Ján Čižmár

Začiatky a formovanie základov n-rozmernej geometrie

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v 19. století. Sborník přednášek z 15. letní školy Historie matematiky, Vyškov, 26.-30.8.1994. (Slovak). Praha: Prometheus, 1996. pp. 56–81.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400577

HERMANN GRASSMANN

(1809 – 1877)

ZAČIATKY A FORMOVANIE ZÁKLADOV n-ROZMERNEJ GEOMETRIE (1840 – 1870)

JÁN ČIŽMÁR

Teória konečnorozmerných vektorových a afinných priestorov nad poľom reálnych čísel tvorí v súčasnosti štandardný obsah vysokoškolskej výučby matematiky v nižších ročníkoch na fakultách špeciálneho i technického zamerania. Nezriedka sa v tejto výučbe nerešpektujú v náležitej miere problémy psychologického a filozofického charakteru, súvisiace s používaním geometrickej terminológie dvoj- a trojrozmerného euklidovského priestoru na algebrické objekty, ktoré sú v matematike prirodzeným rozšírením objektov analytického modelu euklidovskej roviny a (trojrozmerného) euklidovského priestoru. Tieto problémy nie sú zanedbateľné; odrážajú v skratke zložitosť ciest, ktorými sa matematika 19. storočia prepracúvala k n-rozmernej analytickej geometrii v situácii, keď vývoj technických prostriedkov algebry značne predstihol konzervativizmus geometrického myslenia. Hlavný problém je filozofickej povahy a nestratil aktuálnosť dodnes: školské vzdelávanie a výchova i komplex mimoškolských vplyvov vedie k chápaniu euklidovskej geometrie ako jediného adekvátneho modelu reálneho priestoru, ktorého rozmer je charakterizovaný číslom 3. Prekonanie tejto číselnej bariéry a zvládnutie základov n-rozmernej geometrie pre ľubovoľné konečné n vedie spätne k pochopeniu euklidovskej geometrie ako matematickej teórie ideálnych objektov, ktorá nie je jednoduchou abstrakciou reálneho priestoru. Historicky trval tento proces okolo troch desaťročí (1840–1870) a plné udomácnenie jeho výsledkov v povedomí širokej matematickej obce si vyžiadalo ďalšie 3-4 desaťročia. K všeobecnému zaradeniu n-rozmernej geometrie ako štandardného vysokoškolského učiva prišlo až v druhej polovici, presnejšie azda až v poslednej tretine nášho storočia.

Zámerom tohto článku je predostrieť čitateľovi obraz postupného vzniku základných pojmov n-rozmernej geometrie a načrtnúť aj rad prekážok, cez ktoré sa musela presadiť ako plnoprávna matematická disciplína. Zamýšľaný rozsah neumožňuje zmieniť sa podrobne o tých oblastiach n-rozmernej geometrie, ktorých zárodky sa síce utvorili v sledovanom období, ale intenzívny rozvoj na samostatné disciplíny je až dielom neskorších desaťročí. Typickým príkladom takéhoto odvetvia je riemannovská geometria, ktorá sa v 20. storočí rozvinula na jednu z najvýznamnejších častí modernej geometrie.

I. Predhistória

1. Geometrická algebra a jej pokračovanie v stredoveku

Prvé zárodky systematického pomenúvania algebrických objektov geometrickými termínmi sa objavujú v starovekej gréckej matematike v pytagorovskej škole už v 6. st. pr. n. l. Bezprostredná spojitosť medzi špeciálnymi typmi čísel a geometrickými útvarmi našla výraz v konštrukcii *figurálnych čísel*, t.j. čísel predstaviteľných rovinnými mnohouholníkmi a priestorovými mnohostenmi. Čísla dostávali názvy zhodné s označením geometrických útvarov, ktorými boli čísla reprezentované: číslo tvaru n^2 (pre prirodzené číslo $n > 1$) sa nazývalo *tetragonos* (štvoruholník, štvorec, štvorcový), číslo tvaru n^3 *kybos* (kocka, kockový); štvorcové číslo sa nazývalo aj *dynamis* (sila, moc, mocnosť). Spôsob tvorby vyšších mocnín veličiny naznačuje Herónovo pomenovanie štvrtej mocniny názvom *dynamodynamis* (štvorco-štvorec) v spise Metrika v 1. st. n. l. Diofantos (okolo r. 250 n. l.) v knihe Aritmetika (Arithmetika) pomenúva prvých šesť mocnín neznámej; okrem už známych mocnín sa piata mocnina nazýva *dynamokybos* (štvorco-kocka) a šiesta mocnina *kybokybos* (kocko-kocka). V arabskom preklade Diofantovho diela od Qustu ibn Lúqu al-Ba'labakkího (zomrel r. 912) sa vyskytuje aj ôsma a deviata mocnina; ich názvy zodpovedajú tvarom štvorco-štvorco-štvorco-štvorec alebo kocko-kocko-štvorec pre x^8 a kocko-kocko-kocka pre x^9. V iných arabských prekladoch antických prameňov i v originálnych dielach matematiky stredovekých islamských krajín sa vyskytujú zhodné alebo podľa toho istého princípu podobne tvorené názvy pre mocniny neznámej až po exponent 9; mocnine x^7 zodpovedá názov štvorco-štvorco-kocka. Je zjavné, že antická grécka matematika aj stredoveká islamská matematika tvorili mocniny vyššieho stupňa skladaním druhých a tretích mocnín na báze aditívneho princípu skladania exponentov, teda spôsobom, ktorý je zhodný s násobením mocnín s tým istým základom v dnešnej matematike. Tento princíp rešpektovala arabská matematika aj v období po 11.–12. storočí, keď prekročila hranicu exponentov Diofantových mocnín. Terminológia zostáva naďalej naskrze geometrická a napr. odmocnina ľubovoľného stupňa sa nazýva tým istým slovom, ktoré sa pri druhej odmocnine špecifikuje ako strana štvorca, pri tretej odmocnine ako hrana kocky a pri odmocninách vyššieho stupňa ako základ mocniny bez akejkoľvek geometrickej interpretácie. Určité náznaky použitia fiktívnych objektov viacrozmernej geometrie na riešenie úloh o odmocninách stupňa vyššieho než 3 sa objavujú u al-Fárábího (Abu Nasr Muhammad ibn Muhammad al-Fárábí, asi 870–950/1) a Abu 'l-Vafu (Abu 'l-Vafá Muhammad ibn Muhammad al-Búzdžání, 940–997/8), ale ide o pokusy nedôsledné a sporadické, ktoré zostali väčšinou nepochopené a nedostalo sa im všeobecného rozšírenia.

Stredoveká matematika na území Indie na rozdiel od matematiky arabskej používala na tvorbu názvov mocnín vyššieho stupňa multiplikatívny princíp, t. j. pracovala s mocninami tak, ako by sa pri ich skladaní ich exponenty násobili; napr. „štvorco-štvorec" znamenal mocninu $x^{2\cdot 2} = x^4$, „kocko-štvorec" mocninu $x^{3\cdot 2} = x^6$, „kocko-štvorco-štvorec" mocninu $x^{3\cdot 2\cdot 2} = x^{12}$, atď. Mocnina x^5 sa nazývala *súčin* štvorca a kocky, mocnina x^7 *súčin* štvorca, štvorca a kocky.

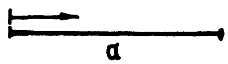
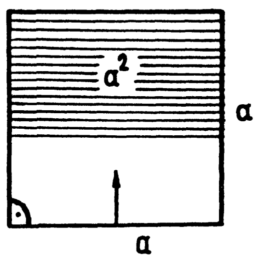
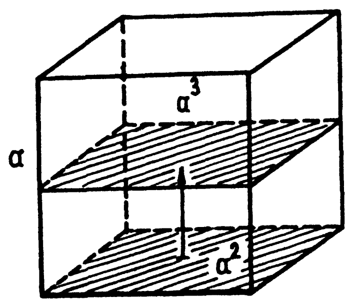
Európska stredoveká matematika sa opierala predovšetkým o arabské pramene a ich prostredníctvom sa oboznámila aj s výsledkami indickej a čínskej matematiky, veľmi často bez hlbšieho pochopenia sprostredkovaných poznatkov a bez schopnosti originálnejšej tvorivej syntézy. Tak napr. Leonardo z Pisy

(Fibonacci) (asi 1170–1250) v svojom slávnom diele Kniha o abaku (Liber abaci, 1202) uplatňuje dôsledne aditívny princíp tvorby mocnín vyšších stupňov, zatiaľ čo talianska algebrická škola 15. a 16. storočia, zakotvená hlavne v knihe Lucu Pacioliho (1454–1514) Suma aritmetiky, geometrie, pomerov a proporcií (Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita, 1487, tlačou vyšla v Benátkach r. 1499) sa pridržiavala multiplikatívneho princípu. Pre mocniny s prvočíselným exponentom rôznym od 2 a 3, t. j. pre mocniny x^5, x^7, $x^{11}, \ldots$ používa (už v národnom, talianskom jazyku) názvy primo relato, secondo relato, tertio relato atď. ako skomolené preklady a rozšírenie termínov, ktoré zaviedol byzantský učenec Michael Psellos (1018– po 1078), a to „prvé nevyjadriteľné" (alogos protos) pre x^5 a „druhé nevyjadriteľné" (alogos deuteros) pre x^7.

V talianskej algebrickej škole aj u nemeckých algebrikov 15. a 16. storočia - kossistov je zjavné uvoľnenie prísnej väzby na klasickú geometrickú algebru a rozkolísanie striktného systému tvorby názvoslovia pre mocniny vyššieho stupňa. Prejavuje sa to v temer všeobecnom uplatňovaní multiplikatívneho princípu a v čoraz väčších tvaroslovných deformáciách pôvodných geometrických názvov s rastúcou disproporciou medzi ich pôvodným obsahom a posunutým novým významom. Tak napr. niekoľkonásobným prekladom - z gréčtiny do arabčiny, z arabčiny do latinčiny, prípadne z latinčiny do národných jazykov - taliančiny, nemčiny, francúzštiny, španielčiny - prešlo slovo alogos („nevyjadriteľný", neschopný slovného vyjadrenia), označujúce pôvodne fakt, že mocnina x^5, resp. x^7 nemôže byť na báze multiplikatívneho princípu vyjadrená zložením druhých a tretích mocnín, prekladom do arabčiny na slovo s významom „nemý, hluchý", čo sa do latinčiny preložilo slovom surdum (=hluché). Tradícia označovania mocnín geometrickými názvami vedie k pomenovaniu piatej mocniny termínom surdum solidum („hluché teleso"), v skratke sursolidum, čo nasledujúce generácie matematikov už chápu ako skratku názvu *supersolidum*, t. j. *nadteleso.*

Intenzívna algebrizácia matematiky v podaní kossistov vzďaľuje algebru od geometrie a ponecháva z geometrickej algebry v podstate len archaické názvoslovie. No práve táto okolnosť umožní hlbšie pochopiť paralelizmus medzi tvorbou mocnín a zodpovedajúcich geometrických útvarov a poodhrnúť oponu scény viacrozmernej geometrie.

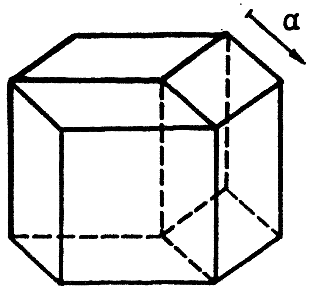
Zaslúžil sa o to jeden z najvýznamnejších kossistov *Michael Stifel* (asi 1486–1567) v doplnkoch k Algebre Christoffa Rudolffa (Die Coss Christoff Rudolffs mit schönen Exempeln der Coss, durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt, Königsberg, 1553). Stifel priraďuje k postupnosti aritmetických objektov $a^0 = 1$, $a^1 = a$, a^2, a^3 $(a > 0)$ postupnosť geometrických objektov: bod, úsečka s dĺžkou a, štvorec so stranou dĺžky a, kocka s hranou dĺžky a (obr. 1). V aritmetike možno pokračovať ďalšími mocninami čísla a, v geometrii nemožno vyjsť za hranice kocky, „lebo ak by bolo viac ako tri rozmery, bolo by to protiprirodzené".

Útvar	Znázornenie	Priradené číslo
1. Bod		$a^0 = 1$
2. Úsečka		$a^1 = a = a \cdot 1$
3. Štvorec		$a^2 = a \cdot a = a \cdot a^1$
4. Kocka		$a^3 = a \cdot a^2$

Obr. 1

Ak by sa to pripustilo, postupnosť geometrických útvarov by pokračovala do nekonečna: kocka by sa považovala za „telesový bod“, po nej by sa skonštruovala „telesová úsečka“, po nej „telesová plocha“, po nej „telesová kocka“ atď., „bez zastavenia“ (obr. 2).

Útvar	Priradené číslo
1'. Kocka = telesový bod	$\mathbf{1} = a^3$
2'. Telesová úsečka	$\mathbf{a} = a \cdot \mathbf{1} = a \cdot a^3 = a^4$



Obr. 2

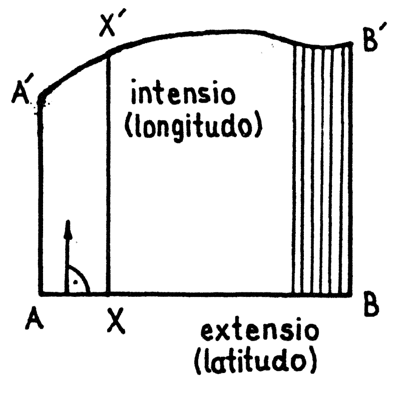
3'. Telesová plocha	$\mathbf{a}^2 = a \cdot \mathbf{a} = a \cdot a^4 = a^5$
4'. Telesová kocka	$\mathbf{a}^3 = a \cdot \mathbf{a}^2 = a \cdot a^5 = a^6$
atď.	

„Telesová úsečka“ je stopa pohybu „telesového bodu“ po úsečke kolmej na všetky tri hrany „telesového bodu“, „telesová plocha“ je stopa pohybu „telesovej úsečky“ po úsečke kolmej na všetky štyri význačné osnovy „telesovej úsečky“ atď.

2. Funkcie niekoľkých premenných

Druhým zdrojom zárodočných predstáv o objektoch viacrozmernej geometrie boli geometrické metódy interpretácie elementárnych pojmov, ktoré sa objavili v anticipačných pokusoch stredovekej matematiky sformulovať pojem funkcie niekoľkých premenných. Najvýraznejšie v tomto úsilí pokročil *Nicole Oresme* (1323–1382) v diele *O konfigurácii kvalít* (De configuratione qualitatum, pred rokom 1371). Dielo je vynikajúcou reprezentáciou tej oblasti scholastickej filozofie, ktorá sa nazývala *teória foriem.* Preložená do jazyka dnešnej matematiky predstavuje Oresmova práca geometrickú interpretáciu funkcií jednej premennej, dvoch premenných a troch premenných.

Funkciu nazýva Oresme *kvalitou* a prisudzuje jej dve kvantifikovateľné stránky - *extenziu* (extensio) a *intenzitu* (intensio). Extenzia môže byť daná jedným, dvoma, resp. tromi číselnými údajmi, intenzita je vždy jeden číselný údaj. Číselné údaje sa znázorňujú úsečkami, ktorých dĺžky sa rovnajú daným číselným hodnotám; úsečka znázorňujúca intenzitu je kolmá na lineárny podpriestor generovaný všetkými extenziami, ktoré v kvalite vystupujú. Oresmova *lineárna kvalita* predstavuje funkciu jednej premennej. Extenzia znamená šírenie kvality po úsečke, ktorej polohu relativizuje slovom *šírka* (latitudo).

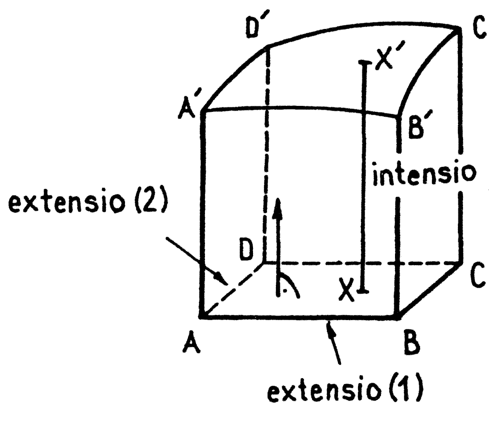


Obr. 3

Hodnota extenzie, t. j. dĺžka úsečky s pevným začiatočným bodom A (obr. 3) a pohyblivým bodom X na úsečke AB, je *hodnota x nezávisle premennej*. Hodnota intenzity kvality prislúchajúcej k extenzii AX, t. j. hodnota funkcie prislúchajúca k hodnote x nezávisle premennej, je znázornená úsečkou XX', ktorá je kolmá na priamku AB obsahujúcu úsečku AB a ktorej dĺžka sa rovná hodnote intenzity. Jej umiestnenie a vzťah k extenzii-šírke vyjadruje Oresme označením *dĺžka* (longitudo).

V rovinnej pravouhlej sústave súradníc s osou $x = \overleftrightarrow{AB}$ a ľubovoľnou osou y kolmou na x zvolenou tak, aby súradnica a bodu A, resp. súradnica b bodu B na osi x boli kladné, pričom $a < b$, je uzavretý interval $[a, b]$ definičnou oblasťou funkcie. Intenzity sú znázornené úsečkami, ktorých jedny krajné body prebiehajú úsečkou AB, druhé krajné body tvoria *graf funkcie*. Oresme nazýva graf funkcie *čiarou horného okraja* alebo *čiarou intenzity*. Lineárnej kvalite, t. j. funkcii jednej premennej, je takto priradený rovinný útvar - krivočiary štvoruholník $ABB'A'$ ohraničený úsečkou AB, kolmicami na AB v bodoch A, B a čiarou intenzity $A'B'$. Tento model kvality ako aj kvalita sama sa spravidla nazývali *formami*. Odtiaľ pochádza zaradenie tejto tematiky do teórie foriem, ktorá hrala v scholastickej filozofii podstatne významnejšiu a všeobecnejšiu úlohu, než to naznačuje jej uplatnenie v matematike.

Funkcii dvoch premenných zodpovedá Oresmova *rovinná kvalita*, v ktorej je intenzita (intensio) kvality závislá od dvoch nezávislých extenzií (extensio (1), extensio (2)) (obr. 4). Hodnoty extenzií sa nanášajú na dve navzájom kolmé úsečky AB, AD so spoločným krajným bodom A a množina bodov roviny, ktorých súradnice sú extenziami prebiehajúcimi týmito úsečkami, je pravouholník $ABCD$ s dvoma stranami na úsečkách extenzií AB, AD. Tento pravouholník je definičnou oblasťou funkcie. Intenzity kvality, t. j. hodnoty funkcie sú znázornené úsečkami kolmými na rovinu pravouholníka, ktorých jedny krajné body prebiehajú pravouholníkom a druhé krajné body vytvárajú plochu - graf funkcie, nazývaný Oresmom *plocha horného okraja* alebo *plocha intenzity*. Formou modelujúcou rovinnú kvalitu je priestorový útvar - *krivoplochý kváder* ohraniče-

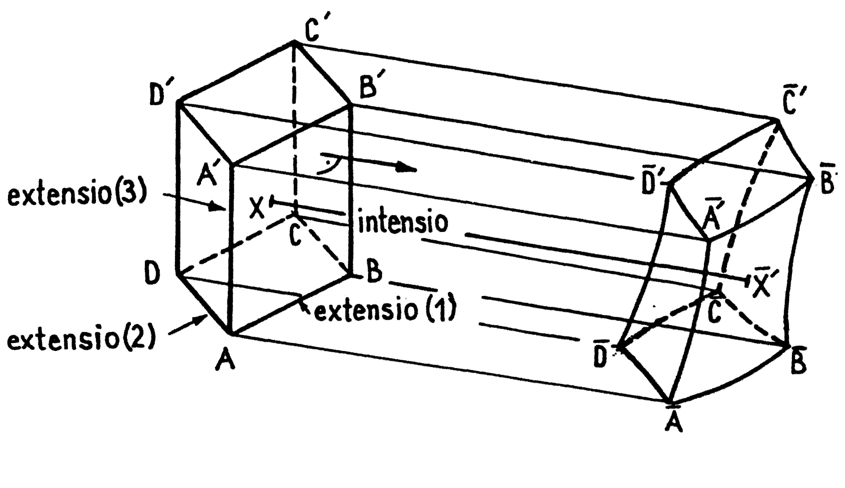


Obr. 4

ný pravouholníkom $ABCD$, rovinami, ktoré prechádzajú jeho stranami kolmo na jeho rovinu a grafom funkcie.

Pre pochopenie nasledujúceho zovšeobecnenia pre funkciu troch premenných je dôležité uvedomiť si, že úsečka znázorňujúca intenzitu kvality má okrem jedného krajného bodu všetky body *mimo* (*zvonka*) roviny obsahujúcej obe extenzie kvality.

Funkciou troch premenných je Oresmova *telesová kvalita*. Má tri nezávislé extenzie – extensio (1), extensio (2), extensio (3) – nanášané na úsečky AB, AD, AA' (obr. 5) ležiace na hranách



Obr. 5

pravouhlého trojhrana. Definičnou oblasťou funkcie je kváder $ABCDA'B'C'D'$ určený hranami AB, AD, AA'. Intenzita (intensio) kvality je znázornená úsečkou, ktorej jeden krajný bod leží v kvádri $ABCDA'B'C'D'$, je kolmá na všetky tri úsečky AB, AD, AA' a jej dĺžka sa rovná hodnote intenzity. Všetky body tejto úsečky okrem jej krajného bodu v kvádri ležia *zvonku* priestoru, ktorý je lineárnym obalom kvádra $ABCDA'B'C'D'$. Formou telesovej kvality je štvorrozmerný nadkváder ohraničený kvádrom $ABCDA'B'C'D'$, trojrozmernými priestormi, ktoré prechádzajú jeho stenami a sú kolmé na trojrozmerný obal kvádra $ABCDA'B'C'D'$, a krivoplochým kvádrom $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{A}'\bar{B}'\bar{C}'\bar{D}'$, ktorý je grafom funkcie v štvorrozmernom priestore (obr. 5).

Historicky je celkom prirodzené, že Oresme neoperuje pojmami štvorrozmerného priestoru. Analógiou konštrukcie „horného okraja" sa obsahovo veľmi hmlisto približuje k niektorým pojmom tohto priestoru. Nejasnosť textu a jeho deformácia kopistami, ktorí slovo *zvonku* nahradili slovom *vnútri*, boli dlhodobou a trvalou prekážkou pochopenia Oresmovej idey. Ostatne sám Oresme od nej vyľakane cúvol.

3. Iné pramene

Nevyhnutným predpokladom exaktného vypracovania základných pojmov viacrozmernej geometrie bol zásadný pokrok v oblasti symbolickej algebry. Realizácii tejto úlohy venovali intenzívnu pozornosť významní matematici posledných desaťročí 15. storočia (Luca Pacioli, Johannes Widman, Nicolas Chuquet) a popredné školy i jednotlivci v 16. storočí (nemeckí kossisti: Christoff Rudolff z Javora, Michael Stifel; talianska algebrická škola: Scipione del Ferro, Niccolo Tartaglia, Hieronimo Cardano, Ludovico Ferarri, Rafaelo Bombelli; Francois Viète). Osobitne Viètov prínos je podstatný, lebo v jeho diele sa prakticky dovršujú *princípy* symbolickej algebry a tvorba symboliky sa rozvíja do takej miery, že v Descartovej a Fermatovej analytickej geometrii poskytuje spoľahlivý základ algebrizácie geometrie. Prirodzene, analytická geometria ako disciplína, ktorá sa práve len etablovala, sotva mohla okamžite poskytnúť bezpečné odrazisko pre hlboké a ďalekosiahle zovšeobecnenie, ktorým n-rozmerná geometria vo vzťahu k elementárnej algebre a geometrii nepochybne je. Preto z pohľadu neskoršieho vzniku n-rozmernej geometrie predstavuje rozvoj algebry v 16.–18. storočí nie priame smerovanie k tvorbe základov viacrozmernej geometrie, ale extenzívny rast a zdokonaľovanie vlastného obsahu, ktorý sa neskôr v 19. storočí vo vzťahu ku geometrii preukázal ako účinná a plodná metóda. Prebleskli síce sem-tam náznaky pokusov o formalizáciu v geometrii (napr. u Viètu), ktorá by v dôsledkoch otvorila cestu k viacrozmernému rozšíreniu, ale boli to snahy zárodočné, značne vágne a hlavne bez dostačujúceho technického zázemia a opory vo formalizovanej algebre a logike. Väčšiu pozornosť z hľadiska neskoršieho uplatnenia v budovaní viacrozmernej geometrie si zasluhujú koncepčné idey Descartove a Leibnizove. Spoločným znakom ich koncepcií je úsilie vypracovať univerzálnu metodológiu, pričom za vedu schopnú plniť túto funkciu považovali matematiku, či presnejšie jej jednotlivé oblasti, a to Descartes formalizovanú algebru a Leibniz analýzu (calculus).

René Descartes (1596–1650) značne posunul dopredu exaktnú formuláciu všeobecnej vedeckej metódy. V duchu jeho filozofie to bola analytická metóda, ktorej aplikácia mala viesť k matematizácii (= algebrizácii) ľubovoľného problému v nasledujúcich krokoch:

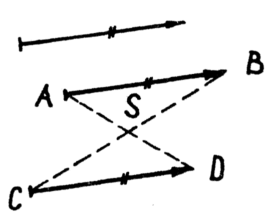
- analýza problému, formalizácia základných, elementárnych podobjektov a vzťahov medzi nimi pomocou algebrických symbolov
- formulácia problému v jazyku algebry konečným systémom algebrických rovníc
- redukcia systému rovníc na jednu rovnicu a jej explicitné riešenie.

Odhliadnuc od historickej ohraničenosti matematických metód a zjednodušených Descartových predstáv o univerzalite matematiky, je jeho idea matematizácie priekopníckym projektom, ktorý sa v čoraz rozsiahlejšom meradle realizuje práve v našom storočí zásluhou vzniku a rozvoja matematických disciplín, umožňujúcich aplikáciu matematiky v oblastiach, kde sa to predtým zdalo nemysliteľné.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) v liste Christianovi Huygensovi r. 1679 vyslovil ideu formalizácie geometrie, ktorú Euler označil r. 1736 ako „geometriu polohy" (geometria situs). Leibniz navrhuje znakovú formalizáciu geometrických objektov, ich vlastností, relácií, operácií a transformácií s cieľom vylúčiť alebo aspoň výrazne zredukovať ich vyjadrovanie obrázkami, modelmi alebo ťažkopádnymi slovnými opismi. Metódu, ktorú v náznakoch sformuloval Leibniz, pochopili a rozvinuli nasledovníci ako princíp topológie (L. Euler, J. B. Listing, B. Riemann, H. Poincaré).

Z pohľadu neskoršieho, najmä axiomatického budovania teórie viacrozmerných priestorov, v ktorej prvotným pojmom je priestor, a jeho podmnožiny, špeciálne podpriestory sa zavádzajú pomocou definícií, stojí za pozornosť Leibnizov názor, že pojem telesa má predchádzať pred pojmom plochy a čiary. Táto idea, ostatne, nie je prevratne originálna, lebo je implicitne obsiahnutá u Aristotela, explicitne vyslovená u al-Farábího a aplikovaná u al-Birúního.

Dôležitú úlohu pri axiomatickom budovaní teórie viacrozmerných priestorov v posledných desaťročiach 19. storočia zohrali vektory. Zárodky matematickej formulácie pojmu vektora (bez použitia tohto názvu) sa objavujú začiatkom 19. storočia u L. Carnota a na prah tohto pojmu sa dostáva *G. Bellavitis* (1803–1880) v diele *Teória ekvipolencie* (Teoria della equipolenza, 1835).



Obr. 6

Ekvipolentnými nazýva každé dve úsečky, ktoré majú zhodné dĺžky (1), sú rovnobežné (2) a súhlasne orientované (3) (obr. 6). Je zjavné, že ekvipolenciu dvoch orientovaných úsečiek AB, CD možno charakterizovať touto vlastnosťou: stred úsečky AC sa rovná stredu úsečky BD. Táto vlastnosť charakterizuje aj ekvipolentné úsečky incidujúce s jednou priamkou. Potom je ekvipolencia ekvivalenciou a trieda ekvivalencie je v dnešnej terminológii *voľný vektor.*

II. Priami predchodcovia

Prvé pokusy formulovať základné pojmy n-rozmernej geometrie bezprostredne predchádzal pokrok v teórii algebrických foriem n premenných a v teórii množných integrálov (funkcií n premenných). Snaha o geometrickú interpretáciu bola jedným z hlavných stimulov, ktoré viedli k postupnému formovaniu základov n-rozmernej geometrie. Zásadný prínos v tejto oblasti znamenali práce Jacobiho a Cayleyho.

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) v práci *O transformácii dvoch ľubovoľných homogénnych funkcií druhého rádu lineárnymi substitúciami na dve iné* (funkcie), *ktoré obsahujú len štvorce premenných zároveň s rozličnými vetami o transformácii integrálov* (De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant; una cum variis theorematis de transformatione integralium, Berlin, 1834) formuluje najprv nasledovnú úlohu:
Nájsť také lineárne substitúcie

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2 + \cdots + \alpha'_n x_n \\ y_2 &= \alpha''_1 x_1 + \alpha''_2 x_2 + \cdots + \alpha''_n x_n \\ &\dots \\ y_n &= \alpha^{(n)}_1 x_1 + \alpha^{(n)}_2 x_2 + \cdots + \alpha^{(n)}_n x_n \end{aligned}$$

aby platilo

$$y_1 y_1 + y_2 y_2 + \cdots + y_n y_n = x_1 x_1 + x_2 x_2 + \cdots + x_n x_n \,.$$

Zisťuje sa, že pre koeficienty $a^{(\mu)}_\nu$ $(\nu, \mu = 1, \dots, n)$ platí

$$\begin{aligned} &\alpha'_\varkappa \alpha'_\lambda + \alpha''_\varkappa \alpha''_\lambda + \cdots + \alpha^{(n)}_\varkappa \alpha^{(n)}_\lambda = 0 \text{ pre } \varkappa \neq \lambda \text{ a} \\ &\alpha'_\varkappa \alpha'_\varkappa + \alpha''_\varkappa \alpha''_\varkappa + \cdots + \alpha^{(n)}_\varkappa \alpha^{(n)}_\varkappa = 1 \,, \end{aligned}$$

t. j. v dnešnej terminológii matica $(\alpha^{(\mu)}_\nu)$ je ortogonálna. (Geometricky zodpovedá tejto matici otáčanie n-rozmerného euklidovského priestoru.)

Potom rieši Jacobi vlastnú úlohu naznačenú v názve práce:
Nájsť lineárnu substitúciu

$$x_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} \beta^{(\lambda)}_\varkappa y_\lambda \,, \varkappa = 1, \dots, n \,,$$

ktorá simultánne prevádza dve kvadratické formy

$$V = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda \,, \quad W = \sum_{\varkappa,\lambda} b_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

na tvar

$$\begin{aligned} V &= G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 + \dots + G_n y_n y_n \,, \\ W &= H_1 y_1 y_1 + H_2 y_2 y_2 + \dots + H_n y_n y_n \,. \end{aligned}$$

Geometrická interpretácia úlohy: Transformovať danú sústavu súradníc na novú sústavu, v ktorej rovnice dvoch daných kvadratických plôch majú kanonický tvar.

Transformácia má v práci pomocný význam: slúži na výpočet množných integrálov, o. i. na výpočet určitého $(n-1)$-násobného integrálu na oblasti s kladnými hodnotami reálnych premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$ vyhovujúcich rovnici

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 + \dots + x_n x_n = 1 \,.$$

Výsledný integrál

$$\begin{aligned} S &= \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{(n-2)(n-4)\dots 2} \text{ pre párne } n \text{ a} \\ S &= \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)(n-4)\dots 3} \text{ pre nepárne } n \end{aligned}$$

vyjadruje objem segmentu hranice nadgule jednotkového polomeru v n-rozmernom euklidovskom priestore; tento segment prislúcha k priestorovému uhlu oblasti (sektoru) $x_i \geqq 0$, $i = 1, \dots, n$. Analogických sektorov je celkove 2^n, takže objem hranice sa celkove rovná

$$\begin{aligned} S &= \frac{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{(n-2)(n-4)\dots 2} \text{ pre párne } n \text{ a} \\ S &= \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)(n-4)\dots 3} \text{ pre nepárne } n \,. \end{aligned}$$

Celá rozsiahla Jacobiho práca (78 strán) je napísaná v jazyku algebry a analýzy, chýba akákoľvek geometrická terminológia, a tým aj geometrická interpretácia.

Arthur Cayley (1821–1895) v práci *Kapitoly analytickej geometrie n rozmerov* (Chapters in the analytical geometry of n dimensions, 1843) pripravil algebrický aparát opisu polárnej združenosti lineárnych podpriestorov projektívneho priestoru vzhľadom na nadkvadriku tohto priestoru. Napriek názvu má práca rýdzo algebrický charakter a geometrie sa týka len slovo v názve a trojrozmerná interpretácia niektorých výsledkov v závere článku.

V práci sa skúma konečná sústava homogénnych lineárnych rovníc s n neznámymi tvaru

$$\begin{gathered} A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = 0 \\ \dots \\ K_1 x_1 + K_2 x_2 + \dots + K_n x_n = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

spolu so sústavou „vzájomných (t. j. adjungovaných, asociovaných) rovníc" k takejto sústave, odvodených od homogénneho kvadratického polynómu n neurčitých

$$U = \frac{1}{2}\left[\sum_{\alpha}(\alpha^2)x_\alpha^2 + 2\sum_{\alpha,\beta}(\alpha\beta)x_\alpha x_\beta\right]. \qquad (2)$$

(Označenie nie je celkom korektné, lebo znaky α, β sa používajú tak vo význame ľubovoľných koeficientov, ako aj indexov, ktorými sú prirodzené čísla.) Ľavé strany „vzájomných rovníc" sú determinanty zostavené z parciálnych derivácií $\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \dots, n)$ a z koeficientov rovníc sústavy (1). Cayley ukazuje, že ak je v sústave (1) r lineárne nezávislých rovníc, má „vzájomná sústava" $n - r$ lineárne nezávislých rovníc.

Na konci práce Cayley podáva geometrickú interpretáciu niektorých výsledkov pre $n = 4$, ktoré v dnešnej terminológii opisujú určité vlastnosti polarity vzhľadom na kvadratickú plochu v trojrozmernom projektívnom priestore. Cayleyho riešenie v „priestore n rozmerov" znamená v dnešnom výklade nasledovné:

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú homogénne súradnice bodov $(n-1)$-rozmerného projektívneho priestoru;
- r lineárne nezávislých homogénnych lineárnych rovníc s neznámymi x_1, $x_2, \dots, x_n$ určuje $(n - r - 1)$-rozmerný lineárny podpriestor;
- rovnica $U = 0$ určuje nadkvadriku $(n - 1)$-rozmerného projektívneho priestoru;
- „vzájomná" sústava definuje $(r - 1)$-rozmerný lineárny podpriestor polárne združený s daným $(n-r-1)$-rozmerným podpriestorom vzhľadom na nadkvadriku $U = 0$.

Cayleymu na takéto vyjadrovanie chýbal pojmový aparát — dnešná geometrická terminológia pre n-rozmerný projektívny priestor, jeho objekty, relácie, operácie a transformácie. Preto okrem sľubného názvu a neveľkého odseku o geometrii v trojrozmernom priestore zostala práca na pôde algebry, no jej prínos pre metódy neskoršej analytickej geometrie n-rozmerných priestorov je nepochybný.

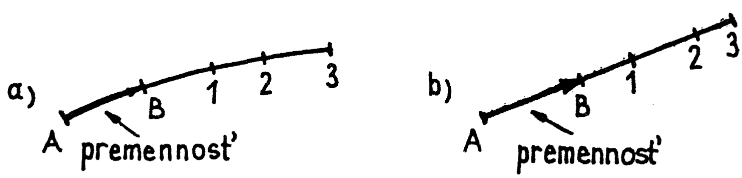
III. Vlastný zrod. Formovanie základov

Prvé zásadné práce teórie n-rozmerných priestorov sa objavili v štyridsiatych a päťdesiatych rokoch 19. storočia. O formovanie algebrických metód a budovanie základných pojmov n-rozmernej geometrie sa zaslúžili Grassmann, Schläfli a Plücker. S hlbokými koncepčnými ideami vystúpil Riemann.

Hermann Günther Grassmann (1809–1877) v rozsiahlom knižnom diele *Teória lineárnej extenzie* (Die lineale Ausdehnungslehre, 1844) značne nevybrúseným a nie príliš zrozumiteľným spôsobom zavádza základné pojmy, relácie a operácie, ktoré po istej úprave a vysvetlení tvoria dnes základy teórie vektorových priestorov.

1. *Extenzný obraz prvého stupňa* definuje Grassmann ako súhrn prvkov, na ktoré generujúci prvok prechádza pri spojitom pohybe. Špeciálne *jednoduchý*

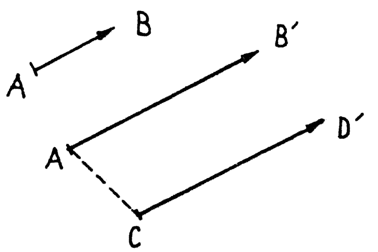
extenzný obraz vzniká spojitým predĺžením jednej a tej istej „základnej premennosti".



Obr. 7

Na obr. 7 a, b sú základnými premennosťami orientovaný oblúk krivky, resp. orientovaná úsečka so začiatočným bodom A a koncovým bodom B a body 1, 2, ... predstavujú koncové body orientovaných oblúkov, resp. orientovaných úsečiek $A1$, $A2$, ... pri predĺžení základnej premennosti AB na $A1$, $A2$, ...

2. *Rovnosť úsečiek* je definovaná ako výsledok „jednej a tej istej zmeny" určitej základnej premennosti, t. j. dve (orientované) úsečky sa rovnajú, ak sú rovnobežné, majú tú istú dĺžku a sú súhlasne orientované (obr. 8).



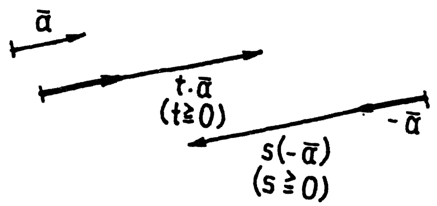
Obr. 8

Trieda navzájom sa rovnajúcich orientovaných úsečiek sa nazýva *extenzná veličina prvého stupňa* alebo *extenzia prvého stupňa*; to je dnešný *voľný vektor*.

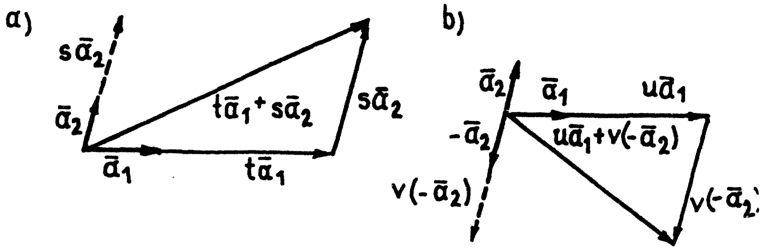
3. *Systémom prvého stupňa* sa nazýva „súhrn všetkých prvkov, ktoré možno dostať (všetkými možnými) predĺženiami tej istej alebo opačnej (základnej) premennosti" (obr. 9).

Tento objekt je teda *vektorová priamka* (= jednorozmerný vektorový priestor).

4. *Systém druhého stupňa* sa tvorí takto: vezmú sa dve základné premennosti rôzneho druhu (t. j. nekolineárne viazané vektory), prvá – alebo k nej opačná – premennosť sa podrobí ľubovoľnému predĺženiu a takto získaný základný prvok sa podrobí „druhému spôsobu zmeny" pomocou ľubovoľne predĺženej druhej premennosti (alebo premennosti k nej opačnej); tak vznikne *extenzná veličina druhého stupňa* (obr. 10 a, b).



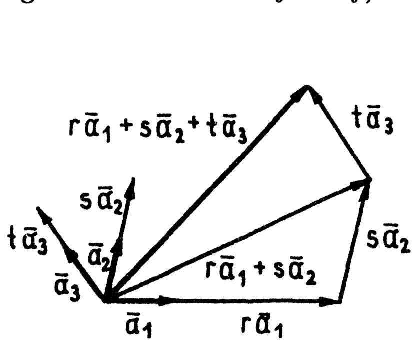
Obr. 9



Obr. 10

Ak sú základné nezávislé premennosti vektory $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, extenznou veličinou druhého stupňa je vektor $t\bar{a}_1 + s\,\bar{a}_2$ ($t, s \in \mathbf{R}$) ako súčet predĺžení $t\bar{a}_1$ (resp. $w(-\bar{a}_1)$) a $s\bar{a}_2$ (resp. $v(-\bar{a}_2)$). Systém druhého stupňa ako súhrn všetkých extenzných veličín druhého stupňa je *vektorová rovina* (= dvojrozmerný vektorový priestor).

5. *Systém tretieho stupňa* sa tvorí analogicky s využitím systému druhého stupňa: vezme sa tretia základná premennosť, ktorá neprevádza určitý základný prvok systému druhého stupňa na prvok toho istého systému (t. j. tretí vektor nie je komplanárny s generátormi vektorovej roviny).



Obr. 11

Pomocou jej predĺženia – alebo predĺženia premennosti k nej opačnej – sa podrobí zmene ľubovoľný prvok systému druhého stupňa; tak vznikne prvok systému tretieho stupňa (obr. 11).

Poznámka. Grafické znázornenia sú dnešnou geometrickou interpretáciou Grassmannových pojmov; v jeho diele sa nevyskytujú.

Je zjavné, že Grassmannov systém tretieho stupňa je *trojrozmerný vektorový priestor*. Grassmann o ňom konštatuje, že je „celý nekonečný priestor". Ďalej uvádza, že idea tvorby systémov je použiteľná bez ohraničenia a možno takým spôsobom utvoriť systémy ľubovoľne vysokých stupňov. Geometria však nejde za stupeň tri, ale „abstraktná veda nepozná hranice". Historická a psychologická bariéra viedla Grassmanna k rozdeleniu teórie na „geometriu" pre priestory rozmeru $\leqq 3$ a na abstraktnú „náuku o extenzii" pre priestory vyššieho rozmeru.

6. Vlastnosti systémov

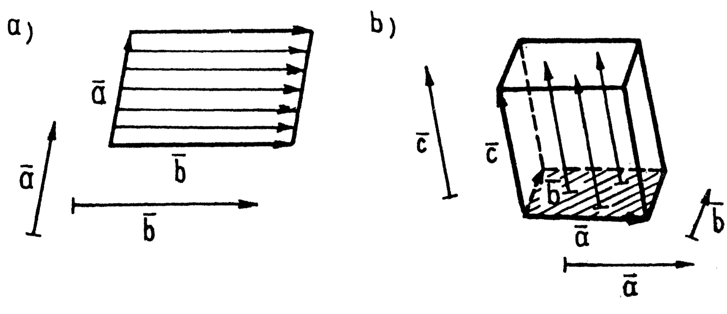
a) Ku každým dvom prvkom α, β Grassmann priraďuje „úsečku" $[\alpha\beta]$, pričom „úsečky" majú vlastnosť: Ak $[\alpha\beta]$ a $[\beta\gamma]$ reprezentujú ľubovoľné premennosti, platí $[\alpha\gamma] = [\alpha\beta] + [\beta\gamma]$.

„Úsečky" sú tu zrejme viazané vektory, t. j. umiestnenia voľných vektorov – „premenností". „Úsečku" $[\alpha\beta]$ možno interpretovať ako rozdiel $B - A$ bodov afinného priestoru alebo ako rozdiel $\beta - \alpha$ polohových vektorov $\alpha = A - O$, $\beta = B - O$ bodov A, B pri ľubovoľnom výbere pólu O.

Takéto chápanie „úsečiek" potvrdzuje Grassmann na „geometrickom" modeli sústav t. j. v trojrozmernom bodovom priestore priradením „úsečky $[XY]$" ku každej dvojici bodov X, Y. Fyzikálnymi modelmi „úsečiek" v mechanike sú rýchlosti, zrýchlenia a sily.

b) „Vonkajší súčin" úsečiek zavádza Grassmann nasledovne:
„Pod vonkajším súčinom n úsečiek sa rozumie extenzná veličina n-tého stupňa, ktorá sa dostane tak, že každý prvok prvej úsečky vytvára druhú úsečku, každý takto utvorený prvok vytvára tretiu úsečku atď."

Na obr. 12 a, b je znázornený „vonkajší súčin" dvoch, resp. troch nezávislých „úsečiek".



Obr. 12

Vonkajší súčin dvoch úsečiek je rovnobežník, vonkajší súčin troch úsečiek –

rovnobežnosten, vonkajší súčin m (nezávislých) úsečiek – m-rozmerný rovnobežnosten. V súlade s tým aplikuje Grassmann vonkajší súčin na výpočet obsahu rovnobežníka a objemu rovnobežnostena. Fyzikálne aplikácie sa týkajú výpočtu statického momentu sily a podmienok rovnováhy síl v mechanike.

Predobraz vektorového súčinu dvoch vektorov a zmiešaného súčinu troch vektorov v trojrozmernom priestore v Grassmannovom „vonkajšom súčine" je zjavný. Zároveň je zreteľná aj historická ohraničenosť definície, ktorá znemožňuje stotožnenie vonkajšieho súčinu s uvedenými neskôr definovanými objektmi: absencia orientácie trojice vektorov, neujasnenie otázok komutatívnosti, asociatívnosti, neodlíšenie vektora a jeho dĺžky, čísla a jeho absolútnej hodnoty. Následný vývoj k exaktnosti uvedených pojmov postupným spresňovaním základných objektov, relácií a podmienok vytvárania nových objektov dokumentuje zložitosť a namáhavosť historickej cesty k pokroku.

7. Prepracovaná verzia Grassmannovho diela vyšla r. 1862 pod názvom *Teória extenzie* (Die Ausdehnungslehre). Odzrkadľuje výrazný pokrok v spresňovaní základných pojmov a pozoruhodné priblíženie sa k modernej teórii abstraktných vektorových priestorov. Sú v ňom zavedené tieto pojmy:

- lineárna kombinácia veličín: $a = \beta b + \gamma c + \dots$; termín „lineárna kombinácia" sa explicitne nepoužíva; namiesto neho sa hovorí, že „a sa číselne vytvára z veličín b, c, ... pomocou čísel β, γ, ...";
  v tom je implicitne obsiahnutý aj pojem
- lineárna závislosť;
- jednotky: týmto názvom sa označujú lineárne nezávislé generátory, prvky bázy $e_1, e_2, \dots$;
- extenzné veličiny: „výrazy číselne utvorené zo sústavy jednotiek", t. j. lineárne kombinácie prvkov bázy;
  zápis: $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots$ alebo $\sum \alpha e$;
- sčitovanie a odčitovanie extenzných veličín:

$$\sum \alpha e + \sum \beta e = \sum (\alpha + \beta) e\,; \quad \sum \alpha e - \sum \beta e = \sum (\alpha - \beta) e$$

- násobenie extenznej veličiny číslom: $(\sum \alpha e)\beta = \sum (\alpha\beta) e$
- vnútorný súčin (a, b) extenzných veličín a, b
- vonkajší súčin
  - $[ab]$ veličín a, b
  - $[abc]$ veličín a, b, c
  - $[ab\dots]$ veličín a, b, ...

V dnešnej terminológii je

- extenzná veličina – vektor, prvok abstraktného vektorového priestoru
- jednotky – bázové vektory vektorového priestoru
- sčitovanie, odčitovanie, násobenie číslom – príslušné operácie vektorového priestoru
- vnútorný súčin – skalárny súčin dvoch vektorov
- vonkajší súčin
  - $[ab]$ – vektorový súčin vektorov a, b
  - $[abc]$ – zmiešaný súčin vektorov a, b, c.

8. *Grassmannove súradnice*

V súvislosti s výpočtom vonkajšieho súčinu r lineárne nezávislých vektorov sa vyskytli hodnoty určitých determinantov, ktoré charakterizujú podpriestor generovaný týmito vektormi.
Nech $\bar{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{e}_j$, $i = 1,\dots,r$, je r lineárne nezávislých vektorov n-rozmerného vektorového priestoru s bázou $\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n$. Vonkajší súčin $[\bar{v}_1 \dots \bar{v}_r]$ vektorov $\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_r$ má vyjadrenie

$$[\bar{v}_1 \dots \bar{v}_r] = \sum_{(i_1,\dots,i_r)} (-1)^{\sigma} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \dots & a_{1i_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{ri_1} & \dots & a_{ri_r} \end{vmatrix} [\bar{e}_{i_1} \dots \bar{e}_{i_r}] \tag{3}$$

kde $(i_1,\dots,i_r)$ je variácia r-tej triedy z prvkov $1,\dots,n$, σ je počet inverzií v poradí $i_1,\dots,i_r$ (vzhľadom na prirodzené usporiadanie) a $[\bar{e}_{i_1} \dots \bar{e}_{i_r}]$ je vonkajší súčin bázových vektorov $\bar{e}_{i_1},\dots,\bar{e}_{i_r}$. Determinanty $|a_{k,i_l}|$ sa nazývajú *Grassmannove súradnice* vektorového podpriestoru $\langle \bar{v}_1,\dots,\bar{v}_r \rangle$ generovaného vektormi $\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_r$.

Grassmannove súradnice sa častejšie používajú pri charakterizácii podpriestorov projektívneho priestoru:
Nech $\mathbf{P}^n$ je n-rozmerný projektívny priestor s bodmi $(x_1, x_2,\dots,x_n)$ a nech $\mathbf{P}^r = \langle (a^{(0)}), (a^{(1)}),\dots,(a^{(r)}) \rangle$ je r-rozmerný podpriestor priestoru $\mathbf{P}^n$ generovaný lineárne nezávislými bodmi $(a^{(i)}) = (a_0^{(i)}, a_1^{(i)},\dots,a_n^{(i)})$, $i = 0,1,\dots,r$. Hodnoty

$$(-1)^{\sigma} \begin{vmatrix} a_{j_0}^{(0)} & \dots & a_{j_r}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j_0}^{(r)} & \dots & a_{j_r}^{(r)} \end{vmatrix} = p_{j_0\dots j_r} \tag{4}$$

kde σ je počet inverzií v poradí $j_0,\dots,j_r$, sa nazývajú Grassmannove súradnice podpriestoru $\mathbf{P}^r$.

Grassmannove súradnice sú lineárne nezávislé; spĺňajú však tzv. *kvadratické p-vzťahy*:

$$p_{i_0\dots i_r} p_{j_0\dots j_r} = \sum_{\lambda=0}^{r} p_{i_0\dots i_{s-1} j_\lambda i_{s+1}\dots i_r} p_{j_0\dots i_{\lambda-1} i_s i_{\lambda+1}\dots i_r} \tag{5}$$

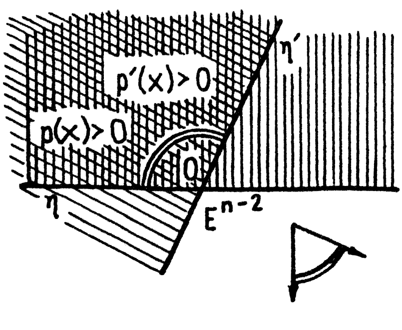
Poznámka. Niektorí autori označujú Grassmannove súradnice projektívnych podpriestorov názvom Plückerove súradnice z dôvodov, ktoré budú uvedené v ďalšom texte.

K vypracovaniu základov analytickej geometrie n-rozmerného euklidovského priestoru podstatnou mierou prispel švajčiarsky matematik *Ludwig Schläfli* (1814–1895) dielom *Teória mnohonásobnej kontinuity* (Theorie der vielfachen Kontinuität, 1851; publikované 1901), ktoré predložil na posúdenie Viedenskej akadémii vied ako „pokus vybudovať základy a vypracovať nové odvetvie analýzy, ktoré – akoby analytická geometria n rozmerov – obsahuje analytickú geometriu pre rovinu a priestor v špeciálnych prípadoch $n = 2, 3$." Kniha vyšla až posmrtne, ale jej podstatné časti boli odbornej verejnosti dostupné z rozsiahlych časopiseckých článkov *Redukcia násobného integrálu, ktorý obsahuje ako špeciálne prípady oblúk kružnice a obsah sférického trojuholníka* (Réduction d'une intégrale multiple qui comprend l'arc du cercle et l'aire du triangle sphérique comme cas particuliers, 1855) a *O násobnom integrále* $\int^n dxdy \ldots dz$ *s hranicami* $p_1 = a_1x + b_1y + \cdots + h_1z > 0, \ldots, p_n > 0$ *a* $x^2 + y^2 + \cdots + z^2 < 1$ (On the multiple integral ... whose limits are ... and ..., 1858–1860). Odhliadnuc od terminológie nezvyklej pre matematikov 20. storočia, Schläfliho kniha obsahuje kompletné základy n-rozmernej analytickej geometrie a mnohé ďalekosiahle aplikácie, z ktorých časť – súc neznáma širšej verejnosti – bola nezávisle objavená inými matematikmi v mnohých prípadoch o niekoľko desaťročí neskôr.

Na strane 75 je uvedený prehľad Schläfliho pojmov a výsledkov spolu s dnešnou zodpovedajúcou terminológiou.

K pojmu „*uhol dvoch homogénnych polynómov*" $p = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ a $p' = a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_nx_n$ v pravouhlej sústave premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dospieva Schläfli nasledovnou úvahou: Súhrn všetkých riešení $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pre ktoré platí súčasne $p(x) > 0$ aj $p'(x) > 0$, tvorí časť celej „neohraničenej totality" a pomer tejto časti k neohraničenej totalite je vyjadrený pomerom zlomku k celku (t. j. k 1), pričom ak zlomok uvedieme na menovateľa 2π, čitateľom bude „uhol polynómov" p, p'; jeho označenie je $\sphericalangle(p, p')$.

Geometrická interpretácia je zjavná: Polynómy p, p' určujú rovnicami $p(x) = 0$, $p'(x) = 0$ dve nadroviny η, η' n-rozmerného priestoru prechádzajúce začiatkom 0 sústavy súradníc. Ak sú polynómy p, p' lineárne nezávislé, sú nadroviny η, η' rôzne a pretínajú sa v $(n-2)$-rozmernom lineárnom podpriestore $\mathbf{E}^{n-2}$, ktorý taktiež prechádza bodom 0. Nerovnice $p(x) > 0$ a $p'(x) > 0$ (presnejšie $p(x) \geqq 0$ a $p'(x) \geqq 0$) definujú dva polpriestory Σ, Σ', ktorých prienikom je *n-rozmerný klin*.



Obr. 13

Objekt	Schläfliho termín	Dnešný názov
$(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $x_i \in \mathbf{R}$	riešenie (Lösung)	bod
$\{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$	n-násobná totalita	n-rozmerný priestor
$\{(x); L_i(x) = 0\}$ L_i – lineárne nezávislé lineárne polynómy $i = 1$	(lineárna) $(n-1)$-násobná kontinuita	$(n-1)$-rozmerný (lineárny) podpriestor
$i = 1, 2$	(lineárna) $(n-2)$-násobná kontinuita	$(n-2)$-rozmerný (lineárny) podpriestor
$i = 1, 2, \dots, k$	(lineárna) $(n-k)$-násobná kontinuita	$(n-k)$-rozmerný (lineárny) podpriestor
$\{(x); f_i(x) = 0,$ $i = 1, \dots, k;$ $\{f_i\}_{i=1}^k$ – nezávislá nelineárna sústava polynómov$\}$	$(n-k)$-násobná vyššia kontinuita	$(n-k)$-rozmerná nelineárna varieta
	jednonásobná (= jednoduchá) kontinuita = cesta	čiara (krivka)
	lineárna jednoduchá kontinuita = lúč	priamka
$\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \dots + (x'_n - x_n)^2}$, kde $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ sú riešenia	vzdialenosť riešení $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ v pravouhlej sústave premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$	vzdialenosť bodov $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ v pravouhlej sústave súradníc $x_1, x_2, \dots, x_n$
$\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \dots + (x'_n - x_n)^2 + 2k(x'_1 - x_1)\cdot(x'_2 - x_2) + \dots + 2h(x'_{n-1} - x_{n-1})\cdot(x'_n - x_n)}$,	vzdialenosť riešení $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ v kosouhlej sústave premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$	vzdialenosť bodov $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ v kosouhlej sústave súradníc $x_1, x_2, \dots, x_n$

Tento klin nazýva Schläfli „uhlom polynómov p, p'“. V skutočnosti však definuje *mieru* klina v oblúkovej uhlovej miere. Situáciu znázorňuje rez uvedených geometrických objektov rovinou (= dvojrozmerným lineárnym podpriestorom), ktorá prechádza bodom 0 a je totálne kolmá na podpriestor $\mathbf{E}^{n-2}$ (obr. 13). (Prieniky útvarov s rovinou sú označené rovnakými symbolmi ako samy útvary.) Prienik klina s rovinou je uhol s ramenami na priamkach η, η', ktorého vnútro je vyznačené dvojitým šrafovaním. Jeho veľkosť v oblúkovej miere je Schläfliho „uhol polynómov“. Kosínus uhla polynómov v ortogonálnej sústave premenných Schläfli vyčísluje vzorcom

$$-\cos\sphericalangle(p,p') = \frac{a_1a_1' + a_2a_2' + \cdots + a_na_n'}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{{a_1'}^2 + {a_2'}^2 + \cdots + {a_n'}^2}} \tag{6}$$

čo je v súlade s dnešnou definíciou uhla dvoch nadrovín ako uhla normál na tieto nadroviny; uhol týchto normál je na obr. 13 vyznačený dvojitým oblúkom, uhol nadrovín v Schläfliho zmysle je k nemu výplnkový. (To vyjadruje znamienko $-$ vo vzorci.)

Schläfliho kniha obsahuje zovšeobecnenia tradičných rovinných a priestorových útvarov a aj rozšírenia viet o vlastnostiach týchto útvarov. Tak napr. pojem *paraleloschémy* je zovšeobecnením pojmu rovnobežníka z roviny, resp. rovnobežnostena z priestoru. Je definovaná ako súhrn riešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pre ktoré „x_1 je uzavreté medzi konštantami, ktorých rozdiel sa rovná a_1, x_2 je uzavreté medzi dvoma lineárnymi funkciami x_1, rozdiel ktorých sa rovná a_2, ... , x_n je uzavreté medzi dvoma lineárnymi funkciami premenných $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, ktorých rozdiel sa rovná a_n. Je teda paraleloschéma časť totality uzavretá medzi n dvojicami rovnobežných kontinuít“ – rozumie sa – $(n-1)$-rozmerných. V dnešnej symbolike ide o množinu bodov $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, pre ktoré

$$\begin{aligned}
&b_1 \leqq x_1 \leqq b_2, \quad |b_2 - b_1| = a_1\\
&L_1^{(1)}(x_1) \leqq x_2 \leqq L_2^{(1)}(x_1), |L_2^{(1)}(x_1^{(0)}) - L_1^{(1)}(x_1^{(0)})| = a_2 \text{ pre každé } x_1^{(0)} \in [b_1, b_2]\\
&\vdots\\
&L_1^{(n-1)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqq x_n \leqq L_2^{(n-1)}(x_1, \ldots, x_{n-1}),\\
&\quad |L_2^{(n-1)}(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}) - L_1^{(n-1)}(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)})| = a_n
\end{aligned}$$

pričom $L_1^{(j)}$, $L_2^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$ sú lineárne funkcie a $(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)})$ je ľubovoľný bod postupne určenej definičnej oblasti. To je množina bodov ohraničená dvojicami rovnobežných nadrovin, ktorých rovnice sú

$$\begin{aligned}
&x_1 - b_1 = 0 \text{ a } x_2 - b_2 = 0\\
&x_2 - L_1^{(1)}(x_1) = 0 \quad \text{a} \quad x_2 - L_2^{(1)}(x_1) = 0\\
&\vdots\\
&x_n - L_1^{(n-1)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0 \quad \text{a} \quad x_n - L_2^{(n-1)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0
\end{aligned}$$

V týchto nadrovinách ležia steny telesa, ktorým je *n-rozmerný rovnobežnosten*. Teda Schläfliho paraleloschéma v n-rozmernom priestore je n-rozmerný rovnobežnosten.

Ak sa v pravouhlej sústave súradníc stotožní začiatok 0 sústavy súradníc s jedným vrcholom rovnobežnostena a druhé vrcholy n hrán vychádzajúcich z tohto vrcholu sú $(x^{(i)}) = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$, $i = 1, \dots, n$, objem rovnobežnostena sa rovná absolútnej hodnote determinantu matice $(x_j^{(i)})$.

Ďalej Schläfli definuje *polyschémy*, čo sú n-rozmerné *mnohosteny*, odvodzuje vzorce na výpočet objemu niektorých typov mnohostenov a uvádza aj spôsob výpočtu miery merateľnej oblasti v m-rozmernom lineárnom podpriestore. Dokazuje aj rozšírenie Eulerovej vety o mnohostenoch v trojrozmernom priestore na n-rozmerné mnohosteny homeomorfné s nadguľou n-rozmerného priestoru: Ak N_p $(p = 0, 1, \dots, n-1)$ označuje počet p-rozmerných stien mnohostena, platí:

$$1 - N_0 + N_1 - N_2 + \dots + (-1)^{p+1} N_p + \dots + (-1)^n N_{n-1} - (-1)^n = 0$$

(Pre $n = 2$: $1 - N_0 + N_1 - 1 = 0$, z toho $N_0 = N_1$; táto rovnosť vyjadruje fakt, že rovinný mnohouholník má navzájom zhodné počty vrcholov a strán.
Pre $n = 3$: $1 - N_0 + N_1 - N_2 + 1 = 0$, odtiaľ $N_0 - N_1 + N_2 = 2$, čo je klasická Eulerova veta.)

V teórii pravidelných mnohostenov Schläfli nachádza, že pre $n \geqq 5$ existujú práve tri typy pravidelných mnohostenov, a to n-rozmerné zovšeobecnenia pravidelného štvorstenu, kocky a pravidelný mnohosten s počtom $(n-1)$-rozmerných stien $n+1$, resp. $2n$, resp. 2^n. Pre $n = 4$ existuje šesť typov pravidelných mnohostenov s počtom trojrozmerných stien postupne 5, 8, 16, 24, 120 a 300.

V častiach Schläfliho knihy venovaných geometrii guľovej nadplochy a všeobecnejších nelineárnych variet sú ďalšie hodnotné netriviálne výsledky n-rozmernej metrickej geometrie, napr. výpočet miery hranice n-rozmernej nadgule a určenie stredu a hlavných osí „kvadratickej kontinuity", t. j. nadkvadriky.

Schläfliho monografia obsahom značne presahuje dnešný základný vysokoškolský kurz analytickej n-rozmernej geometrie. Jedinou jej väčšou „chybou krásy" je nedostatok výstižnej geometrickej terminológie.

K rozvoju základných ideí a metód viacrozmernej analytickej geometrie prispel aj *Julius Plücker* (1801–1868) viacerými prácami a knižnými publikáciami, z ktorých najzávažnejšie sú *Systém geometrie priestoru v novom analytickom spracovaní* (System der Geometrie des Raumes in neuer analytischen Behandlungsweise, 1846) a *Nová geometria priestoru založená na chápaní priamok ako priestorového prvku* (Neue Geometrie des Raumes gegründet auf Betrachtung der geraden Linien als Raumelement, 1868–9; druhý diel vyšiel posmrtne v redakcii F. Kleina). Plückerov prínos sa ucelenosťou a úrovňou všeobecnosti nevyrovná zásadným výsledkom Grassmanna a Schläfliho. Prekonáva ich však v dvoch ohľadoch: 1. Pracuje s projektívnymi priestormi a homogénnymi súradnicami bodov v nich, čím vytvára predpoklady najvšeobecnejších geometrických výsledkov a ich algebrických formulácií; 2. Poskytuje konkrétne metódy štúdia rozmanitých geometrických objektov, pričom princíp týchto metód umožňuje ich nekomplikované rozšírenie na priestory ľubovoľného rozmeru, zaručuje širokú aplikovateľnosť, značnú produktívnosť a efektivitu.

Plücker chápe priamku ako základný prvok trojrozmerného projektívneho priestoru $\mathbf{P}^3$. Ak je priamka $p \subset \mathbf{P}^3$ určená rôznymi bodmi (a), (b), ktorých homogénne projektívne súradnice sú

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0,0) \text{ a } (b_0, b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0,0),$$

priradí sa k priamke $p = (a)(b)$ šestica „súradníc"

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}; i,j = 0,1,2,3; i < j$$

Prvky p_{ij} základného poľa, nad ktorým je utvorený projektívny priestor, majú vlastnosť homogénnych súradníc a ich vzájomné pomery sú nezávislé od výberu reprezentantov bodov (a), (b). Ak sú totiž $(\mu a_0, \mu a_1, \mu a_2, \mu a_3)$, $\mu \neq 0$, a $(\nu b_0, \nu b_1, \nu b_2, \nu b_3)$, $\nu \neq 0$, iné reprezentanty bodov (a), (b), majú „súradnice" priamky $p = (a)(b)$ hodnoty

$$p'_{ij} = \begin{vmatrix} \mu a_i & \mu a_j \\ \nu b_i & \nu b_j \end{vmatrix} = \mu\nu \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} = \mu\nu p_{ij}, i,j = 0,1,2,3; i < j$$

Vlastnosť $p_{ij} : p_{hk} = p'_{ij} : p'_{hk}$ pre každé prípustné dvojice (i,j), (h,k) je zrejmá, čo znamená, že $(p_{01}, p_{02}, \dots, p_{23})$, $(p'_{01}, p'_{02}, \dots, p'_{23})$ sú ako šestice homogénnych súradníc ekvivalentné. Pretože $(a) \neq (b)$, je aspoň jedna súradnica p_{ij} rôzna od nuly, takže šestica $(p_{01}, p_{02}, \dots, p_{23})$ má vlastnosť homogénnych projektívnych súradníc. Prvky p_{ij} sa nazývajú *Plückerove súradnice priamky* p. Ide o špeciálny prípad Grassmannových súradníc pre $n = 3$, $r = 1$ (prípad jednorozmerného podpriestoru v trojrozmernom priestore).

Plückerove súradnice priamky boli v odbornej verejnosti podstatne známejšie než súradnice Grassmannove. Preto sa v istých kruhoch v prostredí nemecky píšucích autorov (napr. B. L. van der Waerden) istý čas používal názov Plückerove súradnice aj pre Grassmannove súradnice projektívnych podpriestorov akýchkoľvek rozmerov v n-rozmernom projektívnom priestore.

Plückerove súradnice priamky v trojrozmernom projektívnom priestore sú lineárne nezávislé, avšak algebricky závislé. Spĺňajú jediný kvadratický p-vzťah

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0 \tag{7}$$

Plückerove súradnice sa úspešne používali na štúdium priamkových variet v trojrozmernom projektívnom priestore. Sám Plücker ich hojne využíval na štúdium lineárnych komplexov (trojparametrické systémy priamok) a lineárnych kongruencií (dvojparametrické systémy priamok).

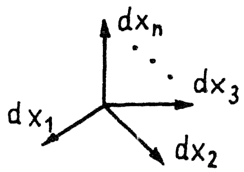
F. Klein považoval Plückerove súradnice $(p_{01}, p_{02}, \dots, p_{23})$ za súradnice bodu v päťrozmernom projektívnom priestore $\mathbf{P}^5$. (Tento postup je špeciálnym prípadom zobrazovania variet na body nejakého priestoru.) Všetky priamky priestoru $\mathbf{P}^3$ sa potom zobrazia práve na body nadkvadriky definovanej rovnicou (7) v priestore $\mathbf{P}^5$.

Osobitné postavenie v budovaní základov n-rozmernej geometrie má (*Georg Friedrich*) *Bernhard Riemann* (1826–1866). Riemann nevypracoval ucelenú teóriu n-rozmernej geometrie ako Grassmann a Schläfli, ani neposkytol nové metódy ako Plücker, ale koncepciou pojmu *n-rozmerná varieta* (Mannigfaltigkeit) sformuloval základnú ideu neskoršej rozsiahlej matematickej oblasti. Základné črty tejto koncepcie vyslovil v svojej habilitačnej prednáške *O hypotézach, ktoré tvoria základ geometrie* (Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, 1854). Podľa Riemanna je n-rozmerná varieta množina bodov

– extendovaná v n nezávislých smeroch, v dôsledku čoho je ľubovoľný bod určený n nezávislými údajmi – súradnicami
– opatrená metrikou, v ktorej štvorec dĺžky oblúka má vyjadrenie

$$ds^2 = \sum_i \sum_j g_{ij} dx_i dx_j \tag{8}$$

kde dx_i, dx_j $(i, j = 1, \ldots, n)$ sú diferenciály nezávislých premenných (obr. 14) a symetrické koeficienty $g_{ij} = g_{ji}$ sú dvakrát diferencovateľné funkcie premenných (súradníc) x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Kvadratická forma (8) je kladne definitná.



Obr. 14

IV. Záver etapy výstavby

Geometrická terminológia n-rozmernej geometrie

Rozhodné kroky v približovaní algebrických základov n-rozmernej geometrie k dnešnej terminológii analytickej n-rozmernej geometrie znamenali práce E. Bettiho a C. Jordana krátko po roku 1870.

Enrico Betti (1823–1892) v práci *O priestoroch ľubovoľného počtu rozmerov* (Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni, 1871) zavádza dnešné chápanie, označovanie a pomenovanie základných objektov n-rozmerného priestoru. Po deklarovaní povahy

– premenných $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ako ľubovoľných nezávislých reálnych čísel (z intervalu $(-\infty, +\infty)$)

nazýva

- *priestorom n rozmerov* „n-násobne nekonečné pole sústav hodnôt týchto premenných“, t. j. karteziánsky súčin $\underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{n} = \mathbf{R}^n$; označenie S_n
- sústavu $(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0)$ nazýva *bod* L^0
- konštanty $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0$ nazýva *súradnice* bodu L^0
- „m rovníc určuje pole sústav hodnôt $n-m$ nezávislých premenných, ktoré je priestorom S_{n-m} toho istého počtu rozmerov obsiahnutým v S_n“
- „priestor jedného jediného rozmeru, tvoriaci jednoduché nekonečno, sa nazýva čiara“

Nedôslednosťou Bettiho terminológie z pohľadu dnešných nárokov na presnosť a jednoznačnosť je nediferencované označovanie lineárnych podpriestorov a ľubovoľných variet toho istého rozmeru názvom „priestor r rozmerov“.

Bettiho terminológiu spresnil a rozvinul *Camille Jordan* (1838–1922) najprv v stručnom náčrte *Rozprava o geometrii s n rozmermi* (Essai sur la géométrie à n dimensions, 1872), neskôr v obšírnejšom rovnomennom článku (1875). Obsahom článku je výstavba n-rozmerného euklidovského priestoru a jeho lineárnych podpriestorov:
Usporiadaná n-tica $(x_1, \ldots, x_n)$ je *bod*, $x_1, \ldots, x_n$ sú jeho *súradnice*.
Lineárna rovnica $L(x_1, \ldots, x_n) = 0$ definuje *rovinu*; dnešný termín je *nadrovina* alebo $(n-1)$-*rovina*.
k lineárnych (lineárne nezávislých) rovníc určuje k-*rovinu*; dnešný názov je $(n-k)$-*rovina*, $(n-k)$-*rozmerný lineárny podpriestor* alebo $(n-k)$-*rozmerná lineárna varieta*.
$n-1$ lineárnych (lineárne nezávislých) rovníc určuje priamku.
Vzdialenosť dvoch bodov $(x_1, \ldots, x_n)$, $(x'_1, \ldots, x'_n)$ je definovaná zhodne ako dnes (v pravouhlej sústave súradníc):

$$\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + \cdots + (x'_n - x_n)^2}$$

Jordan podáva charakterizáciu rovnobežnosti a kolmosti podpriestorov, opisuje transformáciu sústavy súradníc a nachádza metrické invarianty dvojice lineárnych podpriestorov — stacionárny uhol a vzdialenosť týchto podpriestorov. Niektoré úlohy rieši pomocou vlastných čísel matíc a kanonického tvaru matíc, ktorý je po ňom pomenovaný. Tak je nájdený napr. kanonický tvar otáčania v n-rozmernom priestore.

Jordanovou prácou bol v podstate zavŕšený proces kodifikácie modernej terminológie n-rozmernej euklidovskej geometrie. Jediný významný odklon od nej je v nazvaní $(n-k)$-rozmerného lineárneho podpriestoru k-rovinou.

Zhrnutie. Za tri desaťročia, zhruba v rokoch 1840–1870 boli vybudované algebricko-analytické základy n-rozmernej geometrie a jej terminológie. Všeobecný pokrok geometrie v ďalších početných oblastiach sa taktiež datuje k r. 1870. Nástup modernej geometrie bol ešte väčšinou záležitosťou vzdialenej budúcnosti, ale metódy a terminológia analytickej geometrie n-rozmerného priestoru stáli už plne k dispozícii.

LITERATÚRA

1. Rozenfel'd, B. A., *Istorija nejevklidovoj geometrii*, Nauka, Moskva 1976.
2. Markuševič, A. I., Laptev, B. L., Medvedev, F. A., Rozenfel'd, B. A., *Matematika XIX veka*, Nauka, Moskva 1981.
3. Bašmakova, I. G., Belyj, Ju. A., Demidov, S. S., Rozenfel'd, B. A., Juškevič, A. P., *Chrestomatija po istorii matematiki. Arifmetika i algebra. Teorija čisel. Geometrija*, Prosveščenije, Moskva 1976.
4. Struik, D. J., *Abriss der Geschichte der Mathematik*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.
5. Wussing, H., *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979.
6. Boyer, C. B., *History of mathematics*, Wiley, New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore 1989.
7. van der Waerden, B. L., *Einführung in die algebraische Geometrie*, Springer, Berlin 1939.
8. Hodge, W. V. D., Pedoe, D., *Methods of algebraic geometry* I, Cambridge 1947.
9. Grassmann, H. G., *Die Ausdehnungslehre*, Leipzig 1862.
10. Plücker, J., *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linien als Raumelement*, Leipzig, 1868.