Eduard Weyr (1852-1903)

Zbyněk Nádeník
O geometrických pracích Eduarda Weyra

In: Jindřich Bečvář (editor): Eduard Weyr (1852-1903). (Czech). Praha: Prometheus, 1995. pp. 67–90.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400554

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

O GEOMETRICKÝCH PRACÍCH EDUARDA WEYRA

Zbyněk Nádeník

V poslední třetině minulého století působila v Čechách, převážně v Praze, skupina českých středoškolských a vysokoškolských učitelů, jejichž vědecký zájem se soustřeďoval na geometrii a v ní výrazně na geometrii syntetickou. K této skupině patřil asi polovinou své vědecké práce i Eduard Weyr.

Třetí částí obsáhlého nekrologu *O životě a činnosti Eduarda Weyra*, který byl zveřejněn roku 1905 v *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky*, je stať Jana Sobotky *O Weyrově činnosti v geometrii* (viz [14]). Jan Sobotka [1]) studoval od roku 1881 v Praze též u Eduarda Weyra. Znal ho tedy a byl jistě dobře obeznámen s jeho vědeckou prací. Z českých matematiků na začátku našeho století byl vskutku povolán k zhodnocení geometrického díla Eduarda Weyra.

Z druhé strany je však třeba připustit, že osobní známost s Eduardem Weyrem a jeho nedávné úmrtí mohly Sobotku poněkud vázat. Na dnešní pohled, který je vzdálený od Sobotkova devadesát let, už tyto okolnosti nepůsobí. To vysvětluje, že další řádky jsou místy kritičtější než Sobotkovy.

Eduard Weyr svou první práci [W1] — patřila geometrii — publikoval ve zprávách vídeňské Akademie věd v roce 1868, tedy ve svých šestnácti letech. To je zcela výjimečný jev. Samozřejmě připomíná Blaise Pascala (1623–1662), který ve stejném věku objevil svou slavnou větu o šestiúhelníku vepsaném do kuželosečky. Podobnost však jde dál. Weyrova práce se týkala dvojic průsečíků, které na kuželosečce procházející dvěma ze čtyř základních bodů svazku křivek 2. stupně ještě vytínají kuželosečky tohoto svazku. Zobecňovala větu, kterou o průsečících přímky s kuželosečkami svazku vyslovil roku 1639 Girard Desargues (1593–1662). Tedy jak Pascalův, tak Weyrův objev patří do projektivní geometrie kuželoseček. Eduardův bratr Emil se od počátku své vědecké dráhy rovněž zajímal o projektivní či syntetickou geometrii. Jeho vliv na mladšího Eduarda je samozřejmý. Ale i tak by Eduardův výkon bez zcela mimořádného nadání a píle byl nemožný. Weyrova věta totiž předpokládá — pro pouhé porozumění, natož pak pro objevení — přece jen větší znalosti z projektivní geometrie. Ve společném díle [W19] *Základové vyšší geometrie* II z roku 1874 uvádějí bratři Weyrové Eduardovu větu v kap. IX: *Věta Desarguesova* (viz str. 166–179, zvláště odst. 77, *Věta Desarguesova v znění širším*); původní tvar odvozují též specializací pro ten případ, že kuželosečka procházející dvěma základními body svazku degeneruje ve dvě přímky, z nichž jedna jde oněmi dvěma základními body. Eduard Weyr ve vlastní knize [W87] *Projektivná geometrie základných útvarů prvního řádu* z roku 1898 se svou větou a její dualizací zabývá v kapitole IX, par. 83: *Zobecnění věty Desarguesovy*, aniž by se zmínil, že sám je jejím autorem. Jan Vojtěch v kompendiu *Geometrie projektivní* (Praha 1932) připomíná Weyrovu větu na str. 201. Václav Hlavatý v *Projektivní geometrii* I (Praha 1944) ji uvádí v kapitole IV v odd. 6: *Weyrovo zobecnění Desarguesovy poučky pro svazek* a duální tvar v odd. 15: *Weyrovo zobecnění Desarguesovy poučky pro osnovu.* Bohumil Bydžovský v *Úvodu do algebraické geometrie* (Praha 1948) připojuje k větě na str. 229 poznámku, že Weyr ji objevil jako šestnáctiletý. Konečně Karel Havlíček v knize *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček* (Praha 1956) na str. 132–133 výslovně připisuje větu i její dualizaci Eduardu Weyrovi. Aplikací věty ve fotogrammetrii se zabývají František Kadeřávek, Josef Klíma a Josef Kounovský v knize *Deskriptivní geometrie* I (Praha 1929) v odstavcích 18 a 201.

Geometrii patří zhruba polovina Weyrových prací. Jsou z let 1868 – 1881, pak z let 1889 – 1899; poslední geometrickou prací [W94] z roku 1902 Weyr své vědecké dílo uzavřel.

Jan Sobotka rozdělil svoji stať *O Weyrově činnosti v geometrii* na nejobsáhlejší část I – projektivní geometrie (str. 490–501), část II – algebraické prostorové křivky (str. 501–503), část III – geometrie diferenciální (str. 503–504), část IV – geometrie kinematická (str. 504–505), část V – vzájemné zobrazení ploch (str. 505–506), část VI – ostatní a knihy (str. 506–509).

Zvolím jiné rozdělení. Pod číslo práce z Weyrova seznamu publikací uvedu stránku, na níž Sobotka ve své stati o příslušné Weyrově práci referuje. Přidržím se tedy tohoto schématu:

1. Kuželosečky a kvadriky

[W1]	[W5]	[W12]	[W15]	[W80]	[W86]	[W88]	[W94]
501	500	506	500	507	507	491	499

2. Projektivní a syntetická geometrie

[W6]	[W31]	[W37]	[W65] ≡ [W69]	[W66]	[W81]	[W84]
498	490	493	490	494	–	494

3. Geometrické příbuznosti

[W2]	[W3]	[W7]	[W10]	[W62]	[W81a]	[W89]
496	507	498	498	–	–	497

4. Diferenciální geometrie křivek

[W13]	[W38]	[W76]	[W79]
505	504	505	503

5. Diferenciální geometrie ploch

[W18]	[W21]	[W27]	[W28]	[W34]	[W35]	[W78]	[W83]	[W85]
505	500	505	503	504	505	507	–	503

6. Algebraické křivky

[W14]	[W16]	[W16a]	[W17]	[W20]	[W32]
501	502	–	502	502	507

7. Knihy o projektivní geometrii

[W8]	[W19]	[W29]	[W87]
508	508	508	508

V německé matematické encyklopedii (*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*) ve svazcích III věnovaných geometrii (vycházely počátkem našeho století) jsou geometrické práce Eduarda Weyra citovány na těchto stranách:

1.část	1. pol.	391	[W8] [W19] [W29]	423	[W3]	432	[W1]	442	[W89]
	2. pol.	1240	[W5]						
2.část	1. pol.	92	[W1]	130	[W5]	261	[W14]	289	[W14]
		415	[W14] [W20]			668	[W69]		
	2. pol. A	1309	[W14]	1320	[W14] [W17] [W20]				
	2. pol. B	1486	[W69]	1658	[W69]	1902	[W32]	1954	[W2]
		2014	[W2]	2015	[W88]	2021	[W2]	2062	[W27]

Nejčastěji – totiž pětkrát – je citována inaugurační práce [W14] o algebraických prostorových křivkách. Třikrát je citována práce [W2] o kvadratických příbuznostech, kterou Weyr uveřejnil jako sedmnáctiletý, a práce [W69] ≡ [W65] o plochách se systémem kuželoseček, k níž ihned přejdu. Třetina citací se vztahuje k pracím z algebraické geometrie, které v celkovém počtu Weyrových geometrických prací tvoří méně než šestinu. To jistě svědčí o významu Weyrových prací z algebraické geometrie, současně je však třeba pamatovat, že tato disciplina byla ještě po přelomu století velice rozsáhlá a to se též zřetelně projevilo v jejím dominantním zastoupení ve zmíněné encyklopedii.

Jakýmsi protějškem obdivuhodné tématické šířky Weyrových geometrických prací je různost jejich vědeckých hodnot, která sahá od prací velmi vysokých kvalit až po články, které se pohybují v rovině jednoduché úlohy nebo metodického zpracování. Uvedu krajní případy.

Nejvyšší hodnotu připisuji – zcela ve shodě s Janem Sobotkou – Weyrově práci [W65] *O teorii ploch* (v německé versi [W69]). Vyšla v řadě *Spisů poctěných jubilejní cenou Král. české společnosti nauk v Praze.* Eduard Weyr v předcházejícím desetiletém období uveřejnil jen dvě geometrické práce, ale jistě se musel i v této době problematikou studie [W65] dlouho zabývat. Jde o pokračování a hlavně rozvinutí a prohloubení myšlenek vyslovených už o třináct let dříve v práci [W31] *Sur l'arrangement des plans tangents de certaines surfaces.* Obsah spisu [W65] vystihnou výňatky z posudků (viz [W65], str. V–VIII), které vypracovali Josef Šolín a František Machovec. [2])

Šolínův posudek ocituji celý až na poslední čtyři řádky obsahující doporučení k udělení ceny.

Obdobou ku známému zákonu, který váže tečné roviny ploch přímkových, náležejí-li dotyčné body téže plošné přímce, vyšetřuje se tu komplikovanější ovšem zákon tečných rovin ku plochám kuželosečkovým, totiž plochám, jichž každým bodem prochází kuželosečka na ploše položená, a sice běží tu o tečné roviny v bodech jedné takové kuželosečky. Aby dospěl k žádoucím výsledkům, přihlíží spisovatel k pomocným plochám přímkovým, obsahujícím dvě nekonečeně blízké kuželosečky dané plochy. Tyto dvě kuželosečky stanoví jedinou plochu rozvinutelnou a nesčíslné plochy zborcené; spisovatel užívá jednak oné plochy rozvinutelné, jednak těch ploch zborcených, které mají dvě přímky řídící; dovozuje existenci takových ploch a strojí řídící přímky jejich, prohlédaje k možným vzájemným polohám obou nekonečeně blízkých kuželoseček. Na vyvozených relacích zakládá se řešení úlohy: Dána jest jedna kuželosečka plošná a roviny tečné v sedmi bodech jejích; sestrojiti tečnou rovinu v kterémkoli jiném bodě téže křivky. Ryze geometrickému vyšetřování příslušných relací věnováno jest šest kapitol předložené práce; v kapitole VII. odvozují se jisté vztahy znova způsobem analytickým, kapitola VIII. ukazuje, kterak způsobem vyloženým dospíváme při jisté zvláštní ploše 4. stupně ku známým, správným výsledkům. (viz [W65], str. V–VI)

Z delšího posudku Machovcova vypustím popis obsahu a ocituji pasáž, která hodnotí pracovní metodu. Machovec se zmiňuje o práci [W31] a pokračuje:

Větší ještě důraz kladu na rozdíl ve formě obou prací. Kdežto totiž ono pojednání jest analytické, shodujíc se v tomto směru a i v obsahu asi s polovinou kapitoly sedmé předloženého spisu, řeší spisovatel celý problem v prvních šesti kapitolách této práce jen prostředky, které poskytuje geometrie synthetická. Okolnost tato zasluhuje zvláštního ocenění, uváží-li se vedle nesnadnosti tohoto problemu, že prostředky synthetické geometrie nejsou tak všeobecné jako prostředky geometrie analytické, za to ale, že tvar, ve kterém své výsledky podává geometrie synthetická, jest povaze uvedeného problemu mnohem přiměřenější, nežli tvar výsledků analytických.

Způsob spisovatelova vyšetřování vyniká i v části synthetické i v analytické neobyčejnou přesností. Zvláště pak části pro synthetickou geometrii nejchoulostivější, v nichž jde o přechod od veličin konečných k veličinám nekonečně *malým, nebo kde jest vyšetřiti všecky případy, které při určitém problemu nastati mohou, zdají se mně býti vzorem přesnosti geometrické.* (viz [W65], str. VII–VIII)

Je třeba pamatovat, že Machovcovo hodnocení je z doby před sto lety, kdy syntetická geometrie ještě zářila a byla v zenitu. Z dnešního pohledu je Machovcovo ocenění syntetické metody rozporné. Je nutné s důrazem říci, že syntetická geometrie se vypracovala k velice důmyslným konstrukcím, které lze ovládnout jen s velkou intuicí po delším usilovném studiu a cviku — v plné míře to platí o Weyrově práci [W65]; v infinitesimálních úvahách s „nekonečně blízkými" elementy jsou však skryta úskalí, která se syntetické geometrii nepodařilo překonat. [3]) O Weyrově intuici a konstrukční virtuozitě, které se asi nejzřetelněji projevily právě v pojednání [W65], je třeba se vyslovit s největším respektem bez ohledu na pozdější oprávněné kritické postoje vůči infinitesimálním přechodům. Weyrovo stanovisko k syntetické geometrii zřetelně dokreslují poslední řádky předmluvy ke spisu [W65]. Weyr píše:

Ku spisu ... nepřidáno obrazců; takových dovedou čtenáři, k nimž se tento spis obrací, buď postrádati aneb si jich snadno sami pořídí; nad to souhlasím úplně s příležitostným výrokem Steinera, citovaným v předmluvě k Reye-ově geometrii polohy [viz monografie [10]], *že stereometrické úvahy jen tenkráte správně pojímáme, nazíráme-li na ně pouhou vnitřní obrazotvorností, beze všech pomůcek znázorňovacích.* (viz [W65], str. 4)

To je ovšem nemalý nárok na čtenáře, který mu může vyhovět jen tehdy, prošel-li hlubší přípravou v syntetické geometrii.

Práce z pólu zcela opačného než spis [W65] je článek [W12], *O kuželi druhého stupně.* Způsobem, který lze zkrátit na několik řádků, je v ní odvozena relace mezi úhly φ_a, φ_b, φ_c dvojic přímek, v nichž kvadratickou kuželovou plochu protínají její hlavní roviny: Rovnice této plochy v pravoúhlé soustavě, v níž hlavní roviny jsou souřadnicové, má tvar $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 0$, při němž $\mathrm{tg}^2(\varphi_a/2) = -b/c$ a cycl. Tudíž $\mathrm{tg}^2(\varphi_a/2)\,\mathrm{tg}^2(\varphi_b/2)\,\mathrm{tg}^2(\varphi_c/2) = -1$ a z toho zcela elementárními goniometrickými úpravami vychází Weyrův závěr $\cos\varphi_a \cos\varphi_b + \text{cycl.} = -1$. Rozdíl mezi reálností a imaginárností je zcela setřen.

Ještě je třeba připomenout dvě Weyrovy zásluhy.

První se týká české terminologie pro syntetickou projektivní geometrii. Tu začal v Praze přednášet — ovšem německy — za svého pražského působení v létech 1864 – 1867 Wilhelm Fiedler (1832–1912). České přednášky z projektivní geometrie zahájil Josef Šolín (autor výše zmíněného posudku o spisu [W65]) v roce 1870 a o dva roky později je vydal litograficky. Společné dílo bratří Weyrů *Základové vyšší geometrie* z let 1871–1878 ([W8] + [W19] + [W29]) je tak první českou učebnicí projektivní geometrie. Přispělo podstatně k ustálení české terminologie, které bylo dokončeno Eduardem Weyrem v knize [W87] *Projektivná geometrie základných útvarů prvního řádu.* Rovněž nelze přehlédnout účast Eduarda Weyra při vytváření českého názvosloví pro diferenciální geometrii. [4])

Eduard Weyr byl pravděpodobně první, kdo česky uveřejnil obsáhlou informaci o N. I. Lobačevském (1792–1856) a neeuklidovské geometrii. V říjnu 1893 se na kazaňské univerzitě konaly slavnosti k 100. výročí narození Lobačevského. Univerzita k nim vydala reprezentativní sborník, v němž byly mimo jiné projevy profesorů F. M. Suvorova (1845–1911) a A. V. Vasiljeva (1853–1929) o neeuklidovské geometrii a Lobačevském jako matematikovi. Z těchto dvou projevů Eduard Weyr vybral podstatné části, přeložil je a uveřejnil pod názvem *Oslava stoleté ročnice dne narození N. I. Lobačevského cís. Kazaňskou universitou* (viz [W82a]). [5]) Je třeba připojit, že ve druhé polovině 19. století nenalezla neeuklidovská geometrie vědecký ohlas mezi českými matematiky; první českou učebnicí o ní je teprve *Úvod do neeuklidovské geometrie* Václava Hlavatého (1894–1969) z roku 1926.

Patří se, abych z mnoha Weyrových studentů na pražské technice a univerzitě připomenul alespoň jména těch, kteří jsou nejznámější. [6])

K nejstarším patří Matyáš Lerch, který ještě v době, kdy byl Eduard Weyr asistentem na pražské technice, ho za jeho nepřítomnosti zastupoval. První Lerchova práce patří geometrii a vznikla jistě za Weyrova vlivu. Ačkoliv se Lerch brzy obrátil k jiným oblastem matematiky, trvale se ke geometrii vracel. [7])

Celou svou vědeckou práci věnovali geometrii výše zmíněný Jan Sobotka a téměř o generaci mladší Jan Vojtěch, Bohumil Bydžovský a Ladislav Seifert. [8]) Všechny tři Eduard Weyr výrazně ovlivnil; první se zabýval projektivní geometrií, druhý algebraickou geometrií, třetí algebraickou i deskriptivní geometrií.

Na orientaci vědecké práce Eduarda Weyra, tj. jeho příklon ke geometrii, měl pravděpodobně největší zásluhu jeho starší bratr Emil. Za svůj krátký život — zemřel ve 46 letech — publikoval v období 1867 – 1894 přes 130 prací a několik knih, téměř výlučně z geometrie. Přestože od svých 27 let pracoval v cizině (od roku 1875 byl profesorem vídeňské univerzity), s českým prostředím udržoval trvale úzké vztahy. Ve druhé polovině minulého století byl nejvýznamnějším českým matematikem — geometrem.

1. Kuželosečky a kvadriky

O práci [W1] obsahující zobecnění Desarguesovy věty jsem se už zmínil v úvodu. V seznamu XIX. zasedání matematicko-přírodovědecké třídy císařské Akademie věd ve Vídni 16. července 1868 je za názvem práce připojeno: ... *von Herrn Eduard Weyr, Zögling des Polytechnikums in Prag*; připomínám, že autor se narodil 21. června 1852.

Girard Desargues zjistil (v metrickém tvaru), že *průsečné body libovolné přímky s kuželosečkami svazku jsou páry involuce* (viz [W87], str. 140). Weyr toto tvrzení zobecnil tak, že přímku nahradil kuželosečkou:

Kuželosečky svazku protínají pevnou kuželosečku, vedenou dvěma základnými body svazku, mimo tyto body ještě ve dvou bodech, jež tvoří páry involuce na pevné kuželosečce; střed této involuce jest na spojnici druhých dvou základných bodů (viz [W87], str. 147).

Poznamenává pak, že všechny věty a úkoly založené na Desarguesově teorému lze tak zobecnit, že přímka v něm vystupující se nahradí kuželosečkou procházející dvěma základními body svazku. Toto zobecnění ilustruje a využívá při řadě úloh, zvláště při konstrukci kuželosečky, která má mít s danou kuželosečkou v daném bodě styk 2. nebo 3. řádu. Celý postup je založen výlučně na syntetické metodě.

Syntetickou metodu užívá Weyr i v práci [W5] při studiu podobných středových kuželoseček, o nichž ukazuje, že na nevlastní přímce vytínají dvě projektivní bodové soustavy, jejichž samodružné body jsou kruhové. Zjišťuje pak, že čtyřmi body jdou dvě kuželosečky podobné dané kuželosečce; a že existují čtyři kuželosečky, které jsou podobné dané kuželosečce, jdou danými třemi body a dotýkají se dané přímky. Weyr rovněž navázal na knihu Jacoba Steinera [9]) nazvanou *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander* (Berlin 1832), a to na pasáž o podobných kuželosečkách opsaných danému trojúhelníku (viz zvláště str. 305). Obalují křivku 4. stupně, v jejímž studiu Weyr po Steinerovi pokračuje a pro niž synteticky odůvodňuje konstrukci.

O práci [W12] jsem se už zmínil v úvodu.

V práci [W15] Weyr upouští od výhradního používání syntetické metody. Odvolává se na ideje, které vyslovil Arthur Cayley (1821–1895) a Michel Chasles (1793–1880) o spojení metrické a projektivní geometrie. Ke známému vzorci pro úhel dvou přímek vyjádřený jako dvojpoměr s přibráním izotropických přímek odvozuje Weyr prostorovou analogii pro úhel dvou rovin; ve svazku jimi určeném nahrazují ty roviny, které se dotýkají absolutní kružnice, izotropické přímky. Tohoto protějšku užil k určení dvojpoměru rovin, které jdouce daným bodem B jsou tečnými ke dvěma kvadratickým kuželovým plochám o společném vrcholu. Řez rovinou procházející bodem B pak vede k určení dvojpoměru tečen, které v rovině jdou z jejího bodu k jejím dvěma kuželosečkám.

Rozsáhlé články [W80] a [W86] o homogenních souřadnicích a invariantech v teorii čar a ploch 2. stupně se blíží učebnicovému výkladu; není vyloučeno — dnes už to nelze s jistotou ověřit — že se jedná o zpracování autorových přednášek. Jako hlavní pramen jsou uvedeny známé učebnice analytické geometrie od George Salmona (1819–1904) v německém zpracování Wilhelma Fiedlera. Obsáhle pojednává Weyr o invariantech svazku kuželoseček nebo kvadrik. Plochy 2. stupně $\sum a_{ij}x_ix_j = 0$ a $\sum b_{ij}x_ix_j = 0$ s $i, j = 1, 2, 3, 4$ určují svazek $\sum(\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})x_ix_j = 0$, v němž singulární kvadriky jsou určeny rovnicí $\operatorname{Det}|\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}| = 0$, která je 4. stupně v poměru $\alpha : \beta$. Její koeficienty jsou simultánní invarianty výchozích dvou kvadrik. [10]) Úplný geometrický význam anulování koeficientu při $\alpha^2\beta^2$ nalezli až Bohumil Bydžovský a Vladimír Knichal (1908–1974) v práci [1].

V práci [W88] definuje Weyr *plošný přímočarý element* kvadratické zborcené plochy jako soustavu bodů její přímky a tečných rovin v nich. Poněvadž mezi těmito body a rovinami je známá projektivita, stačí k určení Weyrova elementu tři body přímky na ploše a její tečné roviny v nich. Weyr ukazuje, že dvěma plošnými přímočarými elementy se společnou tečnou rovinou buďto nelze proložit žádnou kvadriku anebo jimi prochází svazek ploch 2. stupně; tento druhý případ je charakterizován jistou relací, která váže centrální body a distribuční parametry obou elementů. Začátek důkazu je syntetický; následuje podrobnější studium analytické, v němž je odvozena i zmíněná relace.

Poslední Weyrova práce [W94] se zabývá starou úlohou — z bodu v rovině kuželosečky vést k ní normály. Využívá Steinerovy poznámky, že paty normál vedených z bodu B v rovině křivky k na tuto čáru jsou též na křivce $k + \delta k$, která vznikne z čáry k infinitesimálním otočením kolem bodu B. Je-li čára k elipsa, určuje spolu s elipsou $k + \delta k$ svazek kuželoseček. Weyr zjišťuje v tomto svazku rovnoosou hyperbolu — ta je známa jako Apolloniova — a dvě paraboly, jejichž osy jsou rovnoběžné se stejně dlouhými sdruženými průměry elipsy k. Karel Pelz [11]) zjistil v roce 1887, že bikvadratická úloha vést normály z bodu B k elipse k se rozpadá ve dvě kvadratické, jestliže bod B leží na (prodloužených) průměrech, které jsou kolmé ke stejně dlouhým sdruženým průměrům. Tato Pelzova věta vyvolala sérii prací českých i zahraničních geometrů a Weyr ukazuje, jak ji lze odvodit z důsledků Steinerovy poznámky.

2. Projektivní a syntetická geometrie

Práce [W6] obsahuje syntetický důkaz existence 27 (9 reálných a 18 imaginárních) sextaktických bodů rovinné křivky 3. stupně rodu 1 (sextaktickým bodem kubiky prochází kuželosečka, která už s kubikou nemá žádný další bod společný). Tuto vlastnost rovinné kubiky vyslovil Steiner [15] a analyticky ji dokázal Otto Hesse (1811–1874) v práci [5]. Weyr předkládá důkaz založený na známém poznatku, že všecky rovinné kubiky (včetně degenerovaných, což je pro Weyrův důkaz podstatné) procházející osmi pevnými body jdou ještě devátým pevným bodem.

Podle zprávy o práci [W31] v referátovém časopise *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* 11(1879), 531–533 (práce [W31], která vyšla v Bordeaux, mi zůstala nepřístupná) se jedná o studium plochy Π nesoucí jednoparametrový systém kuželoseček, speciálně pak o studium tečných rovin takové plochy podél jedné kuželosečky. Výsledky jsou využity při konstruktivním řešení této úlohy: Je dáno 5 řídících křivek a rozvinutelná plocha. V její tečné rovině je jejími pěti průsečíky s řídícími čarami určena kuželosečka jako vytvářející element C studované plochy Π. Jak se v libovolném bodě kuželosečky C sestrojí tečná rovina plochy Π ? Plocha Π je ovšem zobecněním zborcené přímkové plochy pro ten případ, že vytvořující přímka se nahradí vytvořující kuželosečkou. Práce je předchůdkyní o 13 let pozdějšího rozsáhlého pojednání [W65] $\equiv$ [W69].

Práce [W37] je syntetické studium oskulačního hyperboloidu zborcené plochy podél její přímky g ; takový hyperboloid je určen přímkou g a dvěma „sousedními“ vytvořujícími površkami („Nachbarerzeugenden“). Buďte A, B, C průsečíky přímky g s třemi řídícími křivkami plochy; buďte α, β, γ jejich oskulační kuželosečky v A, B, C; ústředním problémem je konstrukce oskulačního hyperboloidu podél g z daných α, β, γ. Pak Weyr modifikuje tuto úlohu při jiných určeních zborcené plochy a v závěru zjišťuje, že *dva hyperboloidy, které se dotýkají podél dvou přímek, mají v jejich průsečíku oskulaci vyššího řádu: jejich řezy proložené tímto průsečíkem mají totiž v něm čtyři sousední body* („Nachbarpunkte"). Manipulacemi se „sousedními" přímkami či body práce [W37] sklouzává v nikoliv světlou stránku syntetické geometrie.

O práci [W65] $\equiv$ [W69] jsem psal již v úvodu.

H. Schröter vyšetřoval v práci [13] čáry, vytvořené jako obálky spojnic projektivních bodových řad buďto na přímce a kuželosečce nebo na dvou kuželosečkách; současně udal konstrukci dotykových bodů těchto spojnic s jejich obálkou. Weyr v práci [W66] vykročil podstatně dál. Popsal konstrukci oskulační kuželosečky uvažované obálky, a to převedením na tuto prostorovou úlohu: Dvě projektivně na sebe zobrazené kuželosečky v téže rovině pokládal za průměty dvou v různých rovinách ležících a rovněž projektivně si korespondujících kuželoseček. Spojnice jejich odpovídajících si bodů vytvářejí zborcenou plochu. Její oskulační hyperboloid podél její přímky má tu vlastnost, že průměty jeho površek do výchozí roviny obalují hledanou oskulační kuželosečku. Tím, že Weyr popsal konstrukci zmíněného oskulačního hyperboloidu, rozšířil i původní úlohu. Celá práce je výlučně syntetická, prostoupená řadou infinitesimálních úvah, tak charakteristických pro syntetickou geometrii z posledních desetiletí minulého století.

V práci [9] Bedřicha Procházky [12]) je udána konstrukce poloměru křivosti trajektorie bodu, unášeného dvěma translačními pohyby s konstantními rychlostmi. Weyr v článku [W81] Procházkovu konstrukci zobecnil pro trajektorii vzniklou složením konečně mnoha simultánních translačních pohybů v prostoru a připojil i konstrukci oskulační roviny trajektorie. Procházka kombinuje metodu syntetickou s analytickou, Weyr pracuje výhradně s první.

V článku [W84] se Weyr zabýval opět oskulačním hyperboloidem zborcené plochy. Jeho konstrukci odůvodněnou kinematicky podal už Amédée Mannheim (1831–1906) v knize *Cours de géométrie descriptive de l'École polytechnique* (Paris 1880). Ryze geometricky ji odvodil Weyr v práci [W37]; další dvě různá geometrická řešení náleží Josefu Šolínovi (viz [17]), autorovi posudku na [W65] $\equiv$ [W69]. Jsou-li dvě ze tří řídících křivek zborcené plochy infinitesimálně blízké (s tím, že jsou na jisté dané ploše), zmíněné konstrukce selhávají. Weyr studuje právě tento speciální případ a popisuje, jak i v něm lze sestrojit oskulační hyperboloid zborcené plochy. Weyrovy úvahy jsou po výtce syntetické, založené na vlastnostech projektivních svazků.

3. Geometrické příbuznosti

Při práci [W2] publikované v roce 1869 je u autorova jména připsáno: *ord. Hörer am Polytechnikum zu Prag*. Weyrovi bylo tehdy 17 let a na tento věk je [W2] zase zcela mimořádný a obdivuhodný výkon, i když většinu výsledků získal před ním jinak už Theodor Reye (1838–1919) v práci [11]. Weyr na to upozorňuje na str. 469. Jestliže ve dvou rovinách S a Σ jsou x_i a ξ_i $(i = 1,2,3)$ homogenní souřadnice bodů nebo přímek, je uvažovaná příbuznost (Reyem nazvaná kvadratická) dána rovnicemi $x_i f_j^i = 0$ $(j = 1,2)$, v nichž $f_j^i = a_j^{ik}\xi_k$ $(k = 1,2,3)$. V Σ jsou obecně tři body, z nichž každému přísluší body na přímce v S; těmto bodům a přímkám se říká hlavní. Případ tří reálných hlavních bodů byl studován už dříve; Weyr věnuje pozornost případu se dvěma sdruženými imaginárními body hlavními a dvěma sdruženými imaginárními přímkami hlavními. Výsledky aplikuje na studium křivek 3. stupně a konstrukci křivek stupně $n+1$ s n-násobným bodem.

O práci [W3] právem píše Jan Sobotka, že je to příprava ke společnému dílu bratří Weyrů *Základové vyšší geometrie* (viz [W8] + [W19] + [W29]); nové výsledky z projektivní geometrie neobsahuje. Význam stati [W3] — její autor je stár 18 let — je však jinde. Posudek Weyrovy knihy [W87] z roku 1898 otiskl v následujícím roce Alois Strnad. [13]) Začíná takto:

Když r. 1870 Jednota českých mathematiků vydala svou „První zprávu“, upoutal k sobě pozornost uveřejněný v ní na prvém místě článek „Z novější geometrie“ [tj. práce [W3]], *jejž napsal technik Eduard Weyr. Pěkná a svěží tato práce byla záslužná v té příčině, že po prvé jazykem českým pojednávala o předmětu té doby v literatuře naší novém, pro který zájem buditi se snažila a pro jehož zpracování bylo třeba příslušnou terminologii a fraseologii teprve vytvořiti. ...*

Poznamenávám znovu, že v letech 1864 – 1867 působil na pražské technice Wilhelm Fiedler, který v Praze jako první přednášel o projektivní geometrii, i když spojené s geometrií deskriptivní. Eduard Weyr začal studovat na pražské technice až po Fiedlerově odchodu do Curychu, takže projektivní geometrii Eduardovi jistě zprostředkoval bratr Emil, který Fiedlera na technice ještě zastihl.

K dokreslení připojuji, co napsal — Čechům jistě nakloněný — Ernest Denis (1849–1921):

Kolem roku 1860 minula konečně doba, kdy snahy vlastenců přestávaly téměř na utvoření terminologie vědecké, kdy za proslulé učence pokládáni spisovatelé, kteří složili měřictví nebo fysiku pro začátečníky. ... Čechové ... universitě vídeňské dali některé nejznamenitější profesory ... ; jména geologa ... nebo mathematika Emila Weyra (1848–1893) pronikla za hranice mocnářství. ([3], díl II, str. 435)

V práci [W7] se Weyr zabýval větami o uzavřenosti lomených čar vepsaných křivce; vyslovil je Steiner v práci [15]. Na rovinné křivce 3. stupně zvolme body P, Q a A neležící v přímce. Nechť B je průsečík spojnice PA s kubikou, nechť C je průsečík spojnice QB s kubikou, nechť D je průsečík spojnice PC s kubikou atd. Jestliže se lomená čára $ABC\ldots$ uzavře, má sudý počet stran a k uzavření dojde pro jakoukoliv jinou polohu výchozího bodu A na kubice. Analogická věta platí i pro čáru 4. stupně s dvojnými body P a Q. Weyr tyto věty nově dokazuje a sice pomocí $(2,2)$–značné příbuznosti, kterou lze mezi jednoparametrovými bodovými útvary S a Σ vyjádřit vztahem

$$x^2(A\xi^2 + B\xi + C) + x(A'\xi^2 + B'\xi + C') + A''\xi^2 + B''\xi + C'' = 0\,.$$

Weyr tuto příbuznost studuje a přenáší její vlastnosti na svazky přímek, speciálně na ty, které — s vrcholy P a Q — vznikají při výše popsané Steinerově konstrukci.

Úzkou spolupráci bratří Weyrů dosvědčuje práce [W10]. Eduard Weyr píše:

In den genannten p. 18 des 71^{ten} *Bandes abgedruckten Aufsatz* [tj. v práci [W7]] *hat sich ein Irrtum eingeschlichen, auf welchen ich von meinem Bruder Emil Weyr bei Gelegenheit einer gemeinschaftlich vorgenommenen Untersuchung mehrdeutiger Grundgebilde ersten Grades aufmerksam gemacht wurde. Dieser Irrtum soll nun in Kürze corrigiert werden.*

Eduard Weyr pak ukazuje, že nedopatření bylo skryto v násobnosti, kterou přisoudil společnému paprsku svazků S a Σ v korespondenci z práce [W7], že důkaz, který zvolil v práci [W7], platí i pro kubiku s dvojným bodem a pro kvadriku se třemi dvojnými body, a že důkaz lze modifikovat tak, aby poskytl i věty z [W7], tj. pro obecnou kubiku a kvartiku se dvěma singulárními body.

V práci [W62] je východisko geometrické — totiž projektivita mezi jednoparametrovými soustavami — ale je formulováno algebraicky pomocí regulární matice, a tak je studium převedeno do maticového počtu. Jako jeho aplikaci k [W56] charakterizuje Weyr [W62] sám hned v úvodu.

Emil Weyr zemřel v roce 1894; Eduardovu práci [W81a] *Geometrické útvary jedno-dvojznačné* z roku 1895 můžeme považovat za posmrtnou vzpomínku na Emila. Eduard totiž píše:

Jest nepopiratelnou zásluhou mého zemřelého bratra Emila, že svojí theorií jedno-dvojznačných útvarů a její aplikací na čáry a na přímočaré plochy třetího stupně [14]) *učinil v geometrii onen krok kupředu, jenž přirozeným způsobem následovati musil po theorii projektivnosti* [tj. po příbuznosti jedno-jednoznačné]. *Poněvadž naším jazykem o těchto věcech dosud pojednáno nebylo, pokusím se v následujících řádcích o stručný náčrt oné theorie a její upotřebení na útvary v rovině, čímž vystihnu v podstatě obsah prvního z obou citovaných spisův.*

V práci [W89] Weyr nejdříve připomíná, že Michel Chasles (viz [6]) formuloval úkol, později nazvaný problémem homografie, takto:

On donne dans le même plan deux systèmes de sept points chacun et qui se correspondent. Faire passer par chacun de ces systèmes un faisceau de sept rayons, de telle sorte que les deux faisceaux soient homographiques. Démontrer qu'il n'y a que trois solutions.

Místo dvou skupin po sedmi bodech lze volit dvě skupiny po čtyřech nebo po pěti nebo po šesti bodech. Literaturu ke všem čtyřem případům a hlavní výsledky uvádí Jan Vojtěch v knize *Geometrie projektivní* (Praha 1932) na str. 195–196. Weyr připomíná dřívější řešení pro skupiny po sedmi bodech, zvláště pak to, které předložil Karl Küpper (1828–1900), profesor deskriptivní geometrie na německé technice v Praze (od roku 1867), v práci [7], které však vylučuje jistou zvláštní polohu daných bodů. Weyr pak řeší problém homografie či projektivnosti novým způsobem, a to i pro polohu daných bodů vyloučenou Küpperem. Weyr ukazuje předně, že existují tři dvojice středů svazků, které vyhovují úloze; za druhé rozlišuje případy, kdy jsou reálná všecka tři anebo jen jedno řešení.

4. Diferenciální geometrie křivek

V práci [W13] o obálce těch tětiv kuželosečky, které mají pevnou délku, navázal Eduard Weyr na dřívější studium Oscara Schlömilcha (1823–1901); viz jeho práce [12]. S omezením na elipsu nahradil infinitesimální pohyb její tětivy konstantní délky okamžitým otočením kolem průsečíku normál v krajních bodech tětivy. Pro hledanou obálku tak získal v přímkových souřadnicích diferenciální rovnici, jejíž integrace poskytla řadu vlastností obálky, např. o jejích asymptotách a vztahu ke kruhovým bodům.

Eugène Catalan (1814–1894) studoval v práci [2] ortogonální trajektorie kruhových řezů elipsoidu. Weyr v práci [W38] jeho přímý postup vedoucí ke komplikované diferenciální rovnici zjednodušuje tak, že kruhové řezy elipsoidu promítá do roviny rovnoběžné s rovinami těchto řezů. Dostává tak soustavu kružnic dvojnásob se dotýkajících jisté elipsy a ukazuje, že pokud je známa jedna ortogonální trajektorie této soustavy kružnic v rovině, všechny ostatní ortogonální trajektorie lze určit pouze kvadraturami.

Jestliže se v rovině po pevné křivce kotálí jiná křivka, pak bod roviny pevně spojený s kotálející se křivkou opisuje čáru nazývanou trochoida. V práci [W76] vyšetřuje Weyr střed křivosti trochoidy, a to tak, že pevnou i kotálející se křivku nahrazuje lomenými čarami se stranami o stejné délce. To je postup sice intuitivní [15]), ale Weyrovy limitní přechody mohou vyvolávat námitky. Na Weyrovu práci bezprostředně reagoval Bedřich Procházka v práci [8], který bez přechodu od lomených čar ke křivkám dospěl kinematickými úvahami k týmž vzorcům jako Weyr.

S prostorovou křivkou je spojen průvodní trojhran tvořený jednotkovými vektory tečny, hlavní normály a binormály. Jejich derivace podle oblouku vyjádřili už Frédéric Jean Frenet (1816–1900) roku 1847 a Joseph-Alfred Serret (1819–1885) roku 1851. V krátké poznámce [W79] vycházející z Frenetových – Serretových vzorců vyšetřoval Weyr orientaci průvodního Frenetova trojhranu vůči orientaci pravoúhlých souřadnicových os.

5. Diferenciální geometrie ploch

Pojednání [W18] je věnováno konformnímu zobrazení dvou rovin či ploch. Weyr nejdříve odvozuje známé rovnice Cauchyovy–Riemannovy a podmínku korespondence minimálních čar obou ploch, kterou získal už Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Výsledky nejsou z větší části původní, ale Weyr je spojil jednotícím principem rovněž známé vlastnosti izotropických křivek při zobrazení zachovávajícím úhly. Z aplikací si zaslouží zmínku řešení úlohy, kdy lze zobrazit konformně rovinu na rovinu tak, aby soustavě čar v jedné odpovídala soustava rovnoběžných přímek v druhé. Vůči dikci lze mít námitky; i v 70. letech minulého století mohla být jiná. Jako příklad cituji ze str. 5:

Jest známo, že geometrické místo imaginárních bodů kruhových všech rovin jest křivka imaginární stupně druhého, nalézající se v nekonečnu; ... nazývá se imaginárním kruhem v nekonečnu. Pravoúhlé koordinaty bodů této křivky jsou ony nekonečně velké hodnoty x, y, z, *jež vyhovují rovnici* $x^2+y^2+z^2=0$.

V práci [W21] naznačuje Weyr převážně syntetický důkaz tohoto tvrzení, spadajícího do diferenciální geometrie: Hlavní (tj. křivoznačné) čáry přímkové plochy se dotýkají všech těch jejích površek, které protínají absolutní kružnici. Verifikace spočívá na vyjádření kolmosti hlavních tečen pomocí harmonického dvojpoměru oněch tečen a izotropických přímek jdoucích v jejich rovině jejich průsečíkem. Speciálně na přímkové ploše, která prochází absolutní kružnicí, obě soustavy hlavních čar splývají s površkami. Je třeba připojit, že se nerozlišuje mezi reálnými a imaginárními útvary. Ve zmíněné specializaci je pak kolmost hlavních čar obsažena v tom, že izotropická přímka je „kolmá sama k sobě“.

Problematikou příbuznou k [W18] se Weyr zabýval i v práci [W27] při řešení této úlohy: Nalézt všechny případy, kdy je možné konformně zobrazit centrální projekcí plochu na plochu. Vycházeje zase z Gaussovy podmínky pro konformní zobrazení, Weyr zjistil jen tyto dvě možnosti: Plochy jsou stejnolehlé (a střed projekce ve středu homotetie) nebo jedna vzniká z druhé kulovou inverzí (a střed projekce je v jejím středu).

V práci [W28] se Weyr zabýval úlohou, která má sice fyzikální původ, ale kterou lze vyslovit výlučně geometricky: Mají se určit plochy, jejichž části se ze dvou pevných bodů promítají kuželi, pro které je poměr jejich otevření konstantní (v Gaussově smyslu se otevřením kužele rozumí obsah výseče, vyťaté kuželem na jednotkové kulové ploše se středem v jeho vrcholu).

Práce [W34] je reakcí na práci [16], jejímž autorem je Čeněk Strouhal. [16]) Weyr nejdříve vyšetřuje hlavní (křivoznačné) čáry na hyperbolickém paraboloidu a výsledky přenáší na plochu s rovnicí (v pravoúhlých souřadnicích) $z = f(y/x)$; k tomu využívá paraboloidu oskulujícího plochu podél její přímky. Přímá šroubová plocha ze Strouhalovy práce je zde speciálním případem.

K pracím [W18] a [W27] se obsahově přiřazuje — jako další příspěvek k matematické kartografii — též článek [W35] o stejnoplochém zobrazení mezi dvěma rovinami. Weyr ukazuje, že určení takovéto korespondence, v níž soustavě daných čar v jedné rovině odpovídá v druhé rovině soustava rovnoběžných přímek resp. soustava rovněž daných čar, vyžaduje jednu, resp. dvě kvadratury.

Rozsáhlejší práce [W78] v té části *Věstníku České akademie*, která má nadpis *Referáty a zprávy vědecké, slovesné a umělecké*, má poněkud zvláštní charakter. Je volným výběrem a zpracováním, případně doplněním úvodních kapitol I. dílu známého kompendia *Leçons sur la théorie génerale des surfaces* (1. vyd. Paris 1887), jehož autorem je Gaston Darboux (1842–1917). [17]) V úvodu Weyr poznamenává, že účelem stati je jednak ukázat účelnost kinematických úvah v geometrických problémech (metoda pohyblivého trojhranu), jednak upozornit na Darbouxovo dílo, pro které Weyr — ovšem právem — nešetřil chválou.

Výběr, který provedl Weyr, se blíží obvyklému úvodu do diferenciální geometrie křivek a ploch, jak jej vytkl Luigi Bianchi (1856–1928). [18]) Ačkoliv Eduard Weyr Bianchiho necituje, je pravděpodobné, že jeho dílo znal. Bratr Emil byl totiž ve studijním roce 1870–71 v Itálii a od té doby udržoval s italskými geometry četné styky, jichž se účastnil i Eduard. Práce [W78] je někde mezi úvodními kapitolami děl Bianchiho a Darbouxa; spojuje Darbouxovu metodu s Bianchiho výběrem. Nelze si však nevšimnout, že místy přejímá Weyr z Darbouxovy knihy víc, než by odpovídalo jak názvu *Úvahy o pohybu v teorii ploch a čar* bez zmínky o Darbouxovi, tak zakončení úvodu:

Ponechávajíce si stručný rozbor tohoto díla [tj. Darbouxova] *na dobu pozdější, vyvodíme nyní hlavně na jeho základě nejdůležitější formule, jež teorie pohybu poskytla nauce o plochách a čarách.* ([W78], str. 81)

Sleduje-li se totiž současně [W78] s příslušnými Darbouxovými stránkami, nelze přehlédnout — místy dokonce i v textu — značnou blízkost.

O práci [W83] lze říci, že je aplikací teorie matic v diferenciální geometrii. První část s maticovým počtem (str. 42–49) je přípravou pro druhou část (str. 103–109) s důkazem známé věty, jejímž autorem je Charles Dupin (1784–1873): Plochy trojnásobně ortogonálního systému se protínají ve svých hlavních (křivoznačných) čarách. [19])

Práce [W85] publikovaná v Chicagu mi zůstala nepřístupná. Její obsah vystihuje referát v časopise *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* 28(1897), 540, který v překladu zní takto:

Je-li čtverec lineárního elementu plochy uveden na tvar

$$(*) \qquad ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = d\Theta^2 + \sigma^2 d\eta^2,$$

kde $\eta =$ konst. jsou geodetiky a Θ označuje jejich oblouk, má se z (*) odvodit diferenciální rovnice geodetických čar. To učinil Darboux ve 3. svazku (str. 25) svých „Leçons sur la théorie générale des surfaces“ a autor ukazuje, jak lze k témuž cíli dospět jinou cestou než Darboux.

6. Algebraické křivky

Prací [W14] zahájil Weyr sérii pojednání o prostorových algebraických křivkách. Rodem rovinné algebraické čáry stupně n, která má nejvýš dvojné body (při vyšších singularitách je definice značně složitější), se rozumí rozdíl mezi maximálním počtem dvojných bodů (je dán stupněm n) a jejich skutečným počtem. Rodem p prostorové algebraické čáry se pak rozumí rod rovinné čáry, která je s výchozí prostorovou čárou vázána biracionální transformací; ta může být realizována třeba středovým průmětem, pokud si bod a jeho projekce odpovídají jedno-jednoznačně. Weyr studuje význam rodu prostorové křivky a jeho vztah k počtu zdánlivých dvojných bodů, tj. k počtu h takových dvojic bodů na křivce, jejichž spojnice procházejí libovolně zvoleným bodem v prostoru. [20]) Potom přechází ke studiu křivek, které nelze vyjádřit jako úplný průnik dvou algebraických ploch. Prostorovou čáru 4. stupně, která je úplným průsekem dvou kvadratických ploch, studoval už Gaspard Monge (1746–1818) a po něm řada dalších matematiků. Ale teprve Salmon v roce 1849 objevil prostorovou čáru 4. stupně, která není průnikem dvou ploch 2. stupně; je částečným průnikem plochy 2. stupně a plochy 3. stupně, když jejich úplný průnik obsahuje ještě dvě mimoběžky (pokud by tento zbytek úplného průniku byla kuželosečka — ať už pravá či degenerovaná ve dvě přímky v rovině — dala by se ona prostorová čára 4. stupně, která je částečným průnikem plochy 2. stupně a plochy 3. stupně, vyjádřit Mongeovým způsobem jako průnik dvou ploch 2. stupně). Weyr studoval analogické situace — ovšem značně komplikovanější — u prostorových čar vyšších stupňů a zvláště pak redukci zbývající části průniku dvou ploch, danou čarou procházejících, na co možná nejjednodušší tvar; je jím soustava přímek (u výše zmíněné kvartiky pozůstávající ze dvou mimoběžek).

Studiem prostorových čar 6. stupně v pracích [W16], [W16a] a [W17] Weyr bezprostředně navázal na práci [W14]. V článku [W16] vychází z výsledků, které kolem poloviny 19. století publikovali Salmon a Cayley o prostorových čarách 4. a 5. stupně. Jejich postupy přenáší na prostorové čáry 6. stupně. Nejdříve ukazuje, že prostorovou sextikou prochází kubická nebo kvadratická plocha, a pak rozlišuje tři případy:

- sextika typu (3,2), kterou jde plocha kubická i plocha kvadratická;
- sextika typu (3), kterou jde plocha kubická a žádná plocha 2. stupně;
- sextika typu (2), kterou jde plocha kvadratická a žádná plocha 3. stupně.

Pak zjišťuje, že pro počet h zdánlivých dvojných bodů sextiky je $6 \leqq h \leqq 10$ a dokazuje existenci sextik s $h = 6, 7, 8, 9, 10$. V závěru připojuje, že při sextice ležící na kvadratické ploše je $h = 6$ nebo 7 nebo 10.

Práce [W16a] patří prostorovým křivkám stupně 6 typu (3). Jsou vytvořeny jako částečný průnik plochy 3. stupně s plochou 4. stupně. Weyr si všímá jak sextiky, kterou jde právě jedna kubická plocha, tak i speciálního případu, kdy sextika je částí průniku dvou kubických ploch. Udává vlastnosti těchto sextik s $h = 6$ až 10.

V článku [W17] studuje Weyr prostorové čáry 6. stupně typu (2). Předně uvádí, že mají buďto 7 nebo 10 zdánlivých dvojných bodů, jiné možnosti není. V prvním případě je sextika částečný průnik plochy 2. a plochy 4. stupně, pokud mají dvě mimoběžky společné. Práce končí přehledem prostorových čar 6. stupně:

typ sextiky	počet podtypů	podle počtu h zdánl. dvojn. bodů
(2,3)	1	6
(2)	2	7 a 10
(3)	5	6 až 10

Práce [W16], [W16a] a [W17] byly publikovány v časopisu Comptes Rendus (Paris) a mají tudíž blíže ke zprávě o výsledcích než k jejich podrobnému odvození. Bezprostředně za článkem [W17] je poznámka [4] G. H. Halphena (1844–1889), v níž autor upozorňuje, že dvě Weyrova tvrzení o zdánlivých dvojných bodech sextiky — totiž jejich minimální počet 6 a pokud sextika leží na kvadratické ploše, tak jejich možné případy $h = 6$, 7 a 10 (srv. hořejší tabulku) — vyslovil už roku 1870 v témž časopise (viz Comptes Rendus 70(1870), str. 380).

V práci [W20] pokračuje Weyr v analogickém studiu prostorových křivek 7. stupně. Nejdříve odvozuje jistý odhad pro rod takové čáry, a pak ukazuje, že existují právě tři typy uvažovaných křivek:

- křivky typu (2,4), které leží na ploše 2. stupně a na ploše 4. stupně;
- křivky typu (2), které neleží na žádné ploše 4. stupně;
- křivky typu (4), které neleží na žádné ploše 2. stupně (srovnej analogické Weyrovo roztřídění prostorových čar 6. stupně v článku [W16]).

Pak se opět zabývá zdánlivými dvojnými body a ukazuje, že prostorová čára 7. stupně jich může mít 9 až 15, jiný počet nikoliv (pro dolní odhad, též při sextice, viz obecný vzorec uvedený v pozn. [20]).

- Má-li jich 9, leží právě na jedné ploše 2. stupně;
- má-li jich 10, je částečným průnikem dvou ploch 3. stupně, jehož zbývající částí je kuželosečka;
- má-li jich 11 a je typu (4), je částečným průnikem dvou ploch 3. stupně, jehož zbývající části jsou dvě mimoběžky;
- má-li jich 12, leží právě na jedné ploše 3. stupně;
- má-li jich 13 až 15, je částečným průnikem dvou ploch 4. stupně.

Téměř celý postup je syntetický a k výsledkům je připojeno několik odvolání na příbuzné nebo i obecnější věty G. H. Halphena.

Opět je třeba vyslovit údiv, že hořejší práce z algebraické geometrie publikoval Weyr ve věku necelých 22 let. Vyžadovaly totiž hluboké obeznámení s tehdejšími syntetickými metodami pro studium algebraických křivek a ploch. Tyto metody, v nichž někdy asi úmyslně a někdy asi i neúmyslně nebylo rozlišováno mezi reálnými a imaginárními útvary, se ve Weyrových pracích patrně dostávaly k hranicím svých možností. Nyní — po 100 letech — nelze vyloučit oživení této tématiky a využití dřívějších výsledků. Paul Bézier (*1910) zavedl na přelomu 70. a 80. let do navrhování konstrukcí v automobilovém průmyslu prostorové křivky 3. stupně, které jako první studoval August F. Möbius (1790–1868) v knize *Der barycentrische Calcul* (Leipzig 1827). I Möbiovy barycentrické souřadnice vystupují výrazně při definici Bézierových křivek. Rozšíří-li se zájem i na Bézierovy prostorové čáry stupně alespoň 4, narazí se ihned na problematiku, k níž patří i Weyrovy práce — totiž kolik ploch a jakého stupně prochází Bézierovou křivkou stupně $\geqq 4$. [21])

Práce [W32] připomíná učebnicové zpracování teorie rovinných racionálních čar, tj. čar té vlastnosti, že souřadnice jejich bodů lze psát jako racionální funkce parametru. Po vyšetření vztahů mezi implicitní rovnicí a parametrickým vyjádřením následuje diskuse funkcí v něm obsažených doprovázená mnoha příklady. Další oddíly jednají o stupni a třídě racionální čáry, o její nerozložitelnosti, o singularitách, o způsobech vyhledání parametrických rovnic, o různých úlohách s racionálními čarami, opět s příklady. Ač se jedná o text 115 let starý, pro některé autory píšící nyní o racionálních čarách v počítačové grafice — tedy též o zmíněných už Bézierových křivkách — by byl užitečnou četbou. [22])

7. Knihy o projektivní geometrii

Třídílná učebnice *Základové vyšší geometrie* bratří Weyrů má tuto strukturu:

díl I: *Theorie promítaných útvarů prvořadých*, Praha 1871 (111 stran) — [W8]

díl II: *Theorie křivek stupně druhého*, Praha 1874 (180 stran) — [W19]

díl III: *O přímočarých plochách druhého stupně a o vztahu kolineárném a reciprokém základních útvarů druhořadých a třetiřadých*, Praha 1879 (162 stran) — [W29]

V tomto společném díle zůstane už asi velikost účasti každého z bratří v oblasti dohadů. Patrně lze soudit, že zpočátku byla výraznější účast Emila (při vydání I. dílu bylo mladšímu Eduardovi teprve 19 let), která postupně přecházela ve výraznější účast Eduardovu (při vydání III. dílu působil starší Emil už 4 roky ve Vídni a — jak vzápětí naznačím — zabýval se asi vlastní knihou o témž předmětu).

Později vydali oba bratři samostatně knihy o stejné tématice jako ve společném díle. Nejdříve tak učinil Emil. První díl knihy *Die Elemente der projectivischen Geometrie*, který je nazván *Theorie der projectivischen Grundgebilde erster Stufe und der quadratischen Involutionen*, vyšel ve Vídni roku 1883 (231 stran). Druhý díl, *Theorie der Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe* (228 stran), vyšel tamtéž o čtyři roky později. Následoval Eduard knihou [W87] *Projektivná geometrie základných útvarů prvního řádu* (Praha, 1. vyd. 1898, 192 stran; 2. vyd. z roku 1911 připravil k tisku Jan Sobotka). Ani Emil, ani Eduard se v předmluvě ke svým samostatně napsaným knihám nezmiňují o společné učebnici ze 70. let. Eduard v předmluvě své knihy uvádí několik francouzských, italských a německých knih o projektivní geometrii; píše též:

... budiž zvlášť poukázáno ... jakož i ku knize mého bratra Emila Weyra „Grudzüge der projectivischen Geometrie“, v níž vytknut zvláštní druh projektivnosti, t. projektivnost cyklická. [23])

Z úvodu k prvnímu dílu knihy *Základové vyšší geometrie* je patrné, jak autoři — ještě na počátku 70. let minulého století — hledali českou terminologii a srovnávali ji s francouzskou a německou. „Základné útvary (Grundgebilde)“ jsou pro ně stupně prvního, druhého a třetího (Václav Hlavatý v citované už učebnici *Projektivní geometrie* I a v jejím dílu II z roku 1946 užívá označení „útvary jedno- a dvojparametrické“); stupně prvního čili prvořadé jsou „řada bodová čili útvar přímý (série de points, Punctreihe)“, „svazek paprskový rovný (faisceau, Strahlenbüschel)“, „svazek rovin (faisceau de plans, Ebenenbüschel)“; stupně druhého čili druhořadé jsou „svazek prostorový čili svazek stupně druhého (réseau de plans, Strahlen- und Ebenenbündel)“; „základný útvar třetiřadý neb stupně třetího jest jediný, totiž soustava prostorová čili nesmírný prostor (Das räumliche System) ...“. Ačkoliv tyto termíny působí archaicky, je třeba výslovně uznat zásluhu obou bratří na české terminologii projektivní a vůbec syntetické geometrie. U Eduarda je tato zásluha ještě vystupňována učebnicí [W87] z roku 1898 (a 1911). Jí bylo — až na nepříliš velké změny — české názvosloví ve zmíněných oblastech ustáleno.

Je pochopitelné, že i metodicky je mezi dílem *Základové vyšší geometrie* na jedné a knihou *Projektivná geometrie* na druhé straně veliký rozdíl. Odstup zhruba 25 let znamenal ovšem mnoho. V nich Weyr přednášel o projektivní geometrii na univerzitě i na technice a získal tak jistě velké zkušenosti. Václav Hlavatý — ještě po 45 letech od prvního vydání [W87] — píše o *v prvé řadě methodologicky vzorně uspořádané učebnici E. Weyra.* [24]) Připojím svou vlastní zkušenost: Weyrova kniha [W87] byla jednou z prvních vysokoškolských učebnic, které jsem měl v ruce ještě jako gymnazista. Studoval jsem ji skoro současně s prvním dílem Hlavatého učebnice a — pamatuji si — bez obtíží. Vždy jsem si přál mít ji ve své knihovně, a proto jsem byl velmi rád, když se mi po letech podařilo koupit první vydání v antikvariátu.

Dílo *Základové vyšší geometrie* bratří Weyrů je dosti mnohomluvné a sahá od věcí zcela jednoduchých až k věcem značně složitým, a stejně tak od věcí pro projektivní geometrii základních až k věcem velmi speciálním, které při prvním studiu pochopení principů spíše ztěžují než usnadňují. Ale pro autory mluví jejich mládí a hlavně ta skutečnost, že napsali první českou učebnici projektivní geometrie, že do ní vložili vlastní rozvržení látky (i když ovšem nikoliv bez cizích — francouzských a německých vzorů) a že do ní mohli zařadit i vlastní vědecké výsledky; tato kniha je už velmi vysoko nad situací české vědecké literatury ještě ze 60. let, kterou tak ostře kritizoval Ernest Denis.

K českým učebnicím projektivní geometrie, uvedeným už v úvodu tohoto článku, je třeba ještě připojit — alespoň pro krátké srovnání — sérii, která vycházela bezprostředně po knize [W87]. Jejím autorem je Vincenc Jarolímek,[25]) dílo se nazývá *Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru* (Praha: svazek I, 1908, 104 stran; svazek II, 1912, 84 stran; svazek III, 1914, 106 stran; svazek IV, 1915, 66 stran; svazek V, 1918, 81 stran). Svazek I je rozdělen na dvě části: *Geometrie útvarů řádu prvého* a *Geometrie útvarů řádu druhého a třetího.* Svazek II obsahuje konstrukce kuželoseček (z prvků reálných i imaginárních) a kvadrik a studium přímkových útvarů. Svazek III v něm pokračuje, větší část však patří imaginárním kuželosečkám a kvadrikám. Svazky IV a V jsou doplňky k předcházejícím svazkům. Rozsahem překračuje Jarolímkovo dílo Weyrovu učebnici [W87] téměř dvaapůlkrát, ale obsahem jí zhruba koresponduje z celé Jarolímkovy série jen svazek I (s menší částí svazku II), který je rozsahem asi poloviční vůči [W87] a pro který patrně [W87] bylo vzorem. Jarolímkova série je převážně konstruktivního charakteru; obsahuje množství často velmi důmyslných původních konstrukcí i z imaginárních elementů s naprostým vyloučením analytické geometrie. Skoro bych soudil, že nejlepší přípravou pro Jarolímkovy svazky III–V byla četba Weyrovy učebnice [W87].

V roce 1911 vychází druhé vydání učebnice [W87]. To je v české geometrické literatuře zjev zcela ojedinělý. Není mi známa jiná česká vysokoškolská učebnice geometrie, která by do 40. let našeho století vyšla dvakrát. [26]) Potřebu a oblíbenost Weyrovy učebnice [W87] nezmenšil ani první svazek zmíněné Jarolímkovy série z roku 1908; vždyť 2. vydání Weyrovy knihy [W87] je z roku 1911.

Referáty o knihách *Základové vyšší geometrie* a *Projektivná geometrie* byly otištěny v *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky* i v referátovém periodiku *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.* [27])
Nebudu proto vypisovat obsah těchto knih; pro něj odkazuji buďto na knihy samy nebo na právě uvedené referáty. Připojím však několik obecnějších poznámek.

V učebnici *Základové vyšší geometrie* se ještě nemohl odrazit program Felixe Kleina pojímající každou geometrii — projektivní, afinní atd. — jako teorii invariantů speciální grupy zobrazení. [28]) Při hodnocení knihy *Projektivná geometrie* je však třeba být kritičtější. Koncem minulého století už byl Kleinův program tak známý a rozšířený, že v učebnici projektivní geometrie [W87] měla být o něm alespoň zmínka. Navíc Weyr v předmluvě k [W87] cituje spis *Geometrie der Lage* z roku 1847, jehož autor Christian von Staudt [29]) v něm — vůbec jako první — oprostil projektivní geometrii od metrických východisek. Jak Weyr v knize [W87], tak o deset let později Vincenc Jarolímek vycházejí z poznatků metrické geometrie a teprve od nich se dostávají k projektivním vlastnostem a projektivní geometrii vůbec. Alespoň letmý dotyk s Kleinovým programem se postrádá už v předmluvě k [W87], v níž Weyr uvádí významné knihy o projektivní geometrii včetně právě citované Staudtovy. Poznámka v tomto smyslu není ani v obou výše zmíněných referátech o [W87]. Přitom Staudtovy myšlenky a stanoviska byly Weyrovi jistě známy. V úvodu ke knize [W87] popisuje, jak se v analytické geometrii manipuluje s imaginárními body, přímkami atd. a končí odstavcem, který je pro tuto knihu velmi významý:

Na tomto počtářském podkladu operací s imaginárními elementy stojí tento spis; podkladem tím jest konstruktivné zužitkování imaginárních elementů odůvodněno a usnadněno, ač ovšem základ ten není ryze geometrickým. Geometrickou theorii imaginárních elementů zbudoval Staudt ve svých „Beiträge zur Geometrie der Lage“ [z let 1856–1860], *a se stanoviska methodičnosti měl jsem se bráti cestou jím naznačenou. Nedostatek mého spisu v příčině methody vyvážen snadností, s jakou začátečník, znalý základův analytické geometrie, se dovede vpraviti do konstruktivného zužitkování imaginárních elementů a útvarů, a jistotou, s níž dovede v tomto směru postupovati.* (viz [W87], str. VIII)

Ještě v závěru minulého století byla snaha mnoha geometrů směřující k „ryzosti“ syntetické metody — tedy k vyloučení analytické geometrie — stále tak silná, že Weyr považoval za nutné svůj ústupek odůvodnit. Po stu letech je však třeba tento ústupek vidět jako přednost a jako projev Weyrova vědeckého rozhledu.

V knihovně Matematicko-fyzikální fakulty UK se podařilo nalézt zápisy Weyrových univerzitních přednášek, které pořídil v době kolem roku 1900 Jan Schuster. [30]) Přednášky *Obecná theorie ploch* a *Projektivná geometrie* zachytil na téměř 230 a 200 stránkách formátu cca B5. — *Obecná theorie ploch* koresponduje výběrem látky i výkladem s některými úvodními kapitolami díla L. Bianchiho (viz poznámka [18]). Podobný duch mají i o něco málo pozdější, ale mnohem obsáhlejší přednášky J. Sobotky (viz poznámka [4]). Naproti tomu B. Hostinský (viz rovněž poznámka [4]) se pojetím své knihy přiblížil Darbouxovu kompendiu *Théorie des surfaces*, v němž už L. Bianchi viděl protějšek svého díla. — Přednáška *Projektivná geometrie* je výběrem z knihy [W87].

Poznámky

[1]) Jan Sobotka (1862–1931), mimořádný profesor vídeňské techniky (od roku 1897), od roku 1899 řádný profesor brněnské české techniky otevřené právě roku 1899, profesor pražské české university (od roku 1904).
Viz F. Kadeřávek: *Jan Sobotka ... šedesátníkem*, ČPMF 52(1923), 1–9

[2]) Josef Šolín (1841–1912), profesor české techniky v Praze.
František Machovec (1855–1892), profesor české reálky v Praze-Karlíně.

[3]) Srovnej Z. Nádeník: *Minulost a budoucnost deskriptivní geometrie*. Sborník ze 13. semináře skupiny JČMF pro deskriptivní geometrii, počítačovou grafiku a technické kreslení, Pernink 1993.
Na stranách 8–9 o kritice V. Hlavatého učebnice F. Kadeřávek, J. Klíma, J. Kounovský: *Deskriptivní geometrie* I, II, (Praha 1929, 1932).

[4]) Po litografovaných přednáškách J. Sobotky: *Diferenciální geometrie* I–III (Praha 1909–14) je první českou učebnicí teprve B. Hostinského: *Diferenciální geometrie křivek a ploch* (Praha 1915).

[5]) Viz [W82a]; strany 1–13 jsou z řeči Suvorovovy, strany 14–38 z řeči Vasiljevovy. Eduard Weyr poznamenal, že celý Vasiljevův projev přeložil do angličtiny G. B. Halsted roku 1894.

[6]) Podrobněji o matematickém – a speciálně geometrickém – prostředí, v němž Eduard Weyr působil, viz:
J. Folta: *Česká geometrická škola. Historická analýza*, Studie ČSAV č. 9, Praha 1982, 90 stran
J. Folta, L. Nový: *Eduard Weyr a pražská matematika 2. poloviny 19. století*, Acta Polytechnica, Práce ČVUT v Praze, VI, 1, 1969, 253–268

[7]) Matyáš Lerch (1860–1922), od roku 1896 profesor na univerzitě ve Fribourgu (Švýcarsko), od roku 1906 profesor české techniky v Brně, od roku 1920 profesor univerzity v Brně.
Podrobnější údaje viz K. Čupr: *Prof. Matyáš Lerch*, ČPMF 52(1923), 301–313; J. Škrášek: *Život a dílo profesora Matyáše Lercha*, ČPM 85(1960), 228–240 (práce obsahuje další bibliografické údaje).

[8]) Jan Vojtěch (1879–1953), profesor na české technice v Brně (od roku 1918) a na české technice v Praze (od roku 1923).
Bohumil Bydžovský (1880–1969), od roku 1919 profesor na české univerzitě v Praze.

Ladislav Seifert (1883–1956), od roku 1921 profesor brněnské univerzity. Podrobnější informace najde čtenář v následujících pracích:
F. Vyčichlo: *Prof. Dr. Jan Vojtěch zemřel*, ČPMF 78(1953), 283–286;
K. Šindelář: *Památce akademika Bohumila Bydžovského*, ČPM 95(1970), 100–113;
J. Klapka: *Prof. Dr. Ladislav Seifert zemřel*, ČPM 81(1956), 370–376.

[9]) Jacob Steiner (1796–1863), od roku 1835 profesor berlínské university.

[10]) Srovnej G. Salmon, W. Fiedler: *Analytische Geometrie des Raumes I: Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades*, 4. vyd. 1898, zvláště kap. XI

[11]) Karel Pelz (1845–1908), řádný profesor deskriptivní geometrie na technice ve Štýrském Hradci (od roku 1881) a na české technice v Praze (od roku 1896).

[12]) Bedřich Procházka (1855–1934), od roku 1904 profesor deskriptivní geometrie na české technice v Brně.

[13]) Alois Strnad (1852–1911), profesor a ředitel reálky v Kutné Hoře, autor zajímavé práce *Mathematikové ve francouzské revoluci*.
Viz ČPMF 28(1899), 210–212.

[14]) K tomuto místu cituje Eduard Weyr v poznámce pod čarou dva Emilovy spisy: *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse* (Leipzig 1869) a *Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung* (Leipzig 1870).

[15]) V novější době jej rozvinul R. Sauer (1898–1970) v knize *Differenzengeometrie*, Berlin 1970.

[16]) Čeněk Strouhal (1850–1922), profesor fyziky na české univerzitě v Praze.

[17]) V době, kdy Weyr psal knihu [W78], byl již vydán i díl II z roku 1889.

[18]) Litografované přednášky L. Bianchi: *Lezioni di geometria differenciale* z roku 1886 (knižně díl I, Pisa 1894, 1902, 1922); viz zvláště první kapitoly v německém překladu *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Leipzig 1899.

[19]) Viz Charles Dupin: *Développement de géométrie*, Paris 1813.

[20]) Čísla n, p a h jsou nejdůležitější z tzv. charakteristických čísel prostorové čáry (je $h \geqq \frac{1}{4}n(n-2)$ při n sudém a $h \geqq \frac{1}{4}(n-1)^2$ při n lichém); relace mezi nimi odvodil Arthur Cayley roku 1845 jako protějšek k analogickým vztahům pro rovinnou křivku, které získal už Julius Plücker (1801–1868) roku 1839.

[21]) O podmínce, kdy Bézierova křivka 4. stupně leží na dvou — a tedy nekonečně mnoha — plochách 2. stupně a kdy leží pouze na jediné ploše 2. stupně, jsem přednášel na československo-rakouském kolokviu o geometrii (Zwettl, červenec 1990). Srovnej komentář k práci [W14].

[22]) Srovnej citovaný už příspěvek (viz pozn. [3])) ve Sborníku 13. semináře ..., Pernink září 1993, zvláště str. 9.

[23]) Viz Emil Weyr: *Die Elemente ..., díl I, kap. XIV.*

[24]) Viz V. Hlavatý: *Projektivní geometrie*, díl I, str. 10, poznámka pod čarou označená *).

[25]) Vincenc Jarolímek (1846–1921), od roku 1907 profesor deskriptivní geometrie na české technice v Praze.

[26]) Z českých knih o geometrii vydaných do roku 1940 se druhého vydání — ale až po roce 1940 — dočkaly jedině knihy B. Hostinský: *Diferenciální geometrie křivek a ploch* (Praha 1915, 2. vyd. 1942, 3. vyd. 1950), B. Bydžovský: *Úvod do analytické geometrie* (Praha 1923, 2. vyd. 1946, 3. vyd. 1956), F. Kadeřávek, J. Klíma, J. Kounovský: *Deskriptivní geometrie* (Praha, I. díl 1929, II. díl 1932, dotisk 1954) a knížka V. Hlavatý: *Úvod do neeuklidovské geometrie* (Praha 1926, 2. vyd. 1949).
Uveďme ještě základní životní data autorů učebnice *Deskriptivní geometrie*: F. Kadeřávek (1885–1961), J. Klíma (1887–1943), J. Kounovský (1878–1949).

[27]) Recenzi díla *Základové vyšší geometrie* zveřejnil v ČPMF 8(1879), 141–143, a v Jahrbuch ... 11(1879), 391–392, F. J. Studnička. Autorem recenze na učebnici *Projektivná geometrie* v ČPMF 28(1899), 210–212, je A. Strnad, a v Jahrbuch ... 29(1898), 456–457, A. Sucharda.
František Josef Studnička (1836–1903) byl profesorem české techniky (od roku 1866) a české univerzity (od roku 1871) v Praze.
Antonín Sucharda (1854–1907) byl profesorem české techniky v Praze a v Brně.

[28]) Felix Klein (1849–1925); po profesurách v Erlangen, Mnichově a Lipsku působil od roku 1886 jako profesor na univerzitě v Göttingen. Při nástupu řádné profesury v Erlangen roku 1872 proslovil přednášku *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, která vešla do dějin matematiky jako tzv. Erlangenský program.

[29]) Christian von Staudt (1798–1867), od roku 1835 profesor na univerzitě v Erlangen.

[30]) Jan Schuster (1880–1961) byl profesorem na reálkách v Pardubicích a v Praze, napsal řadu geometrických příspěvků pro Časopis pro pěstování matematiky a fyziky a pro Rozhledy matematicko-přírodovědecké, které na počátku třicátých let i dva roky redigoval.
Schusterovy zápisy Weyrových přednášek objevila v březnu 1995 Martina Němcová. Jsou svázány spolu s dalšími přednáškami (F. J. Studničky, Č. Strouhala a G. Grusse) a v knihovně vedeny pod jménem F. J. Studničky (sign. Va 559, Vb 463).

Literatura

[1] Bydžovský B., Knichal V.: *O simultánním invariantu Φ dvou kvadrik*, Rozpravy České akademie ..., třída II, 50(1940), č. 21

[2] Catalan E.: *Sur les trajectoires orthogonales des sections circulaires d'un ellipsoide*, Journal de mathématiques pures et appliquées 12(1847), 483–490

[3] Denis A.: *Čechy po Bílé Hoře*, Praha 1905

[4] Halphen G. H.: *Note relative à une Communication sur les courbes gauches algébriques*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 76(1873), 558

[5] Hesse O.: *Über Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Punkten berühren*, Journal für die reine und angewandte Math. 36(1848), 143–176

[6] Chasles M.: *Question 296*, Nouvelles Annales de Mathématiques 14(1855), 50

[7] Küpper K.: *O jistém základním problému v projektivní geometrii*, Rozpravy České akademie ..., třída II, 6(1897), č. 21

[8] Procházka B.: *Příspěvek ku sestrojení středu zakřivení trochoidy*, ČPMF 23(1894), 236–240

[9] Procházka B.: *Ein Beitrag zur Translation-Bewegung*, Věstník Královské české společnosti nauk, třída math.-přírod., 1895, č. XXVII

[10] Reye T.: *Die Geometrie der Lage* I, Leipzig, 1. vyd. 1866, 6. vyd. 1923

[11] Reye T.: *Geometrische Verwandschaften zweiten Grades*, Zeitschrift für Mathematik und Physik 11(1866), 280–310

[12] Schlömilch O.: *Über einige aus Kegelschnitten abgeleitete Curven*, Zeitschrift für Mathematik und Physik 14(1869), 158–161

[13] Schröter H.: *Über die Erzeugnisse krummer projektivischer Gebilde*, Journal für die reine und angewandte Math. 54(1857), 31–47

[14] Sobotka J.: *O Weyrově činnosti v geometrii*, ČPMF 34(1905), 490–509

[15] Steiner J.: *Geometrische Lehrsätze*, Journal für die reine und angewandte Math. 32(1846), 182–184

[16] Strouhal Č.: *Über die Krümmungslinien der geraden Schraubenfläche*, Archiv math. a fys. 2(1879), 69–84

[17] Šolín J.: *Ueber die Construction der Osculationshyperboloide zu windschiefen Flächen*, Věstník Královské české společnosti nauk, třída math.-přírod. 1883, 11–17

SPISŮV

POCTĚNÝCH JUBILEJNÍ CENOU

KRÁL. ČESKÉ SPOLEČNOSTI NAUK V PRAZE

ČÍSLO II.

EDUARD WEYR:

O THEORII FOREM BILINEARNÝCH

V PRAZE

Nákladem jubilejního fondu král. české společnosti nauk

1889