtvercová plocha „rohu“ (jednoho). Každý obal však přispívá ke dvěma čtvercovým deskám a jediný roh přispívá ke všem třem, proto je po dělení třeba přičíst ještě jednou (tři) obaly a ještě dvakrát (jediný) roh.

[39] „Kostky“ – v originále *qi* 棊. Může jít i o jiné útvary než krychličky, překládám takto spíše pro zachování „herní“ asociace. Rozkladem pomocí kostek se myslí tato analogie rozkladu čtverce do čtverců a obdélníků:



[40] Toto „také“ je vzácný případ vnitřního odkazu v klasickém textu *Devíti kapitol* – celá metoda Rozkladu krychle je modelována podle Rozkladu čtverce.

[41] Toto slovo „velikost“ je navíc proti Liu Huiově komentáři. Podobné odchylky označuji podtržením.

znamená, že strana 1000 je 10, strana 1 000 000 je 100. „Usoudíme, výsledkem dvakrát vynásobíme vypůjčenou tyčinku, to je pravidlo, a zmenšujeme jím“ znamená, hledání výplně čtverce. Označuje se horním usouzeným a zmenšujeme jím, tím je to rovno krychli. „Po dělení ztrojením vytvoříme určené pravidlo“ znamená, že sebrání není ještě vyčerpáno, je na místě dál dělit, rozpíná se u tří stran, aby se určila výplň čtverce, která vytvoří určené pravidlo. „Pokud opět zmenšujeme [rozkladem krychle], redukujeme pravidlo a položíme dolů“ znamená, že jsou čtvercové výplně u tří stran všechny množství násobená sama sebou, musí být redukovány a usouzeny jejich tloušťky. Při rozkladu rovinné výplně je 10 strana čtverce 100; při rozkladu stojící výplně je 10 strana krychle 1000. Protože v určeném pravidle je výplň tvořící čtverec, při opětovném dělení z 1000 bude 100, redukuje se o jeden stupeň dolů. „Násobíme množství výsledku třemi a položíme do střední řádky“ znamená, že se nastavuje určená délka 3 obalů. „Znovu si vypůjčíme jednu tyčinku a položíme ji do spodní řádky“ znamená, že chceme vytvořit roh čtverce, strana krychle zatím nemá určenou velikost, ale položíme tyčinku, abychom určili její pozici. „Krokujeme je, střední o jeden stupeň, spodní o dva stupně“ znamená, že v horním čtvercovém pravidle se délka násobí sama sebou a přitom už bylo jednou redukováno. Střední obalové pravidlo má pouze délku, proto se sníží o jeden stupeň. Spodní rohové pravidlo nemá délku strany, proto se sníží ještě o jeden stupeň. „Znovu položíme usouzené, jedenkrát jím násobíme střední [řádek]“ znamená, že to bude kompletní výplň 3 obalů. „Dvakrát jím násobíme spodní [řádek]“ znamená, že je na místě nechat roh vynásobit sebe sama a vytvořit čtvercovou výplň. „Ze všech vytvoříme kopii pro přičtení k určenému pravidlu a dělení určenými“ znamená, že tři strany, tři obaly a jeden roh již všechny mají výplň, označíme je horním usouzeným a odečteme ztluštěné tři výplně. „Po dělení zdvojíme spodní, sečteme se středním a přiřadíme k určenému pravidlu.“ znamená, že tři obaly by měly každý spojit dvě výplně stran se dvěma stranami krychle a jeden roh se spojí s konci tří obalů, což se použije v dalším dělení.[42]

[42] Zapíšeme postup tabulkou pro úlohu (4.19):

úkon	krokujeme	usoudíme, zmnožíme, odečteme	trojíme	redukujeme	násobíme výsledek 3, dáme do stř. řádky	krokujeme, střední o +1, spodní o +2
usouzené	1	100	100	100	100	100
obsah	1870867	1870867	870867	870867	870867	870867
odčítané			*1000000*			
pravidlo			1000000	3000000	300000	300000
střední						300
spodní.	1	1000000				
úkon	usoudíme	násobíme střední 1x, spodní 2x	přičteme kopie k prav.	dělíme	přičteme střední a spodní 2x	redukujeme, výsledek x3 do střední

pokračování →

Pokud není rozloženo do konce, redukujeme spodní jako předtím, rozkládáme a tím to odpovídá zadání. Pokud obsahuje díly, uvedeme je do propojení a zahrneme čitatele a pak rozkládáme. Poté rozkládáme jmenovatel a zmenšujeme jím na oplátku. Pokud lze [jmenovatel] rozkládat, znamená to, že sebrání do propojení uvedených [množství] na počátku odpovídalo třem jmenovatelům. Po rozkladu ještě Zbude jeden jmenovatel [navíc], proto se rozkládá jmenovatel dílů, hledá se jednoduchý jmenovatel, který vytvoří pravidlo, aby se jím vydělilo na oplátku. Pokud je jmenovatel nerozložitelný, násobíme opět jmenovatelem dvakrát určený obsah a pak rozkládáme. Poté dáme, [dokud je] jako jmenovatel, [přidávat] 1. Pokud nelze jmenovatel rozložit, znamená to, že je původně [obsažen jen] jednou. Znovu [díl] dvakrát násobíme jmenovatelem a pak odpovídá třem jmenovatelům. Po rozkladu také zbývá jeden jmenovatel, proto dáme,[dokud je] jako jeden jmenovatel, [přidávat] 1 a získáme celou část strany.

(4.23) Mějme sebrání 4 500 *chi.*

Toto také znamená krychlová *chi.*

Ptáme se, kolik je to koule?[43]

Odpověď zní: 20 *chi.*

Podle přesných poměrů[44] pro kouli o průměru 20 *chi* vypočítáme sebrání 4 190 celých a 10 z 21 dílů *chi.*

(4.24) Dále mějme sebrání 1 644 866 437 500 *chi.* Ptáme se, jak velká je to koule?

Odpověď zní: 14 300 *chi.*

Podle přesného poměru je to průměr 14 633 celých a 3 ze 4 dílů *chi.*

(4.XVI) Rozklad koule

Metoda zní: Položíme množství sebraných *chi*, násobíme ho 16, 9 dá 1, výsledek zmenšíme rozkladem krychle, a to je průměr koule.

usouzené	110	120	120	120	120	120
obsah	870867	870867	870867	870867	142867	142867
odčítané					*728000*	
pravidlo	300000	300000	300000	364000	364000	432000
střední	30000	30000	60000	60000	60000	
spodní	1000	1000	4000	4000	4000	
úkon	krokujeme	usoudíme	násobíme	přičteme	dělíme	konec
usouzené	120	121	123	123	123	123
obsah	142867	142867	142867	142867	142867	
odčítané						142867
pravidlo	43200	43200	43200	43200	44307	44307
střední	360	360	360	1080	1080	1080
spodní		1	1	27	27	27

[43] Vzhledem k tomu, že otázka názvu tohoto tělesa je dále řešena v komentáři, bylo by asi lépe pojmenovat ho v souladu s čínským názvoslovím jako „stojící kruh“ *liyuan.*

[44] Toto je poznámka Li Chunfengovy skupiny, i když jí nepředchází obvyklé předznamenání. Liu Hui v následujícím textu přiznává, že nezná správný výpočet objemu koule, proto ani nepřidával poznámku k řešení, jakou nacházíme u všech ostatních „kruhových“ problémů.

Koule (*liyuan*) je kulička (*wan*). Tvůrci metody asi použili jako poměry obvod 3 – průměr 1. Dejme tomu, že kruh zabírá 3 ze 4 dílů čtverce. Pak válec[45] zabírá v krychli také 3 ze 4 dílů. Dále ve válci je poměr krychle 12, kuličky 9, to znamená, že kulička zabírá opět 3 ze 4 dílů válce. Položíme 4 díly násobené samy sebou a získáme 16, 3 díly násobené samy sebou a získáme 9, proto kulička zabírá 9 ze 16 dílů krychle. Proto když násobíme sebrání 16 a 9 dá 1, získáme sebrání krychle. Průměr kuličky je totožný s krychlí, proto dělením rozkladem krychle získáme průměr. Ovšem tato myšlenka není pravdivá. Jak to ověřit? Vezměme 8 krychlových kostek, každá bude krychle [strany] 1 *chi*, sebráním vytvoří krychli [strany] 2 *chi*. Kružnicí z nich vytvoříme válec,[46] jeho průměr bude 2 *cuny*, výška také 2 *cuny*. Když to dále znovu provedeme příčně, bude vzniklý tvar podobný řekněme dvěma spojeným čtvercovým klenbám.[47] Osm kostek [vzniklých odříznutím] se podobá *yangma*,[48] ale jsou kruhové.

Poznámka: Spojené klenby mají čtvercový poměr, kulička se nachází uprostřed, má tedy kruhový poměr. Když to dovedeme dále, není nesmyslné říct, že by válec měl čtvercový poměr? Pokud jako kruhové poměry vezmeme obvod 3 – průměr 1, výplň kruhu bude zmenšena, když necháme válci čtvercový poměr, bude sebrání koule zvětšeno, to se vzájemně doplňuje, proto se poměr 9 ku 16 náhodou blíží skutečnosti, ale kulička je ještě zvětšena. Když se podíváme dovnitř krychle, [oblast] mimo spojené klenby se sice postupně zmenšuje, ale není jasné o kolik. Ať dělím, spojuji, rozplétám či svazuji, čtverec se s kruhem spolu ovinují, husté a jemné podivně pronikají, rovnost

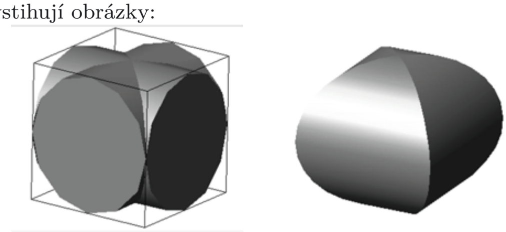
---

[45] V originále *yuan qun* 圓囷. *Qun* byla sýpka válcového tvaru. Zajímavé je, že Liu Hui nepoužívá termín pro válec z 5. kapitoly *yuan baodao* 圓堡壔.

[46] Slovesné použití „kružnice“ zde označuje rozříznutí kostek, aby bylo možné zkoumat tvar vzniklého tělesa.

[47] V originále *mou he fang gai* 牟合方蓋. Tento Liu Huiův inovativní termín skutečně označuje dvě klenby (蓋) obrácené proti sobě. Překlady do evropských jazyků i moderní čínštiny jsou velmi rozmanité, [Wagner 1978a] překládá „square lid of a *mouhe*“ a naznačuje ještě další možnosti výkladu, [Chemla & Guo Shuchun 2004] překládá „dais carrés qui s'emboîtent exactement“, tedy „přesně do sebe zapadající čtvercové baldachýny“. [Shen Kangshen*, et al.* 1997] překládá „joined umbrellas“. V tom se zřejmě opírá o [Bai Shangshu 1982],[Wu Wen-Tsun 1982b] který také překládá *gai* do moderní čínštiny slovem *san*, tedy deštník, ale to je zjevně překlad podle věcného obsahu, nikoli podle základního dobového významu slova. Přidržuji se slova „klenba“, které působí celkem přirozeně a vystihuje přesně obsah pojmu a částečně i jeho konotace, byť zcela nezapadá do staročínských reálií.

Vznik pojmu vystihují obrázky:



Obrázek vlevo představuje dva válce, vložené do sebe napříč uvnitř krychle. Vpravo je jejich průnik, tedy „spojené čtvercové klenby“.

[48] *Yangma* 陽馬 je termín, který je hojně používán v 5. kapitole (viz úloha (5.20) a další). Označuje se jím speciální případ jehlanu se čtvercovou podstavou a vrcholem nad jedním z rohů podstavy (tento jehlan je teoreticky významný, protože ze tří takových útvarů lze složit kvádr).

a přímost najít nedají. Chtěl bych postavit myšlenku na primitivním tvaru, obávám se však minutí pravé vnitřní struktury. Nedovoluji si [rozhodnout] pochybnosti a nechám je čekat na někoho, kdo to bude schopen vyjádřit.

[Říká se, že] měděná[49] krychle strany 1 *cun* váží 16 *liangů* a měděná kulička průměru 1 *cun* váží 9 *liangů*, poměry se rodí z tohoto, ale nebylo to nikdy ověřeno. V kapitole *Zhouských úřadů* „Zápisky zkoumání řemesel“[50] [se říká]: „Když úředník *lishi* tvoří míry, praží opakovaně měď a cín, až nic neubývá, když ni neubývá, zváží je, když je zvážil, normuje je, když je znormuje, vyrobí z nich míru.“ Tím se říká, že při výrobě bronzu se nechá dokonale pročistit, poté je možné jeho rozdělením získat poměry.

Nechme průměr kuličky vynásobit sám sebou, 3 dají 1, zmenšujeme rozkladem čtverce, a to je strana krychle uvnitř kuličky. Dejme tomu, že krychle uvnitř kuličky má stranu 5 *chi*, 5 *chi* je kratší odvěsna, výplň kratší odvěsny vynásobená sebou samou je 25 *chi*. Zdvojnásobením získáme 50 *chi*, to bude výplň přepony, což nazveme přeponou rovinného čtverce strany 5 *chi*. Tato přepona bude delší odvěsna, opět bude 5 *chi* kratší odvěsna, sečtením výplně kratší a delší odvěsny získáme 75 *chi*, to je výplň velké přepony. Zmenšujeme rozkladem čtverce, a z toho vyplývá velká přepona. Velká přepona je dlouhá šikmá vnitřní krychle, šikmá je průměr kuličky. Proto výplň strany vnitřní krychle násobené sebou samou je k výplni průměru kuličky násobenému sebou samým 1 ze 3 dílů. Nechme velkou přeponu ještě násobit tuto výplň, to je sebrání vnější krychle kuličky. Výplň velké přepony se nerozloží do konce, necháme tuto výplň 75 dvakrát vynásobit sebou samou, vytvoříme stranu,[51] označením získáme, že sebrání vnější krychle je strana ze 421 875 *chi*. Dále necháme stranu vnitřní krychle 5 *chi* vynásobit sebou samou, dále ji násobíme stranou čtverce, získáme sebrání 125 *chi*. Vynásobíme 125 *chi* samo sebou, vytvoříme stranu, označením získáme, že sebrání je strana z 15 625 *chi*. Krátíme obojí 625, pak sebrání vnější krychle je strana ze 675 *chi*, sebrání vnitřní krychle strana ze 25 *chi*.[52]

Zhang Hengovy Počty[53] jinak nazývají krychli „Kompaktní“ a kouli „Smíchané“.[54] Heng říká, že Kompaktní ku vnitřnímu a vnějšímu Smíchanému [se mají takto]: Strana ze 675 *chi*, [když řekneme, že] chybí 1, znamená sebrání vnějšího Smíchaného 26. Vnitřní Smíchané je strana z 25, to znamená, že sebrání vnitřního Smíchaného je 5 *chi*. Nyní [když já] Hui nechám pomocí Kompaktního vyjádřit Vnitřní Smíchané a pomocí Smíchaného naopak vyjádřit Kompaktní, pak poměry vztažené vůči sobě dvou Kompaktních jsou jako poměry vztažené vůči sobě dvou Hengových Smíchaných.

---

[49] V originále *huang jin*, v době Válčících států však toto slovo označovalo obvykle měď nebo bronz, nikoli zlato.

[50] *Kao gong ji* – kapitola knihy *Zhouské úřady* (*Zhou Guan* – Liu Hui tutéž knihu zmiňuje na čelném místě předmluvy), která ve skutečnosti je samostatným dílem včleněným do *Zhouských úřadů* jako náhrada za jinou, ztracenou část. Popisuje do značných detailů terminologii a některé výrobní postupy řemeslníků v době Válčících států.

[51] Tímto obratem se označuje odmocnina z „nerozložitelného“ čísla (např. 75).

[52] Tento Liu Huiův komentář je zřejmě vedlejším produktem jeho snah o nalezení správné metody výpočtu objemu koule – podařilo se mu však jen odvodit poměr stran a objemů vepsané a opsané krychle, proto zřejmě pasáž nemá žádný jasný závěr.

[53] Zhang Heng byl matematik, astronom a vysoký úředník ve 2. století. Liu Huiova zmínka je jediný pramen, který o jeho ztraceném díle *Zhang Heng Suan* máme. Viz též Tab. 3 na str. 17.

[54] „Kompaktní“ – *zhi* 質, též „hmota“. „Smíchané“ – *hun* 渾, toto slovo označuje „řídký chaos“ v protikladu k hmotě.

Heng asi nejprve podle poměrů dvou Kompaktních odvodil vyjádření poměru Smíchaného. Heng dále říká, že Kompaktní je strana ze 64, Smíchané je strana z 25. Když naopak pomocí Kompaktního vyjádříme Smíchané, říká tím, že obsazuje 5 z 8 dílů Kompaktního. Dále říká: Čtverec je strana z 8, kruh je strana z 5, kruh a Smíchané se spolu vyvozují, z toho vidíme že opět bere válec jako čtvercový poměr, Smíchané jako kruhový poměr, odchyluje se velmi daleko. Hengův názor vychází z toho, že jím chce podpořit svá tvrzení o *yin* a *yang* a sudých a lichých množstvích a nehledí na to, zda je to přesné nebo nepřesné. I když je to řečeno vznešenými slovy, vnáší se tím zmatek do přirozeného řádu a narušuje patřičný význam, je to vadná [argumentace].

Položme sebrání vnějšího Kompaktního 26, násobme 9, 16 dá 1, získáme sebrání 14 a 5 z 8 dílů *chi*, to je Smíšené uvnitř Kompaktního. Násobíme jmenovatelem vnitřního čitatele celé části, získáme 117. Dále položme sebrání vnitřního Kompaktního 5, násobíme jmenovatelem, získáme 40, proto Kompaktní zabírá 40 ze 117 dílů Smíšeného, a poměr Smíšeného je ještě zmenšený. Dejme tomu, že máme čtverec strany 2 *chi*, pak čtyři strany čtverce dají sečtené 8 *chi*, to nazývám obvod čtverce. Nechme průměr kruhu uvnitř stejný jako stranu, 2 *chi*. Když polovinou průměru kruhu násobíme polovinu obvodu kruhu, je to výplň kruhu. Když polovinou strany násobíme polovinu obvodu čtverce, je to výplň čtverce. Tedy obvod čtverce je poměr výplně čtverce, obvod kruhu je poměr výplně kruhu.

Poznámka: Použijeme Hengovu metodu, poměr obvodu čtverce je strana z 8, poměr obvodu kruhu je strana z 5. Dejme jako obvod čtverce stranu 64 *chi*, pak obvod kruhu bude 40 *chi*. Dále nechme průměr 2 *chi* vynásobit sebe sama a získáme průměr jako stranu ze 4, to jest poměr obvodu kruhu je strana z 10 a poměr průměru strana z 1. Heng také považuje obvod 3 – průměr 1 za nesprávné, proto nově napsal tuto metodu. Ale přidává obvodu příliš mnoho, překročil skutečnou velikost.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Zu Gengzhi říká, že Liu Hui i Zhang Heng oba brali válec jako čtvercový poměr a kuličku jako kruhový poměr, proto vytvořil nový předpis.

Zu Gengzhi'ova metoda odmocnění kruhu zní: Násobíme dvěma sebrání, zmenšujeme odmocněním krychle a to je průměr kruhu. Jaká je myšlenka tohoto? Vezměme 1 krychlovou kostku, položme pevný bod do levého zadního dolního rohu, opišme kružnici a odstraňme pravý horní obal. Opět je složme a ořízněme příčnou kružnici, odstraníme horní obal. Tím je sebrání krychle rozděleno na 4 části. Uvnitř obkroužení je jedna kostka, nazveme ji vnitřní kostka. Vně obkroužení jsou 3 kostky, nazveme je vnější kostky. Opět složíme 4 kostky podle obkroužení a znovu je příčně rozdělíme.[55] Pokud to vyjádříme v kratší a delší odvěsně, bude zbylá výška kratší odvěsna, strana řezu vnitřní kostkou delší odvěsna, velikost původní strany krychle bude jejich přepona. Podle metody kratší a delší odvěsny, když výplň kratší odvěsny odečteme od výplně přepony, pak zbytek je výplň delší odvěsny, pokud necháme zbylou výšku vynásobit sebe samu a odečteme to od výplně původní strany čtverce, zbytek je výplň řezu vnitřní kostkou. Výplň původní strany čtverce je výplň řezů všemi čtyřmi kostkami. Tedy výška násobená sama sebou je výplň řezu vnějších tří kostek. Bez ohledu na výšku je rozložení vždy takové. Tedy přece jen se ve své podstatě redukují na stejný počátek a jen cesty jsou odlišné, a tak ovládáme-li vzdálené, připodobníme ho společné kategorii a pomocí srovnání analyzujeme podrobnosti.

Poznámka: *Yangma*, jehož výška a strany jsou všechny totožné, položíme převrácený vzhůru a příčně odřízneme jeho vrchní část. Pak výška násobená sama sebou

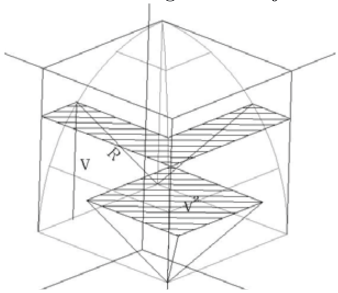
[55] Myslí se tím provedení vodorovného řezu v kterékoli výšce.

bude také rovná výplni řezu. Tedy když naskládáním kostek vytvoříme prostorové sebrání, jelikož rozložení výplní je stejné, sebrání se nemůže lišit.[56] Z tohoto pohledu vidíme, že když spojíme tři vnější kostky za kružnicí do jedné, je to jeden *yangma.* Když rozdělíme krychli na tři části, zabírá *yangma* jednu z nich, z toho vyplývá, že vnitřní kostka zabírá 2. Když složíme 8 malých krychlí na velkou krychli, složíme 8 vnitřních kostek na jednu spojenou klenbu. Vnitřní kostka zabírá 2 ze 3 dílů malé krychle, tedy spojená klenba zabírá také 2 ze 3 dílů velké krychle, srovnáním je to ověřeno. Položme 2 ze 3 dílů, násobíme poměrem výplně kruhu 3, za každý poměr výplně čtverce 4 dají 1, zkrátíme a určíme jako poměr kuličky. Proto říkám, že kulička zabírá 1 ze 2 dílů krychle.

Konečně jsou množství přesná,
Jasné světlo mysl sezná.
Zhang Heng stará používal,
později ho výsměch stíhal.
Liu Hui ctil dávná slova,
neměl čas to řešit znova.
Cožpak je to tak těžké? Spíše to nepromysleli.

Podle přesných poměrů je toto sebrání krychle takové, že se nejprve dvakrát vynásobí průměr sám sebou, vynásobí 11, 21 dá 1 a zkrátíme na toto sebrání. Zde chceme nalézt původní sebrání, proto se násobí 21 a 11 dá 1. Kdykoli se věci dvakrát násobí samy sebou a pak se dělí odmocněním krychle, obnoví se jejich původní velikosti. Proto po dělení odmocněním krychle je to průměr kuličky.

[56] Ekvivalent tzv. Cavalieriho teorému. Zu Gengův důkaz je založen na této analýze:



Osmina kruhové klenby (na obrázku šedě) má plochu řezu vodorovnou rovinou $R^2 - v^2$, kde R je poloměr koule a v výška roviny. Plocha v^2 je zároveň plocha řezu jehlanem, jehož strana podstavy je rovná jeho výšce. Protože se rovnají plochy v každé výšce, rovnají se i objemy, a objem kleneb je tedy roven rozdílu objemu krychle a osminásobku objemu zmíněného jehlanu, čili 2/3 objemu krychle. Viz též [Wagner 1978a].