Jaromír Šimša

Archimédova statika v geometrii

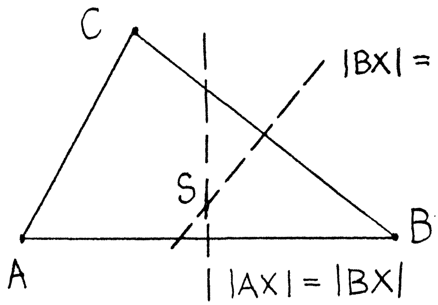
In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Historie matematiky. I. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 19.8.-22.8.1993, Sborník. (Czech). Brno: Jednota českých matematiků a fyziků, 1993. pp. 126–139.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400593

ARCHIMÉDOVA STATIKA V GEOMETRII

Jaromír Šimša

Úvod. Několik základních pouček z geometrie trojúhelníka je následujícího typu: *Tři přímky, které jsou jistým popisem přiřazeny danému trojúhelníku, procházejí jedním bodem.* Taková jsou např. tvrzení o průsečících těžnic, výšek, os stran či os vnitřních úhlů. Budeme-li je posuzovat z hlediska metod, jimiž se dokazují, pak k nejsnadnějším patří poučka o osách stran. Leží-li totiž bod X na ose strany AB trojúhelníka ABC, pak $|AX| = |BX|$ (obr. 1); leží-li navíc i na ose strany BC, pak $|BX| = |CX|$. Pro průsečík S os stran AB a BC tedy platí $|AS| = |BS| = |CS|$, rovnost $|AS| = |CS|$ ale znamená, že bod S leží i na ose třetí strany trojúhelníka, strany AC.



Obr. 1

Jistě si uvědomíme, že podobně snadný je i důkaz tvrzení o průsečíku os vnitřních úhlů. Tyto osy jsou totiž množiny bodů, které můžeme snadno popsat s pomocí vzdáleností od stran trojúhelníka (u os stran byly ve hře vzdálenosti od vrcholů trojúhelníka). Podobný množinový popis nám ale schází u dalších významných přímek, jakými jsou například spojnice vrcholů trojúhelníka se středy protějších stran, tedy *těžnice*[1]. Tvrzení o těžnicích proto obvykle dokazujeme jinak, nejčastěji na základě vlastností středních příček trojúhelníka a stejnolehlosti (viz [K], kde je uveden i jiný pěkný důkaz, který využívá pouze vlastnosti obsahů trojúhelníků). Vývoj školské matematiky zapříčinil, že historicky první důkaz věty o těžnicích trojúhelníka, který podal Archimédes, je současnou matematickou veřejností téměř zapomenut. Připomíná se nám však v samotném názvu *těžnice*, odvozeném od slova *tíha*. Archimédes totiž dospěl ke geometrickým pojmům těžnice a těžiště cestou abstrakce od tíhy (či, chcete-li, hmotnosti) konkrétních těles. Objevil přitom základní zákony statiky. Podívejme se proto spolu, jak se taková (ve své podstatě fyzikální) metoda může uplatnit v geometrii. Určitě přitom oceníme, jak některé intuitivně neprůhledné

[1] Později ukážeme, že i pro těžnice takový popis existuje.

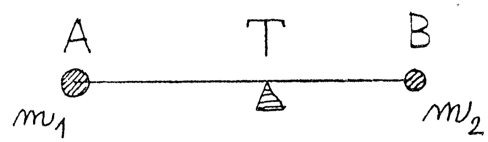
geometrické výsledky mají přirozenou fyzikální interpretaci. Na elementární úrovni se tak přesvědčíme, že symbióza matematiky a fyziky je *oboustranně* užitečný proces.

Archimédovy axiomy. Poznatky o těžištích konkrétních těles, tj. místech, kde působí jejich tíha, byly lidem známy od pradávna. Teprve Archimédes však tyto jednotlivé poznatky systematizoval a extrahoval jejich podstatu do jednoduchých statických zákonů. Tyto zákony považoval za neměnné a univerzální. Navíc požadoval, aby se veškeré výpočty a úvahy opíraly pouze o ně. Dnes bychom řekli, že Archimédes postupoval přísně vědecky: vybudoval statiku jako *axiomatickou teorii.*

Dříve než si zmíněné axiomy o těžištích uvedeme, poznamenejme, že Archimédes ve svých úvahách důvtipně kombinoval prvky diskrétní a infinitezimální povahy. (Sami se o tom za chvíli přesvědčíme na příkladu těžiště „hmotného“ trojúhelníka.) Uvažoval například o hmotných úsečkách složených z hmotných bodů apod. Budeme proto raději mluvit o hmotných *soustavách* místo *tělesech*. Každou přímku, která prochází těžištěm hmotné soustavy, nazveme *těžnicí* dané soustavy.

Axiom I. (Existence a jednoznačnost) Každá hmotná soustava má právě jedno těžiště.

Axiom II. (Zákon páky) Těžiště dvojice hmotných bodů A, B o hmotnostech m_1, m_2 je ten bod T úsečky AB, pro který platí $m_1|AT| = m_2|BT|$ (obr. 2).

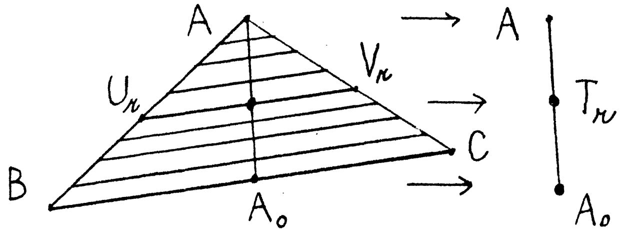


Obr. 2

Axiom III. (Redukční princip) Těžiště hmotné soustavy se nezmění, zaměníme-li libovolnou její část (tj. podsoustavu) jedním hmotným bodem, splývajícím s těžištěm této podsoustavy a majícím celou její hmotnost.

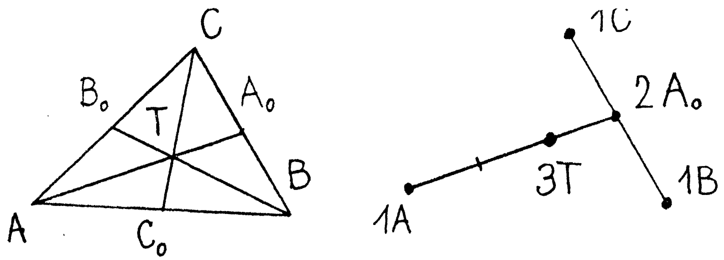
Zkusme se nyní ve svých myšlenkách přenést do Archimédova starého Řecka, do dob, kdy se ještě tak striktně nerozlišovala matematika od fyziky, a podívejme se, jaké geometrické výsledky se dají z uvedených tří axiomů odvodit. Teprve na závěr si řekneme, jak se naše „hmotnostní“ úvahy dají formalizovat tak, aby se vyhovělo současným požadavkům na exaktnost matematických teorií.

Těžiště trojúhelníka. Představme si, že z tenké homogenní destičky je vyroben model obecného trojúhelníku ABC. Abychom určili jeho těžiště, postupujme jako Archimédes a rozložme celý trojúhelník na velké množství tenkých „pásků“ rovnoběžných se stranou BC. V „limitním“ případě jsou tyto pásky hmotné úsečky $U_r V_r$ (obr. 3).



Obr. 3

Protože každá úsečka $U_r V_r$ je homogenní, je jejím těžištěm střed této úsečky[2], který označíme T_r. Podle Axiomu III můžeme každou úsečku $U_r V_r$ zaměnit hmotným bodem T_r, jehož hmotnost je přímo úměrná délce úsečky $U_r V_r$. Proto těžiště T našeho modelu trojúhelníka ABC s splývá těžištěm soustavy hmotných bodů T_r, které vyplňují spojnici vrcholu A se středem A_0 strany BC. To ale znamená, že bod T leží na *těžnici* AA_0 (blíže konci A_0, neboť u tohoto konce mají body T_r větší hmotnost.) Zopakujeme-li naši úvahu pro rozklad trojúhelníka na úsečky rovnoběžné se stranou AB respektive AC, dojdeme k závěru: Bod T leží na všech třech těžnicích AA_0, BB_0, CC_0 (obr. 4 vlevo). Jinými slovy, *tyto tři úsečky procházejí jedním bodem.*



Obr. 4

Zdůrazněme, že předchozím výkladem jsme ještě neodpověděli na otázku, v jakém poměru se těžnice trojúhelníka navzájem dělí. Vyložme, jak na ni našel odpověď Archimédes: *Místo destičky ve tvaru trojúhelníka ABC uvažujme soustavu tří hmotných bodů A, B, C o téže hmotnosti* (rovné například jednotce). Takovou soustavu $\mathcal{S}$ budeme zapisovat následujícím způsobem

$$\mathcal{S} = \{1A,\, 1B,\, 1C\},$$

kde kladné číslo před označením bodu značí jeho hmotnost. Zaměníme-li podle Axiomu III dvojici bodů $1B$, $1C$ hmotným bodem $2A_0$, zjistíme že těžiště T soustavy $\mathcal{S}$ leží na úsečce AA_0 a přitom (podle zákona páky) $|AT| : |A_0T| = 2 : 1$ (obr. 4 vpravo). Podobně redukcí na soustavy $\{1B, 2B_0\}$ respektive

[2] Je-li hmotná soustava středově souměrná podle bodu X, je bod X jejím těžištěm. Tato vlastnost plyne z Axiomu III, neboť každou dvojici souměrných bodů o téže hmotnosti m lze zaměnit těžištěm této dvojice (s hmotností $2m$), kterým je však podle zákona páky právě bod X. Podobné tvrzení platí o soustavách, které mají osu (popř. rovinu) souměrnosti.

$\{1C, 2C_0\}$ dospějeme k závěru: *Těžiště soustavy S leží na všech třech těžnicích AA_0, BB_0, CC_0 a dělí každou z nich v poměru* $2:1$. Zdůrazněme, že toto tvrzení jsme získali jednoduchou úvahou o vhodné soustavě S *nezávisle* na předchozím výkladu o modelu trojúhelníka, sestaveném z hmotných úseček. Dodejme ještě množinový popis těžnice, který jsme slíbili v poznámce pod čarou v úvodu příspěvku: Těžnice AA_0 je množina těžišť těch hmotných soustav trojic bodů

$$\{pA, qB, rC\},$$

ve kterých $q = r$. V dalších odstavcích si ukážeme, jaké další poznatky o obecném trojúhelníku lze získat jinými vhodnými výběry trojic hmotností (p, q, r). (Pro lepší přehlednost budeme hmotnost bodu X zpravidla značit m_X.)

Úkol 1. Úvahou o čtveřici hmotných bodů

$$\{1A, 1B, 1C, 1D\}$$

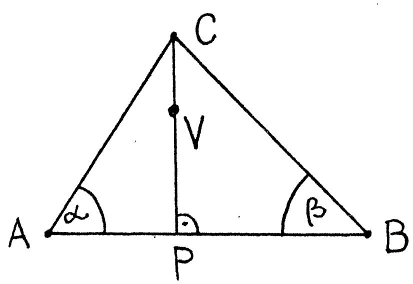
získejte základní poznatky o těžišti obecného čtyřstěnu $ABCD$. Nezapomeňte přitom na redukované soustavy typu

$$\{2E, 2F\},$$

kde E a F jsou středy libovolné dvojice protilehlých hran čtyřstěnu $ABCD$.

Úkol 2. Je těžiště modelu obecného čtyřúhelníka vyrobeného z homogenního materiálu totožné s těžištěm čtveřice jeho vrcholů o téže hmotnosti? Pokud ne, charakterizujte ty čtyřúhelníky, pro které je odpověď na tuto otázku kladná.

Ortocentrum trojúhelníka. Nechť CP je výška ostroúhlého trojúhelníka ABC s vnitřními úhly α, β, γ (obr. 5).



Obr. 5

Na rovnost

$$|AP| \cdot \operatorname{tg} \alpha = |BP| \cdot \operatorname{tg} \beta \,(= |CP|)$$

se můžeme podívat jako na zákon páky pro dvojici hmotných bodů A, B o hmotnostech $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$. Zvolíme-li proto hmotnosti vrcholů A, B, C

$$m_A = \operatorname{tg}\alpha \qquad m_B = \operatorname{tg}\beta \qquad m_C = \operatorname{tg}\gamma\,,$$

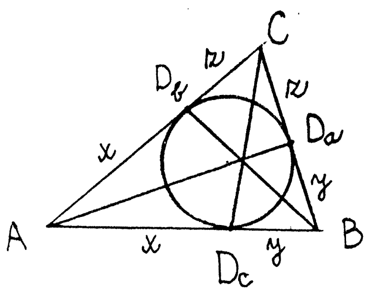
usoudíme, že těžiště této trojice hmotných bodů leží na *každé* ze tří výšek trojúhelníka ABC. Posuďte sami, jak efektně jsme dokázali netriviální tvrzení o tom, že výšky libovolného[3] trojúhelníka procházejí jedním bodem, zvaným *ortocentrem* daného trojúhelníka. (Čtyři další důkazy najdete v [K].) Navíc můžeme lehce doplnit, v jakém poměru se výšky navzájem dělí. Protože ortocentrum V je těžiště dvojice bodů

$$\{\operatorname{tg}\gamma\, C, (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)P\},$$

plyne ze zákona páky úměra

$$|CV| : |PV| = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) : \operatorname{tg}\gamma .$$

Gergonnův[4] bod. V libovolném trojúhelníku ABC sestrojme vepsanou kružnici a označme D_a, D_b, D_c body, ve kterých se dotýká stran trojúhelníku (obr. 6):



Obr. 6

Obvod trojúhelníku ABC je tak rozdělen na tři dvojice shodných úseček, jejichž délky označíme takto:

$$|AD_b| = |AD_c| = x \quad |BD_c| = |BD_a| = y \quad |CD_a| = |CD_b| = z .$$

Zvolíme-li proto hmotnosti vrcholů trojúhelníka

$$m_A = \frac{1}{x} \qquad m_B = \frac{1}{y} \qquad m_C = \frac{1}{z} ,$$

usoudíme, že bod D_a je těžištěm dvojice bodů B, C, bod D_b je těžištěm dvojice bodů A, C a konečně bod D_c je těžištěm dvojice bodů A, B. Odtud plyne, že těžiště trojice vrcholů A, B, C je společným bodem úseček AD_a, BD_b a CD_c. Dokázali jsme tak toto tvrzení: *Spojnice vrcholů libovolného trojúhelníka s body dotyku vepsané kružnice na protějších stranách procházejí jedním bodem.* Tento bod se nazývá Gergonnův bod daného trojúhelníka.

[3] V případě tupoúhlého trojúhelníka je jedna z hmotností vrcholů záporná, v případě pravoúhlého trojúhelníka nekonečně veliká.

[4] (čti „žergonův“) Joseph Diez Gergonne, 1771-1859, francouzský astronom a matematik.

Úkol 3. Libovolnému trojúhelníku lze *připsat* tři kružnice tak, že každá z nich se dotýká jedné strany trojúhelníka a prodloužení dvou ostatních stran. Dokažte, že spojnice vrcholů trojúhelníka s body dotyku připsaných kružnic na protějších stranách procházejí jedním bodem. Tento bod se nazývá Nagelův[5] bod daného trojúhelníku. (Návod: Vyjádřete délky šesti úseček, na které je rozdělen obvod trojúhelníka vrcholy a body dotyku, s pomocí délek stran trojúhelníka. Tak zjistíte, že jde opět o tři dvojice shodných úseček.)

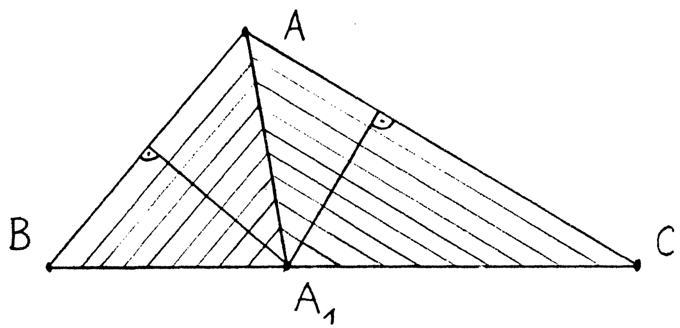
Střed vepsané kružnice. Uvažujme opět obecný trojúhelník ABC a položme si nyní otázku, kde leží těžiště O trojice jeho vrcholů o hmotnostech

$$m_A = |BC| \qquad m_B = |AC| \qquad m_C = |AB|.$$

(Odpověď budeme potřebovat v následujícím odstavci.) Bod O je průsečík úseček AA_1, BB_1 a CC_1, kde A_1, B_1, C_1 jsou ty body stran BC, AC, AB, pro které (podle zákona páky) platí

$$\frac{|BA_1|}{|CA_1|} = \frac{|BA|}{|CA|} \qquad \frac{|CB_1|}{|AB_1|} = \frac{|CB|}{|AB|} \qquad \frac{|AC_1|}{|BC_1|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Vzhledem k tomu, že zlomek $\frac{|BA_1|}{|CA_1|}$ udává poměr obsahů trojúhelníků BA_1A a CA_1A (obr. 7), plyne z první rovnosti, že tyto dva trojúhelníky mají shodné výšky na strany AB a AC.



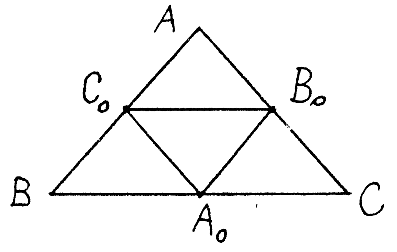
Obr. 7

Jinými slovy, bod A_1 má od stran AB a AC stejnou vzdálenost, takže přímka AA_1 je osa úhlu BAC. To znamená, že *bod O je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.*

Těžiště obvodu trojúhelníka. Na základě předchozího výsledku teď snadno odpovíme na otázku, kde leží těžiště tenkého homogenního drátu, který je vytvarován do obvodu daného trojúhelníku ABC. Jde vlastně o soustavu tří homogenních hmotných úseček AB, AC a BC o hmotnostech, které jsou přímo

[5](čti „nagelův") Christian August Nagel, 1821-1903, německý geodéz a matematik.

úměrné jejich délkám. Těžiště každé této úsečky leží v jejím středu. Označme tyto středy A_0, B_0 a C_0 (obr. 8).



Obr. 8

Podle Axiomu III můžeme naši soustavu tří hmotných úseček zaměnit trojicí bodů A_0, B_0, C_0 o hmotnostech

$$m_{A_0} = k \cdot |BC| \qquad m_{B_0} = k \cdot |AC| \qquad m_{C_0} = k \cdot |AB| \,,$$

kde $k > 0$ je libovolná konstanta. (Poznamenejme na tomto místě, že těžiště hmotné soustavy se nezmění, vynásobíme-li hmotnosti všech jejich prvků stejným kladným číslem. Vysvětlete sami, jak tato vlastnost plyne z Archimédových axiomů.) Zvolíme-li $k = \frac{1}{2}$, dostaneme trojici vrcholů trojúhelníka $A_0B_0C_0$ o hmotnostech rovných délkám protějších stran. Podle předchozího příkladu je hledaným těžištěm *střed kružnice vepsané trojúhelníku* $A_0B_0C_0$.

Barycentrické souřadnice. Zkušenosti z předchozích příkladů nám napovídají, že vhodnou volbou hmotností vrcholů daného trojúhelníka ABC můžeme získat soustavu tří hmotných bodů, jejímž těžištěm je předem zvolený bod X tohoto trojúhelníka. Důkaz je snadný: označíme-li Y průsečík přímky AX se stranou BC, pak bod X je těžištěm trojice hmotných bodů A, B a C, právě když pro jejich hmotnosti platí

$$m_B : m_C = |CY| : |BY| \quad \text{a zároveň} \quad m_A : (m_B + m_C) = |YX| : |AX| \,.$$

(Vysvětlete sami.) Je dobře vidět, že taková trojice (m_A, m_B, m_C) vždy existuje a je pro daný bod X jediná, nerozlišujeme-li trojice (m_A, m_B, m_C) a (km_A, km_B, km_C), kde $k > 0$ je libovolná konstanta. Doplníme-li „normalizační“ podmínku

$$m_A + m_B + m_C = 1 \,,$$

stane se přiřazení $X \mapsto (m_A, m_B, m_C)$ jednoznačné. Čísla m_A, m_B, m_C se pak nazývají *barycentrické*[6] souřadnice bodu X. Zavedl je poprvé německý matematik A. F. Möbius (1790-1868), který s pomocí těchto souřadnic podal výklad projektivní geometrie. Zdůrazněme, že barycentrická soustava souřadnic je závislá na volbě výchozího trojúhelníka ABC. Je nám rovněž jasné, že těmito souřadnicemi můžeme popisovat nejen vnitřní body trojúhelníka ABC, ale

[6] Řecké slovo $\beta\alpha\rho\iota\sigma$ (čti „baris“) značí *tíha*.

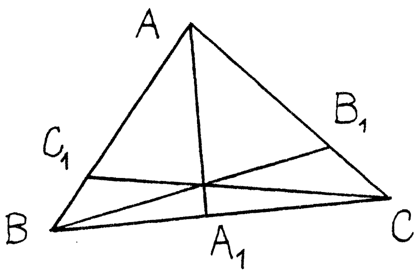
všechny body jeho roviny (na obvodu trojúhelníka ABC je aspoň jedna ze souřadnic m_A, m_B, m_C nulová, vně trojúhelníka ABC – záporná). V našem století našly barycentrické souřadnice uplatnění v algebraické topologii.

Úkol 4. Který význačný bod je těžištěm trojice vrcholů trojúhelníka ABC o hmotnostech

$$m_A = \sin 2\alpha \qquad m_B = \sin 2\beta \qquad m_C = \sin 2\gamma$$

při obvyklém označení vnitřních úhlů?

Variace hmot. Víme už, že každou trojici příček AA_1, BB_1, CC_1, které procházejí jedním bodem trojúhelníka ABC (obr. 9), můžeme interpretovat jako těžnice (tj. přímky procházející těžištěm) soustavy vrcholů A, B, C s vhodnými hmotnostmi m_A, m_B, m_C.



Obr. 9

Je jasné, že každá *změna* těchto hmotností (přesněji řečeno, změna poměrů $m_A : m_B : m_C$) vyvolá změnu těchto těžnic. Pro nás je teď na tom zajímavé to, že některým změnám (říkejme *variacím*) hmotností odpovídají změny těžnic s jasnou geometrickou interpretací. Jakmile takovou interpretaci objevíme, získáme okamžitě pěkný geometrický výsledek. Vysvětlíme to na následujícím příkladu.

Ze zákona páky plyne toto pravidlo: je-li bod T těžiště soustavy dvou bodů $\{pA, qB\}$ a bod T' těžiště soustavy $\{qA, pB\}$, pak body T a T' jsou souměrné podle středu úsečky AB. Dodejme, že těžiště druhé soustavy $\{qA, pB\}$ je totožné s těžištěm soustavy $\{\frac{1}{p}A, \frac{1}{q}B\}$ (srovnej poměr hmotností), která vznikne z první soustavy $\{pA, qB\}$ „převrácením" (tj. zobrazením $x \mapsto \frac{1}{x}$) hmotností jejích prvků. Víme proto, jaká změna těžnic nastane při přechodu od trojice hmotností (m_A, m_B, m_C) k nové trojici (m'_A, m'_B, m'_C) určené předpisem

$$m'_A = \frac{1}{m_A} \qquad m'_B = \frac{1}{m_B} \qquad m'_C = \frac{1}{m_C}\,.$$

Dostáváme tak následující výsledek:

Nechť AA_1, BB_1, CC_1 jsou tři příčky trojúhelníka ABC, které procházejí jedním bodem. Nechť bod A_2 je souměrný s bodem A_1 podle středu strany BC, bod B_2 je souměrný s bodem B_1 podle středu strany AC a bod C_2 je souměrný s bodem C_1 podle středu strany AB. Potom příčky AA_2, BB_2, CC_2 rovněž procházejí jedním bodem.

Úkol 5. Zjistěte, jaký geometrický význam má variace hmot

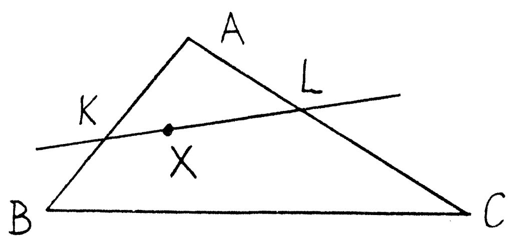
$$m'_A = \frac{a^2}{m_A} \qquad m'_B = \frac{b^2}{m_B} \qquad m'_C = \frac{c^2}{m_C}\,,$$

kde $a = |BC|$, $b = |AC|$ a $c = |AB|$.

Štěpení a lepení. Nechť bod X je těžištěm soustavy tří hmotných bodů

$$\mathcal{S} = \{pA,\, qB,\, rC\}\,.$$

Dosud jsme zkoumali jen ty těžnice soustavy $\mathcal{S}$, které procházejí jedním z vrcholů A, B nebo C. Chceme-li pracovat například s těžnicí, které protíná strany AB a AC ve vnitřních bodech K a L (obr. 10),



Obr. 10

je možné „rozštěpit" hmotný bod $\{pA\}$ na dva body $\{p_1A\}$ a $\{p_2A\}$ tak, aby bod K byl těžištěm dvojice $\{p_1A,\, qB\}$, aby bod L byl těžištěm dvojice $\{p_2A,\, rC\}$ a aby samozřejmě platilo $p = p_1 + p_2$. Někdy je výhodný i opačný postup: dva nebo více hmotných bodů, které „sídlí" ve stejném místě, dohromady „slepit". Uveďme jednu ukázku.

Příklad. Dokažte, že každá přímka, která ve stejném poměru dělí obsah a obvod daného trojúhelníka, prochází středem kružnice jemu vepsané.

Řešení: Předpokládejme, že některá přímka má popsanou vlastnost a protíná strany AB a AC zadaného trojúhelníka ABC v bodech D a E (obr. 11). Označme strany trojúhelníka obvyklým způsobem a, b, c a odvoďme, jaká je závislosti mezi délkami $x = |AE|$ a $y = |AD|$. Rovnost poměrů

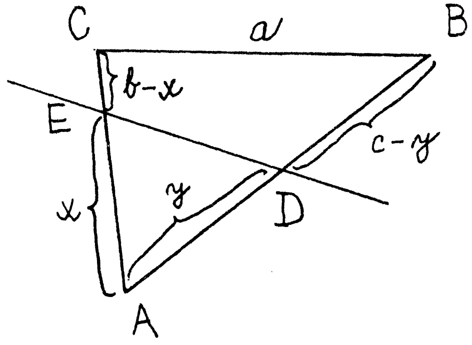
$$\frac{S(AED)}{S(ABC)} = \frac{|AE| + |AD|}{|AC| + |AB| + |BC|}$$

($S(\mathcal{T})$ značí obsah $\mathcal{T}$) můžeme přepsat ve tvaru

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot xy \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2}\cdot bc \cdot \sin\alpha} = \frac{x+y}{a+b+c}\,,$$

což je ekvivalentní s rovností

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a+b+c}{bc}\,.$$



Obr. 11

Zvolme hmotnosti bodů B a C takto: $m_B = b$ a $m_C = c$. (Proč volíme takové hmotnosti pochopíte, podíváte-li se zpět na odstavec o středu kružnice vepsané.) Podle zákona páky je bod D těžištěm dvojice $\{bB,\ a_1A\}$, právě když číslo a_1 splňuje podmínku $a_1y = b(c-y)$, neboli

$$a_1 = \frac{b(c-y)}{y}.$$

Podobně bod E je těžištěm dvojice $\{cC,\ a_2A\}$, právě když pro číslo a_2 platí

$$a_2 = \frac{c(b-x)}{x}.$$

Vzhledem k odvozené závislosti mezi čísly x a y se lehce ověří, že čísla a_1 a a_2 definovaná předchozími rovnostmi splňují podmínku $a_1+a_2 = a$. To jsme právě potřebovali, neboť naším úmyslem je hmotné body a_1A a a_2 slepit. Protože tedy platí

$$\{bB,\ a_1A\} \cup \{cC,\ a_2A\} = \{aA,\ bB,\ cC\}$$

(jistě je pochopitelné, co znamená sjednocení disjunktních hmotných soustav), můžeme na základě Axiomu III tvrdit, že těžiště soustavy $\{aA,\ bB,\ cC\}$ (což je, jak víme, střed O kružnice vepsané) splývá s těžištěm dvojice bodů E, D o hmotnostech

$$m_D = a_1 + b \qquad m_E = a_2 + c\ .$$

Tak jsme dokázali, že střed O leží na přímce DE.

Úkol 6. Metodou hmotných bodů dokažte, že v libovolném trojúhelníku ABC platí: Osa vnitřního úhlu při vrcholu A, střední příčka trojúhelníka rovnoběžná se stranou AC a spojnice dvou bodů, ve kterých se vepsaná kružnice dotýká stran AC a BC, procházejí jedním bodem.

Shrnutí. Předchozí příklady ukazují, že některé geometrické věty je možno získat úvahou o vhodných soustavách hmotných bodů. Zamyslíme-li se nad tím, co mají tyto příklady společné, zjistíme, že všechny jsou založeny na jednoduché (až geniální) myšlence: *K těžišti celé soustavy se můžeme „dostat“*

více způsoby, a to tak, že budeme uplatňovat redukční princip z Axiomu III k různým podsoustavám výchozí soustavy. Této myšlenky si byl Archimédes dobře vědom. V jednom dopise Eratosthenovi napsal (přeloženo podle [BB]):

> *Považoval jsem za nutné Ti napsat, abych Ti vyložil zvláštní metodu, která Ti umožní objevovat některé matematické věty. Jsem přesvědčen, že tato metoda nebude o nic méně užitečná ani při důkazu těchto vět.*

Archimédes tedy správně vytušil, že metoda hmotných bodů není pouhá pomůcka pro objevování vět, ale že tato metoda v sobě skrývá i myšlenkový potenciál, který bude možné rozvinout dokonalé matematické teorie. (Za dob Archiméda byla jedinou takovou dokonalou teorií ta, kterou svými *Základy* vytvořil Eukleides.) Tato Archimédova představa se naplnila až v novověku se vznikem vektorové algebry. Popišme nyní, jak taková teorie vypadá[7].

Formalizace. Hmotný bod v n-rozměrném eukleidovském prostoru, který budeme značit E_n, je libovolná uspořádaná dvojice (m, A), kde m je reálné číslo a A je bod prostoru E_n. Není nutné předpokládat, že číslo m, které nazveme hmotností bodu A, je kladné. Připouštíme tedy body s nulovou i zápornou hmotností[8]. Je-li

$$\mathcal{S} = \{(m_1, A_1), (m_2, A_2), \dots, (m_N, A_N)\}$$

libovolná konečná soustava hmotných bodů v E_n, pak bod $T \in E_n$ nazveme jejím těžištěm, pokud

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \overrightarrow{TA_k} = \overrightarrow{0}\,.$$

Vidíme, že taková definice nezávisí na pořadí, v jakém jsou prvky $\mathcal{S}$ zapsány. Není rovněž nutné, aby body A_k byly různé, což umožňuje hmotné body „štěpit“ nebo naopak „slepovat“. Z následující věty plyne, že každá soustava $\mathcal{S}$ sestavená jen z bodů kladných hmotností má právě jedno těžiště (Archimédův Axiom I).

Věta 1. *Těžiště T soustavy $\mathcal{S}$ existuje a je jediné, je-li součet hmotností všech jejích bodů různý od nuly. Poloha těžiště T je pak určena rovností*

$$\left(\sum_{k=1}^{N} m_k\right) \cdot \overrightarrow{PT} = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \overrightarrow{PA_k}\,,$$

---

[7] Musím vyjádřit lítost nad tím, že velký rozsah učiva a časová tíseň na všech současných školách (od základních po vysoké) nutí učitele předkládat žákům abstraktní, formálně dokonalé teorie, které nevystihují historický vývoj dané disciplíny a které, což je závažnější, jsou pro žáky mnohdy nezáživné až nestravitelné.

[8] Význam mají i situace, kdy hmotnosti bodů jsou komplexní čísla, viz [BB].

kde P je libovolně zvolený bod prostoru E_n. (Bod T pochopitelně na volbě bodu P nezávisí.)

Důkaz Věty 1 je snadný: Protože $\overrightarrow{TA_k} = \overrightarrow{PA_k} - \overrightarrow{PT}$, je vidět, že definiční rovnost (*) je ekvivalentní s rovností z formulace Věty 1. Je-li součet všech hmotností různý od nuly, lze z této rovnosti vypočíst

$$\overrightarrow{PT} = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \overrightarrow{PA_k}}{\sum_{k=1}^{N} m_k},$$

takže těžiště T existuje a je jediné. Tím je celý důkaz hotov.

Je jasné, že definice (*) pro dvojici hmotných bodů

$$m_1 \cdot \overrightarrow{TA_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{TA_2} = \overrightarrow{0}$$

je vektorovým zápisem zákona páky, který jsme uvedli jako Axiom II. Zbývá ověřit redukční princip z Axiomu III. Zřejmě stačí ukázat, že těžiště T libovolné soustavy $\mathcal{S}$ s výše uvedeným popisem je stejné jako těžiště redukované soustavy

$$\mathcal{S}' = \{(m', T'), (m_{r+1}, A_{r+1}), (m_{r+2}, A_{r+2}), \ldots, (m_N, A_N)\},$$

kde T' je těžiště soustavy prvních r bodů z $\mathcal{S}$ a m' součet jejich hmotností. To je ale snadné: pro tuto soustavu r bodů použijeme dokázanou Větu 1, přitom za bod P zvolíme bod T. Dostaneme rovnost

$$m' \cdot \overrightarrow{TT'} = \left(\sum_{k=1}^{r} m_k\right) \cdot \overrightarrow{TT'} = \sum_{k=1}^{r} m_k \cdot \overrightarrow{TA_k},$$

podle které můžeme nahradit prvních r sčítanců na levé straně (*) a dostat tak ekvivalentní rovnost

$$m' \cdot \overrightarrow{TT'} + \sum_{k=r+1}^{N} m_k \cdot \overrightarrow{TA_k} = \overrightarrow{0},$$

která podle definice (*) znamená právě to, že bod T je těžištěm soustavy $\mathcal{S}'$.

S pomocí aparátu vektorové algebry jsme tedy definovali pojem těžiště (konečných) soustav hmotných bodů a dokázali jsme platnost Archimédových axiómů. *Tím se stal jeho „hmotnostní“ přístup ke geometrickým situacím, který jsme ilustrovali předchozími příklady, z hlediska požadavků, kladených dnes na fundamenty matematických teorií, exaktní.*

Cévova[9] věta. Při výběru příkladů jsme se většinou omezili na situace, při kterých stačilo nalézt vhodnou *trojici* hmotných bodů; vícebodové soustavy

[9] (čti „čevova“) Giovanni Céva, 1648-1734, italský inženýr a matematik.

jsme uvedli jen Úkolech 1 a 2. Tvrzení o těžišti trojice hmotných bodů je skryto ve známé a užitečné Cévově větě: *Příčky AA_1, BB_1 a CC_1 libovolného trojúhelníku ABC procházejí jedním bodem (obr. 9), právě když platí rovnost*

$$\text{(C)} \qquad \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1 .$$

Důkaz Archimédovou metodou: Procházejí-li příčky AA_1, BB_1 a CC_1 bodem, který je těžištěm trojice vrcholů A, B, C o hmotnostech m_A, m_B, m_C, pak podle zákonu páky platí

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{m_B}{m_A} \qquad \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{m_C}{m_B} \qquad \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{m_A}{m_C} .$$

Odtud plyne rovnost (C). Obráceně, platí-li (C), je vhodné zvolit hmotnosti vrcholů například takto:

$$m_A = 1 \qquad m_B = \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \qquad m_C = \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|}$$

Díky (C) jsou pak rovnosti poměrů z první části důkazu opět splněny. To ale znamená, že příčky AA_1, BB_1 a CC_1 procházejí jedním bodem, a to těžištěm trojice vrcholů A, B, C se zvolenými hmotnostmi.

Dodejme na závěr, že Cévova věta se obvykle formuluje pro obecnější situaci, kdy body A_1, B_1, C_1 jsou libovolné body přímek BC, CA, CB (různé od bodů A, B, C). Pak je třeba v rovnosti (C) zaměnit poměry délek úseček dělicími poměry trojic bodů (viz [ŠV], kde je uveden i odlišný důkaz Cévovy věty, založený na skládání stejnolehlostí). V této situaci je v předchozím důkazu zapotřebí volit hmotnosti vrcholů m_A, m_B a m_C z oboru kladných i záporných čísel.

LITERATURA

[BB] Balk M. B. a Boltjanskij V. G., *Geometrija mass*, Nauka, Moskva, 1987.

[K] Kuřina F., *Umění vidět v matematice*, SPN, Praha, 1990.

[P] Prasolov V. V., *Zadači po planimetrii*, díl I a II, Nauka, Moskva, 1986.

[ŠV] Švrček J. a Vanžura J., *Geometrie trojúhelníka*, SNTL, Praha, 1988.