

Matematika v devíti kapitolách

1. Pravoúhlá pole

In: Jiří Hudeček (author): Matematika v devíti kapitolách. Sbíрка početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfenga a dalších z doby Tang. Překlad, vysvětlivky a úvod. (Czech). Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2008. pp. 51–79.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/400838>

Terms of use:

© Hudeček, Jiří

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

1 Pravoúhlá pole

Fang tian 方田 – K určení polí, výměr a ohraničených oblastí.¹

Kapitola postupuje v tomto sledu: a) základní výpočty s pravoúhlými plochami, b) zlomkové operace, c) výpočty dalších polygonálních ploch, d) přibližné výpočty křivých ploch. Nejzajímavější místa:

- Polemika mezi komentátory o správném významu pojmů „sebrání“ a „výplň“ za metodou (1.I).
- Hledání největšího společného dělitele („množství rovnosti“) – (1.III).
- Zavedení pojmů „přizpůsobení“ a „sjednocení“, klíčových pro práci s poměry, v Liu Huiově komentáři k metodě (1.IV).
- Zavedení pojmu „poměrů“ (relativních množství) v komentáři k metodě (1.VIII).
- Liu Huiovo odvození metody pro obsah kruhu a iterativní výpočet π infinitezimální úvahou v dlouhém komentáři k metodě (1.XIV).
- Přibližná metoda výpočtu povrchu kulového vrchlíku a Liu Huiův odmítavý komentář k ní – (1.XV).

Důležité pojmy této kapitoly (k. = „pouze v komentářích“):

Jazyk (*she* 舌) – širší základna „rozbíhavého pole“.

Klínovité pole (*gui tian* 圭田) – plocha tvaru rovnoramenného trojúhelníka, potažmo jakéhokoli trojúhelníka. Viz pozn. 52.

Množství rovnosti (*deng shu* 等數) – výsledek opakovaného vzájemného odčítání, nejvyšší společný dělitel.

Oblouk (*hu* 弧) – tj. část kružnice, původně oblouk luku.

Obvod (*za* 匝 k.) – v Liu Huiově komentáři má význam „celého kruhu“, v jiných dílech však znamená obvod čtverce. Viz pozn. 103.

Pata (*zhong* 踵) – užší základna „rozbíhavého pole“.

Pravá délka/šířka (*zheng zong/guang* 正從/廣) – „přímý“ rozměr (po kolmici) ve zkosených tvarech.

Prsteneček (*huan* 環) – v názvu „prstencového pole“.

Průměr (*jing* 徑) – může znamenat průměr kruhu, meridián vrchlíku nebo šířku prstence.

Přímé pole (*zhi tian* 直田 k.) – Liu Hui tento pojem používá pro odvození metody výpočtu plochy „klínovitého pole“, odpovídá obdélníku.

Přebytek vůči sobě (*xiang duo* 相多) – rozdíl dvou čísel, který však není výsledkem odčítání, nýbrž porovnání.

Rozbíhavé pole (*ji tian* 箕田) – oboustranně zkosený lichoběžník. Název podle obřadního lopatkovitého předmětu.

Rozdělit (*ge* 割 k.) – též (doslovněji) **řezat**, v Liu Huiových komentářích disekce trojúhelníků na menší díly více přiléhající ke křivce.

¹ V originále *yi yu tian chou jie yu* 以御田畴界域. Slovo *yu* znamená „zvládnout a ovládat“.

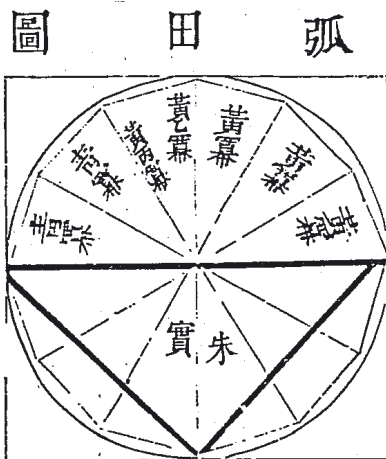
V celé kapitole se pole různých tvarů převádějí na základní pravoúhlé, proto je název podle první metody.

Šestiúhelník (*liu gu* 六觚 k.) – doslova „šest rohů“, podle obřadní nádoby tvaru trojbokého hranolu (ze šesti takových lze sestavit šestiúhelník). Podobně 12-úhelník atd.

Šíp (*shi* 矢) – výška kruhové úseče.

Tětiva (*xian* 弦) – v této kapitole se používá jako skutečná tětiva kruhové úseče, stejný pojem znamená ovšem také přeponu pravoúhlého trojúhelníka.

Zkosené pole (*xie tian* 邪田) – doslova „šikmé“ nebo „kosé“ pole, tj. pravoúhlý lichoběžník.



Ilustrace z prvního vydání Devíti kapitol pohyblivými typy (1774) – Dai Zhenova rekonstrukce Liu Huiova odvození metody (1.XVI)

(1.1) Mějme pole se šířkou 15 kroků a podélnou 16 kroků. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 1 *mu*.

(1.2) Mějme pole se šířkou 12 kroků a podélnou 14 kroků. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 168 kroků.²

(1.I) Pravouhlá pole

Metoda zní: Množství kroků šířky a podélné se spolu vynásobí. Získáme sebrání³ kroků.

Toto sebrání znamená výplň⁴ pole. Kdykoli se násobí šířka a podélná, nazýváme to výplň.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: V klasickém textu se říká: „Množství kroků šířky a podélné se spolu vynásobí. Získáme sebrání kroků.“ Komentář říká: „Když se násobí šířka a podélná, nazýváme to výplň.“ Myšlenka tohoto komentáře tedy je, že „sebrání“ a „výplň“ mají stejný význam.⁵ Když to odvozujeme podle vnitřní struktury,⁶ nemůže to tak být. Proč? „Výplň“ je jméno pro rozvoj šířky a podélné do jednoho čtverce,⁷ „sebrání“ je název pro shromáždění více množství pohromadě. [Když] podle jména zkoumáme skutečnost, je obojí zcela rozdílné. Když

² V nejstarších edicích je zde poznámka: „Obrázek: podélná 14 kroků, šířka 12 kroků.“ Obrázek sám se však nedochoval.

³ „Sebrání“ (tj. *ji* 積, součin) je v originále ve skutečnosti přívlastek, správnější by bylo překládat „sebrané kroky“. Protože se však v komentáři tematizuje pojem sebrání jako takový, překládám odchylně od syntaxe originálu.

⁴ Liu Hui používá pro velikosti útvarů termín *mi* 畧. Toto slovo původně označovalo záclonku, díky Liu Huiovi získalo geometrický význam a i v moderní čínštině znamená „mocninu“. Ve většině Liu Huiových použití se jedná o plošné útvary, tj. *mi* je jejich obsah, ale setkáváme se s ním i v souvislosti s tělesy, kde většinou znamená objem. Ponechávám neurčitý překlad „výplň“.

⁵ V těchto dvou větech se objevuje opozice slov *yi* 義 a *yi* 意, která obě v čínštině znamenají „význam“, „smysl“. V komentářích k *Devíti kapitolám* mají však vyhraněné odlišné významy. První z nich, které překládám obvykle jako „význam“, označuje realitu, kterou metoda popisuje. Druhé, které překládám jako „myšlenka“, znamená teoretický podklad a úmysl, na nichž je metoda postavena. Rozdíly obou slov rozebírá velmi pečlivě [Chemla & Guo Shuchun 2004], str. 1018–1023.

⁶ Další zásadní pojmy, užívané oběma komentátory, jsou „vnitřní struktura“ *li* 理 a „odvozovat“ *tui* 推. *Li* je přirozený vzor, obrazec nebo struktura věcí, jehož poznání vede ke správnému jednání s nimi – někdy se toto slovo překládá jako „principy“ nebo „zákonitosti“, což je sice příbuzný, ale zcela jinak motivovaný pojem. *Tui* znamená vyvozovat důsledky, ale také – jako zřejmě v tomto případě – analyzovat.

⁷ Li Chunfeng zde trvá na geometrickém významu *mi*, tedy označení prostorového útvaru a jeho velikosti. Protestuje proti ztotožnění s primárně numerickým pojmem „sebrání“ (*ji*), který se vztahuje k procesu a výsledku násobení, a na použití ekvivalence „sebrání = výplň“ se mu nelíbí, že ztotožňuje interpretaci výsledku (plochu) s cestou k jeho získání (sebrání jednotkových čtverečných ploch o straně 1 krok).

se je pokusíme sloučit, obáváme se, že to nepůjde. Zde se mluví o „výplni“ jako o jednom ze čtverců⁸ na délce nebo šířce a o „sebrání“ jako o celkovém množství ze všech kroků.⁹ V klasickém textu se říká, že násobením šířky a podélné získáme sebrání kroků, mluví se jasně o celkovém množství. Komentář k tomu říká, že to znamená „výplň“, čímž zcela zastírá původní význam „sebrání kroků“. První část komentáře, že „sebrání tvoří výplň“, je ještě slučitelná s vnitřní strukturou. Když se však dál tvrdí, že [sebrání] znamená výplň, je to nadbytečné a nesprávné.¹⁰ Co se týče těchto vysvětlivek, podržujeme správné a zbavujeme se chybného, poněkud zjednodušujeme a usnadňujeme,¹¹ zanechávajíc je tak pro budoucí studenty.

Zmenšíme pravidlem pro $mu - 240$ kroky.¹² To je množství mu . Sto mu je jeden $qing$.¹³

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Zde je začátek kapitoly,¹⁴ proto se zde záměrně uvádějí pravidla pro mu a $qing$. V ostatních metodách se dále nezmiňují, protože je můžeme nalézt zde. Poznámka: Pole velikosti 1 mu je široké 15 kroků, když jej rozdělíme [řezy] podélné a vytvoříme 15 sloupců, bude každý sloupec na šířku 1 krok a podélné 16 kroků. A když ho rozčleníme příčně a vytvoříme 16 sloupců, bude každý sloupec na šířku 1 krok a podélné 15 kroků. Zde jsou kroky při podélném rozdělení i příčném rozčlenění, tvoří každý sám čtverec. Vždy když máme 240 kroků, tvoří to 1 mu půdy, počet kroků [v úloze] je přesně stejný. Když je to takto vyjádřeno, je tím ověřeno,¹⁵ že „Množství kroků šířky a délky se spolu vynásobí. Získáme sebrání kroků.“ 240 kroků je pravidlo pro mu . 100 mu je pravidlo pro $qing$. Proto když jimi zmenšujeme, získáme to.¹⁶

(1.3) Mějme pole se šířkou 1 li a podélnou 1 li . Ptáme se, kolik pole to tvoří?

⁸ Li Chunfeng chápe metodu tak, že sbírá (v tomto případě sčítá) jednotlivé čtverce o straně délky 1, vytvořené podél délky a šířky. Tento výklad konkretizuje v komentáři k následující větě metody.

⁹ Zde se myslí plošné kroky, tedy právě ty „výplně“, se kterými není podle Li Chunfenga možné sebrání ztotožňovat.

¹⁰ Li Chunfeng připouští, že sebrání tvoří (*wéi* 為) výplň, ale odmítá, že sebrání znamená (*wèi* 謂) výplň. Tato dvě téměř homonymní slovesa se často zaměňovala a právě v této Li Chunfengově poznámce je text v různých edicích dosti rozkolísán, čímž je celý smysl jeho rozhořčení poněkud zastřen. Viz [Chemla & Guo Shuchun 2004], str. 761, pozn. 10.

¹¹ Na rozdíl od Liu Huie, který se svým komentářem snažil dotáhnout metodu *Devíti kapitol* do důsledků a najít její co nejobecnější prvky, Li Chunfeng především vykládá a doplňuje text s pedagogickým záměrem.

¹² Zde se pro dělení místo běžnějšího sousloví 實如法而一 používá přímo sloveso *chu* 除.

¹³ Tato věta není jen konstatování vztahu mezi dvěma plošnými mírami, ale i předpis k získání výměry ve *qinzích*, vlastně to znamená „ze 100 mu se stane 1 $qing$.“

¹⁴ Li Chunfeng zde pro kapitolu používá slovo *pian* 篇, nikoli *zhang* (jak by odpovídalo názvu *Jiu zhang - Devět kapitol*). Je to jedna z indicií, že *zhang* v názvu knihy ve skutečnosti neznamená „kapitolu“.

¹⁵ „Ověření“ – *yan* 驗 – je zkouška nebo pokus, které dokládají správnost metody, často spočívající v manipulaci s obrázky nebo modely (*qi*). Čínská matematika se vždy plně spokojila s tímto druhem „důkazu“ a nepožadovala striktní odvozování obecné platnosti.

¹⁶ Komentáře často končí formulí *gu ... ji de* 故……即得 „proto když ..., získáme to“ (výsledek v souladu se zadáním). Tato formule shrnuje více či méně podrobný rozklad metody do intuitivně správných úkonů a jejich interpretaci.

Odpověď zní: 3 *qingy* a 75 *mu*.

- (1.4) Dále mějme pole se šířkou 2 *li* a podélnou 3 *li*. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 22 *qingů* a 5 *mu*.

(1.II) Pole v *li*

Metoda zní: Množství *li* šířky a podélné se spolu vynásobí. Získáme sebrání *li*. Násobíme to 375 a to je počet *mu*.

Poznámka k této metodě: Množství *li* šířky a podélné se spolu vynásobí a získáme sebrání *li*. Protože čtverec *li* má 3 *qingy* a 75 *mu*, proto tím násobíme a získáme počet *mu*.

- (1.5) Mějme 12 z 18 dílů. Ptáme se, kolik je to po zkrácení?¹⁷

Odpověď zní: 2 ze 3 dílů.

- (1.6) Dále mějme 49 z 91 dílů. Ptáme se, kolik je to po zkrácení?

Odpověď zní: 7 ze 13 dílů.

(1.III) Krácení dílů

Poznámka ke krácení dílů – množství a míry věcí nemohou být vždy celistvé, musíme je vyjádřit v dílech. Množství tvořená díly, když jsou složitá,¹⁸ se obtížně používají. Předpokládejme, že máme 2 ze 4 dílů; vyjádřeno složitě tvoří 4 z 8 dílů; vyjádřeno zkráceně tvoří 1 ze 2 dílů. Jakkoli se vyjádření liší, pokud jde o množství, které tvoří, redukují se na stejný základ.¹⁹ Jak se pravidlo a obsah spolu vyvozují, často dochází k nepřizpůsobení.²⁰ Proto tvůrce metody nejprve upravuje díly.²¹

¹⁷ V originále *yue* 約, které znamená „jednoduchý“, ale také „krátký“ ve smyslu **neobsahující mnoho úkonů**. Termín *yue* proto v souvislosti s dělením překládám „krátit“, i když se nepoužívá vždy jen se zlomky.

Toto slovo je členem dvojice „zkrácený – složitý“ *yue* 約 – *fan* 繁, viz níže.

¹⁸ Zde je použito *fan* 繁, zmíněné jako protiklad *yue* v předchozí poznámce. „Složitý“ znamená **mnohočetný, vyžadující mnoho úkonů** apod., nikoli např. obtížně pochopitelný nebo silně strukturovaný.

¹⁹ Další často používaný komentátorský obrat je *tong gui* 同歸, doslova „vracet se společně“. Je natolik ustálený a přenesený, že pouze mírně zachovávám jeho motivaci a překládám „redukují se na stejný základ“.

²⁰ Doslovnější překlad originálu *dong you cenci* 動有參差 by zněl „co chvíli jsou nevyrovnané a nerovné“. Použitý překlad vychází z toho, že *cenci* je antonymum slova *qi* 齊, které překládám „přizpůsobit“.

²¹ „Tvůrce metody“ je standardní komentátorské označení autorů *Devíti kapitol*. Zdrojem tohoto opisu je zřejmě nejistota ohledně autorství. Tento obrat uvádí ty části komentáře, které se snaží objasnit „myšlenku“ (*yi* 意) metody. V tomto případě vysvětluje, proč se od ploch polí náhle přechází ke zlomkům a proč je jako první uvedena metoda pro jejich krácení. Obecněji je také možné chápat tuto větu jako vysvětlení, že při tvorbě všech metod se nejprve řeší případ, kdy parametry jsou zlomky. Jako „upravit“ překládám čínské slovo *zhi* 治, které jinak znamená „svést do koryta“, z toho přeneseně také „spravovat, řídit, zavádět pořádek“.

Metoda zní: Když lze pŕilit, pŕilíme. Když nelze pŕilit, vedle položíme²² množství ze jmenovatele a čitatele. Odečteme menší od většího, střídavě je odečítáme od sebe, usilujeme o rovnost. Krátíme množstvím rovnosti.²³

Krátit množstvím rovnosti znamená dělit. To, co od sebe navzájem odečítají, jsou vícenásobky množství rovnosti, proto se krátí množstvím rovnosti.

(1.7) Mějme 1 ze 3 dílů a 5 ze 2 dílů. Ptáme se, kolik získáme, když je spojíme?

Odpověď zní: 10 z 15 dílů.

(1.8) Dále mějme 2 ze 3 dílů, 4 ze 7 dílů a 5 z 9 dílů. Ptáme se, kolik získáme, když je spojíme?

Odpověď zní: Vyjde 1 [celá] a 50 ze 63 dílů.

(1.9) Dále mějme 1 ze 2 dílů, 2 ze 3 dílů, 3 ze 4 dílů a 4 z 5 dílů. Ptáme se, kolik získáme, když je spojíme?

Odpověď zní: Vyjde 2 [celé] a 43 ze 60 dílů.

(1.IV) Spojení dílů

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají ke spojení dílů: Když množství nejsou na stejném výběžku [společného počátku],²⁴ díly nemají určenou míru, čitatele jsou pomíchány a jmenovatele mají nerovné velikosti, liší se v jemnosti a hrubosti a z hlediska jejich vnitřní struktury těžko mohou následovat společnou jednotku. Proto se všechny díly přizpůsobí, jejich jmenovatele se sjednotí, aby se mohly sečíst. Tomu se říká spojení dílů.

Metoda zní: Jmenovatele si navzájem vynásobí čitatele, sečtou se a vytvoří obsah. Jmenovatele se spolu vynásobí a vytvoří pravidlo.

Jmenovatele si navzájem vynásobí čitatele: vyjádřeny zkráceně budou díly hrubé. Vyjádřeny složitě, budou díly jemné. Ale i když se hrubostí a jemností liší, jejich obsah je stejný. Když se díly míchají jeden do druhého, musí být jemné, aby se setkaly. Násobíme je a rozdrobíme, čímž se uvedou do propojení.²⁵ Když jsou uvedeny do

²² „Vedle“ (*fu* 附) znamená, že operace se provádí s kopii čísel ze zadání, která se mají ponechat nezměněná. Často je však z kontextu zřejmé, že se původní operand zachovává, i když se kvalita kátor *fu* přímo nepoužívá.

²³ V originále *deng shu* 等數, tj. množství, kdy jsou si rovná.

Zde popsaná metoda hledání nejvyššího společného dělitele je ekvivalentní Euklidově výroku č. 2 ze VII. knihy *Základů*. Využijme zadání úlohy (1.6): Začínáme s dvojicí čísel (91,49). Odečteme druhé od prvního a získáme (42,49). Nyní je první číslo menší a proto jej odečteme od druhého – (42,7). Dále odečítáme druhé číslo a získáme postupně (35,7), (28,7), (21,7), (14,7) a (7,7). V tomto okamžiku jsou obě čísla rovná, našli jsme nejvyšší společný dělitel – 7.

²⁴ Tato věta zřejmě naráží na představu matematiky a zároveň čísel jako rozvětveného stromu, jehož všechny „větvičky“ vedou ke stejnému společnému kořeni či kmeni (srv. Liu Huiovu předmluvu, str. 49).

²⁵ Základem Liu Huiovy teorie operací se zlomky je „uvedení do propojení“ *tong* 通. Toto slovo může znamenat „proniknout, učinit vzájemně zaměnitelným, umožnit vzájemnou komunikaci“. Všechny tyto významy zde přicházejí ke slovu: zlomky sebou díky násobením navzájem proniknou, tj. jejich původně nepřekrývající se struktury splynou; zároveň se stanou jejich díly vzájemně zcela zaměnitelné, což je podmínkou početních operací s nimi;

propojení, je možné je sečíst. Když si jmenovatele navzájem vynásobí čitatele, nazýváme to „přizpůsobit“. Když se jmenovatele spolu vynásobí, nazýváme to „sjednotit“.²⁶ Sjednotit znamená uvést vzájemně do propojení a nechat sdílet jednotného jmenovatele. Když se čitatele přizpůsobují jmenovateli, rozložení se nemůže odchylovat od [svého] základního množství.²⁷

Metody se shromažďují podle své třídy, předměty se dělí podle svých skupin.²⁸ Když jsou množství stejné třídy, nemohou si být vzdálená, když jsou jiné třídy, nemohou si být blízká. Ta, která jsou vzdálená, ale mají stejné proporce, jdou stejným směrem, i když jsou na různých místech. Ta, která jsou blízká, ale mají různé tvary, se rozcházejí, i když jsou v jedné řadě. Proto metoda přizpůsobení a sjednocení je zásadní: Množství s pronikajícími se mírami se jedním rázem uvedou v takový soulad! Je to jako rozplétání uzlů kostěným klínkem, není nic, co by se jejím použitím neuspořádalo. Drobit násobením, sdružovat krácením, uvádět do propojení přizpůsobením a sjednocením, není to osnova [všech] výpočtů?

Je ještě jedna metoda, lze stanovit, že zmenšujeme jmenovatele, aby vytvořily poměry, pak násobením čitatele poměrem je přizpůsobení.²⁹

[Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1. Co nenaplní pravidlo, označíme pravidlem.³⁰

Zde jsme chtěli nalézt obsahy, proto jsme přizpůsobovali čitatele, sjednocovali jmenovatele a stanovili, že [dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1. Zbytek krátíme množstvím rovnosti a získáme to., což znamená, že sjednocené pravidlo tvoří jmenovatel a zbytek obsahu tvoří čísel, všechny [případy] sledují tento příklad.

Mají-li stejné jmenovatele, přímo se k sobě přiřadí.³¹

uvedou se tím do komunikace, což také znamená schopnost vzájemné výměny a odstranění překážek. Liu Hui tento pojem aplikuje i na vztahy jiných různorodých objektů, například těles (proto také níže v tomto komentáři mluví o stejných proporcích a různých tvarech).

²⁶ „Přizpůsobení“ *qi* 齊 znamená také „vyrovnání“.

²⁷ „Rozložení“ je v originále *shi* 勢. Je to významný pojem čínského myšlení, znamená situaci, především z hlediska rozložení sil a vývojových tendencí. Základní a nejčastější použití je pro rozložení obrazců nebo čísel v celku. *Shi* má v sobě prvek dynamičnosti, zahrnuje proceduru, kterou bylo rozložení sil/situace dosaženo, ale také určitou tendenci reprodukovat se při dalších transformacích.

„Základní“ je překlad slova *ben* 本, které původně znamená „kořen“, z toho též „původní“, „nejzákladnější“, „zásadní“. Zde je ho možné chápat sice také jako „původní“ (před přizpůsobením), ale podle mého názoru vyjadřuje spíše „prapůvodní“, tj. nezávislé na reprezentaci konkrétními čitateli a jmenovateli.

²⁸ Citát z Velkého komentáře ke knize proměn, 1. kap., odstavec 1.

²⁹ Zde se v Liu Huiově komentáři objevuje poprvé slovo „poměr“ *lü* 率, které de nuje v poznámce k metodě (1.VIII). Je to jeden z nejdůležitějších pojmů jeho matematické teorie. V této metodě označuje *koe* cienty, kterými je třeba násobit jednotlivé jmenovatele, aby vytvořily společný jmenovatel (neboli podíly společného jmenovatele a původních jmenovatelů). Násobením tímto poměrem převede čísel na ekvivalent pro společný jmenovatel. Tato metoda je výpočetně úspornější než původní metoda klasického textu pro vyšší počet sloučených zlomků *n*. nahrazuje $n(n - 2)$ násobením *n* děleními.

³⁰ „Označit“ je sloveso *ming* 命, jehož původní významy jsou též „přikázat“, „nařídít“, ale také „udělit“, zejména „udělit jméno“, tedy také „pojmenovat“.

³¹ Sloveso *cong* 從, „přidat, následovat“, je jedním ze synonymních způsobů zápisu sčítání.

(1.10) Mějme 8 z 9 dílů, odečteme 1 z 5 dílů téhož. Ptáme se, kolik je zbytek?
Odpověď zní: 31 dílů ze 45.

(1.11) Dále mějme 3 ze 4 dílů, odečteme 1 ze 3 dílů téhož. Ptáme se, kolik je zbytek?

Odpověď zní: 5 ze 12 dílů.

(1.V) Odčítání dílů

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Množství v čitatelích i jmenovatelích dílů jsou vzájemně různá, odečteme menší od většího a chceme vědět, kolik je zbytek; rozdíl odečítání vytvoří obsah, proto se hovoří o „odčítání dílů“.

Metoda zní: Jmenovatele si navzájem vynásobí čitatele, odečteme menší od většího, zbytek je obsah. Jmenovatele se spolu vynásobí a vytvoří pravidlo. [Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1.

„Jmenovatele si navzájem vynásobí čitatele“ – tím se čitatele přizpůsobí. „Odečteme menší od většího“ – jsou přizpůsobené, tedy je možné je od sebe odečíst. „Jmenovatele se spolu vynásobí a vytvoří pravidlo“ – sjednocují se jmenovatele. Jmenovatele jsou sjednocené a čitatele přizpůsobené, proto [dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1 a získáme to.

(1.12) Mějme 5 z 8 dílů a 16 z 25 dílů. Ptáme se, který je víc a o kolik?

Odpověď zní: 16 z 25 dílů je víc, a to o 3 z 200 dílů.

(1.13) Dále mějme 8 z 9 dílů a 6 ze 7 dílů. Ptáme se, který je víc a o kolik?

Odpověď zní: 8 z 9 dílů je víc, a to o 2 ze 63 dílů.

(1.14) Dále mějme 8 dílů z 21 a 17 dílů z 50. Ptáme se, který je víc a o kolik?

Odpověď zní: 8 dílů z 21 je víc, a to o 43 dílů z 1050.

(1.VI) Porovnání dílů³²

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Když díly má jiná jména, jejich vnitřní struktura není přizpůsobená a jednotná, porovnáváme jejich množství navíc vůči sobě, proto se hovoří o „porovnání dílů“.

Metoda zní: Jmenovatele si navzájem vynásobí čitatele, odečteme menší od většího, zbytek je obsah. Jmenovatele se spolu vynásobí a vytvoří pravidlo. [Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1, a to je [jejich] množství navíc vůči sobě.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají k této metodě: Jmenovatele si navzájem vynásobí čitatele a odečteme menší díly od větších dílů. (Poznámka: Tato metoda má v mnohém)³³ stejný význam jako odčítání dílů. Pouze v množství navíc vůči sobě se její myšlenka odlišuje od odčítání dílů: při odčítání dílů hledáme, jaké je množství zbytku, při porovnání dílů bereme zbytek jako [jejich] přebytek vůči sobě.

³² „Porovnat“ – v originále *ke 課*. Tato operace byla chápána jako odlišná od odčítání, protože zachycovala na rozdíl od něj smysl rozdílu („přebytek“ a „nedostatek“ apod.).

³³ Část v závorkách je sporná, vyskytuje se pouze v Bao Huanzhi'ově edici. Slovo „Poznámka“ často uvádí Liu Huiovy komentáře, otázka správného znění je tedy také otázkou atribuce následujícího komentáře. [Chemla & Guo Shuchun 2004] již používají text bez sporné části, viz str. 164 a 762, pozn. 51.

(1.15) Mějme 1 ze 3 dílů, 2 ze 3 dílů a 3 ze 4 dílů. Ptáme se, o kolik zmenšíme větší a přidáme k menším, aby byly vyrovnané?

Odpověď zní: Odečteme ze 3 ze 4 dílů [v poměru] 2 a ze 2 ze 3 dílů [v poměru] 1, sečteme a přidáme to k 1 ze 3 dílů, a tak budou všechny vyrovnané na 7 ze 12 dílů.

(1.16) Dále mějme 1 ze 2 dílů, 2 ze 3 dílů a 3 ze 4 dílů. Ptáme se, o kolik zmenšíme větší a přidáme k menším, aby byly vyrovnané?

Odpověď zní: Odečteme ze 2 ze 3 dílů [v poměru] 1, ze 3 ze 4 dílů [v poměru] 4, sečteme a přidáme to k 1 ze 2 dílů, a tak budou všechny vyrovnané na 23 z 36 dílů.

(1.VII) Vyrovnání dílů

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají k vyrovnání : Díly mají nevyrovnané velikosti, chceme je učinit vyrovnanými, snižujeme z oněch, o kolik jsou větší, a navyšujeme tím, o kolik jsou tyto menší, proto se hovoří o vyrovnání .

Metoda zní: Jmenovatele si navzájem vynásobí čitatele.

To je přizpůsobení čitateľů.

Vedle se sečtou na vyrovnaný obsah.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Jmenovatele si navzájem vynásobí čitatele a vedle se sečtou na vyrovnaný obsah, čímž se stanoví vyrovnaný obsah jako řídicí mez. To, co se pak od jednotlivých čitateľů ubírá nebo se k nim přidává, je omezeno tak, aby byly vyrovnané.

Jmenovatele se spolu vynásobí a vytvoří pravidlo.

„Jmenovatele se spolu vynásobí a vytvoří pravidlo“, čímž se také, [kvůli] přizpůsobení čitateľů, dále sjednocují jejich jmenovatele.

Množstvím pozic³⁴ násobíme nesečtené [čitatele dílů] a získáme obsahy pozic. Také množstvím pozic násobíme pravidlo.

Zde by bylo na místě³⁵ vedle položit množství pozic a zmenšit jím vyrovnaný obsah. Kdybychom to udělali takto, byly by opakovaně díly,³⁶ proto se naopak množstvím pozic násobí přizpůsobené [čitatele] i sjednocený [jmenovatel].

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: V úlohách se hovoří o dílech, které se vyrovnávají, v množství, které není pevně dáno, někdy jsou tři, někdy dva, rozložení pozic není stálé. Pokud se vyrovnávají tři, položí se na tři pozice. Pokud

³⁴ „Pozice“ je volný překlad slova *lie* 列, které znamená „rozložit vedle sebe“.

³⁵ Obratem „bylo by na místě“ překládám modální sloveso *dang* 當, které v komentářích uvozuje postupy, které jsou intuitivnější než metoda klasického textu, ale více výpočetně náročné. Objevuje se v popisech metod, které obsahují nějaký „trik“ na zkrácení výpočtu. Synonymně s ním vystupují dále slova *yi* 宜, „mělo by se, správně by...“, a *he* 合, „odpovídalo by“.

³⁶ Tj. vznikl by složený zlomek. Snahou metod v *Devíti kapitolách* je vyhnout se zlomku s více úrovněmi jmenovatelů. Při hledání aritmetického průměru se sice zlomky převedou na společný jmenovatel, ale součet čitateľů vstupních dat po vydělení jejich počtem může být smíšené číslo, jehož zlomková část bude mít navíc jiný než sjednocený jmenovatel. V tom případě by se muselo znovu roznásobovat způsobem, který je popsán v poznámce 45. Této práci navíc se metoda vyhýbá tím, že nejprve násobí, takže se odečítají jen celá čísla, a pak teprve dělí.

se vyrovnávají dva, položí se na dvě pozice. V těchto případech nelze předem určit, kolik se bude vyrovnávat, proto se hovoří jen o „množství pozic“.

Odečítáme vyrovnaný obsah od obsahů pozic, zbytky zkrátíme a to tvoří to, co odečítáme. Sečteme to, co odečítáme, to se přidá k nejmenšímu.³⁷ Vyrovnaný obsah označíme pravidlem a všechny jsou vyrovnány.

(1.17) Mějme 7 lidí, kteří si rozdělí 8 celých a 1 ze 3 dílů měďáku. Ptáme se, kolik každý dostane?

Odpověď zní: Každý dostane 1 celý a 4 z 12 dílů měďáku.

(1.18) Dále mějme 3 celé a 1 ze 3 dílů člověka, kteří si rozdělí 6 celých a 1 ze 3 dílů a 3 ze 4 dílů měďáku. Ptáme se, kolik každý dostane?

Odpověď zní: Každý dostane 2 celé a 1 z 8 dílů měďáku.

(1.VIII) Kanonizace dílů³⁸

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají ke kanonizaci dílů – od „Spojení dílů“ dále [měly všechny metody souvislost] se vzájemným přízpůsobováním jednotlivých dílů, zde se však přímo hledají díly na jednoho člověka. Počtem lidí se rozděluje to, co je rozděleno, proto se hovoří o „kanonizaci dílů“.³⁹

Metoda zní: Z množství lidí tvoříme pravidlo, z množství měďáků obsah. [Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1. Pokud jsou díly, uvedeme je do propojení.⁴⁰

Jmenovatele si navzájem vynásobí čitatele –přízpůsobují se čitatele. Jmenovatele se spolu vynásobí – sjednocují se.⁴¹ Uvést do propojení jmenovatelem znamená jmenovatelem vynásobit celek a zahrnout čitatele. Násobením rozdrobíme celek a získáme sebrané díly.⁴² Sebrané díly jsou propojené s čitatelem, proto můžeme stanovit, ať se k sobě přiřadí. Kdykoli jsou množství relativní, nazýváme je poměry.⁴³

³⁷ Tato operace využívá vlastnosti všech zadání, že pouze jeden zlomek je menší než průměr.

³⁸ V originále *jing fen* 經分. Význam není úplně jasný, i když podstatou této metody je zjevné dělení zlomků nebo spíš zjednodušování složitých zlomků. [Chemla & Guo Shuchun 2004] překládá „partage des parts“. V kapitole 2 jsou dvě související metody, které však místo se zlomky pracují s obecnými čísly a nazývají se *jing lü*. I tam jde o dělení, ale kromě toho obnášejí převod obecně vyjádřených úměrností na speciální tvar 1:x. To naznačuje, že by se mohlo jednat o převod na základní, kanonický tvar, a tento pocit ještě posilují Liu Huiovy výroky o „poměrech ve vzájemném propojení“ v komentáři zde. Přitom *jing* je „osnova“, což evokuje prokládání nití při tkaní, ale také „klasická kniha, kánon“.

³⁹ Tato Li Chunfengova vysvětlivka toho příliš neobjasňuje. Výše zmíněnou interpretaci slova *jing* ani nepotvrzuje, ani nevyvrací. Je také otázka, jestli Li Chunfeng chápal tento pojem stejně jako Liu Hui – úplná mimoběžnost jejich komentářů k této metodě vyvolává určité pochybnosti.

⁴⁰ Je tím myšlen převod smíšeného čísla (které má „díly“, tj. necelou část) na „číslo v propojení“, tedy zlomek s čitatelem větším než jmenovatel.

⁴¹ Komentář tu používá formulaci typickou pro citování klasického textu a jeho výklad. Klasický text však nic o násobení nepíše, Liu Hui vlastně doplňuje svůj výklad „propojování“.

⁴² V originále *ji fen* 積分. Tímto termínem se označují části, které vznikly roznásobením celé části smíšeného čísla jmenovatelem.

⁴³ „Relativní“ je doslova „jsoucí spolu“. Tato věta (v originále *fan shu xiang yu zhe wei zhi lü* 繁數相與者謂之率) je jedním z nejčastěji citovaných míst Liu Huiova komentáře. Je to de nice

Poměry jsou samy od sebe uvedeny vzájemně do propojení. Když má množství díly, můžeme jej rozdrobit; pokud jsou díly opakovaně navrstvené, lze je krátit. Obsah a pravidlo, zmenšené množstvím rovnosti, jsou poměry vztažené vůči sobě. Proto se při rozdrobování dílů vždy nevyhnutelně oběma jmenovateli násobí obsah a pravidlo.⁴⁴

Pokud jsou opakovaně díly,⁴⁵ sjednotíme je a pak uvedeme do propojení.

Jinak řečeno jmenovatelem pravidla se násobí číselník a jmenovatelem obsahu pravidlo. Toto znamená [případ], že v obsahu i pravidle jsou díly, proto každý jmenovatel vynásobí celek a zahrne se číselník a dále jmenovatele navzájem vynásobí horní respektive spodní [číselníky].

(1.19) Mějme pole se šířkou 4 ze 7 dílů kroku a podélnou 3 z 5 dílů kroku. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 12 z 35 dílů kroku.

(1.20) Dále mějme pole se šířkou 7 z 9 dílů kroku a podélnou 9 z 11 dílů kroku. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 7 z 11 dílů kroku.

(1.21) Dále mějme pole se šířkou 4 z 5 dílů kroku a podélnou 5 z 9 dílů kroku. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 4 z 9 dílů kroku.

(1.IX) Násobení dílů

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají k násobení dílů: Jmenovatele se spolu vynásobí a vytvoří pravidlo, číselníky se spolu vynásobí a vytvoří obsah, proto se hovoří o „násobení dílů“.

Metoda zní: Jmenovatele se spolu vynásobí a vytvoří pravidlo, číselníky se spolu vynásobí a vytvoří obsah. [Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1.

Kdykoli obsah nenaplní pravidlo, mají název jmenovatel a číselník.⁴⁶ Pokud jsou díly, zvětšíme číselníky násobením a pak jsou z nich už jen celá množství. Jinak řečeno, číselníky jsme něčím vynásobili, proto by se měl jmenovatelem na oplátku zmenšit.⁴⁷ Zmenšování na oplátku znamená, že [dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1. Nyní se číselníky spolu násobí, jmenovatele by tedy měly oba zmenšovat na oplátku, proto se jmenovatele spolu vynásobí a zmenšují společnými silami. Zde mají pole šířku a podélnou, je obtížné pochopit to obecně. Předpokládejme, že úloha zní: 20 koní má hodnotu 12 jinů zlata. Peníze si rozděluje 35 lidí, kolik každý dostane? Odpověď zní: 12 z 35 dílů jinů. Řeší se to tak jako v metodě „Kanonizace dílů“,

pojmu *lǚ*, který se objevuje už v klasickém textu, u Liu Huie je však centrální. Jeho základní význam je „poměrné množství“, tj. koeficient jedné ze dvou úměrných veličin (například obsahu čtverce a vepsaného kruhu). Je to „relativní množství“ v protikladu k „absolutnímu množství“, *shu*. Srv. [Chemla & Guo Shuchun 2004], str. 167: „Chaque fois que des quantités (*shu*) sont données en relation les unes avec les autres, on les appelle des *lǚ*.“

⁴⁴ Význam této věty je nejasný a spekuluje se, že je zde text asi porušen.

⁴⁵ „Opakovaně“ v této větě odlišuje více zlomků různého typu, tedy číslo, které je tvořeno celou částí a více zlomky s různými jmenovateli. Tomu odpovídá složitá soustava zlomků s různými jmenovateli v úloze (1.18).

⁴⁶ Zde si navzájem neodpovídá pořadí členů v paralelních větách (dělnec – dělník X číselník – jmenovatel). To je poměrně běžný úkaz nejen v Liu Huiově komentáři, ale vůbec v klasické čínské próze.

⁴⁷ V originále *bao chu* 報除. *Bao* znamená „odplata“, „pomsta“. Viz pozn. 48.

vezmeme 12 *jinů* jako obsah a 35 lidí jako pravidlo. Předpokládejme, že změníme vyjádření tak, že 5 koní stojí 3 *jin*y. Nyní 4 prodáme a peníze si rozdělí 7 lidí, kolik každý dostane? Odpověď zní: Každý dostane 12 z 35 dílů *jinu*. Řeší se to tak, že přizpůsobíme množství *jinů* a lidí, čímž odpovídají první úloze, a vložíme je do „Kanonizace“. Tedy když se čitatele spolu násobí a vytvoří obsah, je to jako přizpůsobení [množství] zlata v této úloze. Když se spolu násobí jmenovatele a vytvoří pravidlo, je to jako přizpůsobení [množství] lidí. Když sjednotíme jmenovatele, je to 20, ale koně není třeba sjednocovat, hledáme pouze přizpůsobené [množství].⁴⁸ Ještě jinak můžeme říci, že 5 koní ku 3 *jinům* zlata je poměr celků; když ho vyjádříme díly, bude jeden kuň mít cenu 3 z 5 dílů *jinu* zlata. Sedm lidí prodává 4 koně, tedy jeden člověk prodává 4 ze 7 dílů koně. [Množství] zlata a lidí se vyvolávají ve vzájemném vztahu, liší se, z čeho jednotlivá vyjádření vycházejí, ale co do množství vypočtených všemi metodami, redukují se na stejný základ.

(1.22) Mějme pole se šířkou 3 celé a 1 ze 3 dílů kroku a podélnou 5 celých a 2 z 5 dílů kroku. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 18 kroků.

(1.23) Dále mějme pole se šířkou 7 celých a 3 ze 4 dílů kroku a podélnou 15 celých a 5 z 9 dílů kroku. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 120 celých a 5 z 9 dílů kroku.

(1.24) Dále mějme pole se šířkou 18 celých a 5 ze 7 dílů kroku a podélnou 23 celých a 6 z 11 dílů kroku. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 1 *mu*, 200 celých a 7 z 11 dílů kroku.

⁴⁸ „Koně není třeba sjednocovat“ – Liu Hui tím chce říci, že „sjednocený jmenovatel“, který by odpovídal 20 koním, nemá žádný reálný význam, je to jen pomocné číslo pro potřeby algoritmu. Když 3 je počet *jinů* zlata za 5 koní a 7 je počet lidí, kteří si dělí 4 koně, odpovídá to dělení („kanonizaci“) zlomků $3/5 : 7/4$. Když 3 *jin*y jsou za 5 koní a 7 lidí si dělí 4 koně, získá jeden člověk stejně peněz, jako kdyby bylo 12 *jinů* za 20 koní, které by si rozdělilo 35 lidí. Těchto 20 koní je číslo, které slouží právě jen pro spojení 12 a 35, ve skutečnosti nemá v rámci úlohy význam, důležitý je jen dělenec 12 a dělitel 35.

Výklad násobení zlomků pomocí dělení je zdánlivě umělý, umožňuje však vysvětlit vzájemné násobení jmenovatelů a čitatele jako jejich přizpůsobování k tvrnému sjednocenému jmenovateli-čitateli. Patrně proto je dělení zlomků v *Devíti kapitolách* zařazeno před násobení. Operace přizpůsobování a sjednocování jsou podle Liu Huiova mínění základem veškeré matematiky. Tato shoda naznačuje, že Liu Huiův výklad skutečně odráží vnitřní systém *Devíti kapitol*, vtisknutý jim jejich kompilátory.

Úloha, kterou zde Liu Hui vkládá, je také významným klíčem k chápání role úlohy v *Devíti kapitolách*. [Chemla & Guo Shuchun 2004], str. 31, na něm ukazuje, jak Liu Hui volí takovou formulaci úlohy, která mu umožní co nejzřetelnější výklad smyslu metody – význam jejich číselných prvků, tj. jejich zařazení do kontextu.

(1.X) Obecné pole⁴⁹

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají k obecnému poli: První metoda obsahovala přímo celé kroky a žádné zbývající díly. V dalších metodách byly pouze zbývající díly a žádné celé kroky. V této metodě jsou vždy nejprve celé kroky a pak opět díly, může obecně spojit⁵⁰ všechny tři metody, proto se hovoří o „obecném poli“.

Metoda zní: Jmenovatele vynásobí každý svůj celek, čitatele se k nim přiřadí.

„Jmenovatele vynásobí každý svůj celek, čitatele se k nim přiřadí“ – uvedou se do propojení celé kroky a zahrnou čitatele dílů, takto jmenovatele i čitatele vytváří obsah.

Vynásobí se spolu a vytvoří obsah. Jmenovatele se spolu vynásobí a vytvoří pravidlo.

Jako „Násobení dílů“.

[Dokud je] obsah jako pravidlo, [přidáváme] 1.

Nyní se vytváří metoda [pro případ, že] šířka i délka obsahují díly, takže by bylo na místě uvést v obou díly do propojení. Když vkládáme jmenovatel označením, je třeba jej opět dostat ven,⁵¹ proto se „jmenovatele spolu vynásobí a vytvoří pravidlo“, kterým se společnými silami zmenšuje.

(1.25) Mějme klínovité pole⁵² se šířkou 12 kroků s pravou podélnou⁵³ 21 kroků. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 126 kroků.

(1.26) Dále mějme klínovité pole se šířkou 5 celých a 1 ze 2 dílů kroků a podélnou 8 celých a 2 ze 3 dílů kroků. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 23 celých a 5 ze 6 dílů kroků.

⁴⁹ V originále *da guang tian* 大廣田. *Guang* běžně znamená „široký“ a slovníky klasické čínštiny a dokonce ani pozdější komentátor Li Ji nezmiňují žádný abstraktnější význam či příklady použití v takovém významu. [Chemla & Guo Shuchun 2004], str. 768, pozn. 83, však připomíná metodu stejného názvu v *Suan shu shu*, která má také naprosto obdobný význam a obsah – viz [Cullen 2004], str. 109. Chr. Cullen dává metodu do prostorové i věcné souvislosti s metodou *shao guang shu* 少廣術 a vyjadřuje znepokojení nad tím, že tradičně se tyto pojmy vůbec v souvislosti nepojímají. Jak však uzavírá, „This situation seems slightly unsatisfactory, but I cannot think of an obvious way of resolving it.“

⁵⁰ V originále *keyi guang jian san shu* 可以廣兼三術. Toto je podklad interpretace slova *guang* jako „obecný“.

⁵¹ V originále jde o protiklad sloves *ru* 入 „vstoupit“ a *chu* 出 „vyjít“, která zde představují násobení a dělení.

⁵² V originále *gui tian* 圭田. *Gui* byl původně nefritový předmět tvaru rovnoramenného trojúhelníka, který sloužil jako doklad platnosti smluv, pověření, obřadní odznak císaře apod. Pro vnější podobnost byl použit jako označení astronomického měřicího nástroje a také trojúhelníkových obrazců. Občas se zdůrazňuje, že jde o rovnoramenný trojúhelník, je ale otázka, zda to je pro výpočet obsahu podstatné.

⁵³ V originále *zheng zong* 正從. Jde o rozměr po kolmici. Stejný kvali kátor *zheng* se používá v následujících příkladech a metodách i pro „pravou šířku“.

(1.XI) (Klínovité pole)

Metoda zní: Půlíme šířku a násobíme jí pravou podélnou.

Půlení šířky je vytvoření přímého pole⁵⁴ doplněním prázdného přeplněným.⁵⁵ Také je možné půlit pravou podélnou a násobit jí šířku. Poznamenejme, že poloviční šířka násobí podélnou, tím získáme průměrnou velikost uprostřed, proto pak násobením [průměrné] šířky a podélné vznikne sebrání kroků. Zmenšujeme pravidlem pro *mu* a získáme to.

- (1.27) Mějme zkosené pole,⁵⁶ na jednom konci je šířka 30 kroků, na druhém konci je šířka 12 kroků, pravá podélná je 64 kroků. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 9 *mu* a 144 kroků.

- (1.28) Dále mějme zkosené pole, pravá šířka je 65 kroků, na jedné straně⁵⁷ je podélná 100 kroků, na druhé straně je podélná 72 kroků. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 23 *mu* a 70 kroků.

(1.XII) (Zkosené pole)

Metoda zní: Sečteme obě [strany přilehlé ke straně] zkosené a půlíme, tím násobíme pravou podélnou nebo šířku. Také je možné půlit pravou podélnou nebo šířku a násobit tím součet. Pravidlo pro *mu* [přidává] 1.

Sečtením a půlením se doplní prázdné přeplněným.

- (1.29) Mějme rozbíhavé pole,⁵⁸ jehož jazyk je široký 20 kroků, pata je široká 5 kroků a kolmá délka je 30 kroků. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 1 *mu* a 135 kroků.

- (1.30) Dále mějme rozbíhavé pole, jehož jazyk je široký 117, pata je široká 50 kroků, kolmá délka je 135 kroků. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 46 *mu* a 232 kroků.

⁵⁴ V originále *zhi tian* 直田. Tento termín není v klasickém textu, pro Liu Huie jde zjevně o ekvivalent „pravoúhlého pole“.

⁵⁵ To je základní heuristická metoda odvozování výpočtů obsahů plošných obrazců a objemů těles, kterou Liu Hui zmiňuje na mnoha místech. [Chemla & Guo Shuchun 2004], str. 1025 ukazuje, že tato myšlenka je pevně založena v čínské *lozo* 籒 (v „Knize proměn“ i textu *Laozi*) a inspirovala i ekonomická správní opatření již v době Válčících států. Podobná formulace nicméně není nikde v klasickém textu ani v *Suan shu shu*.

⁵⁶ Původně vlastně „šikmé“ *xie* 邪. Jde o pravoúhlý lichoběžník, tedy šikmo seříznutý – neboli zkosený – obdélník. V *Devíti kapitolách* se neobjevuje kosodélník, lze však odhadnout, že by byl řešen s využitím právě této metody, proto název „zkosené pole“ může teoreticky zahrnout i řešení kosodélníků.

⁵⁷ Snažím se pomoci dvojice slov „konec“ – „strana“ zachytit konvenci, kterou *Devět kapitol* používá: strany příčné (*guang*) se nazývají *tou* 頭, strany podélné *pan* 畔. Opozice mezi šířkou a délkou je velice výrazná v celé geometrické části *Devíti kapitol*.

⁵⁸ Toto je poněkud bezradný překlad slova *ji* 箕, které znamená lopatku nebo původně nástroj tvaru lichoběžníka na rozdírávání slupky obilných zrn, tedy jakousi špachtli. Protože tato pole jsou vždy rozbíhavá („pata“ je užší než „jazyk“), použil jsem nakonec tento překlad.

(1.XIII) (Rozbíhavé pole)

Metoda zní: Sečteme patu a jazyk a půlíme, tím násobíme pravou podélnou. Pravidlo pro *mu* [přidá] 1.

Když rozpůlíme rozbíhavé pole uprostřed, jsou to dvě zkosená pole, proto jsou si jejich metody podobné. Lze také sečíst patu a jazyk, půlit pravou podélnou a tím je násobit.

(1.31) Mějme kruhové pole s obvodem 30 kroků a průměrem 10 kroků.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Myšlenka metody je použití poměrů obvod 3 – průměr 1, pak obvodu 30 kroků odpovídá průměr 10 kroků. Nyní podle přesných poměrů⁵⁹ odpovídá průměr 9 celých a 6 z 11 dílů kroku.

Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 75 kroků.

Toto by podle [mé] Huiovy metody mělo být pole velikosti 71 celých a 103 ze 157 dílů kroku.

Váš poddaný Chunfeng a další se pokorně drží přesných poměrů,⁶⁰ pole je velké 71 celých a 13 z 22 dílů kroku.

(1.32) Dále mějme kruhové pole s obvodem 181 kroků a průměrem 60 celých a 1 ze 3 dílů kroku.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Obvod 3 – průměr 1, obvod je 181 kroků a průměr 60 celých a 1 ze 3 dílů kroku. Podle přesných poměrů je průměr 57 celých a 13 z 22 dílů kroku.

Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 11 *mu*, 90 celých a 1 z 12 dílů kroku.

Toto by podle [mé] Huiovy metody mělo být pole velikosti 10 *mu*, 28 celých a 113 z 314 dílů kroku.

Váš poddaný Chunfeng a další se pokorně drží přesných poměrů, pole je velké 10 *mu*, 25 celých a 87 z 88 dílů kroku.

(1.XIV) (Kruhové pole)

Metoda zní: Polovina obvodu a polovina průměru se spolu vynásobí. Získáme sebrání kroků.

Poznámka: Polovina obvodu tvoří podélnou, polovina průměru tvoří šířku, tudíž když se spolu vynásobí šířka a podélná, získáme sebrání kroků. Pokud by průměr

⁵⁹ Tak zvané „přesné poměry“ jsou ve skutečnosti hrubší ze dvou skupin poměrů, k nimž dospěl matematik Zu Chongzhi (429 – 500) neznámou metodou (snad pokračováním Liu Huiovy bisekce n -úhelníků až na 24 576 úhelníků). Zjistil, že π leží mezi 3,1415926 a 3,1415927 a stanovil přesnější poměry 355/113 a přibližné poměry 22/7 pro jeho aproximaci. Jak si všiml už Dai Zhen, Liu Huiův poměr 3,14 i Zu Chongzhiův poměr 22/7 (cca 3,1429) jsou srovnatelně nepřesné a Li Chunfeng se mýlil, když opravoval Liu Huiovy výsledky pomocí poměrů 22/7.

⁶⁰ Nezvyklá variace v úvodním Li Chunfengově vstupu je způsobena tím, že v Bao Huanzhiově edici a ve všech edicích, které na ni navazují (edice Jigu, Kong Jihanova edice, Qian Baocongova edice) chybí obvyklý znak *an* 按, „poznámenat“, a tak je nutné vzít jako přísudek následující sloveso *yi* 依, „opírat se o něco“, které by jinak patřilo do samostatného určení v další větě.

kruhu byl 2 chi, pak strana šestiúhelníku,⁶¹ vloženého do kruhu, a polovina průměru kruhu by byly stejné velikosti. Tomu odpovídá, že poměr průměru je 1 a poměr obvodu oblouku je 3.

Další poznámka: Vytvoříme-li si obrázek, [vyplyne z něj, že] když stranou šestiúhelníka násobíme polovinu průměru jedné sekce a ztrojnásobíme to, získáme výplň 12-úhelníka. Pokud jej dále rozdělíme, znovu stranou 12-úhelníka násobíme polovinu průměru jedné sekce a 6-násobíme to, získáme výplň 24-úhelníka. Čím víckrát ho rozdělíme, tím méně se odchýlíme [od správného množství]. Kdybychom ho rozdělili dál a dál, až už by nešel rozdělit, splynul by s obvodem kruhu a odchylka by zmizela.

Za stranou šestiúhelníka je zbytek průměru. Když násobíme délkou strany zbytek průměru, přesáhne výplň okraj šestiúhelníka.⁶² Když jsou to však jemné mnohoúhelníky,⁶³ splynou s kruhem, a tak za okrajem není žádný zbytek průměru. Jelikož za okrajem není zbytek průměru, výplň nepřesahuje mimo. Když se stranou násobí polovina průměru a rozřízneme to na sekce, každá výseč bude dvakrát. Proto když se spolu násobí polovina obvodu a polovina průměru, vytvoří to výplň kruhu.

Mluvím zde o obvodu a průměru jakožto naprosto skutečných množstvích,⁶⁴ ne o poměrech obvod 3 – průměr 1. Obvod 3 je pouze podle obrysu tohoto šestiúhelníka. Když chceme zjistit, kolik je rozdíl proti kruhu, je to jako mezi lukem a tětivou. Ale tato metoda se po generace předává a nikdo se neměl k tomu, aby ji přesně prozkoumal. Učení lidé se řídí podle minulosti a vštěpují si i její chyby.

Bez jasného podkladu se o tom těžko diskutuje. Vždy když zařazujeme věci do tříd tvarů, jsou buď kruhové nebo pravoúhlé.⁶⁵ Co se týče poměrů čtverce a kruhu, pokud

⁶¹ Zde se obecně přijímá Dai Zhenova emendace, že asi v 50 následujících případech má být slovo *hu* 弧, „kruhový oblouk“, nahrazeno slovem *gu* 觚, „roh“, který se požíval pro dále zmiňované *n*-úhelníky. Výjimkou je místo v následující větě.

⁶² Tuto větu je třeba chápat důsledkově – „protože násobíme také zbytkem průměru, přesahuje plocha kruhu plochu šestiúhelníka.“

⁶³ Doslova „tenké rohy“, tj. klínovité hranoly *gu*. Liu Hui zde popisuje fyzický model kruhu z trojbokých hranolů, které se tím víc blíží kruhové úseči, tj. jejich příslušné množství tím víc připomíná kruh (přesněji válec), čím jsou tenčí.

⁶⁴ Liu Hui poukazuje na konvenční charakter termínů *zhou* a *jing* v klasickém textu a upozorňuje, že on tyto termíny používá pro označení opravdového průměru a obvodu v jejich „nejvyšší esenci“ (*zhì rán* 至然). Za pochopení významu této věty vděčím [Chemla & Guo Shuchun 2004], str. 179 a zejm. str. 772, pozn. 114.

⁶⁵ V tomto Liu Huiově tvrzení (凡物類形象, 不圓則方) se odráží všudypřítomná dualita yin a yang. Pravoúhelník je yangový, koreluje se zemí a mužským principem, kruh je yinový, koreluje s nebem a ženským principem. Na hanských kamenných stélách jsou častá zobrazení bájného císaře Fuxiho s úhelníkem a bohyně Nüwa s kružidlem. Přestože žádná čínská matematická kniha se nesnažila poznatky strukturovat přísně duálně, snaha o dualitu je velmi patrná. V tomto případě Liu Hui aplikuje dualitu na geometrické objekty.

V *Devíti kapitolách* se skutečně vyskytují jen dva typy geometrických objektů. První typ lze převést na pravoúhlý útvar nebo těleso konečným počtem „doplnění prázdného plným“ – ty jsou pravoúhlé. Druhý typ se převádí na první typ s použitím poměrů kruhu a čtverce – ty jsou zřejmě „kruhové“. Některé kruhové objekty sice klasika ani komentáře nejsou schopny vypočítat přesně, přesto jsou to však objekty kruhového typu, jejichž výpočet využívá poměrů čtverce a kruhu.

budou přesně vypsány v blízkém, budou známy i sebevzdálenější.⁶⁶ Z toho můžeme říci, že jejich využití je velmi široké.

Opatrně jsem vše ověřil podle obrázku⁶⁷ a vytvořil nové přesnější poměry. Obával jsem se, že když pouze vyložíím metodu, budou množství nejasná a obtížně představitelná, proto ji dávám k dispozici pro kontrolu a ověření a podrobně ji zde zaznamenávám a komentuji.

Řez šestiúhelníka na dvanáctiúhelník. Metoda zní: Budiž průměr kruhu 2 *chi*, půlíme ho a vznikne 1 *chi*. To je strana kruhem obaleného šestiúhelníka. Polovina průměru 1 *chi* budiž přeponou, polovina strany 5 *cunů* delší odvěsnou, hledáme k nim kratší odvěsnu. Od výplně delší odvěsny 25 *cunů* odečteme výplň přepony, zbude 75 *cunů*. Zmenšujeme rozkladem čtverce⁶⁸ až do *miao*⁶⁹ a *hu*. Posuneme pravítko o další místo zpět a hledáme drobné množství. Bezejmenné drobné množství použijeme jako čitatel dílu, 10 jako jmenovatel a zkrátíme na 2 z 5 dílů *hu*. Tak získáme kratší odvěsnu 8 *cunů*, 6 *fenů*, 6 *li*, 2 *miao*, 5 celých a 2 z 5 dílů *hu*. Odečteme od ní polovinu průměru a zbude 1 *cun*, 3 *fen*, 3 *li*, 9 *hao*, 9 *miao*, 4 celé a 3 z 5 dílů *hu*, což nazveme „malá delší odvěsna“. Polovinu strany šestiúhelníka nazveme „malá kratší odvěsna“ a hledáme k nim přeponu. Její výplň je 267 949 193 445 *hu*, zbylé díly zanedbáme. Zmenšujeme rozkladem čtverce a tak získáme stranu 12-úhelníka.

Řez 12-úhelníka na 24-úhelník. Metoda zní: Opět budiž polovina průměru přeponou, polovina strany delší odvěsnou, hledáme k nim kratší odvěsnu. Položíme na horní pozici výplň malé přepony, 4 dají 1, získáme 66 987 298 361 *hu*, zbylé díly zanedbáme, to je výplň delší odvěsny. Odečteme od ní výplň odvěsny, zbytek zmenšujeme rozkladem čtverce, získáme kratší odvěsnu 9 *cunů*, 6 *fenů*, 5 *li*, 9 *hao*, 2 *miao*, 5 celých a 4 z 5 dílů *hu*. Odečteme to od poloviny průměru, zbudou 3 *feny*, 4 *li*, 7 *miao*, 4 celé a 1 z 5 dílů *hu*, což nazveme „malá delší odvěsna“. Polovinu strany 12-úhelníka nazveme „malá kratší odvěsna“ a hledáme k nim přeponu. Její výplň je 68 148 349 466 *hu*, zbylé díly zanedbáme. Zmenšujeme rozkladem čtverce a tak získáme stranu 24-úhelníka.

Řez 24-úhelníka na 48-úhelník. Metoda zní: Opět budiž polovina průměru přeponou, polovina strany delší odvěsnou, hledáme k nim kratší odvěsnu. Položíme na horní pozici výplň malé přepony, 4 dají 1, získáme 17 073 087 366 *hu*, zbylé díly zanedbáme, to je výplň delší odvěsny. Odečteme od ní výplň odvěsny, zbytek zmenšujeme rozkladem čtverce, získáme kratší odvěsnu 9 *cunů*, 9 *fenů*, 1 *li*, 4 *hao*, 4 *miao*, 4 celých a 4 z 5 dílů *hu*. Odečteme to od poloviny průměru, zbudou 8 *li*, 5 *hao*, 5 *miao*, 5 celých a 1 z 5 dílů *hu*, což nazveme „malá delší odvěsna“. Polovinu strany 24-úhelníka nazveme „malá kratší odvěsna“ a hledáme k nim přeponu. Její výplň je 17 110 278 813 *hu*, zbylé díly zanedbáme. Zmenšujeme rozkladem čtverce a tak získáme malou přeponu 1 *cun*, 3 *feny*, 8 *hao*, 6 *hu*, zbylé díly zanedbáme. To je strana 48-úhelníka. Násobíme ji polovinou průměru 1 *chi*, pak opět násobíme 24 a získáme

⁶⁶ Liu Hui navrhuje vypočítat poměry kruhu a čtverce přesně „v blízkém“, tedy v relativně přehledném případě kruhu, aby mohly být používány „ve vzdáleném“, tedy ve složitějších kruhovitých útvech.

⁶⁷ Řídím se podle [Guo Shuchun 2004b] a přijímám Qian Baocongovu emendaci znaku *guan* 圖 „kruh“ na znak *tu* 圖 „obrázek“.

⁶⁸ Připomeňme, že takto překládáme termín *kai fang chu zhi* 开方除之, který znamená vypočítat druhou odmocninu.

⁶⁹ Sled čínských délkových jednotek: 1 *chi* = 10 *cunů* (palec) = 100 *fenů* = 1000 *li* = 10 000 *hao* = 100 000 *miao* = 1 000 000 *hu*.

výplň 3 139 344 000 000 hu. Dělíme 10 000 000 000 a získáme výplň 313 celých a 584 z 625 dílů *cunu*, a to je výplň 96-úhelníka.

Rez 48-úhelníka na 96-úhelník. Metoda zní: Opět budiž polovina průměru přeponou, polovina strany delší odvěsnou, hledáme k nim kratší odvěsnou. Položíme pod nejvyšší pozici výplň přepony, 4 dají 1, získáme 4 277 569 903 *hu*, zbylé díly zanedbáme, a toto je výplň delší odvěsny. Odečteme od ní výplň odvěsny, zbytek zmenšujeme rozkladem čtverce, získáme kratší odvěsnou 9 *cunů*, 9 *fenů*, 7 *li*, 8 *hao*, 5 *miao*, 8 celých a 9 z 10 dílů *hu*. Odečteme to od poloviny průměru, zbudou 2 *li*, 1 *hao*, 4 *miao*, 1 celé a 1 z 10 dílů *hu*, což nazveme „malá delší odvěsna“. Polovinu strany 48-úhelníka nazveme „malá kratší odvěsna“ a hledáme k nim přeponu. Její výplň je 4 282 154 012 *hu*, zbylé díly zanedbáme. Zmenšujeme rozkladem čtverce a tak získáme malou přeponu 6 *fenů*, 5 *li*, 4 *hao*, 3 *miao*, 8 *hu*, zbylé díly zanedbáme. To je strana 96-úhelníka. Násobíme ji polovinou průměru 1 *chi*, pak opět násobíme 48 a získáme výplň 3 140 124 000 000 *hu*. Dělíme 10 000 000 000 a získáme výplň 314 celých a 64 z 625 dílů *cunu*, a to je výplň 192-úhelníka. Odečteme od ní výplň 96-úhelníka a zbude 105 z 625 dílů *cunu*, což nazveme „rozdíl výplní“. Zdvojíme ho a získáme 210 z 625 dílů *cunu*, což je oblá výplň 96 obloukových polí mimo 96-úhelník, to znamená celková výplň tětivy násobené šípem. Když ji přičteme k výplni 96-úhelníka, získáme 314 celých a 169 z 625 dílů *cunu*, a toto přesahuje okraj kruhu. Proto se vrátíme k celé části výplně 192-úhelníka, 314 *cunům*, ta vytvoří určený²⁰ poměr výplně kruhu a zanedbáme zbylé díly.

Pokud zmenšujeme výplň kruhu polovinou průměru 1 *chi* a zdvojíme výsledek, získáme 6 *chi*, 2 *cuny* a 8 *fenů*, a to je velikost obvodu. Vynásobíme průměr jím samým a vytvoří výplň čtverce 400 *cunů*. Pokud tuto výplň porovnáme s výplní kruhu, získáme pro výplň kruhu poměr 157, pro výplň čtverce poměr 200. To jest – do čtvercové výplně velikosti 200 se vejde kruh velikosti 157. Poměr kruhu je ještě trochu malý [proti skutečnosti].

Poznámka: Na obrázku obloukového pole je do čtverce vložen kruh, do kruhu vložen čtverec, vnitřní čtverec odpovídá polovině vnějšího čtverce. Tedy je-li výplň kruhu 157, výplň čtverce do něj vloženého je 100. Dále necht se průměr 2 *chi* spolu s obvodem 6 *chi*, 2 *cuny* a 8 *fenů* zkrátí, pak pro obvod získáme 157, pro průměr 50, a toto jsou jejich poměry vztažené vůči sobě. Poměr obvodu je ještě trochu malý [proti skutečnosti].

Ve vojenském depozitáři dynastie *Jin*²¹ je bronzová míra *hu*, kterou v době *Han* nechal vyrobit Wang Mang²². Nápis na ní zní: „Nařízením ustanovujeme dobrou míru

²⁰ „Určený“ *ding* 定 je zde protiklad „přirozené“ (tj. také přesné) veličiny.

²¹ Dynastie *Jin* vládla v Číně v letech 266–316. Liu Huiův komentář je však datován do r. 263 n. l. a nejspíše nemohl zahrnovat tuto pasáž, v níž se mluví o dynastii *Jin*. Je navíc takřka nemožné, že by Liu Hui neuctivě označoval dvůr dynastie, pod kterou žil, přímo jejím jménem – na jiných místech Liu Huiova komentáře, z nichž některá nesporně pochází z jeho rukou, jsou současné instituce, míry apod. označovány vždy jen jako „současné“ *jin* 今. Za možného autora byl pozděně qingským znalcem *Devíti kapitol* Li Huangem označen Zu Geng nebo Zu Chongzhi, ale i tato volba naráží na zásadní problém, že v pasáži se používá hodnota $\pi = 3927/1250$, zatímco o Zu Chongzhi²³ovi je známo, že znal a používal přesnější poměry 355/113. Spor o autorství této pasáže není vyřešený, je docela možné, že se tu setkáváme s textem jiného matematika. Druhá možnost je, že některá z informací, které Li Chunfeng v kronikách dynastií *Jin* a *Sui* předává o Liu Huiovi a otci a synovi rodu Zu, je nepřesná a uměle vytváří neřešitelné rozpory. Tomu by odpovídalo, že v Li Chunfengem redigovaných pasážích obou

hu, strana vnitřního čtverce je 1 *chi*, vně je kruh s okrajem 9 *li* a 5 *hao*, výplň je 162 *cunů*, hluboká je 1 *chi*, sebrání²³ je 1620 *cunů*, pojme 10 *dou*.“ Při řešení touto metodou získáme výplň 161 *cunů* a ještě něco, množství jsou si blízká, ale tato metoda [dává] o trochu menší [výsledek].

Rozdíl výplně *n*-úhelníků je 105 ze 625 dílů *cunu*. Pokud od výplně 12-úhelníka podle poměru ubíráme, bylo by na místě vzít 36 z těchto dílů *cunu* a přidat je k výplni 192-úhelníka,²⁴ a budeme toto považovat za poměr kruhu, bude 314 celých a 4 z 25 dílů *cunu*. Položme čtvercovou výplň mocniny průměru 400 *cunů*, uveďme ji do propojení s výplni kruhu a zkrátme, pak výplň kruhu je 3927 a výplň čtverce 5000, toto budou poměry. Ve výplni čtverce 5000 je vložen kruh s výplní 3927. Ve výplni kruhu 3937 je vložen čtverec s výplní 2500. Zmenšíme polovinou průměru, 1 *chi*,

dynastických historií se také zmiňuje výpočet průměru dutých měř podobných, jaká je zmíněna v této pasáži, získané výsledky jsou konzistentní s hodnotou $\pi = 3927/1250$ a v jednom případě je vysloveně řečeno, že tento výpočet provedl Zu Chongzhi. Viz také [Wagner 1978], [Chemla & Guo Shuchun 2004], str. 774, pozn. 133.

²² Uzurpátor trůnu na konci dynastie Záp. Han, který založil vlastní dynastii Xin („Nová“, 6 – 23 n. l.). Provedl řadu reforem, z nichž však většina měla čistě symbolický účel a efekt. K těmto reformám patřilo i vyhlášení nových o ciálních měř a vah, na něž naráží i tento text. Tzv. Wang Mangovo *hu* zřejmě navrhoval jeho významný rádce Liu Xin, který bývá někdy označován za možného kompilátora *Devíti kapitol*.

²³ Opět se setkáváme se slovem *ji*, které znamená jak součin, tak plochu nebo – v tomto případě – objem. V souvislosti s dutou mírou na obilí je také zřejmý jeho původ v představě nahromaděných zrn.

²⁴ Tato pasáž je značně nejasná. Klíčová je zde věta *yi lü xiao xi* 以率消息. *Xiao xi*, doslova „ubývání a přibývání“, je termín typický pro lozo ckou literaturu, zejména v souvislosti s narůstáním a ubýváním *yin* a *yang*, a zároveň se objevuje v astronomických výpočtech jako odborný výraz pro extrapolaci. Na základě tohoto významu navrhuje [Li Yan 1936], str. 29, chápat výpočet aproximace π , který připisuje Zu Gengzhi'ovi, takto:

počet stran n	6	12	24	48	96
aproximace plochy (A_n)	3	310,5828	313,2624	313,9344	314,1024
rozdíl proti předchozí	-	10,5828	2,6796	0,6720	0,1680
aproximaci $A_n - A_{n/2}$		$\doteq 64 \cdot 105/625$	$\doteq 16 \cdot 105/625$	$\doteq 4 \cdot 105/625$	$105/625$

Zu Gengzhi si nejprve vytvořil tabulku rozdílů mezi aproximacemi π pro jednotlivé *n*-úhelníky (viz tabulka). Na jejím základě aproximoval poměr mezi dvěma následujícími rozdíly dvou následujících aproximací $(\pi_{2n} - \pi_n) : (\pi_{4n} - \pi_{2n}) \doteq 4$ a součtem těchto rozdílů mu vyšla aproximace $\pi = \pi_{192} + (\pi_{192} - \pi_{96})/3 = 314 \text{ a } 99/625$. Tento názor opakuje [Li Jimin 1990] a uvádí podrobně jeho vztah s metodami čínské astronomie. Je tu však několik otázek: předně toto odvození by vyžadovalo schopnost výpočtu součtu nekonečné geometrické řady (v tomto případě $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{105}{625} \left(\frac{1}{4}\right)^i$) a taková znalost není v čínských pramenech – pokud vím – doložena.

Za druhé není jasné, proč by autor, pokud by vypočítal, že součet této řady je $[105/625]/3$, což je $35/625$, následně použil hodnotu $36/625$. Li Yan naznačuje zaokrouhlení součtu z 99 na 100, ale číslo 36 je jasné zmíněno už před součtem. Proto se domnívám, že Li Yanova hypotéza není použitelná.

výplň kruhu 314 celých a 4 z 25 dílů *cunu*, zdvojíme výsledek, pak 6 *chi*, 2 *cuny*, 8 celých a 8 z 25 dílů *fenu* je velikost obvodu. Celý průměr 2 *chi* se uvede do propojení s velikostí obvodu a zkrátí, získáme průměr 1250, obvod 3927, což jsou jejich poměry vztažené vůči sobě. Tím asi vyčerpáváme nejjemnější [rysy] tohoto [problému].⁷⁵ Používá se však pouze výše zmíněná metoda, která je jednodušší.⁷⁶ Kdybychom hledali stranu 1536-úhelníka a získali tak výplň 3072-úhelníka, při rozdělení na jemné části by bylo množství také takové, tím se to znovu ověřuje.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Stará metoda při řešení kruhu vždy používala jako poměry obvod 3 – průměr 1. Pokud se takto hledala velikost obvodu, byl obvod menší respektive průměr větší [než ve skutečnosti]. Pouze pokud se použije na příslušné šestiúhelníkové pole, dosáhneme souladu s těmito poměry. Proč je to tak? Mějme šestiúhelníkové pole, strana každé sekce bude 1 *chi*, pak samo sebou vyplývá,⁷⁷ že bude z rohu do rohu průměr 2 *chi*. Tedy obvod je 6, průměr 2, což souhlasí s [poměry] obvod 3 – průměr 1. Z obav, že tento fakt je stále obtížně pochopitelný, použijeme nyní navíc předmět pro jeho pochopení. Dejme tomu, že máme šest kousků klínovitých vyřezaných předmětů, každý předmět má tři strany dlouhé 1 *chi*. Sestavme tyto předměty tak, aby ostrou stranou směřovaly dovnitř, a tak vznikne šestihraný obvod, jehož vzdálenost rohů bude vždy 1 *chi*. Dále vně stran [šesti]úhelníka obkroužíme kružnici,⁷⁸ pak průměr šestiúhelníka plně dosáhne ke kružnici. Ve stranách je průměr kratší a nedosáhne k vnější kružnici. Pokud to vyjádříme pomocí průměru, bude kružnice 6 *chi*, průměr 2 *chi* a délka strany vždy 1 *chi*. Delší odvěsna ke straně⁷⁹ nedosáhne k vnější hraně, z toho vyplývá, že jistě není 2 *chi*. Proto poměry obvod 3 – průměr 1 jsou vzhledem ke kruhu pro obvod málo a pro

⁷⁵ Tato věta prozrazuje sebeuspokojení autora a kontrastuje s odpovídajícími pasážemi předcházejícího Liu Huiova komentáře, který po vyjmenování poměrů opsaného a vepsaného čtverce uzavírá: „Poměr kruhu je ještě trochu malý“. To podporuje dohady o atribuci pasáže. [Chemla & Guo Shuchun 2004] navíc poukazuje na to, že se v této pasáži o Liu Huiově metodě mluví jako o „této“, nikoli „mé Liu Huiově“, jak je pravidlem v jeho ostatních poznámkách. Na druhou stranu je vidět, že metoda i text velmi těsně sledují Liu Huiovu metodu bisekce.

⁷⁶ Tato věta může mít více významů, spojených polysémií slova *yue*: Buď autor připouští, že právě vypočtené poměry jsou sice přesné, ale při běžném používání nepraktické, takže původní Liu Huiova metoda (Liu Huiovy poměry) je kratší/méně pracná (*yue*). Nebo kritizuje Liu Huiovy poměry, že jsou „pouze přibližné“ (*yue*). Další možností je, že mluví o dvou metodách, jakými je možné dosáhnout čísla 3927/1250, tedy přibližný a rychlý součet nějaké skoro geometrické řady a přesnější, ale velmi pracný výpočet dělením n -úhelníků.

⁷⁷ Zde Li Chunfeng používá velmi zajímavou formulaci, *zi ran cong jiao zhi jiao, qi jing er chi ke zhi* 自然從角至角，其徑二尺可知. Její druhá část „... *ke zhi*“ se vyskytuje u Liu Hui a Li Chunfenga v lehce posunutých významech: Liu Hui ji používá k označení toho, že nějaká hodnota je známá nebo poznatelná (v některých případech v obsírnějším vyjádření *ke de er zhi* 可得而知), zatímco Li Chunfeng (v jednom případě možná Zu Gengzhi) tento obrat vždy uplatňuje pro uzavření argumentu: „z toho je vidět, že ...“ a předřazuje mu emotivní modální slova jako *ziran* „samo sebou“, *ding* „určitě“.

⁷⁸ Na rozdíl od kruhu *guan* 圓 se zde používá termín *gui* 規, což je původně kružidlo, přenesené i linie vytvořená jeho použitím. Podobně i dále.

⁷⁹ V originále *mian jing gu* 面徑股. Jde o kolmou vzdálenost středu od strany. Zde se hodí interpretace pojmu *gu* jako „výška“, jak překládá [Chemla & Guo Shuchun 2004].

průměr moc. Průměr 1 – obvod 3, to není přesné zachycení struktury. Asi metoda sleduje jednoduchost a to zásadní, poukazuje na trend a vyjadřuje to jen zhruba. Liu Hui ji považoval za příliš nepřesnou, proto ji změnil a rozvinul svůj poměr. Když jsme nyní psali doplňky, excerpovali jsme od různých autorů a ověřovali správnost a [Zu] Chongzhi je nejpřesnější. Proto jej zařazujeme za Huiovou metodu a doufáme, že studentům budou vštěpovány tyto [poměry].

(1.XIVa) Další metoda zní: Obvod a průměr se spolu vynásobí, 4 dají 1.

Zde je obvod totožný s obloukem z minulého příkladu. Když se obvod s průměrem spolu násobí, měla by se z každého brát polovina. Zde jsou však obvod i průměr celé, proto se oba jejich jmenovatele spolu vynásobí a dají 4, čímž se pak zmenšuje na oplátku. Podle [mé] Huiovy metody platí, že pokud vynásobíme obvod 50 a 157 dá jednu, získáme průměr. Když násobíme průměr 157 a 50 dá jednu, získáme obvod. Poměr průměru v nové metodě je ještě stále o něco menší. Proto když na základě zjevného obvodu hledáme průměr, odchylujeme se a je delší. Když na základě průměru hledáme obvod, odchylujeme se a je kratší. Ve všech případech, kdy se na základě přítomného⁸⁰ průměru hledá výplň, se vždy o něco odchylujeme do menšího; když se podle obvodu hledá výplň, vždy se o něco odchylujeme do většího.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Podle přesných poměrů, když násobíme obvod 7 a 22 dá jednu, je to průměr. Když násobíme průměr 22 a 7 dá jednu, je to obvod. Když se pak hledá podle [této] metody,⁸¹ získáme to.

(1.XIVb) Další metoda zní: Průměr se vynásobí sám sebou, trojíme ho a 4 dají jednu.

Poznámka: Když se průměr vynásobí sám sebou, vytvoří vnější čtverec. „Ztrojí se, 4 dají jednu“ – to znamená, že kruh obsadí 3 ze 4 dílů vnějšího čtverce. Pokud bychom stranou šestiúhelníka násobili polovinu průměru, bude tato výplň 1 ze 4 dílů vnějšího čtverce. Proto když ji ztrojíme, budou to 3 ze 4 dílů vnějšího čtverce. To je pouze výplň 12-úhelníka uvnitř kruhu. Když ji vezmeme jako kruh, odchylujeme se o něco do menšího. Podle [mé] Huiovy nové metody by se měl průměr sám vynásobit, pak se vynásobí 157 a 200 dá jednu.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Podle přesných poměrů dáme průměr sám sebou vynásobit, vynásobíme ho 11 a 14 dá jednu, to je výplň kruhu.

(1.XIVc) Další metoda zní: Obvod se vynásobí sám sebou, 12 dá jednu.

Obvod šestiúhelníka ku průměru kruhu jsou 3 ku 1. Proto když se obvod šestiúhelníka sám sebou vynásobí a vytvoří výplň, bude jako 9 čtverců z průměru kruhu násobeného sebou samým. Devět čtverců je celkem 12 12-úhelníků, proto se říká „12 dá jednu“, to bude výplň 12-úhelníka. Když nyní takto necháme sám sebou vynásobit obvod, pak to nebude jen 9 čtverců průměru kruhu násobeného sebou samým. Proto když 12 dá jednu, to co získáme, není ze stejné třídy jako 12-úhelník. Pokud tím chceme vytvořit výplň kruhu, odchylujeme se do většího. Nechat z obvodu 6-úhelníka

⁸⁰ „Přítomný“ – *xian* 見, doslova „zjevit se, být vidět“, je to také synonymum slova *jin* 今 „nyní, daný“.

⁸¹ Z kontextu se zdá, že Li Chunfeng zde má na mysli metodu „obvod krát průměr děleno čtyřmi“. Stejný smysl má i Liu Huiův komentář, zdůrazňuje, že vždy vycházíme z jednoho čísla známého a druhé musíme vypočítat podle jeho poměrů, ne podle poměrů 3 :1.

12 dát jednu by bylo možné.⁸² Podle [mé] Huiovy nové metody se dá obvod přímo vynásobit sám sebou a násobí se 25, pak 314 dá jednu a získáme výplň kruhu. Poměry zde jsou: 25, výplň kruhu; 314, výplň obvodu násobeného sebou samým. Položme jako obvod 6 *chi*, 2 *cuny* a 8 *fenů*, nechme vynásobit sebou samým, získáme výplň 394 384 *fenů*. Dále položme výplň kruhu 31 400 *fenů*. Zkrátíme obě 1256 a získáme tyto poměry.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Když se strana čtverce násobí sama sebou, získáme její sebrání.⁸³ Když z obvodu kruhu hledáme jeho výplň, použijeme poměry a tím budou uvedené do propojení. Tato metoda však při hledání používá poměry 3 a 1. Základní metoda kruhového pole⁸⁴ je, že se polovina obvodu a polovina průměru spolu vynásobí. Zde se používá celý obvod násobený sám sebou, proto je nutné použít jako jmenovatel 12. Proč? Když z celého obvodu hledáme polovinu obvodu, musíme použít jako pravidlo 2. Když z celého obvodu hledáme polovinu průměru, zmenšujeme dále šesti. [Dvanáct] je tedy množství, které vzniklo, když se spolu vynásobí 2 a 6, a kterým se zmenšuje obvod vynásobený sebou samým. Podle přesných poměrů se násobí sedmi a 88 dá jednu.

(1.33) Mějme vypouklé pole,⁸⁵ jehož dolní obvod je 30 kroků a průměr 16 kroků. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 120 kroků.

⁸² Liu Hui připomíná, že metoda je zcela přesná pro šestiúhelník, doslova „vzít obvod šestiúhelníka (tj. místo obvodu kruhu), 12 dá jednu je možné (tj. dělení 12 dává správný výsledek)“.

⁸³ Li Chunfeng zde interpretuje myšlenku metody tím, že připomíná základní vlastnost umocňování, totiž vytváření čísel „vyššího rozměru“, sebrání (*ji* 積). Využívá významů a vztahů pojmů „strana“ (*mian*) a *ji*, které ozřejmují zejména komentáře v metodách odmocnění na konci 4. kapitoly. Pojem „strana čtverce“ (*fang mian*) má totiž kromě své bezprostřední role ještě význam druhé odmocniny (*ji X zhi mian* znamená druhou odmocninu ze sebrání *X*) a *ji* je pak její základ, neboli číslo, které je „na druhou“. Z toho dále vyplývá, že uvedením do propojení (násobením a dělením poměry vztaženými vůči sobě) lze získat z čísla, které vznikne umocněním „strany“ (zde obvodu), číslo, které odpovídá ploše kruhu.

⁸⁴ V originále *guan tian zheng fa* 圓田正法. Myslí se tím metoda (1.XIV), která je „pravá“ nebo „plnohodnotná“ (*zheng*) v protikladu k následujícím třem metodám, které ji doplňují (*fu* 副).

⁸⁵ Tento útvar (*wan tian* 宛田) odpovídá povrchu kulového vrchlíku. „Průměr“ je měřený v kulové ploše, je to tedy délka oblouku, jehož rotací byl vrchlík vytvořen, „spodní obvod“ je obvod podstavy vrchlíku. Tato interpretace je založena jednak na Liu Huiově komentáři, jednak na běžném významu slova *wan* (vyvýšenina). Stejný geometrický útvar byl v jiných staročínských matematických knihách nazýván různě, například *Sunzi suan jing* a *Wu cao suan jing* používají termín *qiu tian* 丘田, „pole na pahorku“.

Vzhledem k tomu, že při daných rozměrech by vrchlík musel být větší než polokoule (tzn. mít v příčném řezu středový úhel větší než 180°), vyskytly se i názory, že se jedná o jiný útvar, protože pole takového tvaru nemohlo existovat. Tyto interpretace, například že se jedná o kruhovou výseč, však nelze smířit s jasným použitím termínu v jiných pramenech a Liu Huiovým komentářem k této metodě. Li Ji popisuje *wan tian* poměrně jasně: „Vypouklé pole je uprostřed vyvýšené.“ Podle toho Li Huang vytvořil ve svém komentáři ilustraci ve formě vrchlíku, což je nyní standardně přijímaný význam pojmu.

(1.34) Dále mějme vypouklé pole, jehož dolní obvod je 99 kroků a průměr 51 kroků. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 5 *mu*, 62 celých a 1 ze 4 dílů kroku.

(1.XV) (Vypouklé pole)

Metoda zní: Násobíme průměrem obvod, 4 dájí jednu.⁸⁶

Tato metoda při ověření nevychází.⁸⁷ Proto odvodíme tento tvar ze čtvercového jehlanu. Dejme tomu, že spodní hrana čtvercového jehlanu je 6 *chi* a výška je 4 *chi*. Tyto 4 *chi* jsou delší odvěsna, polovina spodní hrany – 3 *chi* – je kratší odvěsna. Šikmá hrana v kolmé rovině⁸⁸ je přepona, tedy 5 *chi*. Dáme se kratší odvěsnu a přeponu spolu vynásobit, 4-násobíme⁸⁹ a získáme 60 *chi*, což je skutečný povrch 4 stěn čtvercového jehlanu.⁹⁰ Pokud do něj vložíme kruhový jehlan, bude skutečná výplň kruhového jehlanu a skutečná výplň čtvercového jehlanu v poměrech jako jsou poměry čtvercové a kruhové výplně.⁹¹ Poznámka: Když je spodní hrana čtvercového jehlanu 6 *chi*, bude obvod čtverce 24 *chi*. Násobíme-li 5 a půlíme, je to také viditelný povrch čtvercového jehlanu. Proto hledáme-li velikost kruhového jehlanu, rozpůlíme průměr⁹² a násobíme jím polovinu spodního obvodu, a to je výplň kruhového jehlanu.

⁸⁶ Tato metoda je pouze přibližná, přesný výpočet vyžaduje použití goniometrických a cyklometrických funkcí. Viz pozn. 94.

⁸⁷ V originále *ci shu bu yan* 此術不驗. *Bu yan* zde lze doslovněji přeložit jako „neověruje se“, právě v tom významu, že její výsledek neodpovídá jiným faktům zjištěným analýzou skutečnosti.

⁸⁸ V originále *zheng mian xie* 正面邪. Význam tohoto termínu je z kontextu jasný, je to vzdálenost od vrcholu jehlanu ke středu hrany podstavy. V analogii s termíny „pravá délka“ a „pravá šířka“ bychom jej mohli překládat jako „pravá postranní šikmá.“ Zde však *mian* zřejmě znamená „stěna tělesa“, tedy nikoli strana čtverce jako obvykle, a termín skutečně odpovídá spíše „šikmé hraně kolmého řezu“.

⁸⁹ Toto je jediný případ použití slovesa *yin* 因 pro násobení v Liu Huiově komentáři a vůbec v celých *Devíti kapitolách*. V pozdější matematické literatuře je doloženo až v části *Xiahou Yang suan jing*, která pochází z druhé poloviny dynastie Tang, striktně pro násobení jednomístnými čísly, čemuž by odpovídalo i toto použití Liu Huiovo. Viz [Li Yan 1936], str. 27.

⁹⁰ I zde vystupuje *mian* ve významu stěny tělesa. Spojení *si mian xian zhe zhi mi* 四面見者之畧, „plocha toho viditelného na čtyřech stranách“, je unikátním označením povrchu. Liu Hui jej dále formalizuje a zkracuje na *xian mi* 見畧, „viditelný povrch“. Tato metoda a její Liu Huiův komentář je jediným místem v *Devíti kapitolách*, kde se počítá povrch tělesa (Liu Hui zde jaksi mimochodem odvozuje metodu pro výpočet povrchu jehlanu a kužele – ovšem bez podstavy), proto je toto označení poměrně krkolomné. Povrch těles totiž nezapadal zcela snadno do pojmového systému *Devíti kapitol*, kde se pro plochy i tělesa používají tytéž pojmy bez jakéhokoliv rozlišení, jejichž význam je dán kontextem – výpočtem ploch nebo výpočtem objemů. Podobné zápolení s „výplněmi“ těles je možné vidět v komentáři k metodě (4.22).

⁹¹ Opět je pořadí ve výčtu opačné, než by odpovídalo předchozí větě. Viz též pozn. 46.

⁹² Slovo průměr (*jing*) je zde Liu Huiem použito proto, aby byla zachována ekvivalentnost se zadáním úlohy s vrchlíkem. Ve skutečnosti je to dvojnásobek strany kužele. „Rozpůlíme“ je v tomto případě *zhe* 折, nikoli *ban* 半, v pozdějších mat. textech se tato dvě slova používala jako synonyma nebo i vytvářela jedno slovo *zheban*.

Ovšem horní průměr vypouklého pole je vyklenutý,⁹³ ale přesto se používá stejná metoda jako u kruhového jehlanu, výplň se tedy odchyluje do menšího.⁹⁴ Avšak [správná] metoda se obtížně používá, proto se uvádí jen [tato nepřesná] pro základní porovnání při aplikaci na pole velké šířky.⁹⁵ Hledání výplně kruhového jehlanu je jako hledání výplně kruhového pole. Zde se spolu násobí oba celky, proto se použije 4 jako pravidlo a zmenšujeme, také jako u kruhového pole. Ve vysvětlení metody odmocnění koule jsou všechny poměry na kouli velmi zevrubně vypsány, lze tím ověřit i toto.

(1.35) Mějme obloukové pole,⁹⁶ jehož tětíva je 30 kroků a šíp 15 kroků. Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 1 *mu* a 97 a půl kroku.

⁹³ V originále *guan qiong* 圓穹. *Yuan* znamená „kulatý“, *qiong* „vypouklý“ a „převislý na okraji“.

⁹⁴ Guo Shuchun v [Chemla & Guo Shuchun 2004] tvrdí, že Liu Huiův argument zde není správný, protože „horní průměr“ kulového vrchlíku je delší než dvojnásobek šikmé hrany kužele vepsaného do vrchlíku, takže kužel, který se vypočítá metodou klasického textu, je ve skutečnosti větší než vepsaný kužel. Podle mého názoru však Liu Hui vůbec nehovoří o vepsaném kuželu. Jeho jediný argument je klenutost útvaru, a skutečně čím víc bude vrchlík vyklenutý, tím větší je chyba metody.

Skutečná rovnice plochy vrchlíku je $S = \pi R \cdot v = \pi R^2 \cdot (1 - \cos \varphi) = \frac{O}{\sin \varphi} \cdot \frac{d}{2 \cdot \varphi} \cdot (1 - \cos \varphi) = Od \frac{1 - \cos \varphi}{2 \cdot \varphi \sin \varphi}$, kde R je poloměr pomyslné koule, v výška vrchlíku a φ

je středový úhel příslušný k oblouku, jehož rotací vrchlík vznikl; pro tento úhel platí

$\frac{\sin \varphi}{\varphi} = \frac{O}{\pi d}$ (jeho výpočet nelze transformovat na základní cyklometrické funkce arcsin, arccos

apod.). O je obvod podstavy vrchlíku a d je délka meridiánu (oblouku, jehož rotací vrchlík vznikl). Z toho vyplývá, že pro vrchlík velmi blízký kruhu ($O \rightarrow \pi d$) se povrch vrchlíku málo

liší od povrchu kužele se stranou $d/2$, platí $\frac{1 - \cos \varphi}{2 \cdot \varphi \sin \varphi} \rightarrow \frac{1}{4}$, ale s rostoucí „vypouklos-

tí“ vrchlíku tento poměr narůstá. Například plocha v úloze (1.33) by byla zhruba 158 plošných kroků, v úloze (1.34) zhruba 1635 plošných kroků, tj. 6 *mu* a 195 kroků. Chyba je kolem 30 % (a větší v prvním případě, který odpovídá většímu středovému úhlu vrchlíku).

Liu Hui tedy správně říká, že povrch vrchlíku nelze počítat stejně jako povrch kužele, protože je vyklenutý. Zřejmě měření nebo pokusy také zjistil, že skutečný povrch vrchlíku se od povrchu kužele liší právě v souvislosti s „vyklenutím“ (tj. s růstem středového úhlu φ).

⁹⁵ Liu Hui zde připouští, že metoda klasického textu je pro hrubou představu přijatelná; v druhé části je *da guang tian*, se kterým jsme se setkali jakožto s pojmem a názvem metody (1.X) „Obecné poleTP“. Zde překládám konkrétněji „pole s velkou šířkou“, ale nelze vyloučit, že Liu Hui používal *guang* i tady ve významu „obecný“, protože metoda „obvod krát průměr děleno čtyřmi“ je relativně dobrým odhadem pro celou řadu plošných útvarů.

⁹⁶ Jedná se o plochu tvaru kruhové úseče. Tomu odpovídají pojmy tětíva a výška. V originále jsou však více spjaté: „tětíva“ *xian* 弦 a „šíp“ *shi* 矢. Je třeba si uvědomit, že *xian* 弦 znamená stejně tak přeponu pravoúhlého trojúhelníka, a v následujícím Liu Huiově komentáři je proto někdy sporné, kterou funkci na daném místě právě plní.

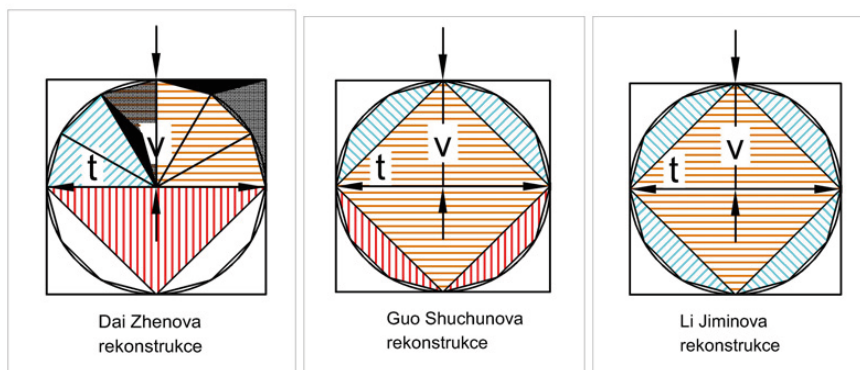
- (1.36) Dále mějme obloukové pole, jehož tětiva je 78 celých a 1 ze 2 dílů kroku a šíp 13 celých a 7 z 9 dílů kroku. Ptáme se, kolik pole to tvoří?
Odpověď zní: 2 *mu*, 155 celých a 56 z 81 dílů kroku.

(1.XVI) (Obloukové pole)

Metoda zní: Násobíme tětivu šípem, šíp se dále násobí sám sebou, sečteme to a 2 dají 1.

Pro kruh uvnitř čtverce platí, že výplň 12-úhelníka, obaleného kruhem, odpovídá 3 ze 4 dílů výplně vnějšího čtverce. [Protože] čtverec uprostřed odpovídá polovině vnějšího čtverce, rumělková a tyrkysová [výplň] odpovídá jednomu ze 4 dílů vnějšího čtverce.⁹⁷ Obloukové pole je výplň půlkruhu. Proto se pro něj vytváří metoda podle

⁹⁷ Odkaz na ztracený obrázek. Výklad je ztížen různými textovými verzemi Bao Huanzhi'ovy edice (citovaná) a Dai Zhenových edic, kde je místo „rumělková a tyrkysová“ (*zhu, qing* 朱青) „rumělkový obsah“ (*zhu shi* 朱實). Vlastní úpravu „plocha navíc“ (*shu shi* 殊實) ve významu „rozdíl ploch vnějšího čtverce a vepsaného dvanáctiúhelníka, resp. dvanáctiúhelníka a vepsaného čtverce“ navrhuje [Li Jimin 1993], ale [Guo Shuchun 2004b], str. 60, upozorňuje na čistou spekulativnost takového termínu, který není doložen nikde jinde v *Devíti kapitolách*. Dai Zhenovo znění je obtížně přijatelné, protože „rumělková“ plocha ve zbytku komentáře nevystupuje, jeho ilustrativní obrázek navíc postup Liu Huiova výpočtu příliš neosvětluje (viz následující obrázky)..



Na Dai Zhenově rekonstrukci je prominentní rumělková plocha (svisle šrafovaná), tvořící čtvrtinu vnějšího čtverce. Nelze pro ni však odvodit roli v dalším výpočtu. Hnědá plocha (vodorovně šrafovaná) zabírá dvě třetiny hledané plochy a přesunem černé a tečkované plochy lze dokázat, že je rovna polovině součinu tětivy t a šípu v (který je v tomto speciálním případě ovšem právě roven polovině tětivy). Souvislosti Dai Zhenovy tyrkysové plochy (šikmo šrafovaná) s výpočtním vzorcem $v^2/2$ je nejasná, zřejmě je důležité, že z obrázku vyplývá poloviční velikost tyrkysové plochy proti hnědé.

Guo Shuchunova rekonstrukce je podstatně logičtější, rumělkovou plochu ukazuje jako kopii tyrkysové plochy, která se liší tím, že nepatří do hledané úseče. Nicméně i tento postup důkazu je podle mého názoru krkolomný a netypický pro Liu Hui, různé barvy se obvykle používají pro plochy různého tvaru, aby se zdůraznila jejich odlišnost, zde by však byly použity jen pro odlišení části ploch, které leží mimo – přitom plocha čtverce se takto nedělí (jinak by měla být zvlášť nazvána i její část odpovídající Dai Zhenově rumělkové ploše).

tvaru polokruhu.⁹⁸ Násobíme-li tětivou výšku a půlíme, je to hnědá výplň, když se výška násobí sama sebou a půlí, jsou to dvě tyrkysová výplně. Tyrkysová a hnědá se spojí do tvaru oblouku.⁹⁹ Metoda pro oblouk by měla být ve shodě s kružnicí. [Proto když] nyní strana [12]-úhelníka nedosahuje k vnější hraně, odchylujeme se do menšího. Stará metoda kruhového pole brala jako poměry obvod 3 – průměr 1, všechny [výsledky] získala pro výplň 12-úhelníka, čímž se také odchylovala do menšího.

Z podobného [důvodu] toto platí pouze pro oblouk [který je] polovinou kruhu. Pokud netvoří celou polovinu kruhu, je to ještě víc vzdálené a nepřesné. Bylo by na místě postupovat podle metody přeřezávání kulatého polena z kapitoly Kratší a delší odvěsna. Tětiva oblouku tvoří délku řezu pilou, šíp kratší odvěsnu – hloubku a hledáme k nim průměr. Když známe průměr kruhu, lze oblouk rozdělit. Dělení znamená, že polovina tětivy oblouku bude delší odvěsna, šíp bude kratší odvěsna, hledáme k nim přeponu, a to je tětiva malého oblouku. Polovina tětivy malého oblouku bude kratší odvěsna, polovina průměru přepona, hledáme k nim delší odvěsnu, odečteme ji od poloviny průměru a zbytek je malý šíp. Dělíme dál a dál, až ji tím učiníme krajně drobnou. Pokud pouze použijeme součin tětivy a šípu, je to nutně jen přiblížení přesným poměrům. Avšak protože tato početní metoda [vyžaduje] další a další opakování, budeme zajisté chtít dojít k nějakému konci.¹⁰⁰ Pokud se pouze měří pole, jde o hrubé množství, pak je stará metoda kratší.

(1.37) Mějme prstencové pole, jehož vnitřní obvod je 92 kroků a vnější obvod 122 kroků, průměr¹⁰¹ je 5 kroků.

Zde se chce reagovat na poměry obvod 3 – průměr 1, proto se říká, že průměr je 5 kroků. Podle vnitřního a vnějšího obvodu při vyjádření [mou] Huiovou metodou by měl průměr být 4 celé a 122 ze 157 dílů kroku.

Li Jiminovo vysvětlení je nejpřirozenější, jeho emendaci *shu shi* však Guo Shuchun právem kritizuje jako umělou a bezprecedentní. Podle mého názoru by bylo možné navrhnout jinou emendaci, založenou na zvukové, nikoli grafické podobnosti: *zhu qing* by mohlo být 諸青, „všechny tyrkysové“, znění Dai Zhenových edic *zhu shi* by se dalo stejným způsobem upravit na 諸實, „všechny [tyrkysové] plochy“. Pokud bychom předpokládali, že kdysi došlo při opisování k záměně 諸 za 朱, bylo by možné vysvětlit i pozdější vznik textových verzí jako pokusů o urovnání vzniklé nesrovnalosti v textu. Tyto dva znaky sice patří do dvou různých rýmových kategorií podle rýmového slovníku *Guangyun*, (諸: 魚, [Wang Li 1980] uvádí pravděpodobné znění -io, 朱: 虞, Wang Li navrhuje znění -iu), ale již za dynastie Tang se pravděpodobně vyslovovaly alespoň v některých dialektech stejně, proto není jejich záměna zcela vyloučená.

⁹⁸ „Tvar“, *ti 體*, zde má význam vizuální pomůcky, s jejíž pomocí byla metoda odvozena.

⁹⁹ Zde by možná mělo být místo *hu* (oblouk) opět spíše *gu* (12-úhelník), jak připomíná [Li Jimin 1993]. Proti této verzi lze však namítnout, že Liu Hui zde mluví výslovně o vytvoření poloviny 12-úhelníka, který odpovídá obloukovému poli (*hu tian*), proto by mohlo být přijatelné i *hu* ve významu „úseč“, daném názvem metody v klasickém textu. Guo Shuchun ponechává původní znění bez poznámky.

¹⁰⁰ V originále *xun jiu* 尋究, „nalezt konečný fakt“. Jde o to, že početní metody často obsahují mnohačetné (vlastně neomezené) opakování, proto musíme v průběhu výpočtu rozhodnout, že už jsme našli, co jsme hledali, a nepokračovat dál až ke „krajně drobným“.

¹⁰¹ Jak vyplývá z číselných vztahů i z dalšího použití, jedná se o šířku prstence. Ponechávám slovo „průměr“ (v originále *jing*), které tu je celkem dobře srozumitelné.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Podle přesných poměrů to odpovídá průměru 4 celé a 17 z 22 dílů kroku.

Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 2 *mu* a 55 kroků.

V [mé] Huiově metodě by to mělo být pole 2 *mu*, 31 celých a 23 ze 157 dílů kroku.

Váš poddaný Chunfeng a další se pokorně drží přesných poměrů, je to pole 2 *mu*, 30 celých a 15 z 22 dílů kroku.

(1.38) Dále mějme prstencové pole, jehož vnitřní obvod je 62 celých a 3 ze 4 dílů kroku a vnější obvod je 113 celých a 1 ze 2 dílů kroku, průměr je 12 celých a 2 ze 3 dílů kroku.¹⁰²

Toto pole je prstencové, avšak neproniká [celým] kruhem,¹⁰³ proto je průměr 12 celých a 2 ze 3 dílů kroku. Pokud bychom hledali průměr podle výše zmíněných obvodů, odchyluje se tento průměr do většího víc než při poměrech obvod 3 – průměr 1, patrně je to jen přibližný [odhad]. V [mé] Huiově metodě by průměr měl být 8 celých a 51 z 628 dílů kroku.

Váš poddaný Chunfeng a další pokorně poznamenávají: Pokud bychom to prozkoumali podle poměrů obvod 3 – průměr 1, odpovídal by průměr 8 celých a 11 z 24 dílů kroku. Podle přesných poměrů by odpovídal průměr 8 celých a 13 ze 176 dílů kroku.

Ptáme se, kolik pole to tvoří?

Odpověď zní: 4 *mu*, 156 celých a 1 ze 4 dílů kroku.

V [mé] Huiově metodě by to mělo být pole 2 *mu*, 232 celých a 787 z 5024 dílů kroku. Podle „obvod 3 – průměr 1“ by to mělo být pole 3 *mu*, 25 celých a 25 ze 64 dílů kroku.

Váš poddaný Chunfeng a další se pokorně drží přesných poměrů, je to pole 2 *mu*, 231 celých a 717 z 1408 dílů kroku.¹⁰⁴

¹⁰² V Dai Zhenových edicích (*Siku*, *Juzhen*, Qu Zengfaova edice) je tato úloha umístěna mezi metody (1.XVII) a (1.XVIIa), patrně v souladu s názorem, že „přesné poměry“ se týkají zlomkových členů a metoda (1.XVIIa) je tedy příslušná k tomuto druhému typu úlohy. [Guo Shuchun 2004b], str. 64, pozn. 197, upozorňuje, že v celé první kapitole je přísně zachováváno rozvržení „několik úloh – obecná metoda řešení“. Dodejme, že se tak děje i v případě, kdy mezi jednotlivými úlohami je nějaký rozdíl, který si žádá zvláštní ošetření, jako tomu je v metodě (1.X) „Obecné poleTP“. Na druhou stranu pokud přijmeme názor, že metoda je (1.XVIIa) je porušený zbytek, který byl Bao Huanzhi'em zařazen na konec kapitoly a v základní velikosti písma, protože nebylo jasné, co znamená a kam patří (viz [Li Jimin 1993], str. 68), nelze trvat ani na přísném vzorci rozložení metod. Ten ostatně nemusí být v jedné kapitole vždy stejný, jak dokládají 2., 3., i 4. kapitola. Držím se však Guo Shuchunova členění, zachovávajícího podobu Bao Huanzhi'ovy edice.

¹⁰³ V originále *ci tian huan er bu tong za* 此田環而不通匝. *Tong* je sloveso, které známe jako „uvádět do propojení“ nebo obecněji „být zaměnitelný“, zde vstupuje do hry jeho konkrétnější význam „pronikat, být zaměnitelný, prolínat se“. *Za* je termín pro obvod čtverce (na rozdíl od *zhou* pro obvod kruhu), který se vyskytuje jen v Liu Huiově komentáři. Byl však používán systematicky v *Zhou bi suan jing*.

¹⁰⁴ [Li Jimin 1993] za tento komentář doplňuje „metodu přesných poměrů“ ve znění: „Rozstavme počty kroků vnitřního a vnějšího obvodu, čitatele a jmenovatele budou každý pod svým. Jmenovatele si navzájem vynásobí čitatele, uvedou se do propojení celé kroky, zahrnou se čitatele. Vnitřní obvod se odečte od vnějšího, zbytek se půlí. V průměru se také uvede do

(1.XVII) (Prstencové pole)

Metoda zní: Sečteme vnitřní a vnější obvod a půlíme, násobíme to průměrem, to jsou sebrané kroky.

Zde se obvod středového řezu¹⁰⁵ polem bere jako délka. Sečtením a půlením se doplňuje prázdné plným. Zde lze nechat vnitřní a vnější obvod každý vytvořit kruhové pole, když se vnitřní kruh odečte od vnějšího kruhu, zbytek je obsah¹⁰⁶ kruhového pole.

(1.XVIIa) Přesné poměry¹⁰⁷

Metoda zní: Rozstavme množství kroků vnitřního a vnějšího obvodu, čitatele a jmenovatele¹⁰⁸ budou každý pod svým. Jmenovatele si navzájem

spojení zlomek a zahrne čítele, obvod je přesný obsah, průměr je pravidlo.“ Tento text, jehož druhá část je dost drasticky upravená proti doloženému textu „metody přesných poměrů“ níže, představuje podle Li Jimina výpočet poměru obvodu a průměru oblouků (dvonásobku poloměru, nikoli šířky prstencového pásu) neúplného prstencového pole, tedy ekvivalent velikosti středového úhlu prstencového pole. Pro délku oblouku s poloměrem r a středovým úhlem φ v obloukové míře (radiánech) platí $O = r\varphi$. Pro vnitřní a vnější oblouk tedy platí, za předpokladu, že mají stejný střed a středový úhel, $O_{\text{vnější}} - O_{\text{vnitřní}} = (r_{\text{vnější}} - r_{\text{vnitřní}})\varphi$, a protože šířka pásu $d = (r_{\text{vnější}} - r_{\text{vnitřní}})/2$, platí $\varphi = (O_{\text{vnější}} - O_{\text{vnitřní}})/2 : d$.

Jakkoli je zejména pro čínské badatele lákavá představa, že Liu Hui nebo Li Chunfeng nebo někdo mezi nimi objevili jaksi mimochodem úhly (aniž by se uplatnily v dalším vývoji čínské matematiky nebo astronomie), a jakkoliv byl k tomuto výše uvedenému vztahu už jen krok od výpočtu poloviny rozdílu obvodů, myslím si, že zde Li Jimin přeceňuje možnosti „matematické textové kritiky“. Pokud by ve výpočtu metodou „přesných poměrů“ opravdu šlo o výpočet poměru délky oblouku a jeho průměru, ekvivalentní úhlu, nelze věřit, že by se komentátor obešel bez pojmu poměrů (*lǚ*). Li Jiminova formulace metody totiž vůbec neukazuje interpretaci výsledku a není pochyb, že Liu Hui nebo Li Chunfeng by se k tomuto velmi zajímavému vztahu poměrů na kruhu vyjádřili.

¹⁰⁵ V originále *tian jie er zhong zhi zhou* 此田截而中之周. *Jie* je „rozdělovat na části“, doslova bychom mohli přeložit „obvod, který je uprostřed, když pole rozdělíme na [stejně široké] části“.

¹⁰⁶ V originále *shi* 實. To není typické označení plochy v Liu Huiově komentáři, zde lze spekulovat, že se nabízelo vzhledem k odečítání dvou kvadratických, pomocných ploch vnitřního a vnějšího kruhu. *Shi* používá ve významu „plocha“ konzistentně Zhao Shuang v komentáři ke *Klasické matematické knize zhouského gnómonu*, Liu Hui ho někdy používal podobně jako v tomto případě pro plochy, které vznikají jako rozdíl (podobný význam má *shi* i v komentáři k metodě (1.XVI) (Obloukové pole) v Dai Zhenově a Li Jiminově verzi).

¹⁰⁷ V Dai Zhenových edicích (*Siku*, *Juzhen*, Qu Zengfaova edice) chybí toto předznamenání. Li Huang se navíc domníval, že tuto metodu doplnil Li Chunfeng (který vždy operuje termínem „přesných poměrů“). Metoda však neobsahuje žádnou zmínku o „přesných poměrech“ ve smyslu, ve kterém je používá Li Chunfeng, tedy jako poměr obvodu a průměru kruhu 22:7. V Bao Huanzhi'ově edici navíc byla vytištěna velkými znaky, jak přísluší klasickému textu. [Guo Shuchun 2004b] se domnívá, že „přesný“ zde znamená „se zohledněním zlomků“, což je však také obtížně přijatelné. Alternativní vysvětlení nabízí [Li Jimin 1993], str. 68 a násl., viz též pozn. 104. V každém případě je text metody, jak se dochoval v Bao Huanzhi'ově edici i jak ho viděl Dai Zhen v encyklopedii *Yongle*, značně porušen. Řídím se zněním podle [Guo Shuchun 2004b], které přebírá většinu Dai Zhenových edičních zásahů.

vynásobí čitatele, uvedou se do propojení celé kroky, zahrnou se čitatele. Vnitřní obvod se odečte od vnějšího, zbytek se půlí a přidá k vnitřnímu.¹⁰⁹ V průměru se také uvede do propojení díl a zahrne čítatel a vynásobí se jím obvod, čímž vznikne přesný obsah. Jmenovatele se spolu vynásobí a vytvoří pravidlo. Zmenšíme a vzniknou sebrané kroky, zbytek jsou díly sebraných kroků. Zmenšíme pravidlem pro mu a to je množství mu .

Poznámka: V této metodě se sčítají vnitřní a vnější množství kroků obvodu nahoře, čitatele a jmenovatele dole. Jmenovatele si navzájem vynásobí čitatele, protože vnitřní i vnější obvod obsahují díly, proto násobí ostatním, aby se přizpůsobily čitatele. Jmenovatele se spolu vynásobí, tím se sjednotí jmenovatel. Čitatele jsou přizpůsobené a jmenovatel sjednocený, proto se uvádí do propojení celé kroky a vnitřní čitatele. Půlením se doplňuje prázdné přeplněným a získá průměrný obvod. Obvod je podélná, průměr šířka, proto když se šířka a podélná vynásobí, získáme sebrání. Když jsou již spojené jmenovatele, musí jej ještě opustit. Proto se spolu vynásobí jmenovatele obvodu a průměru a společně zmenšují a tím se získají sebrané kroky. Co nelze zmenšit do konce, zmenší se množstvím rovnosti a označí na díly. Když se pravidlem pro mu zmenšují sebrané kroky, získáme množství mu .

¹⁰⁸ V Bao Huanzhi'ově edici i v encyklopedii *Yongle* je pouze „čitatele budou každý pod svým“.

¹⁰⁹ V Bao Huanzhi'ově edici i v encyklopedii *Yongle* není text „a přidá k vnitřnímu“, který doplnil až Dai Zhen. To právě vedlo Li Jimina k pokusu vysvětlit metodu jinak, protože výpočet průměru, jak je tu navržen $(A + (A - B)/2)$, je podezřele pracný.