Kapitola 4

Axiomatická teorie množin

4.1 Základní (meta)matematické pojmy

V následujících dvou oddílech je uveden přehled fundamentálních pojmů z matematické logiky a teorie množin, na jejichž znalosti jsou založeny další části této práce. Podrobnější výklad lze nalézt např. v monografiích [Ště82], [Soch01] a [BŠ86].

4.1.1 Základní logické pojmy

Jedním ze základních nástrojů matematické logiky je jazyk (matematiky i jiných oborů). Budeme pracovat s *jazykem prvního řádu*, který má pouze jeden typ proměnných (proměnné pro individua) a budeme se pohybovat v (*predikátové*) *logice prvního řádu.*[1]

Definice: Nechť L je nějaký jazyk prvního řádu a A formule jazyka L. Říkáme, že proměnná x má ve formuli A *vázaný výskyt* nebo že je *vázaná*, jestliže je součástí nějaké podformule tvaru $(\exists x)B$ či $(\forall x)B$. V opačném případě říkáme, že x má ve formuli A *volný výskyt* nebo že je *volná*. Pokud formule neobsahuje žádnou vázanou proměnnou, nazývá se *otevřená*, pokud formule neobsahuje žádnou volnou proměnnou, nazývá se *uzavřená* nebo *sentence*.

Definice: Je-li L nějaký jazyk prvního řádu a T množina formulí jazyka L. Pak říkáme, že T je (*axiomatická*) *teorie prvního řádu* (*v predikátové logice s jazykem* L). Formule z množiny T nazýváme *speciální axiomy* teorie T.[2]

Definice: Říkáme, že teorie T je *sporná*, jestliže existuje taková formule A, že v T je dokazatelná A i $nonA$.

[1] Připomeňme, že jazyk prvního řádu obsahuje následující znaky: symboly pro proměnné, funkční a predikátové symboly (nazývané – případně až na znamení rovnosti – *speciální* symboly), logické spojky, kvantifikátory a pomocné symboly.

Jazyky, které mají více druhů proměnných, se nazývají jazyky *vyšších řádů*. Predikátovou logiku vyššího řádu použijeme později při definici interpretace.

[2] Predikátová logika je speciálním případem teorie prvního řádu, která nemá žádné speciální axiomy.

Není-li teorie sporná, říkáme, že je *bezesporná*.

Definice: Říkáme, že A je *nerozhodnutelná* formule teorie T, jestliže v T není dokazatelná ani A, ani $nonA$.

Definice: Teorie T se nazývá (syntakticky) *úplná*, jestliže v ní neexistuje uzavřená nerozhodnutelná formule (tj. pro každou uzavřenou formuli A je v T dokazatelná A či $nonA$).

Definice: Nechť L je jazyk prvního řádu. Struktura $\mathcal{M}$, která obsahuje

- neprázdnou množinu M,
- zobrazení $f_{\mathcal{M}} : M^n \Rightarrow M$ pro libovolný n-ární funkční symbol f jazyka L,
- n-ární relaci $p_{\mathcal{M}} \subseteq M$ pro libovolný n-ární predikátový symbol p jazyka L

se nazývá *realizace jazyka* L. Prvky *univerza* M se nazývají *individua*.

Definice: Říkáme, že formule *je splněna* (*je pravdivá* nebo *platí*) v $\mathcal{M}$, jestliže je pravdivá v $\mathcal{M}$ při libovolném ohodnocení, tj. při libovolném pevně daném významu volných proměnných.

Pojem *pravdivosti formule v* $\mathcal{M}$ *při daném ohodnocení* se definuje metamatematickou indukcí podle složitosti formule a my jej, příp. s dalšími pojmy, pokládáme za známý, příp. odkazujeme na monografie uvedené na začátku této kapitoly.

Definice: Formule A jazyka L se nazývá *logicky pravdivá* (či též *logicky platná*, značíme $\models A$), jestliže je splněna v každé realizaci $\mathcal{M}$ jazyka L.

Logicky pravdivá formule je tedy splněna bez ohledu na realizaci jazyka, tedy při libovolné realizaci speciálních symbolů.

Definice: Je-li T teorie s jazykem L a $\mathcal{M}$ realizace jazyka L, říkáme, že $\mathcal{M}$ je (sémantickým) *modelem* teorie T, je-li v $\mathcal{M}$ splněn každý speciální axiom teorie T.

Definice: Říkáme, že formule A je *pravdivá v* T, (značíme $T \models A$), je-li splněna v každém modelu teorie T.

Gödelova věta o úplnosti predikátového kalkulu prvního řádu

Tato fundamentální věta byla poprvé zformulována roku 1929 v Gödelově doktorské dizertaci *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls*, jež byla základem publikace [Göd30]. K. Gödel nejprve dokázal větu o úplnosti pro predikátový kalkul bez rovnosti, poté zformuloval jako její důsledek tzv. Větu o kompaktnosti[3] a tyto výsledky dokázal pro predikátový kalkul s rovností. V závěru

[3] *Větu o kompaktnosti* lze formulovat takto: Množina formulí má model, právě když každá její konečná podmnožina má model.

své dizertace se Gödel zaměřil na problém nezávislosti axiomů predikátového kalkulu prvního řádu s rovností.

Práce [Göd30] je základním průkopnickým dílem teorie modelů. K. Gödel zde však využíval již známé výsledky z monografie D. Hilberta (1962–1943) a W. Ackermanna (1896–1962) *Grundzüge der theoretischen Logik* [HA28], L. Löwenheima[4] [Löw15], T. Skolema[5] [Sko19] a P. Bernayse [Ber26].

Gödelova věta o úplnosti podává ekvivalenci mezi platnými (pravdivými) a dokazatelnými formulemi predikátového kalkulu prvního řádu. V tomto případě, ve srovnání s výrokovým kalkulem, použití pravdivostních tabulek k nalezení platných formulí selhává, neboť tyto tabulky jsou nekonečné. Gödelova věta o (sémantické) úplnosti predikátového kalkulu otevírá novou cestu k nalezení pravdivosti – prostřednictvím důkazu.

Gödelova věta o úplnosti: Každá logicky pravdivá formule je dokazatelná.

Poznámky:

1. Někdy bývá tato věta formulována ve formě ekvivalence, tedy:

   Formule je logicky pravdivá právě tehdy, když je dokazatelná.

2. Implikace, že každá dokazatelná formule je logicky pravdivá, se nazývá *Věta o korektnosti*; byla známa již dříve.

3. Lze říci, že Gödelova věta o úplnosti ukazuje oprávněnost axiomů a odvozovacích pravidel predikátové logiky prvního řádu. Tato pravidla jsou „úplná“ v tom smyslu, že jsou dostatečně silná, aby mohly být dokázány všechny logicky pravdivé formule. (To, že jiné formule nemohou být dokázány, již plyne z Věty o korektnosti.)

4. Uvedená Gödelova věta se někdy (v angličtině) nazývá *Gödel's narrower completeness theorem*. Původní Gödelova formulace byla později rozšířena a zobecněna A.I. Mal'cevem v [Mal'36]. Tato zobecněná nebo též *Gödelova-Mal'cevova věta o úplnosti* má následující znění:

   Každá bezesporná množina formulí má sémantický model.

5. Důsledkem je následující věta:

   Predikátová logika je bezesporná.

---

[4] Leopold Löwenheim (1878–1957), německý matematik a logik. V matematické logice navazoval na C. Peirceho, E. Schrödera a A.N. Whiteheada. Velká část jeho práce byla zničena v roce 1943 při bombovém útoku na Berlín. Podal první verzi a důkaz Löwenheimovy-Skolemovy věty (viz část 3.3.2), jež bývá považována za počátek teorie modelů.

[5] Thoralf Skolem (1887–1963), norský matematik. Studoval a později působil zejména na univerzitě v Oslo, kde byl roku 1938 jmenován profesorem. Vědecky byl velmi činný, publikoval práce především z matematické logiky a teorie množin, z teorie grup a svazů a o diofantovských rovnicích. T. Skolem zformuloval Löwenheimovu-Skolemovu větu (viz část 3.3.2) a zkonstruoval nestandardní model aritmetiky. Je jedním z průkopníků teorie modelů a počítačové vědy a nositelem řady ocenění.

Interpretace

Interpretace je jedním z nejběžnějších prostředků používaných k důkazu relativní bezespornosti nějaké teorie[6], čehož, jak uvidíme později, bude využito v dalším textu. Definici interpretace podáme obecně pro predikátový počet s více druhy proměnných.

Definice: *Interpretací jazyka L v jazyce L'* nazýváme metamatematické zobrazení $*$, které přiřazuje

- každému druhu proměnných r jazyka L druh proměnných r^* jazyka L',
- každé n-ární funkci f jazyka L n-ární funkci f^* jazyka L',
- každému n-árnímu predikátu p jazyka L n-ární predikát p^* jazyka L'[7]

a pro které je navíc požadováno:

i) má-li jazyk L více druhů proměnných a proměnné druhu r jsou zároveň proměnnými druhu s tohoto jazyka, pak proměnné druhu r^* musí být také proměnnými druhu s^* jazyka L',

ii) je-li v jazyce L pro n-ární fukci f určeno, že pro pořadí druhů objektů reprezentovaných postupně proměnnými $x_1, \ldots, x_n$ je hodnota této funkce objekt druhu r, pak v jazyce L' je požadováno, aby hodnota funkce f^* byla pro pořadí druhů $x_1^*, \ldots, x_n^*$ druhu r^*.

Interpretace $*$ jazyka L v jazyce L' se dále rozšíří metamatematickou indukcí podle složitosti termů[8] a formulí na zobrazení přiřazující každému termu t jazyka L term t^* jazyka L' a přiřazující každé formuli φ jazyka L formuli φ^* jazyka L'.[9]

Definice: Říkáme, že formule φ jazyka L *platí v teorii T ve smyslu interpretace* $*$ (jazyka L v jazyce teorie T), jestliže formule φ^* je v teorii T dokazatelná.

Definice: Interpretaci $*$ jazyka teorie T_2 v jazyce teorie T_1 nazýváme *interpretací teorie T_2 v teorii T_1*, jestliže:

1. ve smyslu interpretace $*$ platí v teorii T_1 každý ze speciálních axiomů teorie T_2,
2. je-li teorie T_2 teorií s rovností, pak ve smyslu interpretace $*$ platí v teorii T_1 každý z axiomů rovnosti jazyka L.

[6] Tj. prokázání bezespornosti této teorie za předpokladu bezespornosti jiné teorie.

[7] Je-li L jazykem s rovností, je možno predikátu $=$ přiřadit interpretací libovolný binární predikát $=^*$ jazyka L'.

[8] *Termy* jsou výrazy, které se konstruují induktivně z proměnných a výrazů $f(t_1, \ldots, t_m)$, kde f je m-ární funkční symbol.

[9] Tato indukce je zcela přirozená, a proto její popis vynecháme. Případné zájemce odkazujeme na [Soch01].

T_1 se nazývá *interpretující teorie* a T_2 se nazývá *interpretovaná teorie.*

Poznámka: Je zřejmé, že pro každou teorii existuje interpretace v ní samé, např. identické přiřazení $*$ po řadě druhu proměnných, funkcí a predikátů. Tato interpretace se nazývá *identická interpretace.*

Obraz interpretované teorie T_1 v interpretující teorii T_2 L.S. Rieger nazývá *modelem* teorie T_1 v teorii T_2. Jedná se o definici syntaktického modelu, který se v případě teorie množin nazývá *vnitřní model.*

4.1.2 Základní pojmy teorie množin

Než čtenáře podrobně seznámíme s axiomatickou teorií množin, kterou budeme v práci uvažovat, připomeneme definici tzv. „*alefů*“, nekonečných kardinálních čísel. Definice kardinálních a ordinálních čísel považujeme za známé, případně odkazujeme na monografii [BŠ86]. Pro úplnost dodejme, že $\aleph_0$ značí kardinální číslo množiny přirozených čísel (a tedy každé nekonečné spočetné množiny).

Definice: Nechť m je libovolné nekonečné kardinální číslo. Označme $\omega(m)$ nejmenší prvek množiny všech ordinálních čísel mohutnosti m. Definujme

$$O(m) := \{\omega(n) : \aleph_0 \leq n < m\}.$$

Nechť α je ordinální typ množiny $O(m)$. Pak číslo $\omega(m)$ označíme ω_α a kardinální číslo m označíme $\aleph_\alpha$. ω_α se nazývá *počáteční ordinální číslo mohutnosti* $\aleph_\alpha$.

Jelikož množina $O(m)$ je dobře uspořádaná, je α ordinální číslo. Platí, že *každé nekonečné kardinální číslo je některým alefem* a že *každé ordinální číslo je indexem některého alefu.*

V následujících odstavcích již popíšeme tzv. *Gödelovu axiomatickou teorii množin (a tříd).*[10]

K. Gödel uvažuje dva druhy základních proměnných – pro *třídy* a pro *množiny.* Jazyk jeho teorie obsahuje tři prediktáty: $T\check{r}()$ („být třídou“), $Mn()$ („být množinou“) a $\in$ (predikát náležení).[11] Proměnné pro třídy budou označeny velkými písmeny, proměnné pro množiny malými písmeny.

Gödelova teorie množin (a tříd) zavedená ve slavné práci [Göd40] je dána třemi skupinami axiomů označovanými A, B, C.[12]

A1: Každá množina je třída: $T\check{r}(x)$.

A2: Pouze množiny mohou být prvky třídy: $X \in Y \Rightarrow Mn(X)$.

[10] Poznamenejme, že Gödelova teorie množin bývá často nazývána Gödelova-Bernaysova či Neumannova-Bernaysova-Gödelova. Je to proto, že impuls ke vzniku této teorie dal ve dvacátých letech dvacátého století John von Neumann, na něhož navázal roku 1937 Paul Bernays. Jeho axiomatika byla zjednodušena Kurtem Gödelem a poprvé publikována v [Göd40].

[11] Počet primitivních pojmů tohoto systému lze zredukovat, avšak L.S. Rieger ve svých pracích vychází z původní Gödelovy verze.

[12] Pro současnou formulaci axiomů Gödelovy, resp. (v dnešní době převážně používané) Zermelovy-Fraenkelovy teorie množin odkazujeme na [BŠ74], resp. [BŠ86].

A3: *Axiom extenzionality*: $(\forall u)((u \in X \Leftrightarrow u \in Y) \Rightarrow X = Y)$.

A4: *Axiom dvojice*: $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(u \in z \Leftrightarrow (u = x \text{ } vel \text{ } u = y))$.

B1: *Axiom relace* $\in$: $(\exists Z)(\forall x)(\forall y)(\langle x, y\rangle \in Z \Leftrightarrow x \in y)$.

B2: *Axiom průniku*: $(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)(\forall u)(u \in Z \Leftrightarrow (u \in X \text{ } et \text{ } u \in Y))$.

B3: *Axiom doplňku*: $(\forall X)(\exists Y)(\forall u)(u \in Y \Leftrightarrow non(u \in X))$.

B4: *Axiom definičního oboru*: $(\forall X)(\exists Y)(\forall x)(x \in Y \Leftrightarrow (\exists y)(\langle y, x\rangle \in X))$.[13]

B5: *Axiom kartézského součinu*: $(\forall X)(\exists Y)(\forall x)(\forall y)(\langle y, x\rangle \in Y \Leftrightarrow x \in X)$.

B6: *Axiom dvojité konverze*: $(\forall X)(\exists Y)(\forall x)(\forall y)(\langle x, y\rangle \in Y \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in X)$.

B7: *První axiom trojité konverze*:

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\langle\langle x, y\rangle, z\rangle \in Y \Leftrightarrow \langle\langle y, z\rangle, x\rangle \in X).$$

B8: *Druhý axiom trojité konverze*:

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\langle\langle x, y\rangle, z\rangle \in Y \Leftrightarrow \langle\langle x, z\rangle, y\rangle \in X).$$

C1: *Axiom nekonečna*:

$$(\exists z)(z \neq \emptyset \text{ } et \text{ } (\forall x)[x \in z \Rightarrow (\exists y)(y \in z \text{ } et \text{ } x \subset y)]),$$

tj. existuje neprázdná množina z taková, že každý její prvek je obsažen (jako vlastní podmnožina) v jiném jejím prvku.

C2: *Axiom sumy*: $(\forall x)(\exists y)(\forall u)(\forall v)((u \in v \text{ } et \text{ } v \in x) \Rightarrow u \in y)$.

C3: *Axiom potenční množiny*: $(\forall x)(\exists y)(\forall u)(u \subseteq x \Rightarrow u \in y)$.

C4: *Axiom nahrazení*:

$$(\forall x)(\forall U)([(\forall u)(\forall v)(\forall w)([\langle v, u\rangle \in U \text{ } et \text{ } \langle w, u\rangle \in U] \Rightarrow v = w)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists y)(\forall u)[u \in y \Leftrightarrow (\exists v)(v \in x \text{ } et \text{ } \langle u, v\rangle \in U)]),$$

tj. obrazem každé množiny x libovolným zobrazením U[14] je množina.

Teorie množin obsahující tyto axiomy jsou označeny jako gödelovské:

Definice: Teorie množin se nazývá *gödelovská*, jestliže obsahuje tři skupiny Gödelových axiomů A, B, C.

Základní skupiny axiomů A, B, C jsou doplněny axiomem D (axiom fundovanosti), případně E (axiom výběru) či axiomem konstruovatelnosti. Někdy se přidává např. axiom existence predikativních množin či zobecněná hypotéza kontinua. Nyní se s těmito axiomy blíže seznámíme.

[13]Definiční obor (doména) třídy X je tedy definován jako $\{x : (\exists y)(\langle y, x\rangle \in X)\}$. Upozorňujeme zde na pořadí prvků uspořádané dvojice.

[14]K. Gödel nazýval U *jednoznačná třída*.

D: *Axiom fundovanosti* (tzv. *Fundierungsaxiom*):

$$(\forall X)(X \neq \emptyset \Rightarrow (\exists y)(y \in X \text{ } et \text{ } y \cap X = \emptyset)).$$

E: *Axiom výběru*:

Nechť $a \neq \emptyset$ je libovolná množina a $\{a_\alpha : \alpha \in a\}$ systém neprázdných množin, které jsou po dvou disjunktní. Pak existuje množina m taková, že:

1. $m \subseteq \bigcup_{\alpha \in a} m_\alpha$,
2. $m \cap m_\alpha$ je jednoprvková množina pro každé $\alpha \in a$.

- (*Gödelův*) *axiom konstruovatelnosti*:

  $V = L$, kde V je univerzum množin a L je třída všech konstruovatelných množin (v Gödelově smyslu).

Co jsou to konstruovatelné množiny?

Citujeme nyní autory knihy [BŠ86]:

Pojem konstruovatelné množiny je radikálním pokusem o co nejpřesnější vymezení univerza množin. Konstruovatelné množiny tvoří jakési minimální jádro univerza množin, jehož prvky se konstruují každý zvlášť transfinitním iterováním několika jednoduchých operací.[15]

K. Gödel ve své práci [Göd40] píše:

Constructible sets are those which can be obtained by iterated application of the operations given by axioms A4, B1–B8, modified so that they yield sets if applied to sets. In addition, at certain stages of this generating process the set of all previously obtained sets will be added as a new constructible set. This permits the generating process to continue into the transfinite.[16]

Jedná se tedy o takové množiny, které vznikají pouze z jednodušších (již vzniklých) množin pomocí určitých jednoduchých operací, spolu s operací sjednocení všech množin takto vzniklých do určitého časového okamžiku. Tento proces konstrukce je transfinitní, tedy může pokračovat pro libovolné ordinální číslo v čase. Podrobněji je o tomto tématu pojednáno v části 4.2.7.

---

[15] [BŠ86], str. 200.

[16] [Göd53], str. 35.

Český překlad: Konstruovatelné množiny jsou takové, které lze získat iterací operací daných axiomy A4, B1–B8 modifikovanými tak, že výsledkem množinové operace je množina. Dále, v jistých stupních tohoto procesu generování, je mezi konstruovatelné množiny přidána i množina všech dosud získaných množin. Toto umožňuje transfinitnost generujícího procesu.

- (*Russellův*) *axiom existence predikativních množin*: $(\exists x)(x \in x)$.
- *Zobecněná hypotéza kontinua*:

  $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ pro každé ordinální číslo α.

Poznámka: Přímo v úvodu upozorňujeme na jisté terminologické odchylky týkající se logických a množinových pojmů. Proměnné, resp. konstanty L.S. Rieger nazýval *individuovými proměnnými*, resp. *individuovými konstantami. Predikátové konstanty* označovaly dnešní predikáty. Pro (predikátové) formule používal Rieger termín *výrokové funkce.*

Drobné změny jsou i v chápání pojmu interpretace. Termínem *interpretace* (teorie v jiné teorii) označoval L.S. Rieger (v dnešní řeči) interpretaci jazyka, dnešní interpretaci teorie nazýval *správná* (angl. *correct*) *interpretace.* Zároveň dodejme, že pro pojem konstruovatelnosti používal termín *konstruktivita* (podle anglického *constructivity*).

4.2 Práce z axiomatické teorie množin

Kolem roku 1954 začal L.S. Rieger pracovat v oblasti axiomatické teorie množin; vycházel zejména z práce [Göd40][17], a tedy i z Gödelovy axiomatiky. Do této oblasti patří řada jeho velmi náročných a často značně rozsáhlých prací. L.S. Rieger byl v té době již zralým a zkušeným matematikem a blížil se k vrcholu své vědecké dráhy.

Zásadní význam v jeho matematické tvorbě má především první z trojice článků *A contribution to Gödel's axiomatic set theory, I, II, III* ([R13], [R15], [R18]), jejíž první dvě části tvořily Riegrovu doktorskou dizertaci obhájenou v prosinci 1959.

Důležitou roli v jeho pracích z teorie množin hrála tzv. Gödelova axiomatická teorie konečných množin, jejíž vlastnosti L.S. Rieger studoval a poté využil v publikacích [R15]–[R18]. Je třeba též vyzdvihnout význam obsáhlého článku [R20], v němž bylo podáno podstatné zjednodušení proslulého a značně složitého Gödelova důkazu o (relativní) bezespornosti axiomu výběru a zobecněné hypotézy kontinua.

4.2.1 *O některých základních otázkách matematické logiky* ([R38] (1956)

Tato Riegrova práce je doplněnou verzí jeho přednášky *O základních problémech matematické logiky I* pořádané *Matematickou obcí pražskou* dne 16. 5. 1955. Článek je určen širšímu okruhu matematiků, nemá tedy ryze vědecký charakter, některé úvahy a stanoviska jsou filozofického rázu. L.S. Rieger se zde soustřeďuje na otázku pojetí, cílů a vhodných (přijatelných) prostředků matematické logiky, zmiňuje též zásadní výsledky dosažené v této disciplíně.

[17] L.S. Rieger se odkazuje konkrétně na její vydání [Göd53].

Na uvedenou přednášku navázala o týden později (24. 5.) její druhá část.[18] Zaměřena byla na detailnější rozbor matematických prostředků užívaných v matematické logice. L.S. Rieger měl v plánu sepsat obdobný článek diskutující rovněž otázky z jeho druhé přednášky, patrně tak však neučinil.

V úvodu publikace [R38] se pozastavuje nad tehdejší nedostatečnou pozorností věnovanou matematické logice v Československu a s ní související neuspokojivou situací ve výzkumu této oblasti. Prvním diskutovaným tématem je pojetí matematické logiky a charakterizace hlavního předmětu jejího bádání. L.S. Rieger zaujímá toto stanovisko:

Matematická logika je ve své podstatě studium zákonitostí ve vztahu důsledku mezi matematickými větami, prováděné matematickými metodami.[19]

Zdůrazňuje, že matematická logika je obecně chápána jako aplikovaná matematika (jistého druhu).

Dále diskutuje matematické prostředky užívané v logice (jakožto v aplikaci matematiky). Nejprve popisuje tři možné pohledy na hlavní předmět výzkumu matematické logiky – vztah důsledku a jeho zákonitosti. Jako základní matematický nástroj logiky pak uvádí kombinatoriku konečných posloupností, kterou později, na základě Gödelových zásadních výsledků, nahradila elementární aritmetika, zejména teorie rekurzivních funkcí, resp. teorie algoritmů.

Zde se přirozeně naskytla otázka, zda je možno v matematické logice použít i další, ne již konečně konstruktivní prostředky. V jejím zodpovězení se tehdejší odborníci lišili, L.S. Rieger se přikláněl k pozitivní odpovědi. Své stanovisko, že v matematické logice lze připustit i některé nekonečné[20] matematické pojmy, obhajuje např. porovnáním s jistými „nekonečnými“ úvahami úspěšně prováděnými ve fyzice.

V závěru článku [R38] se L.S. Rieger věnuje zásadní otázce významu matematické logiky a připomíná některé podstatné výsledky. Článek zakončuje svým osobním vyznáním této disciplíně:

Matematika vzdor zásadní konečnosti svých výrazových prostředků proniká stále hlouběji do zákonitostí nekonečna a lze říci, že se zmocňuje dokonce (pokud příliš neutíká skutečnosti) nekonečen různých druhů. Jedním z nejhlubších a nejúchvatnějších úkolů matematické logiky jest kriticky objasňovat dialektiku vztahů mezi konečnem a nekonečnem v matematice, tento zápas matematiky o nekonečno – a pomoci matematice nalézt v něm nové cesty.[21]

V souvislosti s osobností L.S. Riegra jako zakladatele československé matematické logiky je článek [R38] citován v knize A. Sochora *Klasická matematická*

[18] Datování těchto dvou přednášek je převzato z části A.4, L.S. Rieger v [R38] uvádí patrně mylná data 6. 5. a 27. 5. 1955.

[19] [R38], str. 343.

Hlouběji je tento jeho přístup rozpracován v monografii [R22], viz část 5.2.2.

[20] Rieger používá termín *infinitní*.

[21] [R38], str. 351.

logika [Soch01] a v článku P. Hájka [Háj66]. Hájkova práce pojednává i o významných výsledcích v aplikaci syntaktických metod na metamatematické problémy teorie množin, jichž bylo v Československu dosaženo po Riegrově smrti, zejména P. Vopěnkou.

4.2.2 *A contribution to Gödel's axiomatic set theory, I* [R13] (1957)

Článek [R13] je věnován modelům, vztahům mezi některými axiomy a některými větami v Gödelově teorii množin. L.S. Rieger zde vychází z již zmiňované stěžejní Gödelovy práce [Göd40]. Přebírá Gödelovo značení a jeho terminologii. Své výsledky prezentoval L.S. Rieger na schůzi *Pražské matematické společnosti* konané 28. května 1956.

Práce [R13] je rozdělena do tří částí. V první části L.S. Rieger definuje základní (meta)matematické pojmy, se kterými dále pracuje. Ve druhé konstruuje gödelovské teorie množin, jež jsou zobecněním případů uvažovaných K. Gödelem v [Göd40]. Jádrem práce je třetí část, jež využívá výsledků z části předchozí. Zde jsou zavedeny nové, „normalizované“ modely, tzv. *indexové modely* (či T*-modely*). Pro lepší přehlednost zachováme v dalším výkladu původní Riegrovo členění.

Část 1.: *Úvod, některé metamatematické pojmy*

V této části práce [R13] podává L.S. Rieger základní definice z teorie Booleových algeber a z predikátového kalkulu prvního řádu. Soustřeďuje se zejména na algebraickou formulaci logických pojmů.

Definuje pojem volné zobecněné σ-algebry a jako její příklad udává Tarského-Lindenbaumovu algebru tříd logicky ekvivalentních formulí nějaké teorie prvního řádu. Pozornost věnuje též algebraickému popisu logiky s rovností. Na závěr podává algebraickou definici interpretace teorie, (syntaktického) modelu[22] a dalších termínů s nimi souvisejících.

Část 2.: *Vynechání axiomu D*

Gödelova axiomatika byla popsána v úvodní části, kde byl čtenář seznámen se skupinami axiomů A, B a C. Významná část práce [Göd40] je věnována sestrojení modelu $\triangle$. K. Gödel uvažoval následující teorie množin: interpretující teorie $T_1^{\triangle}$ je axiomatická teorie zadaná axiomy A, B, C a D (nazývaná systém Σ). Interpretovaná teorie $T_2^{\triangle}$ je zadaná axiomy A, B, C, D a axiomem konstruovatelnosti.

Interpretace jazyka vypadá následovně: predikáty $T\check{r}(X)$, resp. $Mn(X)$ z $T_2^{\triangle}$ jsou v $T_1^{\triangle}$ interpretovány formulemi „X je konstruovatelná třída, resp.

[22] Rieger píše, že účelně nepracuje se sémantickým pojmem modelu teorie, jelikož je přesvědčen, že nemůže být zkoumán matematickými prostředky.

množina" v $T_1^{\triangle}$, predikát $X \in_2 Y$ z $T_2^{\triangle}$ je v $T_1^{\triangle}$ interpretován formulí „$X \in_1 Y$ pro X, Y konstruovatelné".[23]

L.S. Rieger zobecnil Gödelovu situaci takto: T_1° je libovolná gödelovská teorie množin, T_2° je teorie množin daná axiomy A, B, C a jistým způsobem zobecněným axiomem konstruovatelnosti. Zobecnění spočívá v přizpůsobení pojmu konstruovatelnosti tříd a množin tak, aby byl nezávislý na axiomu D. Riegrova interpretace odpovídá Gödelově interpretaci popsané výše.

Při výstavbě teorie T_1° následoval L.S. Rieger Gödelův postup z kapitol I až IV v [Göd40]. Dále potřeboval zobecnění pojmu ordinálního čísla (jehož formulace byla u K. Gödela závislá na axiomu D), jež získal použitím Robinsonovy definice z [Rob37].[24] Poté dospěl k závěru, že všechny věty o ordinálních číslech z [Göd40] potřebné k zavedení pojmu konstruovatelnosti a k sestrojení modelu $T_2^{\triangle}$ v $T_1^{\triangle}$, jsou platné i pro tuto novou definici.

Tímto již L.S. Rieger získal formulaci zobecněného axiomu konstruovatelnosti. Dále tedy sestrojil, krok po kroku jako v [Göd40], *zobecněný Gödelův model* konstruovatelných tříd a množin z T_1° tím, že ověřil, že všechny axiomy z T_2° platí v teorii T_1° ve smyslu interpretace jazyka.[25] Toto ověření provedl, až na výjimku týkající se zobecněného axiomu konstruovatelnosti, opět analogickým způsobem jako K. Gödel v kapitolách V až VII v [Göd40].

Na závěr L.S. Rieger dokázal následující větu:

Věta: Axiom D je důsledkem axiomů A, B, C a (zobecněného) axiomu konstruovatelnosti.

Pomocí některých výsledků z Gödelovy práce [Göd40] dokázal tato tvrzení:

Věta: Zobecněný Gödelův model lze vytvořit v libovolné gödelovské teorii množin. Platí v něm axiomy A, B, C, D, E a zobecněná hypotéza kontinua.

Věta: Je-li teorie daná axiomy A, B, C bezesporná, je bezesporná i teorie vytvořená přidáním axiomů D, E a zobecněné hypotézy kontinua.

Část 3.: *Indexové modely (T-modely) a jejich první aplikace*

Hlavní část práce [R13] L.S. Rieger věnuje „normalizaci" modelů, tj. redukci daného modelu na model jistého standardního typu. Tyto „normalizované" modely nazývá indexové modely (T-modely):

Definice: Model gödelovské teorie množin T_2 v jiné gödelovské teorii množin T_1 daný predikáty $T\check{r}_T()$, $Mn_T()$, $\in_T$ interpretujícími $T\check{r}_2()$, $Mn_2()$, $\in_2$ z T_2 se nazývá *indexový model* (nebo přesněji *T-model*), jsou-li splněny následující podmínky:

V teorii T_1 existuje třída $\tilde{C}$ a bijektivní zobrazení T této třídy na nějakou další třídu $C, \tilde{C} \subseteq \mathcal{P}(C)$, kde $\mathcal{P}(C)$ značí potenční třídu C, a dále

$$Mn_T(X) \Leftrightarrow X \in_1 \tilde{C},$$

[23] Pro zjednodušení označujeme odpovídající si proměnné v obou teoriích stejně.

[24] Robinsonova definice ordinálního čísla je používána do dnešní doby.

[25] Tedy všechny tyto axiomy reformulované v odpovídajících interpretujících (*-)termínech jsou v interpretující teorii dokazatelné formule.

$$Tř_T(Y) \Rightarrow Y \subseteq C,$$

$$X \in_T Y \Leftrightarrow (Mn_T(X)\ et\ Tř_T(Y)\ et\ T(X) \in_1 Y).$$

Třída C se nazývá *třída indexů* a každé $T(x) \in C$ se nazývá *index* „množiny“ x z T-modelu.

T-model se nazývá *úplný*, jestliže $\tilde{C} = \mathcal{P}(C)$ a $Tř_T(Y) \Leftrightarrow Y \subseteq C$.

Vysvětleme nyní vztah mezi určitým modelem a jemu příslušejícím T-modelem. Nejprve je třeba určit, jaké modely lze „redukovat“ na T-modely. V následujících odstavcích uvidíme, že se tato možnost vztahuje na velkou skupinu modelů.

Mějme zadanou interpretaci jazyka nějaké gödelovské teorie množin T_2 v jiné gödelovské teorii množin T_1, která je dána predikáty $Tř^*()$, $Mn^*()$, $\in^*$ interpretujícími $Tř_2()$, $Mn_2()$, $\in_2$ z T_2, a předpokládejme, že v T_1 existuje třída C, pro kterou platí

$$Mn^*(X) \Leftrightarrow X \in_1 C.$$ [26]

Pak existuje zobrazení T s vlastnostmi popsanými v předchozí definici a lze zadat interpretaci jazyka $Tř_T()$, $Mn_T()$, $\in_T$ (predikátů $Tř_2()$, $Mn_2()$, $\in_2$ z T_2) splňující též vlastnosti předchozí definice. Dále lze dokázat, že je-li interpretace jazyka daná $Tř^*()$, $Mn^*()$, $\in^*$ interpretací teorie, pak je interpretací teorie i interpretace jazyka daná $Tř_T()$, $Mn_T()$, $\in_T$.

Navíc model daný $Tř^*()$, $Mn^*()$, $\in^*$ a model daný $Tř_T()$, $Mn_T()$, $\in_T$ jsou ekvivalentní (ve smyslu σ-izomorfismu jistých faktorových algeber příslušejících těmto modelům). Získaný T-model se též nazývá *T-reductum* původního modelu.

Dále se L.S. Rieger zabýval zejména úplnými indexovými modely a dokázal následující věty:

Věta: Nechť T_1 je libovolná a T_2 gödelovská teorie množin zadaná pouze skupinami axiomů A, B, C. Nechť T je v T_1 bijektivní zobrazení potenční třídy $\mathcal{P}(C)$ na vlastní třídu C z T_1. Položme

$$Mn_T(X) \Leftrightarrow X \in_1 \mathcal{P}(C),$$

$$Tř_T(Y) \Leftrightarrow Y \subseteq C,$$

$$X \in_T Y \Leftrightarrow (Mn_T(X)\ et\ Tř_T(Y)\ et\ T(X) \in_1 Y).$$

[26] Toto omezení je velmi přirozené.

V závěru práce [R15], kde jsou uvedeny opravy k článku [R13], L.S. Rieger dodává, že navíc mlčky předpokládá, že pro každé $X \in_1 C$ existuje třída všech Y takových, že $Y \in^* X$, a tato třída je množinou.

Pak $T\check{r}_T()$, $Mn_T()$, $\in_T$ dávají interpretaci teorie T_2 s predikáty $T\check{r}_2()$, $Mn_2()$, $\in_2$, tedy dostáváme úplný T-model teorie T_2 v teorii T_1.

Předpokládáme-li navíc v T_2 axiom výběru, pak je splněn i v získaném T-modelu.

Věta: V libovolné gödelovské teorii množin lze vytvořit úplný T-model, v němž existují predikativní množiny.

Poznámka: Připomeňme, že existence predikativních množin je v rozporu s axiomem D, a tím spíše se zobecněným axiomem konstruovatelnosti.

Nejvýznamnějším výsledkem práce jsou následující dvě tvrzení:

Věta: Je-li teorie daná axiomy A, B, C, E a zobecněnou hypotézou kontinua bezesporná, je bezesporná i teorie vytvořená přidáním axiomu existence predikativních množin.

Věta: Axiom D a tedy i zobecněný axiom konstruovatelnosti jsou nezávislé na axiomech A, B, C a E doplněných hypotézou kontinua.

K důkazu této věty využívá L.S. Rieger též výsledků P. Bernayse z [Ber48]. V souvislosti s tímto důkazem je práce [R13] citována na str. 48 v knize U. Felgnera *Models of ZF-set theory* [Fel71]. Nezávislostí axiomu D se v padesátých letech dvacátého století zabývali např. E. Specker [Spe57] a E. Mendelson [Men56].

Navazující práce

Článek [R13] je jedním z nejvíce citovaných Riegrových děl. Většina citujících prací byla dohledána prostřednictvím internetové databáze *Web of Science* [Web]; jsou z relativně nového období (od roku 1980). Jedná se o publikace J. Kupera [Kup91], G. Kreisela [Kre92], A. Petryho [Pet92], dále R.S. Lazice a A.W. Roscoea [LR96], M.V. Marshalla a M.G. Schwarzeho [MS99] a G. Uzquiana [Uzq99].

T.E. Forster v článku *Permutation models in the sense of Rieger-Bernays* [For87] definoval tzv. Riegrovy-Bernaysovy modely permutací, jejichž prostřednictvím (na základě výsledků z [R13]) podal důkaz nezávislosti axiomu fundovanosti na ostatních axiomech Zermelovy-Fraenkelovy teorie množin. S těmito modely T.E. Forster pracuje i v publikacích [For90] a [For03], Riegrovu práci [R13] cituje i v tématicky odlišném článku [For93].

Výsledků publikace [R13] dále využívají H. Wang (1921–1995) a R. McNaughton [WM53], P. Vopěnka [Vop64b] a M. Boffa (1939–2001) [Bof67].

4.2.3 *A contribution to Gödel's axiomatic set theory, II* [R15] (1959)

Tato publikace je opět úzce spjata s fundamentální Gödelovou prací [Göd40]. L.S. Rieger uvažuje v celé práci tzv. *Gödelovu teorii konečných množin*, tj. teorii zadanou Gödelovými axiomy A, B, C, D a E s výjimkou axiomu C1 (axiomu nekonečna), jenž je nahrazen svou negací, tzv. *axiomem konečna*:

$$non(\exists z)(z \neq \emptyset \; et \; (\forall x)[x \in z \Rightarrow (\exists y)(y \in z \; et \; x \subset y)]),$$

tj. neexistuje neprázdná množina taková, že každý její prvek je obsažen (jako vlastní podmnožina) v jiném jejím prvku.

V článku [R15] se L.S. Rieger věnuje novým typům aritmeticky konstruovaných modelů Gödelovy teorie konečných množin, které nazývá *dyadické modely.* Nejprve sestrojuje nejjednodušší dyadický model. Zobecněním jeho konstrukce jsou pak sestrojeny dva nestandardní[27], a dokonce nespočetné modely této teorie.

Práce [R15] je rozdělena do čtyř částí. V první části jsou podány základní údaje o dyadické valuaci a Henselových[28] dyadických číslech, pomocí nichž je sestrojen nejjednodušší dyadický model. Ve druhé části je rozvinuta teorie dyadických okruhů a jejich rozšíření. Pomocí této teorie jsou pak ve třetí části definovány tzv. dyadické okruhy množinově-teoretického typu, zkráceně *m-t--okruhy*,[29] které vedou k sestrojení obecných dyadických modelů. V poslední části jsou spočetné *m-t*-okruhy rozšířeny na nespočetné, a tak jsou sestrojeny nestandardní nespočetné modely Gödelovy teorie konečných množin.

Tato publikace je volným pokračováním předchozího článku [R13]. Své výsledky L.S. Rieger opět prezentoval na schůzi *Pražské matematické společnosti* konané tentokrát 26. listopadu 1956. V zimním semestru 1957/58 o této problematice přednášel na MFF UK v rámci *Semináře z deskriptivní theorie množin.* Připomeňme, že obě zmíněné práce tvořily obsah Riegrovy doktorské dizertace obhájené v prosinci 1959.

Nyní zavedeme potřebné definice a podrobněji přihlédneme k jednotlivým oddílům práce [R15].

Část 1.: ***Úvodní poznámky***

Definujme funkci W následujícím způsobem:

$$\begin{array}{lcll} W(m) & := & n & \text{pro celé číslo } m = 2^n(2k+1), m \neq 0, \\ W(p/q) & := & W(p) - W(q) & \text{pro racionální číslo } p/q, q \neq 0. \end{array}$$

W se nazývá *dyadická valuace* definovaná na nenulových prvcích tělesa T racionálních čísel. Dále zavedeme na tomto tělese metriku:

$$\begin{array}{lcll} \rho(x,y) & := & a^{-W(x-y)} & \text{pro } x \neq y, \text{ kde } a > 1 \text{ je libovolná konstanta,} \\ \rho(x,x) & := & 0. & \end{array}$$

Tak můžeme sestrojit – standardním způsobem pomocí fundamentálních (cauchyovských) posloupností – úplný obal $\bar{T}$ tohoto tělesa, který nazýváme těleso *Henselových dyadických čísel.*

[27]Viz část 4.2.6. L.S. Rieger používal termín *nenormální.*
[28]Kurt Hensel (1861–1941).
[29]Angl. *s-t-rings.*

Lze dokázat, že pro každé Henselovo dyadické číslo x existuje dyadický rozklad $x = \sum_{i=k}^{\infty} c_i 2^i$, kde k je celé číslo a $c_i = 0$ nebo $c_i = 1$.

Ta dyadická čísla, pro něž je k nezáporné, nazýváme *Henselova celá dyadická čísla*. Tato čísla tvoří obor integrity obsahující obor integrity celých čísel.[30]

Nyní položíme celá dyadická čísla jako „třídy“, nezáporná celá čísla jako „množiny“ a definujeme relaci „náležení“ následovně: $x \in^* y$, jestliže x je celé nezáporné číslo a 2^x se vyskytuje v dyadickém rozkladu čísla y (tj. $c_x = 1$).

Lze dokázat, že právě popsaná interpretace jazyka Gödelovy teorie konečných množin je interpretací této teorie; získali jsme tedy model, v němž platí všechny axiomy A, B, C (mimo C1), D, E a *non*C1. Tento model je nejjednodušší *dyadický model* (viz dále), který je tzv. *podstatně normální* (tj. relace $\in^*$ je v jistém smyslu izomorfní parcializované základní relaci $\in$).

Riegrovým úkolem bylo nyní zobecnit konstrukci tohoto nejjednoduššího dyadického modelu a získat model, jenž nebude podstatně normální. K tomu bylo nejprve zapotřebí zavést pojem tzv. dyadického okruhu a vybudovat teorii těchto struktur, jež umožní získání aritmetických vlastností potřebných (a zároveň postačujících) k definici nového modelu.

Část 2.: *Dyadické okruhy a jejich bezprostřední rozšíření*

Tento oddíl je nejdelší částí (zaujímá téměř polovinu práce), obsahuje značné množství poměrně komplikovaných definic a tvrzení potřebných k důkazu hlavní věty části následující. Naším záměrem je nové pojmy spíše přiblížit než přesně definovat, protože by exaktní definice byla pravděpodobně samoúčelná. Slovní popis (doslovný i přibližný), jenž bude nahrazovat přesnou matematickou formulaci, budeme psát v uvozovkách. Omezíme se též pouze na nejnutnější termíny.

Prvním základním pojmem je *diskrétně uspořádaný okruh*. Lze říci, že se jedná o lineárně uspořádaný obor integrity, jenž navíc splňuje podmínku $(x \leq y < x + 1) \Rightarrow (x = y)$. L.S. Rieger jej definuje pomocí funkce *sgn* (místo relace $<$).

Diskrétně uspořádaný okruh R se nazývá *dyadický okruh*, je-li navíc dána funkce $2^{()}$, tzv. *dyadické umocňování*, definovaná na nezáporných prvcích z R, jež má následující vlastnosti:

1. $2^1 = 2$,
2. $2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$,
3. $x < 2^x$,
4. „eukleidovská vlastnost pro dělení mocninami dvou se zbytkem“,
5. „každý nenulový prvek je dělitelný (beze zbytku) jistou maximální mocninou dvojky“.

[30] Pro celá čísla se jedná o klasický zápis ve dvojkové soustavě.

Uvědomme si, že obor integrity celých čísel je dyadickým okruhem, funkce dyadického umocňování je zde rovna klasické exponenciální funkci $2^{()}$ (parcializované na množinu nezáporných celých čísel). Uveďme si ještě jednu společnou vlastnost celých čísel a prvků dyadického okruhu. Platí, že každý nenulový prvek dyadického okruhu lze zapsat ve tvaru $x = 2^p(2q+1), p \geq 0$, kde p, q jsou jednoznačně určeny prvkem x. Podobně jako na tělese racionálních čísel definujeme nyní *dyadickou valuaci* dyadického okruhu R: $W(x) = p$.

Tak se dyadické okruhy stávají speciálním typem tzv. okruhů s valuací, pro něž L.S. Rieger definuje pojem *rozšíření*. Tento pojem je poměrně intuitivní, nebudeme jej podrobně rozepisovat.[31] Speciálním případem rozšíření je tzv. *bezprostřední rozšíření*.

Dále L.S. Rieger definuje charakteristickou funkci (funkci s oborem hodnot $\{0, 1\}$), kterou budeme chápat v jednodušším smyslu a její hodnoty označovat C_x^y pro prvky x, y dyadického okruhu R, $x \geq 0$. Tato funkce je dána poměrně jednoduchým aritmetickým vzorcem.[32]

Nyní máme již vše potřebné k tomu, abychom mohli zavést ústřední pojem práce, pojem tzv. *m-t-okruhu*.

Část 3.: *Dyadické okruhy množinově-teoretického typu (m-t-okruhy) a dyadické modely Gödelovy axiomatické teorie konečných množin*

Hlavním cílem tohoto oddílu je konstrukce obecného dyadického modelu příslušné teorie množin, proto je zpočátku třeba zavést základní množinové pojmy.

V následujícím textu budeme množinu nezáporných prvků dyadického okruhu R značit $R^{\geq}$. Podobně jako v první části práce budou nyní tyto prvky chápány jako „množiny“. Skutečnost, že $C_x^y = 1$ pro $x, y \in R^{\geq}$, L.S. Rieger interpretoval *„množina“ x je prvkem „množiny“ y*.

Dále pomocí aritmetických operací (na prvcích z dyadického okruhu) L.S. Rieger zavedl pojmy „neuspořádaná dvojice“, „uspořádaná dvojice“, „uspořádaná n-tice“ apod.

Samotná definice m-t-okruhu je dosti komplikovaná (v Riegrově práci zaujímá tři plné strany), proto tento pojem opět pouze přiblížíme. Množinově-teoretický okruh (*m-t-okruh*) je dyadický okruh, jenž splňuje další „množinové“ vlastnosti (m0)–(m8).

Požadavky (m1)–(m7) jsou právě Gödelovy axiomy B, jež jsou zde formulovány aritmeticky a pouze pro „množiny“ (ne tedy pro „třídy“ budoucího dyadického modelu).[33] Axiomy B2 (axiom průniku) a B3 (axiom doplňku) jsou zde nahrazeny vlastností (m2) množinového rozdílu. Aritmetický axiom (m3) ekvivalentní s axiomem definičního oboru B4 je zde formulován jako požadavek na ekvivalenci dvou nově zavedených operací.

[31] Např. musí platit, že okruh R_1 s valuací, který je rozšířením okruhu R_2 s valuací, je nadokruhem R_2 a valuace okruhu R_1 je na podokruhu R_2 definována stejně jako valuace na R_2.

[32] Platí $C_x^y = \left[\frac{y}{2^x}\right] - 2\left[\frac{y}{2^{x+1}}\right]$, kde [ ] značí „celou část“ prvku z R. Existence (a jednoznačnost) $\left[\frac{y}{2^x}\right]$ je zaručena čtvrtou vlastností funkce dyadického umocňování.

[33] Uvědomme si, že kandidáta na pojem „třídy“ ještě nemáme k dispozici.

Vlastnost (m8) reprezentuje slabší formu axiomu výběru E. Požadavek (m0) zajišťuje mj. platnost axiomů *non*C1, C2, C3, C4.

Dodejme, že obor integrity celých čísel patří mezi m-t-okruhy.

Dále L.S. Rieger definuje bezprostřední tzv. *slabě pseudoperfektní rozšíření* R^* m-t-okruhu R.[34] Obecně jsou prvky z tohoto rozšíření R^* nazývány „třídy" a je pro ně požadováno devět vlastností obdobných odpovídajícím vlastnostem m-t-okruhu.

Prvním hlavním závěrem práce [R15] je následující tvrzení:

Věta: Nechť R je m-t-okruh a R^* jeho slabě pseudoperfektní rozšíření. Položme

$$Mn^*(X) \Leftrightarrow X \in R^{\geq},$$

$$T\check{r}^*(Y) \Leftrightarrow Y \in R^*,$$

$$X \in^* Y \Leftrightarrow Mn^*(X)\ et\ T\check{r}^*(Y)\ et\ C_X^Y = 1).$$[35]

Pak $Mn^*()$, $T\check{r}^*(), \in^*$ definují tzv. *dyadický model* Gödelovy axiomatické teorie konečných množin.

Část 4.: *Skolemovské rozšíření spočetných* m-t*-okruhů*

Hlavním úkolem poslední části práce [R15] bylo *sestrojení* m-t*-okruhu nespočetné mohutnosti* $\aleph_1$. Popíšeme zhruba základní myšlenky jeho konstrukce.

Jak již bylo zmíněno, příkladem (spočetného) m-t-okruhu je např. obor integrity celých čísel. Ten L.S. Rieger uvažoval jako výchozí m-t-okruh (my jej označíme symbolem R_1) a dále postupoval následující transfinitní konstrukcí: je-li dán spočetný m-t-okruh $R_\alpha, \alpha < \omega_1$, pak za $R_{\alpha+1}$ položíme m-t-okruh, jež vznikne tzv. *skolemovským rozšířením* m-t-okruhu R_α, tj. použitím obecné Skolemovy metody popsané v [Sko34].

Tak L.S. Rieger získal nespočetnou rostoucí posloupnost $(R_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ do sebe vnořených spočetných m-t-okruhů a za výsledný m-t-okruh R položil m-t-okruh, jenž vznikl jejich množinovým sjednocením.

Aplikací hlavní věty z předchozí části dosáhl L.S. Rieger zásadního výsledku celé práce:

Věta: Nechť R je nespočetný m-t-okruh sestrojený právě popsanou konstrukcí a R^* jeho slabě pseudoperfektní rozšíření. Pak dyadický model popsaný v předchozí větě má následující vlastnost: množina „konečných ordinálních čísel" tohoto modelu má mohutnost $\aleph_1$.

Je-li rozšíření R^* minimální (tj. je podokruhem libovolného slabě pseudoperfektního rozšíření m-t-okruhu R), pak množina všech „tříd" tohoto modelu má též mohutnost $\aleph_1$.

Je-li splněna jiná dodatečná podmínka[36], pak množina všech „tříd" tohoto modelu má mohutnost $2^{\aleph_1}$.

[34] L.S. Rieger je v práci [R17], kde se o něm zmiňuje, nazývá *dyadický obal*.

[35] R^* je dyadickým okruhem, charakteristická funkce C_x^y je zde proto zavedena. Formálně definujeme $C_x^y := 0$ pro $x \in R^* - R^{\geq}$.

[36] Tu zde explicitně neuvádíme.

Na závěr dodejme, že prostřednictvím konstrukce modelů Gödelovy axiomatické teorie konečných množin, jež mají nespočetně mnoho „konečných ordinálních“ neboli „přirozených“ čísel, se otevřel nový pohled na relativnost axiomaticky určeného pojmu konečna, přirozeného čísla, aritmetiky apod.

4.2.4 *A contribution to Gödel's axiomatic set theory, III* [R18] (1963)

Poslední z trojice prací věnovaných Gödelově teorii množin opět navazuje na předchozí článek této série. V práci [R15] L.S. Rieger zkonstruoval některé konkrétní příklady axiomatické teorie popisující systém Henselových celých dyadických čísel a nazval je m-t-okruhy (přesněji se jedná o dyadické obaly m-t-okruhů), zmiňovanou teorii označuje termínem *dyadická aritmetika.* V práci [R18] je obecný pojem dyadické aritmetiky definován pomocí 31 axiomů. Primitivní pojmy tvoří sčítání, násobení a mocnění dvojky. Hlavním tématem práce je určení vztahu dyadické aritmetiky ke Gödelově teorii konečných množin. L.S. Rieger dokazuje, že tyto dva systémy jsou vzájemně interpretovatelné, své výsledky prezentuje ve formě dvou tvrzení – *Věty o ekvivalenci* a *Věty o reprodukci.*

Problematika tohoto článku byla předmětem semináře konaného na MFF UK v akademickém roce 1959/60. L.S. Rieger měl v plánu sepsat ještě navazující publikaci, tedy čtvrtou v této řadě. V ní chtěl podat mj. více příkladů dyadické aritmetiky či obecnou algebraickou metodu na rozšíření dyadické aritmetiky. O svém záměru se v práci [R18] několikrát zmínil, čas byl však neúprosný a předčasná smrt vše ukončila. L.S. Rieger se nedožil ani uveřejnění práce [R18].

V následujícím výkladu opět ponecháme Riegrovo členění práce [R18], vynecháme pouze část první (Úvodní poznámky) a poslední (Závěrečné poznámky a otevřené problémy).

Část 2.: *Axiomy teorie konečných množin (Bernaysovy-Gödelovy) a jejich redukce.*

Na počátku práce vypisuje L.S. Rieger axiomy teorie konečných množin, tedy A1 – A4, B1 – B8, *non*C1, C2 – C4, D a E z Gödelovy práce [Göd40]. Zároveň poznamenává, že axiom B8 (druhý axiom trojité konverze) lze vynechat, neboť je důsledkem ostatních axiomů Gödelova systému (ať už uvažujeme C1 či *non*C1). Dále, tentokrát pouze v teorii konečných množin, lze odvodit axiom C3 (axiom potenčních množin) a axiom E (axiom výběru) z axiomů zbývajících.[37]

L.S. Rieger v dalším uvažuje takto redukovaný systém teorie konečných množin s přidaným existenčním axiomem postulujícím, že existuje alespoň jedna množina.

[37] Tato redukce je výsledkem P. Vopěnky [Vop64a].

Část 3.: *Axiomatický systém* (σ) *dyadické aritmetiky*

Nyní blíže popíšeme axiomatický systém dyadické aritmetiky, jak jej zavádí L.S. Rieger. K lepšímu pochopení úlohy jednotlivých axiomů tohoto systému odkazujeme čtenáře na definici m-t-okruhu. Při budování systému σ se budeme snažit nalézt analogie s axiomy m-t-okruhu.

Uvažujme jazyk prvního řádu s rovností. Objekty naší teorie budeme nazývat *dyadická celá čísla*. Axiomatický systém σ obsahuje následující tři predikáty:

a) ternární predikát sčítání: zápis $+(X,Y,Z)$ značí, že Z je součtem X a Y,
b) ternární predikát násobení: zápis $\cdot(X,Y,Z)$ značí, že Z je součinem X a Y,
c) binární predikát mocnění dvojky: zápis $2(X,Y)$ značí, že Y vzniklo umocněním dvojky na X.[38]

Axiomy systému σ udávající požadavky na predikáty

$$+(\cdot,\cdot,\cdot),\ \cdot(\cdot,\cdot,\cdot),\ 2(\cdot,\cdot)$$

se rozpadají do tří skupin; *axiomy okruhu, dyadické axiomy* a *axiomy tříd.* Celkový počet těchto axiomů je 30, posledním (tj. 31.) axiomem systému σ je *princip následníka*, který má mezi axiomy odlišnou pozici, a je proto uvažován zvlášť. Nyní se s jednotlivými skupinami axiomů blíže seznámíme.

Axiomy okruhu se vztahují pouze na predikáty sčítání a násobení. Jejich prostřednictvím je požadováno, aby celá dyadická čísla tvořila obor integrity s charakteristikou různou od dvou (tj. $1+1 \neq 0$). Zároveň je zde zahrnut požadavek na neexistenci jedné poloviny – $(\forall X)(non(X+X=1))$.

Dyadickými axiomy jsou zadány požadavky na mocnění dvojky. L.S. Rieger je rozdělil do dvou skupin. Axiomy první skupiny umožňují zavést tzv. *konečná celá dyadická čísla*, neboli definovat vlastnost být větší nebo roven nule, a to nerovností $2^X \neq 0$. Čísla s touto vlastností tvoří diskrétně uspořádaný podobor integrity[39] oboru integrity celých dyadických čísel, a to vzhledem k následující relaci:

$$X < Y \Leftrightarrow \left(X \neq Y\ et\ 2^{Y-X} \neq 0\right).$$

Druhá skupina dyadických axiomů zajišťuje definici relace náležení $\in^*$. Je zde také definována *dyadická valuace* (analogicky jako u dyadického okruhu, viz část 4.2.3).

Poznámka 1: Objasněme nyní vztah mezi dyadickým umocňováním u dyadického okruhu a funkcí $2^{()}$, jež vznikla právě definovaným mocněním dvojky (tj. pomocí dyadických axiomů).

Funkce dyadického umocňování je definována pouze pro nezáporné prvky (diskrétně) uspořádaného oboru integrity a z jejích vlastností plyne, že má hodnoty vždy větší než nula.

[38] Zjednodušeně pak zapisujeme $Z = X+Y$, resp. $Z = X\cdot Y$, resp. $Z = 2^X$. Tím dostáváme operace $()+(), ()\cdot(), 2^{()}$.

[39] Viz definice diskrétně uspořádaného okruhu, část 4.2.3.

Naproti tomu funkce $2^{()}$ je definována pro všechny prvky oboru integrity a (diskrétní) uspořádání je zde definováno prostřednictvím jejích hodnot. Platí též, že $(\forall X)(2^X \geq 0)$. Pro nezáporné prvky má funkce $2^{()}$ stejné vlastnosti jako funkce dyadického umocňování.

Poznámka 2: Relace náležení $\in^*$ (jak uvidíme dále) je definována prostřednictvím analogického předpisu jako v případě dyadických modelů (zde se jednalo o charakteristickou funkci C_x^y). Jako „množiny" zde uvažujeme konečná (tedy nezáporná) celá dyadická čísla a jako „třídy" všechna celá dyadická čísla.

Právě zmíněné axiomy budované teorie dyadické aritmetiky zajišťují platnost Gödelových axiomů A a axiomu B2.

Pro zadání poslední skupiny axiomů bylo nejprve třeba zavést pojmy „neuspořádaná dvojice", „uspořádaná dvojice" apod., což L.S. Rieger provedl pomocí aritmetických operací na celých dyadických číslech, analogickým způsobem jako v předchozí práci.

Axiomy tříd jsou ekvivalentní Gödelovým axiomům B (kromě axiomu B2), jsou formulovány aritmeticky, obdobným způsobem jako vlastnosti (m1)–(m7) u m-t-okruhu (v tomto případě však i pro „třídy", nejen pro „množiny"). Připomínáme, že v této práci L.S. Rieger pracuje s redukovaným systémem Gödelovy axiomatiky.

Posledním axiomem je *princip následníka*, který má opět podobný charakter jako vlastnost (m0) v definici m-t-okruhu. V tomto případě nezajišťuje množinově-teoretické vlastnosti pro relaci náležení, ale je podstatný pro platnost Věty o reprodukci.

Na závěr tohoto oddílu znovu připomeňme, že všechny právě zmíněné axiomy dyadické aritmetiky splňují např. *Henselova celá dyadická čísla* (viz část 4.2.3).

Část 4.: *Věta o ekvivalenci a věta o reprodukci*

Na základě výsledků druhé a třetí části dokázal L.S. Rieger ve čtvrté části práce [R18] následující dvě hlavní tvrzení:

Věta o ekvivalenci:

1. Nechť $() + (), () \cdot (), 2^{()}$ jsou operace dyadické aritmetiky, pro něž platí axiomy okruhu, dyadické axiomy a axiomy tříd (tedy bez principu následníka). Definujme predikáty $T\check{r}^*()$, $Mn^*()$, $\in^*$ následovně:

$$Mn^*(X) \Leftrightarrow 2^X \neq 0,$$
$$T\check{r}^*(Y) \Leftrightarrow Y = Y,$$
$$X \in^* Y \Leftrightarrow sgn(2^X)\left(\left[\frac{Y}{2^X}\right] - 2\left[\frac{Y}{2^{X+1}}\right]\right) = 1.$$ [40]

[40] Porovnej s definicí dyadického modelu, část 4.2.3.

L.S. Rieger v práci nejprve dokázal, že výraz $sgn(2^X)\left(\left[\frac{Y}{2^X}\right] - 2\left[\frac{Y}{2^{X+1}}\right]\right)$ může nabývat pouze hodnot 0 či 1.

Potom $T\check{r}^*()$, $Mn^*()$, $\in^*$ splňují axiomy Gödelovy teorie konečných množin.[41]

2. Nechť $T\check{r}()$, $Mn()$, $\in$ jsou predikáty Gödelovy teorie konečných množin. Potom lze zavést základní dyadické operace $() + (), () \cdot (), 2^{()}$ splňující $2^1 = 2 = \{\{\emptyset\}\}$[42] pro všechny třídy původního systému tak, že jsou splněny všechny axiomy dyadické aritmetiky včetně principu následníka.

Věta o reprodukci:

1. Uvažujme situaci z první části Věty o ekvivalenci. Nechť dále platí princip následníka. Zaveďme nové dyadické operace $() +^* (), () \cdot^* (), 2^{*()}$ na „třídách“ pomocí druhé části Věty o ekvivalenci, avšak aplikované na predikát $\in^*$. Potom $2^* = 2$ a operace $() +^* (), () \cdot^* (), 2^{*()}$ jsou identické s operacemi $() + (), () \cdot (), 2^{()}$.

2. Uvažujme nyní situaci z druhé části Věty o ekvivalenci. Zaveďme nový predikát náležení $\in^*$ pomocí první části Věty o ekvivalenci aplikované na právě definované dyadické operace $() + (), () \cdot (), 2^{()}$. Potom predikát $\in^*$ je identický s původním predikátem $\in$.

Nyní blíže osvětlíme význam právě uvedených tvrzení. Věta o ekvivalenci dává možnost vzájemné interpretovatelnosti dyadické aritmetiky v Gödelově teorii konečných množin a naopak. Věta o reprodukci říká, že postupným provedením těchto dvou interpretací (v libovolném pořadí) získáváme identickou interpretaci.

Jinak řečeno L.S. Rieger ukazuje, jak je možno sestrojit model jedné teorie ve druhé a naopak, a dále, že pokud sestrojíme model jednoho systému (A) ve druhém (B) a poté model právě zkonstruovaného modelu v původním systému (A), pak tento model (tedy model modelu teorie A) reprodukuje původní systém (A).

Tím je ukázáno, že axiomatický systém dyadické aritmetiky je přesně to samé jako Gödelova axiomatická teorie konečných množin, ovšem s jinými primitivními pojmy. Uvažujeme-li tedy teorii konečných množin, pak relace náležení má aritmetický charakter.

Na závěr dodejme několik poznámek k důkazům těchto tvrzení. L.S. Rieger dokazuje druhou část Věty o ekvivalenci a Věty o reprodukci dohromady, a to v několika krocích; další dvě části jsou pak dokázány odděleně. O značné náročnosti a hloubce Riegrových úvah svědčí i to, že A. Mostowski v recenzi tohoto článku v časopise *Mathematical Reviews* dodává, že přes velkou snahu se mu nepodařilo všem důkazům porozumět.

V úplném závěru práce pak L.S. Rieger uvádí několik poznámek, týkajících se zejména neplatnosti výše zmiňovaných úvah (tj. aritmetického přístupu) pro případ teorie **nekonečných** množin. Nastiňuje zde i některá případná řešení tohoto problému (např. zeslabení jistých axiomů dyadické aritmetiky).

[41] Uvědomme si, že první hlavní výsledek práce [R15] je velice podobný tomuto tvrzení.
[42] $\emptyset$ značí prázdnou množinu.

4.2.5 *Sur le problème des nombres naturels* [R16] (1959)

V publikaci [R16] L.S. Rieger aplikuje své výsledky z [R15] a [R18] na řešení otázky, *zda je možné chápat tehdejší základy teorie čísel jako analogické ke geometrické teorii začátku 19. století* (tj. před tím, než byla známa existence neeukleidovských geometrií). Problematika tohoto článku je do jisté míry obsažena v práci [R17], která na [R16] patrně navazovala. L.S. Rieger tento článek však v [R17] nezmiňuje.

Nejprve vysvětluje, proč je odpověď na danou otázku, tak, jak byla chápána do té doby, negativní. Poukazuje na to, že obecně jsou přirozená čísla chápána jako „absolutní" pojem (píše, že si lze představit nějaký stroj či fyzický proces, který vytváří strukturu absolutních přirozených čísel). Dodává, že tento absolutní pojem je přijímán mj. proto, že je potřebný pro přesnou formulaci samotné Peanovy aritmetiky (viz část 4.2.6).

Ukazuje, že tento způsob vymezení absolutního pojmu přirozených čísel je dosti problematický. Snaží se opustit takovéto přesvědčení, přitom zmiňuje příspěvek A.S.E. Volpina ze stejného sborníku, ve kterém je prezentován obdobný názor.

Na otázku položenou v úvodu hledá odpověď pomocí striktně axiomatických prostředků (využitím výsledků z [R15] a [R18]). Nejprve uvádí předpoklady svého (axiomatického) pohledu na základy teorie čísel:

1. Základní teorii čísel je třeba chápat jako axiomatickou teorii prvního řádu.
2. Pojem přirozeného čísla nelze chápat jako daný.
3. Všechny matematické úvahy musí být relativizovány číselnou konstantou (jakožto horní hranicí pro počet použitých symbolů a kroky matematických rekurzí braných v úvahu).
4. Pro samotné primitivní pojmy hledaného axiomatického systému musíme užít některé základní aritmetické operace.

Dále ukazuje, že výše požadované lze splnit až překvapivě jednoduchým způsobem na základě závěrů z prací [R15] a [R18]:

Gödelova axiomatická teorie konečných množin je pouze jinou formulací určité konečné axiomatické teorie Henselových celých dyadických čísel (v [R18] nazývané dyadická aritmetika). Tuto teorii stručně popisuje a uvádí i znění Věty o ekvivalenci a Věty o reprodukci. Domnívá se, že takováto axiomatizace dyadických celých čísel by mohla být přijata za základ teorie čísel nebo alespoň za důležitý fragment algebraické teorie čísel.

V závěru práce L.S. Rieger uvádí dva zásadní problémy, které je třeba vyřešit pro dokázání dané analogie (mezi geometrií a teorií čísel).

Prvním je *nalézt dostatečně přirozenou hypotézu teorie čísel a dvě interpretace axiomatické teorie celých dyadických čísel (v Gödelově axiomatické teorii množin), z nichž jedna by potvrzovala a druhá vyvracela tuto hypotézu* (srovnej s definicí absolutní nerozhodnutenosti, část 4.2.6, viz též poznámka 47).[43]

[43] Tento problém je již vyřešen. Takové přirozené hypotézy nalezli J.B. Paris a L. Harrington [PH77].

Druhým problémem je, *jakým způsobem lze „vnořit" libovolný model teorie konečných množin do modelu obecné teorie množin tak, že ordinální čísla modelu „vnořeného" se stanou konečnými ordinálními čísly celého modelu.*

Na závěr dodejme, že práce [R16] byla publikována ve sborníku *Mezinárodního symposia ze základů matematiky* konaného v září 1959, na němž L.S. Rieger vystoupil se stejnojmenným referátem.

4.2.6 *Problém tzv. absolutně nerozhodnutelných vět teorie čísel* [R17] (1960)

V článku [R17] je zpracován obsah přednášky *O vztazích mezi teorií čísel, teorií množin a matematickou logikou*, kterou L.S. Rieger pronesl dne 10. 11. 1958 v *Matematické obci pražské.* Je věnován značně obtížnému problému tzv. *formální* (*relativní*) a tzv. *obsahové* (*absolutní*) *nerozhodnutelnosti* vět elementární teorie čísel (který byl již naznačen v předcházející práci [R16]). L.S. Rieger zde provádí kritický rozbor tohoto problému a diskutuje některé jeho aspekty, zvláště pak analogie mezi axiomatickými základy geometrie a aritmetiky. V přístupu k dané problematice využil (stejně jako v [R16]) své nejnovější výsledky o ekvivalenci Gödelovy axiomatické teorie konečných množin s axiomatickou teorií Henselových celých dyadických čísel, které publikoval v pracích [R15] a [R18].

Obsahová (absolutní) nerozhodnutelnost

Obsahově (*absolutně*) *nerozhodnutelnou* nazýváme takovou větu dané matematické teorie, k níž existují dva modely, přičemž v jednom modelu věta platí a ve druhém neplatí. Takovou větou je např. v absolutní geometrii Eukleidův postulát o rovnoběžkách. Ten platí ve standardním modelu eukleidovské roviny a neplatí např. v Poincarého modelu Lobačevského roviny.

Problém nalezení absolutně nerozhodnutelných vět elementární teorie čísel (či konkrétněji Peanovy aritmetiky) byl poprvé diskutován A. Mostowským v [Mos54], tato problematika byla v podstatě otevřena již ve slavné Gödelově práci [Göd31]. Jak píše Rieger, další vývoj v jejím řešení však nebyl příliš zdárný.

L.S. Rieger v poslední části článku [R17] nastínil nový směr, který by mohl řešení daného problému usnadnit, a to jeho redukci na problém řešitelnosti jistých exponenciálních rovnic nad rozšířenými dyadickými okruhy (viz část 4.2.3). Uvědomme si, že úspěšné řešení tohoto problému by znamenalo prokázání analogie teorie čísel a geometrie.

První část práce [R17] je věnována axiomatizaci a formalizaci elementární teorie čísel. Pro tu byl v dané době nejvíce používán systém formalizované *Peanovy aritmetiky* pocházející od D. Hilberta a P. Bernayse ([HB39]).

Poznámka: Připomeňme, že elementární aritmetika je (při současné axiomatizaci) teorií prvního řádu s jazykem s rovností a speciálními symboly $0, S, +, \cdot$, kde 0 je konstanta označující nejmenší přirozené číslo, S je symbol pro funkci následníka, $S(x) = x + 1$, symboly $+$, $\cdot$ značí operace součtu a součinu přirozených čísel. Elementární aritmetika má šest speciálních axiomů: následník přirozeného čísla je nenulový, S je prostá funkce a zbývající čtyři axiomy podávají rekurzivní definici součtu a součinu.

Peanova aritmetika je pak teorie, jež vznikla z elementární aritmetiky přidáním následujícího *schematu axiomů indukce*:

Je-li A formule elementární aritmetiky a x proměnná, potom formule

$$A(x/0) \Rightarrow ((\forall x)(A \Rightarrow A(x/S(x))) \Rightarrow (\forall x)A)$$

je axiom indukce.

Standardním modelem (elementární i Peanovy) aritmetiky je struktura $\mathcal{N} = \langle \omega, \emptyset, \sigma, \oplus, \odot \rangle$, kde ω je množina přirozených čísel, $\emptyset$ realizuje nulu, σ je funkce, která číslu n přiřazuje následující přirozené číslo, a $\oplus$, $\odot$ jsou obvyklé operace součtu a součinu.

Schema axiomů indukce u Peanovy aritmetiky však představuje nekonečně mnoho aritmetických axiomů; Rieger píše, že lze ukázat, že při zachování následníka jako primitivního pojmu nelze vystačit s konečným počtem axiomů. Tato okolnost způsobuje řadu obtíží, zejména pokud se jedná o problém absolutně nerozhodnutelných vět aritmetiky. Jsou dány nutností ověřovat v příslušných modelech nekonečně mnoho axiomů.

Existuje však možnost konečné axiomatizace a formalizace aritmetiky, a to pomocí Gödelova axiomatického systému konečných množin. Zde je primitivním pojmem relace náležení, pojem následníka lze definovat. Tato axiomatizace elementární teorie čísel má řadu výhod, a jak plyne z výsledku práce [R18], nezavádí do této teorie žádný „nearitmetický“ prvek.

Podle Riegra se tak problém absolutně nerozhodnutelných vět elementární teorie čísel převádí na úlohu nalézt větu axiomatické teorie konečných množin, k níž by (v celé Gödelově axiomatické teorii množin) byl sestrojen model, v němž věta platí, a zároveň model, v němž věta neplatí.

Formální (relativní) nerozhodnutelnost

Nyní je třeba představit pojem *formálně* (*relativně*) nerozhodnutelných vět aritmetiky, a to ve smyslu Gödelově [Göd31]. L.S. Rieger se též odkazuje na Mostowského monografii [Mos52], kde je celá teorie systematicky zpracována. Jedná se o *věty formalizované peanovské aritmetiky, které lze udat při každé její rekurentní formalizaci a k nimž (v dané formalizaci) neexistuje ani formální důkaz, ani formální vyvrácení.*[44]

L.S. Rieger dále podává kritiku v té době běžného výkladu a stanovisek zaujímaných k formální gödelovské nerozhodnutelnosti, a to též na základě nejnovějších výsledků a svých vlastních poznatků. V souvislosti s tím diskutuje roli nestandardních modelů aritmetiky a poukazuje na možnost jejich sestrojení (viz [R15]), dokonce sestrojení jejich nespočetného množství.

[44] [R17], str. 4.
V tomto okamžiku podotkněme, že nám není zcela jasné, co přesně je touto definicí míněno. Domníváme se, že na základě Gödelovy věty o úplnosti se tato definice shoduje s definicí absolutní nerozhodnutelnosti.

Své závěry shrnul takto:

Ukazuje se potřeba opustit přesvědčení o tzv. obsahové kategoričnosti aritmetiky přirozených čísel[45] *a zároveň potřeba rehabilitovat axiomatickou metodu zakládání aritmetiky. Je však třeba vycházet z daného konečného (dobře přehlédnutelného) počtu axiomů, což bude vyžadovat jiných primitivních pojmů, než je pojem následníka. Takovou axiomatickou základnou by mohla být Gödel-Bernaysova axiomatická teorie konečných množin vzhledem k autorovu výsledku o její ekvivalenci s axiomatickou teorií jistých dyadických okruhů (založených jen na primitivních pojmech sečítání, násobení a mocnění dvojky).*[46]

Na konci těchto úvah vyslovuje L.S. Rieger konkrétní domněnku, jaké tvrzení by mohlo být absolutně nerozhodnutelným postulátem přidaným k axiomatické aritmetice.[47]

Problém absolutně nerozhodnutelných vět teorie čísel a dyadické okruhy

V úplném závěru práce [R17] je naznačeno jádro nové algebraicko-logické metody, jež by mohla usnadnit řešení stanoveného problému. L.S. Rieger ukázal (prostřednictvím výše uvedených úvah) toto:

Každé aritmetické větě se dá vzájemně jednoznačně přiřadit jistá rovnice o jedné neznámé, sestavená nad jistým příslušejícím m-t-okruhem, resp. jeho slabě pseudoperfektním rozšířením (dyadickým obalem), a to takto:

Daná věta v modelu platí právě tehdy, když uvažovaná rovnice má v příslušném dyadickém okruhu nezáporné řešení.

Jak bylo řečeno v úvodu tohoto oddílu, L.S. Rieger převedl problém absolutní nerozhodnutelnosti vět teorie čísel na problém řešitelnosti jisté rovnice o jedné neznámé nad rozšířením jistého dyadického okruhu. Otázkou však zůstává, zda a do jaké míry by tento přístup usnadnil řešení dané otázky.

V souvislosti s články [R16], [R17] a [R18] doplňme, že L.S. Rieger vystoupil na *5. rakouském matematickém kongresu* konaném ve dnech 12.–17. září 1960 s referátem *Axiomatická dyadická aritmetika a její modely.* Z výtahu této přednášky, který je uveřejněn jako [R43], vybíráme nejdůležitější body (jedná se o doslovný překlad z němčiny):

V matematické logice se již více než dvě desetiletí (po vzoru Skolema a Gödela) pracuje s tzv. nenormálními (nestandardními) modely Peanovy aritmetiky

[45] Jelikož přirozená čísla (jako základní matematické objekty) nelze uspokojivě charakterizovat zadáním axiomů a odvozovacích pravidel aritmetiky, bylo zaujímáno stanovisko (nazývané též *stanovisko konstruktivně intuitivní kategoričnosti*), že elementární aritmetika by neměla být budována axiomaticky, ale intuitivně konstruktivní metodou.

[46] [R17], str. 10.

[47] L.S. Rieger se domnívá, že by se mohlo jednat o kladné řešení tzv. *anonymova prvočíselného problému*, zda všechna čísla tvaru

$$2+1,\ 2^2+1,\ 2^{2^2}+1, \dots$$

jsou prvočísla (případně až na konečně mnoho výjimek).

přirozených čísel. Zůstávají však doposud téměř bez zájmu matematiků pracujících v teorii čísel. Na jedné straně totiž Peanova aritmetika naprosto nepodává (se svým nekonečným počtem axiomů) matematicky uspokojivou implicitní definici pojmu „přirozené číslo“ ... Na druhé straně jsou stávající nenormální modely aritmetiky podstatně metamatematicky definované ...

Ve svém referátu bych rád vyložil axiomatický a (k intuitivnímu pohledu) protikladný náhled na základy teorie čísel, v němž nebude zapotřebí metamatematiky, a zároveň snad nebude bez zájmu pro matematiky pracující v teorii čísel.

Bude totiž uveden dobře přehledný systém 19 elementárních axiomů pro intuitivní dobře známá Henselova celá dyadická čísla, pouze se třemi základními (primitivními) pojmy, tzn. základními operacemi: sčítání, násobení a umocňování dvojky ...

Kromě běžných početních zákonů lze na základě axiomů abstraktně vysvětlit pojem „konečného“ celého dyadického čísla a dokázat pro něj silný princip indukce; proto všechno, co lze v elementární teorii čísel dokázat, lze rovněž dokázat pro každý typ „konečných“ celých dyadických čísel ...

V rámci Gödelovy-Bernaysovy axiomatické teorie množin lze zkonstruovat pro tuto axiomatickou dyadickou aritmetiku různé modely, a to bez metamatematických pomůcek, dokonce takové, které obsahují libovolný předepsaný segment třídy transfinitních ordinálních čísel při „konečných“ celých dyadických číslech.

Za použití metod obecné Krullovy[48] *teorie ohodnocení algebraických těles ... budou ukázány některé strukturální základní vlastnosti těchto nenormálních modelů axiomatické dyadické aritmetiky a bude objasněn rozličný původ těchto modelů (tzn. jistých oborů integrity s funkcí mocnění dvojky).*

Nakonec bude diskutována otázka, zda by se mohly v některých modelech ověřovat či vyvracet dosud otevřené klasické elementární číselné hypotézy v hrubé analogii s odpovídajícími geometrickými hypotézami.[49]

4.2.7 *On the consistency of the generalized continuum hypothesis* [R20] (1963)

Riegrova posmrtná práce [R20] je věnována slavné Gödelově větě z roku 1940 publikované v již několikrát zmiňované knize *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory* [Göd40]. Nejprve uvádíme znění této věty.

Věta o (relativní) bezespornosti axiomu výběru a zobecněné hypotézy kontinua: Je-li teorie daná Gödelovými axiomy A, B, C a D bezesporná, pak je bezesporná i teorie, jejíž axiomy jsou doplněny axiomem výběru E a zobecněnou hypotézou kontinua.

[48] Wolfgang Krull (1899–1971).

[49] [R43], str. 84–85.

Řekněme nyní několik slov o původním Gödelově důkazu. První část věty, tedy o relativní bezespornosti axiomu výběru, je v podstatě okamžitým důsledkem konstrukce modelu $\triangle$ v Gödelově systému Σ (viz část 4.2.2). Obtížnou částí byla konstrukce modelu $\triangle$ jako takového. Druhá část důkazu je značně náročnější. Založena je na hlubokém strukturálním lemmatu (v [Göd40] nazvaném Kondenzační lemma) týkajícím se ordinálních čísel.

Riegrovou snahou a hlavním cílem práce [R20] bylo proto nalézt poměrně intuitivní variantu Gödelova důkazu bezespornosti zobecněné hypotézy kontinua a přitom zredukovat použití ordinálních čísel na minimum. Popsané úvahy však L.S. Riegra přiměly k hlubší analýze Gödelova axiomu konstruovatelnosti, která vedla k formulaci zjednodušené verze tohoto axiomu, což se stalo dalším cílem jeho práce. Posledním Riegrovým záměrem pak bylo podat – jako přirozený důsledek předchozího zkoumání – nový důkaz bezespornosti axiomu výběru.

L.S. Rieger ve svém novém důkazu této slavné věty postupoval na většině míst obdobným způsobem jako K. Gödel. Odlišuje se však v několika bodech zejména u důkazu relativní bezespornosti zobecněné hypotézy kontinua. Jeho důkaz je tak podstatně jednodušší než značně složitý postup Gödelův.[50]

V první, úvodní části práce [R20] L.S. Rieger zavádí fundamentální *požadavek konstruovatelnosti*, který označuje K. Vlastní obsah článku je pak rozdělen do tří kapitol. Nejprve je dokázáno, že požadavek K je bezesporný vzhledem k axiomům uvažovaného systému Σ, v další části je podán důkaz faktu, že z axiomů A, B, C a D systému Σ doplněných axiomem K vyplývá axiom výběru a zobecněná hypotéza kontinua, a do třetice je ukázáno, že poměrně jednoduchý axiom K je v Σ ekvivalentní se složitým Gödelovým axiomem konstruovatelnosti.

Na závěr doplňme, že o předmětu tohoto článku L.S. Rieger referoval v *Matematické obci pražské* dne 5. 6. 1961 a následujícího roku byl z této přednášky v *Časopise pro pěstování matematiky* uveřejněn výtah [R46].

Požadavek konstruovatelnosti K

Definice: Položme $[0] := 0$. Je-li dále definováno $[\beta]$ pro libovolné ordinální číslo β, pak $[\beta+1]$ definujeme jako *uzávěr množiny*[51] $[\beta]\cup\{[\beta]\}$ vzhledem k tzv.

[50] Jednodušší verzi Gödelova důkazu relativní bezespornosti zobecněné hypotézy kontinua dále podali např. R. Doss [Dos63], P.J. Cohen (nar. 1934) [Coh66], J.R. Shoenfield [Sho67], C.R. Karpová (1926–1972) [Kar67], R.B. Jensen (nar. 1936) [Jen67] a A. Mostowski [Mos69].

[51] Viz Poznámka 1 níže.

množinově-teoretickým operacím $F_1, \ldots, F_8$ daným takto:[52]

$$\begin{aligned}
F_1(x,y) &= \{x,y\} \\
&\quad \text{– operace dvojice (viz axiom A4),} \\
F_2(x) &= \{\langle u,v\rangle \in x : u \in v\} \\
&\quad \text{(viz axiomy B1 a B2),} \\
F_3(x,y) &= x - y \\
&\quad \text{– operace doplňku (viz axiom B3),} \\
F_4(x) &= \{u : (\exists v)(\langle v,u\rangle \in x)\} \\
&\quad \text{– operace definičního oboru (viz axiom B4),}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_5(x,y) &= x \times y \\
&\quad \text{– operace kartézského součinu (viz axiom B5),} \\
F_6(x) &= \{\langle u,v\rangle : \langle v,u\rangle \in x\} \\
&\quad \text{– operace dvojité konverze (viz axiom B6),} \\
F_7(x) &= \{\langle\langle u,v\rangle, w\rangle : \langle\langle v,w\rangle, u\rangle \in x\} \\
&\quad \text{– první operace trojité konverze (viz axiom B7),} \\
F_8(x) &= \{\langle\langle u,v\rangle, w\rangle : \langle\langle u,w\rangle, v\rangle \in x\} \\
&\quad \text{– druhá operace trojité konverze (viz axiom B8).}
\end{aligned}$$

Nakonec položme $[\alpha] := \bigcup_{\beta<\alpha}[\beta]$ pro libovolné limitní ordinální číslo α.

Požadavek konstruovatelnosti K je pak dán následující formulí:

$$\bigcup_{\beta \in On} [\beta] = V,$$

kde On je třída všech ordinálních čísel systému Σ a V je univerzum množin.

Poznámka 1: *Uzávěr množiny* x vzhledem k n_i-árním operacím F_i je taková nejmenší třída $\overline{x}$, která obsahuje množinu x a pro každé $u_1, \ldots, u_{n_i} \in \overline{x}$ je $F_i(u_1, \ldots, u_{n_i}) \in \overline{x}$. Uzávěr množiny se jednoduše sestrojí rekurentním způsobem, tj. postupným prováděním všech operací; pro přesný postup konstrukce odkazujeme na monografii [BŠ86].

Poznámka 2: Základní operace $F_1, \ldots, F_8$ jsou získány drobnou modifikací Gödelových fundamentálních operací $f_1, \ldots, f_8$.

Později uvidíme, že jsme takto zavedli tzv. K-konstruovatelné množiny. Axiom K tedy říká, že každá množina je konstruovatelná, ale ve značně prostším a (zdánlivě) obecnějším smyslu než tomu bylo původně u K. Gödela.

Poznámka 3: Současná definice konstruovatelných množin L_β má (pro nelimitní ordinální číslo β) tvar

$$L_{\beta+1} := \overline{L_\beta \cup \{L_\beta\}} \cap \mathcal{P}(L_\beta),$$

[52] Tyto operace jsme nazvali podle jejich vztahů k axiomům Gödelova systému Σ.

kde $\overline{x}$ je uzávěr x vzhledem k operacím $F_1, \dots, F_7$, a

$$L_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$$

pro limitní ordinální číslo α. Třída $L := \bigcup_{\beta\in On} L_\beta$ se nazývá *třída* (*univerzum*) *konstruovatelných množin.*

Část 2.: *Relativní bezespornost požadavku* K *v* Σ

Lze říci, že Riegrův důkaz bezespornosti K v systému axiomů Σ má dvě fáze, v každé z nich byl zaveden klíčový pojem celé práce. V první fázi L.S. Rieger nejprve zavádí pojem tzv. *α-pseudomodelu*, jehož vlastnosti dále intenzivně studuje. Právě jeho zavedení mu umožnilo zjednodušit některé kroky v původním Gödelově důkazu.

Označme nyní (pro libovolné ordinální číslo α) $[\omega_{\alpha+1}]$ symbolem W_α. Dále definujme $\overline{\overline{W_\alpha}}$ jako uzávěr množiny $W_\alpha \cup \{W_\alpha\}$ vzhledem k tzv. třídově-teoretickým operacím $F_2, \dots, F_8$ uvedeným výše.

V práci [R20] pak L.S. Rieger dokázal následující větu:

Věta: Pro libovolné ordinální číslo α položme

$$Mn_\alpha(X) \Leftrightarrow X \in W_\alpha \quad \text{(říkáme, že } X \text{ je } \alpha\text{-množina)},$$

$$T\check{r}_\alpha(Y) \Leftrightarrow Y \in \overline{\overline{W_\alpha}} \quad \text{(říkáme, že } Y \text{ je } \alpha\text{-třída)},$$

$$X \in_\alpha Y \Leftrightarrow (X \in Y \ et \ T\check{r}_\alpha(Y)).$$

Pak $Mn_\alpha(), T\check{r}_\alpha(), \in_\alpha$ tvoří tzv. *α-pseudomodel* teorie Σ v Σ, tj. axiomy skupiny A, B, C, případně kromě axiomu C3, a axiom D přeformulované ve výše uvedených α-termínech jsou v Σ dokazatelné.

Navíc je v tomto α-pseudomodelu splněn požadavek konstruovatelnosti $(K)_\alpha$, tj. axiom K přeformulovaný v příslušných α-termínech.

Jako důsledek tohoto tvrzení platí, že axiom K je bezesporný se všemi axiomy Σ kromě axiomu C3 (o něm tuto informaci nemáme). Proto bylo třeba zavést ještě jeden zásadní pojem, tzv. *K-model*, k jehož definici dospěl L.S. Rieger pomocí následujícího tvrzení:

Věta: Položme $W := \bigcup_{\beta\in On}[\beta]$ a dále definujme

$$Mn_K(X) \Leftrightarrow X \in W \quad \text{(říkáme, že } X \text{ je } K\text{-konstruovatelná množina)},$$

$$T\check{r}_K(Y) \Leftrightarrow (Y \subseteq W \ et \ (\forall v)(v \in W \Rightarrow v \cap Y \in W))$$

(říkáme, že Y je K-konstruovatelná třída),

$$X \in_K Y \Leftrightarrow (X \in Y \ et \ T\check{r}_K(Y)).$$

Pak $Mn_K(), T\check{r}_K(), \in_K$ definují model Σ v Σ, který nazýváme *K-model.*

Navíc požadavek $(K)_K$, tedy K přeformulovaný v termínech $Mn_K()$, $Tř_K()$, $\in_K$, je v Σ dokazatelnou formulí.

Právě uvedené tvrzení L.S. Rieger dokázal pomocí vlastností popsaného α-pseudomodelu, a tím dokončil důkaz bezespornosti K v Σ. Sestrojený K-model není v podstatě nic jiného než Gödelův model $\triangle$.

Část 3.: *Důkaz implikace* $K \Rightarrow \left(E\ et\ 2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}\right)$

První část implikace, tedy $K \Rightarrow E$, dokázal L.S. Rieger téměř okamžitě, a to analogickými úvahami jako K. Gödel v [Göd40]. Poznamenejme, že na základě výsledků předchozí části L.S. Rieger získal následující formulaci požadavku K, s níž pak pracoval dále: $V = \bigcup_{\beta \in On} W_\beta$.

Druhá část důkazu již byla provedena s několika odlišnostmi od původního Gödelova postupu, řada analogií však byla zachována. L.S. Rieger předně ukazuje, že k důkazu formule $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$ v systému Σ_K (tj. Σ s přidaným axiomem K) je postačující dokázat v Σ_K implikaci

$$(I) \quad (u \subseteq x\ et\ x \in W_\alpha) \Rightarrow u \in W_\alpha .$$

Důkaz zásadního lemmatu (I) je patrně nejobtížnější partií celé práce. L.S. Rieger jej provedl ve dvou krocích, v jistém smyslu obdobně jako K. Gödel. Ten dokázal cílové tvrzení práce [Göd40] prostřednictvím stěžejního (leč opět dosti komplikovaného) Kondenzačního lemmatu. U L.S. Riegra tuto roli mělo fundamentální Lemma 7, pomocí něhož byla kýžená implikace (I) dokázána.

O důkazu lemmatu (I) píše A. Mostowski, autor recenze článku [R20], v referativním časopise *Mathematical Reviews* toto:

The proof of this lemma, which is the most ingenious point in the whole theory of constructible sets, is given a careful consideration and an extensive treatment.[53]

Část 4.: *Důkaz* $V = L \Leftrightarrow K$

Poslední část publikace [R20] již neobsahuje náročné matematické úvahy. Jejím cílem bylo dokázat, že axiom K je jen jiná formulace Gödelova axiomu konstruovatelnosti $V = L$, kde L je (Gödelovo) univerzum konstruovatelných množin. L.S. Rieger dokázal potřebnou rovnost $L = \bigcup_{\beta \in On} W_\beta$ tak, že dokázal obě inkluze.

V úplném závěru je podána „genealogická“ (či „vývojová“) interpretace zobecněné hypotézy kontinua jako důsledku požadavku K, která je naznačena v důkazu tohoto důsledku (zejména v důkazu zmiňovaného Lemmatu 7). L.S. Rieger píše, že takové byly jeho první úvahy a přístup k důkazu relativní bezespornosti zobecněné hypotézy kontinua. Jeho interpretace implikace (I) a

[53] MR **26** (1963), 3617.
Český překlad: Důkaz tohoto lemmatu, jenž je nejdůmyslnějším bodem celé teorie konstruovatelných množin, je pečlivě uvážen a podrobně vypracován.

rovnosti $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$ prostřednictvím „evoluce konstruovatelných množin“ je naznačena již ve volbě dodatečných operací potřebných k jejich důkazu, které nazval *operace mateřské množiny* a *operace otcovské množiny.* L.S. Rieger zavádí též důležitý pojem *rodokmene* K-konstruovatelné množiny.

4.3 Citace v monografiích

Trojice nejvýznamnějších Riegrových prací [R13], [R15] a [R18] je uvedena v kompendiu *Mengenlehre* [Fel79] v seznamu literatury o axiomatické teorii množin sestaveném vydavatelem U. Felgnerem (nar. 1941). V souvislosti s návazností na Gödelův výzkum v teorii množin je též zmíněna v česky psané monografii *Kurt Gödel* [MN96] editované J. Malinou a J. Novotným.

Řada výsledků článku [R13] spolu s publikací [R20] jsou citovány v monografii *Foundations of set theory* [FBL73], jejímiž autory jsou A.A. Fraenkel, Y. Bar-Hiller a A. Lévy.

Na práci [R16] se odkazuje A. Robinson v knize *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra* [Rob63]. S Riegrovými výsledky též pracoval Y. Kawahara v [Kaw95].

4.4 Vznik a vývoj teorie množin

Závěrečná část této kapitoly čtenáře stručně seznámí s historickým vývojem teorie množin, zvláštní pozornost je věnována situaci v Československu. Následující dva oddíly jsou sepsány zejména na základě knížky E. Fuchse *Teorie množin pro učitele* [Fuch99], kterou vřele doporučujeme k dalšímu studiu (viz též [Fuch87]). Některé myšlenky jsou též převzaty ze zdrojů [BŠ86] a [Koř65]. Zájemce o proniknutí do hlubších souvislostí odkazujeme na knihy I. Grattana-Guinnesse *From the calculus to set theory 1630–1910* [Gra80] a *The search for mathematical roots 1870–1940* [Gra00]. Vývoji teorie množin v období 1850 až 1940 je též věnována monografie J. Ferreira *Labyrinth of Thought* [Fer99].

4.4.1 Počátky teorie množin

Teorie množin se objevila poměrně pozdě, její počátky jako samostatné matematické disciplíny nacházíme až ve druhé třetině devatenáctého století. Je tomu proto, že vznik teorie množin je úzce spjat s pojmem (aktuálního) nekonečna, který nebyl ještě v polovině devatenáctého století obecně přijímán.[54]

[54]Matematici do té doby pracovali pouze s tzv. *potenciálním nekonečnem*, tedy nekonečno chápali jako krok po kroku postupující proces, který nikdy nekončí (každou veličinu je možno postupně zvětšovat nebo zmenšovat), ale ne jako celek. Potenciální chápání nekonečna se vyvinulo již v antickém Řecku, připomeňme např. Eukleidovy *Základy*, v nichž autor hovoří o přímce jako o úsečce, kterou můžeme neomezeně prodlužovat (ne však jednorázově až „do nekonečna“, jak bychom v dnešní době uvažovali my).

Teprve *aktuálním nekonečnem* rozumíme nekonečno jako celek, ve své dokončené, definitivní podobě, a můžeme tak studovat vlastnosti takovýchto nekonečných systémů. Aktuálně nekonečná množina je tedy množina, která obsahuje nekonečný počet objektů, o nichž před-

Připomeňme si situaci v matematice v devatenáctém století. Od jeho počátku se odstraňují problémy matematické analýzy související s infinitezimálním počtem (A.L. Cauchy (1789–1857)), tedy s používáním (zpočátku ne řádně definovaných) nekonečně velkých a nekonečně malých veličin. V druhé polovině 19. století se zpřesňování matematické analýzy završuje (K. Weierstrass (1815–1897)) a je vybudována aritmetická teorie reálných čísel (G. Cantor a R. Dedekind).

Poznamenejme, že základní otázku související se vznikem teorie množin – zda má smysl porovnávat nekonečné systémy podle velikosti – si položil již Galileo Galilei (1564–1642) v roce 1638. Ve své práci *Dialog o dvou systémech nebeských* si všiml, že množinu čísel $1, 2, 3, \ldots$ a množinu jejich druhých mocnin $1, 4, 9, \ldots$ lze vzájemně jednoznačně zobrazit. To by tedy znamenalo, že tyto dva systémy – přestože je jeden částí druhého – jsou stejně velké. Toho se G. Galilei pochopitelně zalekl a prohlásil, že otázka velikosti nekonečných systémů nemá smysl.

Bernard Bolzano

Výsledky o paradoxních vlastnostech nekonečných množin, kterých si již povšimnul G. Galilei, shrnul ve své knize *Paradoxy nekonečna* pražský rodák Bernard Bolzano (1781–1848). Na této knize Bolzano pracoval dva roky před svou smrtí, a lze ji tak považovat za vrchol jeho díla. Vydána byla až roku 1851 jedním z jeho žáků. B. Bolzano zde zavedl pojem množiny (pod označením *souhrn*) a zkoumal vlastnosti nekonečných množin.

Paradoxy nekonečna jsou spíše matematicko-filozofickou prací, částečně věnovanou i fyzice, přesto patří k nejvýznamnějším matematickým dílům devatenáctého století. Největší význam je spatřován v Bolzanových argumentech, proč je třeba pracovat s aktuálním nekonečnem. Bolzano dále analyzuje chyby, kterých se matematici dopouštějí při úvahách o nekonečnu, vyvrací některé námitky odpůrců aktuálního nekonečna a dokazuje, že existuje nekonečná množina. Tento důkaz je nicméně zčásti založen na teologických argumentech.

V jistém okamžiku se však Bolzano dopustil osudové chyby, kvůli které není považován za zakladatele teorie množin. Domníval se totiž, že skutečnost, že existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi nekonečnými množinami, nelze považovat za kritérium, zda jsou množiny stejně velké. Jak dodává E. Fuchs, *Bolzano překročil mnohé dosavadní bariéry, evidentně však nepřesáhl horizont tvrzení, že celek musí být větší než část*,[55] tj. jeden z Eukleidových logických axiomů.

Na závěr citujeme z knihy [Fuch99]:

Bolzanova kniha je v mnoha ohledech pozoruhodná. Samozřejmě, že ve světle dalších objevů jsou některé pasáže nepřesné či zastaralé. V každém případě je to však dílo pozoruhodné a podává nám dobrý obrázek o pronikavosti Bolzanova ducha a o stavu vědeckého myšlení v polovině minulého století. O kterém

pokládáme, že existují (alespoň v naší mysli).

[55] [Fuch99], str. 118.

současném textu to asi bude možno bez obav říci za půldruhé století?[56]

Georg Cantor

Aktuální nekonečno zavedl do matematiky důsledně Georg Cantor.[57] V letech 1873 až 1897 publikoval řadu prací, v nichž vypracoval matematické prostředky ke studiu nekonečných množin, a položil tak základy teorie množin. Po obsahové stránce vybudoval G. Cantor tuto teorii prakticky do dnešní podoby a je mu právem přisuzována role jejího zakladatele.

Cantor vyšel původně od problémů teorie reálných funkcí, zabýval se reprezentací funkcí trigonometrickými řadami. Významným Cantorovým výsledkem je jeho příspěvek k problematice transcendentních čísel (tj. těch reálných čísel, která nejsou kořeny žádného polynomu s celočíselnými koeficienty). V polovině devatenáctého století nebylo žádné transcendentní číslo známé, později byl popsán komplikovaný důkaz, jak taková čísla sestrojit. Matematici se proto domnívali, že tato čísla jsou dosti výjimečná. G. Cantor však v jedné ze svých prvních prací *O jedné vlastnosti souhrnu*[58] *všech reálných algebraických čísel* (1874) ukázal, že množina transcendentních čísel je nespočetná.

Zkoumáním vzájemně jednoznačných zobrazení Cantor v dalších svých dílech zavádí pojem mohutnosti množiny a buduje teorii kardinálních a ordinálních čísel. V článku *O jedné elementární nauce o souhrnech* (1890) se poprvé objevuje důkazová metoda, dnes nazývaná *diagonální metoda*, která je v mnoha obměnách používaná v teorii množin, v logice i jinde. Je zde dokázáno, že $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ a že analogicky lze pro každé kardinální číslo n odvodit vztah $2^n > n$. Završením Cantorova díla v teorii množin je práce *Příspěvky k základům teorie transfinitních množin* (1895, 1897).

Osud Cantorův i jeho teorie ovšem nebyl vůbec jednoduchý. Proti teorii množin byly od počátku vznášeny námitky, zejména proti Cantorově práci s aktuálně nekonečnými množinami. Mnoho matematiků (v čele s jeho bývalým učitelem L. Kroneckerem (1823–1891)) nepochopilo význam Cantorovy práce, napadali jej a ztěžovali mu publikování. Zastánců a přátel měl G. Cantor málo (jmenujme jeho bývalého učitele K. Weierstrasse a přítele R. Dedekinda).

V roce 1882 G. Cantor zformuloval hypotézu kontinua, později vynaložil nesmírné úsilí, aby ji dokázal, ovšem neúspěšně (dnes víme, že s důkazovými prostředky, které měl k dispozici, to nebylo možné). Tento neúspěch spolu s trvalými útoky odpůrců způsobil, že v roce 1884 Cantor upadl do hluboké deprese a zamýšlel zanechat matematiky. Tak skončilo jeho nejplodnější období. Poslední práci publikoval v roce 1897, v době, kdy paradoxně dochází k všeobecnému přijetí jeho teorie.

[56] [Fuch99], str. 119.

[57] Viz např. Šedivý, J., *Georg Cantor, zakladatel teorie množin*, PMFA **20** (1975), 5–13.

[58] Cantor nejprve používá termín *souhrn*, termín *množina* se u něj poprvé objevuje až v roce 1879.

4.4.2 Třetí krize matematiky

Jak již bylo zmíněno v závěru předchozího oddílu, na konci devatenáctého století dosáhla teorie množin celkového uznání a stala se základním kamenem, na němž se postupně vystavěla v podstatě celá matematika. V této době vzniká pocit, že věda (matematika, fyzika) je na vrcholu, že vše potřebné již je známo. Situaci v matematice vystihuje známý výrok H. Poincarého z II. mezinárodního matematického kongresu konaného roku 1900 v Paříži:

> *…nyní v matematice zůstávají jen celá čísla a konečné, respektive nekonečné systémy celých čísel …Matematika je plně aritmetizována. Dnes můžeme říci, že dosáhla absolutní přesnosti.*[59]

Nicméně již v té době byla známa první antinomie teorie množin, tedy bylo jasné, že teorie množin nebude fungovat tak spolehlivě, jak se zpočátku zdálo, a že je potřeba ji zrevidovat či nahradit jinou – lepší – teorií. V té době však byla teorie množin základnou hlavní části matematiky.

Antinomie (nebo též *paradoxy*) *teorie množin* jsou tvrzení, která lze v Cantorově teorii množin dokázat, a současně lze dokázat i jejich negaci. Taková teorie je potom sporná, tedy prakticky bezcenná, neboť v ní lze dokázat každé tvrzení. Nejznámější antinomie objevili:

1897 C. Burali-Forti (1861–1931): Nechť M je množina všech ordinálních čísel. Protože ordinální čísla jsou dobře uspořádána, přísluší množině M jisté ordinální číslo μ, $\mu \notin M$. To je však spor s definicí M.

1899 G. Cantor: Nechť $|M|$ značí mohutnost množiny M. Platí $|M| < |\mathcal{P}(M)|$. Vezměme nyní za M množinu všech množin, tedy pro množinu $\mathcal{P}(M)$ platí $\mathcal{P}(M) \subset M$. Pro kardinální čísla odtud plyne $|\mathcal{P}(M)| \leq |M|$, což je spor s první nerovností.

1902 B. Russell: Sestrojme množinu $M = \{X : X \notin X\}$, tedy M je množina všech množin, které nejsou svým vlastním prvkem. Ke sporu však vede předpoklad $M \notin M$ i předpoklad $M \in M$.

Právě B. Russell vnesl mezi matematiky nedůvěru v Cantorovu teorii množin, neboť v této teorii nalezl spor pomocí jejích nejelementárnějších prostředků. Russellův paradox se dotkl základních principů, které byly – jako intuitivně zřejmé – začleněny do Cantorova pojmu množiny.

> *„Množina“ bylo jen synonymum slov souhrn, systém apod. Tento pojem je tak samozřejmý a názorný, že není nutno ho nijak definovat. …O těchto souhrnech – množinách – pak G. Cantor běžně užívanými matematickými a logickými metodami dokazuje tvrzení a odvozuje jejich vlastnosti. …Nebylo nejmenšího důvodu předpokládat, že teorie budovaná tímto způsobem by mohla být principiálně nesprávná; vždyť takto se matematika budovala od starověku.*

[59] [Fuch99], str. 134.

A přesto antinomie prokázaly, že matematiku takto bezelstně budovat nelze! Toto je nejzávažnější důsledek antinomií.[60]

Není proto přehnané označení tohoto období *třetí krize matematiky.*

Poznámka: Přestože objevení antinomií vzbudilo vlnu nedůvěry a rozčarování, neodradilo většinu matematiků od aplikací teorie množin a jejích metod v různých matematických disciplínách. Antinomie se totiž týkaly objektů na „okraji“ této teorie (jako množina všech množin, množina všech ordinálních čísel apod.), které se v běžných aplikacích (např. v algebře a analýze) vůbec nevyskytovaly. Cantorova teorie množin se používá dodnes a je nazývána *naivní* či *intuitivní* teorie množin.

Východiska z krize

Některé přístupy k řešení třetí krize matematiky byly založeny na revizi nejen teorie množin, ale i matematické logiky. Jedním z takto nově vzniklých proudů byl intuicionismus L.E.J. Brouwera (viz část 3.2.2) a teorie typů B. Russella.[61] Metodu teorie typů řadíme mezi tzv. formalistické přístupy, k nimž patří též axiomatická výstavba teorie množin, dnes běžně používaná metoda budování různých vědeckých teorií.

Axiomatizace teorie množin znamená deduktivní vybudování celé teorie na základě systému axiomů, které jsou formulovány v jazyce matematické logiky a vyjadřují základní vlastnosti množin. Axiomatická metoda byla používána již ve starověku, prvním na ní založeným dílem jsou Eukleidovy *Základy.* Axiomatický způsob výstavby teorie množin odstranil všechny známé antinomie a nebylo k tomu třeba příliš zasahovat do matematické logiky vytvořené G. Fregem (1848–1925) a G. Peanem (1858–1932) (viz část 5.3.4).

První axiomatický systém teorie množin pochází od Ernsta Zermela (1871–1953), který jej vybudoval v letech 1904 až 1908. Ten byl později pozměněn a doplněn Abrahamem Adolfem Fraenkelem, a vznikla tak dnes nejrozšířenější Zermelova-Fraenkelova axiomatická teorie množin.

V roce 1925 přišel s novými myšlenkami John von Neumann, na něhož ve třicátých letech navázal Paul Bernays a navrhl axiomatiku naloženou na pojmu třída. Ta se stala základem Gödelovy-Bernaysovy axiomatické teorie množin (a tříd), viz též část 4.1.2, poznámka 10. Podrobněji o těchto axiomatických systémech viz literatura uvedená na začátku oddílu.

Hilbertův program a Gödelovy výsledky

Na počátku dvacátého století se základy teorie množin začal intenzivně zabývat německý matematik David Hilbert. Byl motivován objevem antinomií a chtěl

[60] [Fuch99], str. 136.

[61] Podle B. Russella je příčinou antinomií ten fakt, že prvek určitého systému je definován pomocí všech prvků tohoto systému. V *teorii typů* jsou všechny objekty hierarchicky rozděleny do různých typů (úrovní). Teorie typů však neodstranila všechny známé antinomie, navíc byla poněkud „strnulá“.

navíc reagovat na Brouwerův intuicioinismus. Jeho cílem bylo vybudovat bezesporné základy celé matematiky, a to výhradně formálně pomocí matematické logiky (viz též část 3.2.2, poznámka 15). Tomuto úkolu se věnoval zvláště ve dvacátých letech; jeho projekt se nazývá *Hilbertův program*.

Hilbertova idea byla následující:

Vycházel z toho, že je nutno dokázat, že užívané matematické metody jsou dostatečně silné k tomu, aby jimi bylo možno vybudovat celou klasickou matematiku včetně teorie množin, vycházející přitom z vhodně zvolených axiomů, současně však nejsou natolik silné, aby jejich aplikací bylo možno dojít k antinomiím.[62]

Hilbertův program měl být proveden ve dvou etapách. V první etapě měla být matematika plně formalizována, tj. vybudována ryze syntakticky. Ve druhé etapě měla být finitními prostředky dokázána její bezespornost.

Přestože D. Hilbert se svými žáky věnoval této myšlence obrovské úsilí, výsledky brněnského rodáka Kurta Gödela z roku 1931 prokázaly, že jeho program je nerealizovatelný, a to ani v jedné z vytyčených etap. Tato neutěšená skutečnost vyplývá ze slavných **Gödelových vět o neúplnosti**:

První Gödelovou větou o neúplnosti je tvrzení, že *každá bezesporná teorie T, která je rozšířením elementární teorie čísel* (tj. obsahuje aritmetiku), *je neúplná* (tj. existuje v ní nerozhodnutelné tvrzení).[63] Druhá věta o neúplnosti potom říká, že *v takové teorii T není možné dokázat její bezespornost.*

Je pochopitelné, že tyto závěry zasadily matematické komunitě tvrdou ránu, z níž nebylo jednoduché se vzpamatovat. D. Hilbert krátce před svou smrtí prohlásil:

Kde máme hledat naději a jistotu, když dokonce matematické myšlení selhalo.[64]

Nicméně vyřešení (i když negativní) otázky možnosti sestrojení úplné a bezesporné teorie množin nepochybně patří k největším úspěchům moderní matematiky. Uzavíráme tento oddíl slovy A. Sochora:

Gödelův výsledek o neúplnosti tudíž vyvolává současně hrdost i pokoru: hrdost nad tím, jak daleko může jít lidské poznání – až tak daleko, že dokáže poznat své meze – a poznání mezí by zase mělo být zdrojem pokory.[65]

V následujících odstavcích se již zaměříme na to, jak se rozvíjela teorie množin v Československu.

[62] [Fuch99], str. 142–143.
[63] Tedy z žádného „dostatečně bohatého" systému axiomů, který je bezesporný, nelze odvodit celou matematiku.
[64] [Fuch99], str. 142.
[65] [Soch01], str. 179.

4.4.3 Vývoj teorie množin v Československu

Vůbec první české pojednání o množinách bylo publikováno již v roce 1884. Jeho autorem byl tehdy pouze čtyřiadvacetiletý Matyáš Lerch (1860–1922)[66], kterému též patří prvenství v použití termínu množina (přestože od něj později ustoupil a nahradil jej slovem *množství*).[67] Dne 23. 5. 1884 přednesl M. Lerch na zasedání *Královské české společnosti nauk* v Praze *Příspěvek k nauce o množinách bodů v rovině*, který byl poté otištěn jako [Ler84].[68] Vedle G. Cantora zde M. Lerch cituje i E. Picarda (1856–1941). Významnější práce z teorie množin se však v české literatuře začaly objevovat až na počátku třicátých let dvacátého století.

Předválečná československá matematika byla orientována především na matematickou analýzu a teorii čísel (zejména K. Petr, V. Jarník, M. Kössler) a na geometrii, která zde měla poměrně dlouhou tradici (J. Sobotka (1862–1931),[69] B. Bydžovský, V. Hlavatý a další), v Brně se pod vedením E. Čecha začala úspěšně pěstovat topologie. První stať o teorii množin byla v československé literatuře publikována v roce 1931 v druhém vydání Petrova *Počtu integrálního* [Pet31]; v jeho závěru je otištěn dodatek V. Jarníka *Úvod do teorie množství*[70].

Ve třicátých letech začal u nás množinovou matematiku prosazovat E. Čech. Jeho kniha *Bodové množiny* [Čech36] byla prvním pokusem o českou „učebnici“ teorie množin. E. Čech též významně přispěl k vytvoření české terminologie, jeho zásluhou se začal rozsáhleji používat termín množina. Zdůrazněme však, že až do této doby se jednalo pouze o intuitivní teorii množin.

V této souvislosti je třeba zmínit též popularizační knížku brněnského matematika Bedřicha Pospíšila *Nekonečno v matematice* [Pos49], jež byla publikována roku 1949 v edici *Cesta k vědění*.

L.S. Rieger byl prvním československým matematikem, který studoval teorii množin axiomaticky prostřednictvím matematické logiky. Na konci čtyřicátých let, kdy začal pracovat v matematické logice, se však u nás pěstovala pouze předválečná tradiční logika, která pro matematiku jako takovou nepřinášela nic nového a významného. O situaci v oblasti poválečného studia logiky je pojednáno v části 5.3.5.

Tak vyniká Riegrův význam jako zakladatele matematické logiky a axiomatické teorie množin v Československu. Přínos pro naši tehdejší matematiku měly též jeho kontakty s vynikající polskou logickou školou, zejména jeho vztah s A. Mostowským, s nímž čeští logici po Riegrově smrti navázali užší spolupráci.

---

[66] Viz Frank, L., *O životě profesora Matyáše Lercha*, ČPM **78** (1953), 119–138; Škrášek, J., *Seznam prací prof. Matyáše Lercha*, ČPM **78** (1953), 139–148; Škrášek, J., *Le centenaire de la naissance de Matyáš Lerch*, CMJ **10(85)** (1960), 631–635; Borůvka, O., *Život a dílo Matyáše Lercha*, Spisy Přír. fak. Univ. J.E. Purkyně v Brně, 1961, 352–360, 362–372; Borůvka, O., *Vzpomínka na českého matemematika Matyáše Lercha*, PMFA **17** (1972), 130–134; Lepka, K., *Matyáš Lerch's work on number theory*, Masarykova Univerzita, Brno, 1995.

[67] Připomeňme, že ve světové literatuře se termín množina poprvé objevil v němčině (die Menge) v díle Georga Cantora, a to „až“ v roce 1879.

[68] Práci [Ler84] lze v plném znění nalézt ve zprávě Jaroslava Šedivého (1934–1988) [Šed85].

[69] Urban, A., *O životě a díle profesora Jana Sobotky*, PMFA **7** (1962), 355–359, Boušková, H., *Jan Sobotka*, diplomová práce, MFF UK, 1995.

[70] [Pet31], str. 655–725.

V té době se jednalo o jeden z nemnoha významných matematických kontaktů se zahraničím.

4.4.4 Matematická logika a teorie množin po Riegrově smrti

Na úvod poznamenejme, že o československé matematické logice v poválečných letech pojednává oddíl 5.3.5. Zdůrazněme, že v Riegrově době byla základním a nejdůležitějším pramenem ke studiu matematické logiky a teorie množin Gödelova práce [Göd40]. Pro Riegrův výzkum byla stěžejním zdrojem a inspirací. Proto je poměrně přirozené, že matematici, kteří na L.S. Riegra navazovali, pracovali ještě jistou dobu v Gödelově teorii množin, přestože se jinde ve světě v té době převážně používala axiomatika Zermelova-Fraenkelova. Tento trend u nás trval až do sedmdesátých let dvacátého století.

O vývoji matematické logiky a teorie množin v Československu v šedesátých a sedmdesátých letech se dozvídáme z článků Petra Hájka [Háj76] a Karla Drbohlava [Drb87]. Jak již bylo naznačeno, výzkum v obou těchto disciplínách do velké míry navazoval na Gödelovy práce.[71] Patrně nejvýznamnější byly výsledky Petra Vopěnky, který rozvinul výzkum v základech teorie množin započatý L.S. Riegrem a jehož pražský seminář byl světově uznávanou množinovou školou.

V roce 1963 dokázal P.J. Cohen nezávislost axiomu výběru a hypotézy kontinua v Zermelově-Fraenkelově teorii množin. Jeho pracemi se P. Vopěnka inspiroval a jako první dokázal totéž pro Gödelovu axiomatiku (přímou konstrukcí interpretace Gödelovy teorie množin s negací hypotézy kontinua v Gödelově teorii množin). Jak píše P. Hájek, P. Vopěnka později ze své konstrukce abstrahoval pojem booleovských modelů teorie množin, k němuž dále dospěli i D. Scott (nar. 1932) a R.M. Solovay.

Během šedesátých let tak P. Vopěnka publikuje sérii prací, jejichž předmětem jsou zejména konstrukce těchto modelů teorie množin. Jeho hlavním přínosem jsou konstrukce nestandardních modelů, které umožňují řešit problém hypotézy kontinua.

Zásadní význam má Vopěnkou zavedený pojem *polomnožiny* (viz [VH72]), který přirozeně vzniká při studiu nestandardních modelů a je použit k axiomatizaci booleovských modelů. K Vopěnkově teorii později přispěli např. Bohuslav Balcar a Antonín Sochor.

V roce 1973 konstruuje P. Vopěnka na základě pojmu polomnožiny tzv. *alternativní teorii množin* (viz [Vop79]). Tato teorie je alternativou ke Cantorově teorii množin a lze v ní nově rekonstruovat klasickou matematiku. V alternativní teorii množin jsou všechny množiny formálně konečné a lze zde v jistém smyslu překonat kvalitativní rozdíl mezi diskrétními a spojitými strukturami. Na rozvoji této teorie se podíleli A. Sochor, J. Mlček (nar. 1947) a J. Chudáček.

Pod vedením Petra Hájka, významné osobnosti československé matematické logiky, se v šedesátých letech do popředí dostává výzkum v aplikované matema-

[71] S K. Gödelem se osobně setkali Jiří Bečvář a Tomáš Jech.

tické logice, zaměřený na jisté logické aspekty umělého intelektu. Z Hájkových podnětů vznikla v roce 1966 GUHA (General Unary Hypothesis Automaton), metoda automatické tvorby hypotéz na základě empirických dat, jedna z nejstarších metod data miningu (viz [HH78]). P. Hájek tehdy působil v MÚ ČSAV.

Česká logika se dostala na světovou úroveň v oblasti metamatematiky aritmetiky inspirované proslulými Gödelovými větami o neúplnosti. Na tomto poli pracovali především Petr Hájek a Pavel Pudlák, kteří vedli v Praze seminář.

Důležitou oblastí matematické logiky, jež byla po Riegrově smrti úspěšně rozvíjena, je konstruktivní matematika. Jedná se o směr, který vychází z výsledků A.A. Markova (1903–1979) a je založený na intuicionistické logice a teorii algoritmů. Na tomto poli působila pražská skupina vedená Osvaldem Demuthem (1936–1988), která dosáhla řady významných výsledků především v konstruktivním integrálním počtu. V sedmdesátých letech přechází konstruktivní matematika ke konstruktivní derivaci a zasahuje i do otázek teorie rekurze.

V souvislosti s rozvojem počítačů u nás pracovala již zmiňovaná skupina Riegrova bývalého aspiranta Jiřího Bečváře. Ta se zabývala logickými základy výpočetních procesů a struktur, zejména teorií tzv. λ-kalkulu. J. Bečvář působil na *Vysoké škole strojní a elektrotechnické* v Liberci.

Na závěr řekněme několik slov o Katedře matematické logiky na MFF UK.[72] Vznikla roce 1968 oddělením od katedry základních matematických disciplín (jež vznikla roku 1962) a v jejím čele stál Petr Vopěnka. Nicméně o dva roky později byla připojena ke Katedře obecných matematických struktur (jež vznikla z katedry základních matematických disciplín), a vznikla tak katedra základních matematických struktur. Ta však byla roku 1975 zrušena; skupina logiků přešla na *Matematický ústav* UK.

V roce 1990 byla pod vedením P. Vopěnky vytvořena katedra filozofie matematiky a přírodních věd, která byla o tři roky později přejmenována na katedru matematické logiky a filozofie matematiky. Roku 2000 byla tato katedra připojena ke Katedře teoretické informatiky, a vznikla tak katedra teoretické informatiky a matematické logiky pod vedením Petra Štěpánka.[73]

[72] Poznamenejme, že Katedra logiky na FF UK byla založena v roce 1957, viz část 5.3.5.
[73] [NS02].

Literatura

[Ber26] Bernays, P., *Axiomatische Untersuchungen des Aussagenkalküls in der "Principia Mathematica"*, Math. Z. **25** (1926), 305–320.

[Ber48] Bernays, P., *A system of axiomatic set theory, VI*, J. Symb. L. **13** (1948), 67–79.

[Bof67] Boffa, M., *Modèles de la théorie des ensembles, associés aux permutations de l'univers*, Cah. rhod. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B **264** (1967), A221–A222.

[BŠ74] Balcar, B. a Štěpánek, P., *Teorie množin*, SPN, Praha, 1974, 2. vyd. MFF UK, Praha, 1980.

[BŠ86] Balcar, B. a Štěpánek, P., *Teorie množin*, Academia, Praha, 1986, 2. vyd. Academia, Praha, 2001.

[Coh66] Cohen, P.J., *Set theory and the continuum hypothesis*, W.A. Benjamin, New York, 1966.

[Čech36] Čech, E., *Bodové množiny*, JČMF, Praha, 1936, 2. vyd. Academia, Praha, 1966; 3. vyd. Academia, Praha, 1974.

[Dos63] Doss, R., *On Gödel's proof that $V = L$ implies the generalized continuum hypothesis*, Notre Dame J. of Formal Logic **4** (1963), 283–287.

[Drb87] Drbohlav, K., *Algebra, logika a teorie množin*, PMFA **32** (1987), 78–85, též Vývoj matematiky v ČSR v období 1945–1985 a její perspektivy (Netuka, I., ed.), Univerzita Karlova, Praha, 1986, pp. 54–69.

[FBL73] Fraenkel, A.A., Bar-Hillel, Y., a Lévy, A., *Foundations of set theory*, North--Holland Publishing Company, Amsterdam, 1973, 1. vyd. Fraenkel, A.A. a Bar-Hillel, Y., *Foundations of set theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958.

[Fel71] Felgner, U., *Models of ZF-set theory*, Springer, Berlin, 1971.

[Fel79] Felgner, U. (ed.), *Mengenlehre*, Darmstadt, AMS, 1979.

[Fer99] Ferreirós, J., *Labyrinth of thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[For87] Forster, T.E., *Permutation models in the sense of Rieger-Bernays*, Z. math. Logik Grund. Math. **33(3)** (1987), 201–210.

[For90] Forster, T.E., *Permutations and stratified formulae – a preservation theorem*, Z. math. Logik Grund. Math. **36(5)** (1990), 385–388.

[For93] Forster, T.E., *A semantic characterization of the well-typed formulas of λ-calculus*, Theoretical Computer Science **110(2)** (1993), 405–418.

[For03] Forster, T.E., *ZF + "Every set is the same size as a wellfounded set"*, J. Symb. L. **68(1)** (2003), 1–4.

[Fuch87] Fuchs, E., *Vznik a vývoj teorie množin, třetí krize matematiky*, Světonázorová výchova v matematice, sborník vybraných referátů z letních škol MPS JČMF (Praha) (Šedivý, J., ed.), JČMF, 1987, pp. 80–123.

[Fuch99] Fuchs, E., *Teorie množin pro učitele*, Masarykova univerzita, Brno, 1999.

[Göd30] Gödel, K., *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatsh. Math. Phys. **37** (1930), 349–360.

[Göd31] Gödel, K., *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I*, Monatsh. Math. Phys. **38** (1931), 173–198.

[Göd40] Gödel, K., *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Annals of Mathematical Studies, No. 3, Princeton University Press, Princeton, 1940, existuje řada dalších vydání.

[Göd53] Gödel, K., *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Annals of Mathematical Studies, No. 3, Princeton University Press, Princeton, 1953.

[Gra80] Grattan-Guinness, I. (ed.), *From the calculus to set theory 1630–1910*, Princeton University Press, Princeton, Oxford, 1980.

[Gra00] Grattan-Guinness, I., *The search for mathematical roots 1970–1940*, Princeton University Press, Princeton, Oxford, 2000.

[HA28] Hilbert, D. a Ackermann, W., *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin, 1928, 2. vyd. Springer, Berlin, 1938; Dover Publications, New York, 1946; 3. vyd. Springer, Berlin, 1949; 4. vyd. Springer, Berlin, 1959; 5. vyd. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1967; 6. vyd. Springer, Berlin, 1972; anglicky *Principles of mathematical logic*, Chelsea Publishing Company, New York, 1950; AMS, Providence, 1999.

[Háj66] Hájek, P., *Syntaktické metody matematické logiky*, PMFA **11** (1966), 22–31.

[Háj76] Hájek, P., *K nedožitým šedesátinám Ladislava Riegra*, ČPM **101** (1976), 417–418.

[HB39] Hilbert, D. a Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik, I, II*, Springer, Wien, 1934–1939, 2. vyd. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1968–1970; rusky *Osnovanija matematiki*, Nauka, Moskva, 1979.

[HH78] Hájek, P. a Havránek, T., *Mechanizing hypothesis formation*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

[Jen67] Jensen, R.B., *Modelle der Mengenlehre*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[Kar67] Karp, C.R., *A proof of the relative consistency of the continuum hypothesis*, Sets, Models, Recursion Theory, Proc. Summer School Math. Logic, Xth Logic Colloquium, 1965 (Leicester), 1967, pp. 1–32.

[Kaw95] Kawahara, Y., *Relational set theory*, Category Theory and Computer Science, Lecture Notes in Comp. Science (Berlin), vol. 953, Springer, 1995, pp. 44–58.

[Koř65] Kořínek, V., *Teorie množin, její vznik a vývoj*, PMFA **10** (1965), 131–160.

[Kre92] Kreisel, G., *On the idea(l) of logical closure*, Annals of Pure and Applied Logic **56(1–3)** (1992), 19–41.

[Kup91] Kuper, J., *An application of non-wellfounded sets to the foundations of geometry*, Z. math. Logik Grund. Math. **37(3)** (1991), 257–264.

[Ler84] Lerch, M., *Příspěvek k nauce o množinách bodů v rovině*, Zprávy o zasedání Královské české společnosti nauk v Praze (1884), 176–178.

[Löw15] Löwenheim, L., *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, Math. Ann. **68** (1915), 169–207.

[LR96] Lazic, R.S. a Roscoe, A.W., *On transition systems and non-well-founded sets*, Annals of the New York Academy of Sciences **806** (1996), 238–264.

[Mal'36] Mal'cev, A.I., *Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik*, Matematičeskij sbornik **1** (1936), 323–336.

[Men56] Mendelson, E., *The independence of a weak axiom of choice. An exposition of the theory of Kurt Gödel*, J. Symb. L. **21** (1956), 350–366.

[MN96] Malina, J. a Novotný, J. (ed.), *Kurt Gödel*, NAUMA, Brno, 1996.

[Mos52] Mostowski, A., *Sentences undecidable in formalized arithmetic*, North--Holland Publishing Company, Amsterdam, 1952.

[Mos54] Mostowski, A., *Der gegenwärtige Stand der Grundlagenforschung in der Mathematik*, Die Hauptreferate des 8. Polnischen Mathematikerkongresses, 1953 (Warschau), Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1954, pp. 11–44.

[Mos69] Mostowski, A., *Constructible sets with applications*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1969, rusky *Konstruktivnyje množestva i ich priloženija*, Mir, Moskva, 1973.

[MS99] Marshall, M.V. a Schwarze, M.G., *Rank in set theory without foundation*, Archive for Math. Logic **38(6)** (1999), 387–393.

[NS02] Netuka, I. a Stiborová, M., *Univerzita Karlova v Praze, Matematicko--fyzikální fakulta*, Karolinum, Praha, 2002.

[Pet31] Petr, K., *Počet integrální*, JČMF, Praha, 1931, 1. vyd. JČMF, Praha, 1915.

[Pet92] Petry, A., *Stratified languages*, J. Symb. L. **57(4)** (1992), 1366–1376.

[PH77] Paris, J.B. a Harrington, L., *A mathematical incompleteness in Peano arithmetic*, Handbook for mathematical logic (Barwise, J., ed.), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1977.

[Pos49] Pospíšil, B., *Nekonečno v matematice*, JČMF, Praha, 1949.

[Rob37] Robinson, R.M., *The theory of classes. A modification of von Neumann's system*, J. Symb. L. **2** (1937), 29–36.

[Rob63] Robinson, A., *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1963, 2. vyd. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1965, 1974, 1986; rusky *Vvedenie v teoriju modelej i metamatematiku algebry*, Nauka, Moskva, 1967.

[Sho67] Shoenfield, J.R., *Mathematical logic*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1967, vydáno též 1973.

[Sko19] Skolem, T., *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit und Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen*, Videnskabsakademiet i Kristiania, Skrifter I, No. 4 (1919), 1–36.

[Sko34] Skolem, T., *Über die Nichtcharakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen*, Fund. Math. **22** (1934), 150–161.

[Soch01] Sochor, A., *Klasická matematická logika*, Karolinum, Praha, 2001.

[Spe57] Specker, E., *Zur Axiomatik der Mengenlehre (Fundierungs- und Auswahlaxiom)*, Z. math. Logik Grund. Math. **3** (1957), 173–210.

[Šed85] Šedivý, J., *Sto let od otištění prvního českého pojednání o množinách*, PMFA **30** (1985), 105–108.

[Ště82] Štěpánek, P., *Matematická logika*, SPN, Praha, 1982.

[Uzq99] Uzquiano, G., *Models of second-order Zermelo set theory*, Bull. Symb. L. **5(3)** (1999), 289–302.

[VH72] Vopěnka, P. a Hájek, P., *The theory of semisets*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1972.

[Vop64a] Vopěnka, P., *Axiome der Theorie endlicher Mengen*, ČPM **89** (1964), 312–317.

[Vop64b] Vopěnka, P., *Nezavisimosť kontinuum-gipotezy*, Comment. Math. Univ. Carol., Suppl. 1 **5** (1964), 1–48.

[Vop79] Vopěnka, P., *Mathematics in the alternative set theory*, Teubner, Leipzig, 1979.

[Web] *Web of Science*, dostupné na `http://www.isiwebofknowledge.com` (20. 6. 2008).

[WM53] Wang, H. a McNaughton, R., *Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles*, Gauthier-Villars, Paris, 1953, vydáno též 1955; rusky *Aksiomatičeskie sistemy teorii množestv*, Izd. inostr. lit., Moskva, 1963.