Ivan Kolář
Erlangenský program

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v 19. století. Sborník přednášek z 15. letní školy Historie matematiky, Vyškov, 26.-30.8.1994. (Czech). Praha: Prometheus, 1996. pp. 82–87.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400576

FELIX KLEIN

(1849 – 1925)

ERLANGENSKÝ PROGRAM

IVAN KOLÁŘ

Mnozí autoři, mezi nimi i N. Bourbaki, nazývají 19. století „zlatým věkem geometrie". Historie geometrie v 19. století je vskutku velmi bohatá. Tato přednáška je zaměřena především na některé významné rysy vývoje geometrie ve druhé polovině 19. století, které více či méně souvisejí s tzv. *Erlangenským programem.*

Tento název dostala přednáška Felixe Kleina (1849–1925) *Vegleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Srovnávací úvahy o novějších geometrických bádáních), kterou přednesl r. 1872 v souvislosti s nástupem na místo profesora erlangenské univerzity. Přednáška vyšla jako samostatná brožura téhož roku. Věnujme nejprve několik slov jejímu autorovi.

Byl žákem Julia Plückera (1801–1868). Již r. 1870 se během pobytu v Paříži seznámil s vynikajícím geometrem norského původu Sophusem Lie (1842–1899) a navázal s ním velmi plodnou spolupráci. V Erlangenu zůstal Klein do r. 1875, potom působil krátkodobě v Mnichově a Lipsku a od r. 1886 byl profesorem na významné univerzitě v Göttingen. Byl to neobyčejně vzdělaný a mimořádně tvořivý matematik, který se vedle geometrie zajímal i o řadu dalších oborů matematiky, včetně její historie. Od r. 1910 pracoval na knize *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik in 19. Jahrhundert*, která sice zůstala nedokončena, ale její první dva díly vyšly v Berlíně r. 1926 a 1927. Od r. 1876 byl Klein hlavním redaktorem časopisu *Mathematische Annalen* a inicioval rovněž vydávání *Mathematische Enzyklopädie* na začátku 20. století.

Bohatost Kleinovy tvorby nám umožňuje, abychom atmosféru vzniku Erlangenského programu navodili výkladem tří jeho originálních výsledků.

1. Beltramiho – Kleinův model Lobačevského geometrie. Omezíme se na dvourozměrný případ. Body tohoto modelu tvoří vnitřek elipsy E v projektivní rovině, jeho přímky jsou průniky projektivních přímek s vnitřkem E a shodné transformace jsou takové projektivní transformace, které nechávají E samodružnou jako celek. Poznamenáváme, že Eugenio Beltrami (1835–1900) byl předním představitelem vynikající italské geometrické školy druhé poloviny 19. století.

2. Kleinova kvadrika. V návaznosti na práce z pozůstalosti svého učitele J. Plückera ukázal Klein, že přímky v trojrozměrném projektivním prostoru se přirozeně identifikují s body jisté kvadriky v pětirozměrném projektivním prostoru, která dnes nese jeho jméno.

3. Kleinova láhev. Je to dvourozměrná neorientovatelná plocha, kterou však – podobně jako projektivní rovinu – nelze realizovat v trojrozměrném eukleidovském prostoru. Nejjednodušší neorientovatelnou plochu sestrojil Ferdinand Möbius (1790–1868). Möbiův list vznikne tak, že v obdélníku identifikujeme s obrácenou orientací dvě protější strany (jeho model tedy získáme tím, že slepíme jednou přetočený pruh papíru). Kleinovu láhev můžeme vytvořit tak, že v anuloidu „vyřízneme" malý kruh a na hraniční kružnici „nalepíme" okraj Möbiova listu (fyzicky ovšem toto lepení nelze provést).

K dalšímu významnému pojmu Kleinova prostoru se dostaneme později.

Je dobře známo, že ve vývoji každé vědy, a matematika není výjimkou, se střídají období přímého rozpracovávání konkrétních problémů a období hledání unifikujících idejí. Tyto ideje ve svých důsledcích umožňují podstatně hlubší pohledy na společné principy několika dílčích oborů a spolupodílejí se tak na vytváření nových nástrojů na řešení konkrétních problémů. Erlangenský program sehrál tuto unifikující úlohu v rozvoji geometrie druhé poloviny 19. století. Již v jeho úvodu Klein zdůrazňuje, že ve vývoji geometrie za posledních 50 let zaujímá projektivní geometrie prvořadé místo. Vznikla ze studia středového promítání v eukleidovském prostoru a z počátku se sledovalo pouze to, že metrické a afinní vlastnosti se při středovém promítání nezachovávají. V nedávné (tehdy) době se však ukázalo, že afinní vlastnosti lze v projektivní geometrii rekonstruovat zadáním nevlastní roviny v projektivním prostoru, metrické vlastnosti pak zadáním imaginární kuželosečky v nevlastní rovině. Beltramiho – Kleinův model podobným způsobem realizuje i neeukleidovskou geometrii Lobačevského.

V samotném úvodu Klein rovněž zaujímá jasné stanovisko ke sporům mezi přívrženci syntetického a analytického zaměření v geometrii, které byly v 19. století časté. Analytická metoda umožňuje využít dobře rozpracovaný formální aparát algebry, zatímco syntetická metoda vytváří podmínky pro plné využití prostorové představivosti. Z didaktického hlediska je ovšem třeba prostorovou představivost studentů maximálně rozvíjet.* Klein rovněž zdůrazňuje, že geometrii je třeba zásadně chápat jako geometrii vícerozměrnou. Základy n-rozměrné geometrie položil sice Günther Grassman (1809–1877) svou knihou o „rozložitosti" (Ausdehnungslehre) již r. 1844, ale k plnému pochopení jeho myšlenek došlo až později. Klein poukazuje na to, že vícerozměrné objekty jsou například tvořeny různými geometrickými útvary v trojrozměrném prostoru: přímky tvoří objekt čtyřrozměrný, kvadriky dokonce devítirozměrnou *varietu*.** Podotýkáme, že také geometrické transformační grupy tvoří vícerozměrné objekty. Za speciální poslání své brožury pak Klein považuje výklad výsledků, které nedávno získal spolu s Lie.

Programotvorný charakter má především první kapitola uvažované Kleinovy práce. Ukazuje se zde na příkladech, že geometrické vlastnosti nezávisejí na

---

* Obecněji lze říci, že Erlangenský program ustavuje i určitý „liberalismus" v geometrii: definitivně ukončuje dobové spory o tom, co je „skutečná geometrie" a ukazuje i rozmanitost existujících geometrií.

** V originále je použito v němčině běžné slovo *Mannigfaltigkeit*, jehož základní význam je *rozmanitost*. V české geometrické terminologii je jeho ekvivalentem cizí slovo *varieta*, jež se chápe již v onom technickém smyslu, který se ustálil až v prvé polovině 20. století. Klein užívá slovo *Mannigfaltigkeit* v jeho naivním významu, kterému v češtině snad nejlépe odpovídá výraz *vícerozměrné množství*.

mnoha klasických pojmech, ale jsou charakterizovány následovně. S daným geometrickým prostorem je spojena jistá grupa transformací, kterou Klein nazývá *hlavní grupou*, a geometrické vlastnosti se nemění při transformacích hlavní grupy. A lze říci také obráceně: geometrické vlastnosti jsou vyznačeny tím, že se nemění při transformacích hlavní grupy. Jako zobecnění (dosavadní) geometrie se tedy objevuje následující velmi obsažná problematika:

Je dána varieta a na ní transformační grupa; je třeba studovat ty vlastnosti útvarů této variety, které se nemění při transformacích grupy.

Z hlediska (tehdy) nové terminologie, která byla rozpracována zejména v souvislosti s grupami lineárních transformací, lze tento problém vyjádřit rovněž takto:

Je dána varieta a na ní transformační grupa. Je třeba rozvinout teorii invariantů této grupy.

Musíme vyzvednout, že tento Kleinův přístup otevřel cestu ke vzájemnému ovlivňování geometrie a algebraické teorie invariantů, za jejíž východisko se považuje práce Alfreda Clebsche (1833–1872) z r. 1871 o teorii binárních forem. Klasická algebraická teorie invariantů a její geometrické aplikace byly pak významným směrem matematiky konce 19. a začátku 20. století. Je však třeba upozornit na to, že idea hledání invariantů libovolné transformační grupy je obvyklé geometrii dosti vzdálena. K upřesnění pojmu *geometrická transformační grupa* se proto za chvíli vrátíme.

V dalších kapitolách Kleinovy brožury je značná pozornost věnována „přenášení prostřednictvím zobrazení“. Konkrétní porovnávání různých geometrií historicky významně přispělo k vytvoření obecného pojmu *isomorfismu*, který je v dnešní matematice běžný. Klein probírá i Möbiovu sférickou geometrii, jejíž základní konstrukcí je klasická kruhová inverse a její srovnání s přímkovou geometrií, které podal Lie. Část věnovaná komplexním číslům představuje významné podněty pro využití geometrického přístupu v teorii funkcí komplexní proměnné. Stručně se charakterizují i racionální transformace, které patří do algebraické geometrie. Do Kleinova programu spadá i *Analysis Situs*, což byl tehdejší název pro *topologii*. Z dnešního hlediska je zajímavé, že Klein s pojmem *varieta* nezbytně spojuje *diferencovatelnost*. Píše: *Bodová transformace má v nekonečně malé části vždy charakter lineární transformace*. Dále je vyložena Lieova teorie *kontaktních transformací*, které nacházejí významné aplikace v mechanice. Z obecného hlediska poznamenáváme, že v tomto případě jde o transformace závisející na „nekonečně mnoha parametrech“. Za vyzvednutí ještě stojí, že v další části Klein fakticky překračuje hraice svého vlastního programu a rozebírá diferenciálně – geometrický přístup k prostorům s konstantní křivostí. Důvodem jsou jejich souvislosti s oběma základními typy neeukleidovských geometrií: *hyperbolickou* (či *Lobačevského*), která se lokálně realizuje na prostorech se zápornou konstantní křivostí, a *eliptickou*, která se lokálně realizuje na prostorech s kladnou konstantní přivostí. K těmto zásadním výsledkům dospěl Bernhard Riemann (1826–1866).

Vytvoření rozumného pojmu *geometrické transformační grupy* se opírá o práce S. Lie, i když on je studoval pouze lokálně. Podal však úplnou charakterizaci jejich infinitesimálních vlastností, která má pro celou teorii základní význam. Dnešní přístup, který je *globální*, se opírá o pojem *hladké m-rozměrné variety* M. To je především prostor, který lokálně vypadá jako prostor $\mathbb{R}^m$ všech m-tic reálných čísel. Za výstižný příklad dvourozměrné hladké variety lze považovat jednotkovou kouli v $\mathbb{R}^3$. Ideu hladkosti můžeme stručně charakterizovat následovně. Je-li N další hladká n-rozměrná varieta, pak některá zobrazení z M do N jsou vyznačena jako *hladká*, a to tak, že lokálně vypadají jako diferencovatelná zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$.

Studium hladkých zobrazení mezi hladkými varietami se může opřít o diferenciální počet. *Lieovou grupou* nyní nazýváme takovou grupu G, která je současně hladkou varietou a grupové násobení je hladkým zobrazením $G \times G \to G$. *Hladkou transformační grupou* na hladké varietě M rozumíme Lieovu grupu G spolu s pravidlem ϱ, které každému prvku $y \in G$ přiřazuje hladkou transformaci $\varrho(g)$ variety M do sebe. Přitom se předpokládá, že ϱ je homomorfismus grupy G do grupy všech transformací množiny M a přirozeně vznikající zobrazení $G \times M \to M$, $(g, x) \longmapsto \varrho(g)(x)$ je hladké.

Kleinovy zásluhy o základy současné geometrie jsou oceněny i tím, že *Kleinovým prostorem* se dnes nazývá hladká varieta M spolu s hladkou transformační grupou G, přičemž se ještě předpokládá, že pro každé $x, y \in M$ existuje alespoň jedno $y \in G$ takové, že $y = \varrho(g)(x)$. Při splnění této podmínky transitivnosti lze totiž vytvořit ucelenou teorii Kleinových prostorů. Je třeba však poznamenat, že uvedená podmínka je splněna u výchozích prostorů, zatímco u prostorů z nich různým způsobem odvozených se transitivnost často ztrácí.

Nejdůležitějším Lieovým objevem byla konstrukce, která každé Lieově grupě G přiřazuje jednoduchý algebraický objekt, který se dnes nazývá *Lieovou algebrou* grupy G a tuto grupu lokálně zcela určuje. Takto lze mnohé geometrické problémy redukovat na klasifikační problémy o Lieových algebrách. Velkého pokroku v této oblasti bylo dosaženo již koncem 19. století, a to zejména v pracích vynikajícího francouzského geometra Elie Cartana (1869–1951). Je proto poněkud překvapivé (a je to jedním z historických paradoxů vývoje matematiky), že dodnes se nepodařilo získat úplnou klasifikaci všech Lieových algeber, i když se tímto problémem již více než 100 let intenzívně zabývá mnoho skvělých mozků. Poznamenejme rovněž, že po vytvoření obecného pojmu Kleinova prostoru se začala systematicky studovat i diferenciální geometrie jejich podvariet.

Podíváme-li se na Kleinovy kvadriky z hlediska Erlangenského programu, zjistíme, že přímková geometrie v trojrozměrném projektivním prostoru je geometrií této kvadriky. To je fakt, který nachází mnohá konkrétní využití např. v různých oblastech diferenciální geometrie. Ve druhé polovině 19. století byla podrobně studována řada podobných modelů pro sférickou a jiné geometrie. Jasné hledisko Erlangenského programu způsobilo také zásadní rozšíření pojmu *neeukleidovská geometrie.* Původně se sem řadila jen geometrie Lobačevského a již zmíněná eliptická geometrie. Dnes se pod neeukleidovskou geometrií často rozumí geometrie nějaké podgrupy projektivních transformací, která zachovává předepsané „absolutní“ útvary. Ty jsou zpravidla tvořeny lineárními a kvadratickými objekty. Při původním vědeckém výzkumu v ní se využívá zejména teorie Lieových algeber.

Do rámce Erlangenského programu spadá i *Analysis Situs* ve smyslu geometricky chápané topologie. Globální otázky jsou natolik přirozeně spojeny s klasickou geometrií, že dílčí topologické problémy byly studovány prakticky všemi významnými geometry 19. století. Samostatnou vědou se však topologie stala až pracemi Henri Poincarého (1854–1912). Byl to vynikající matematik, fyzik, astronom a filosof.† V posledních letech 19. století Poincaré hluboce studoval globální otázky teorie soustav obyčejných diferenciálních rovnic (či dynamických systémů). Při této příležitosti charakterizoval základní topologické invarianty některých geometrických prostorů. Dnes se této části topologie říká *algebraická*, protože hlavním nástrojem ke studiu topologických prostorů jsou různé algebraické struktury (grupy, okruhy apod.) z nich odvozené. Vlastní rozvoj této významné matematické disciplíny však spadá již do 20. století.

Snad se nám podařilo již dostatečně doložit, že Erlangenský program měl podstatný vliv na další rozvoj geometrie. Závěrem ještě stručně vyjádříme náš názor na význam Erlangenského programu pro současnou geometrii.

Svoji úlohu nejlépe naplnil tím, že zcela pronikl do dnešního geometrického myšlení a tím vlastně ustoupil do pozadí. Ve 20. století se rozvíjí řada geometrických disciplín, které v mnoha směrech již nelze klasifikovat z hledisek Erlangenského programu. To platí především o *Riemannově geometrii*, která se stala i důležitým nástrojem pro obecnou teorii relativity. Podobný charakter má také *teorie konexí* s významnými aplikacemi v tzv. *kalibračních teoriích* matematické fyziky. Podrobnější rozbor této problematiky však již překračuje rámec tohoto textu.

O geometrii se právem říká, že je to jedna z nejstarších věd vůbec, která však prochází neustálým procesem omlazování a tím si uchovává půvab věčného mládí. A Kleinovy ideje trvale zůstávají její podstatnou složkou.

Formou určitého dodatku bychom ještě rádi velmi stručně upozornili, že v matematice 20. století se objevila nová unifikující idea, která podle našeho soudu hraje v mnoha směrech úlohu podobnou oné, kterou měl kdysi Erlangenský program. Je to *teorie kategorií*, která vznikla při studiu problémů algebraické topologie a zasahuje celou matematiku. Omezíme se na výklad nejjednoduššího případu, který je svázán s geometrií.

Uvažujeme-li jeden konečněrozměrný vektorový prostor V, pak všechny lineární isomorfismy $V \to V$ tvoří grupu. Vezmeme-li v úvahu všechny vektorové prostory konečné dimense, pak všechna lineární zobrazení mezi nimi tvoří *kategorii*. Ideje tohoto typu hrají významnou organizační úlohu i v řadě otázek moderní geometrie a mají zde charakter přímého zobecnění Erlangenského programu.

† Doložíme to pouze konstatováním, že dospěl k základním myšlenkám speciální teorie relativity r. 1905 současně s Einsteinem.