EDUARD WEYR, LINEÁRNÍ ALGEBRA

A TEORIE HYPERKOMPLEXNÍCH ČÍSEL

Jindřich Bečvář

Eduard Weyr publikoval několik prací, které dnes řadíme do lineární algebry, a několik prací z teorie hyperkomplexních čísel (teorie algeber). Této problematice se věnoval hlavně v létech 1883–1889 (práce [W47], [W48], [W49], [W50], [W52], [W53], [W56], [W57], [W58], [W63], [W64]); dále sem patří ještě práce [W36] z roku 1880 a práce [W90] z roku 1901. V následujícím textu se budeme zabývat právě těmito Weyrovými pracemi. Zrekapitulujeme je a pokusíme se je zařadit do kontextu české i světové matematiky.

Dne 5. března 1880 přednesl Eduard Weyr na zasedání Královské české společnosti nauk svůj důkaz věty o násobení determinantů. Jeho přednáška je otištěna ve *Zprávách o zasedání* (viz [W36]).

Teorie determinantů byla v druhé polovině minulého století velmi módní disciplínou. Byla podrobně rozpracovávána do šířky i hloubky, byly studovány různé typy speciálních determinantů, podávány nové důkazy již známých vět, vydávány základní učebnice i podrobné a obsáhlé monografie. Weyrův příspěvek je více méně poplatný duchu doby. Poznamenejme, že obecný důkaz věty o násobení determinantů podali Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856) a Augustin Louis Cauchy (1789–1857) roku 1812 (jejich výsledky byly publikovány roku 1813 resp. 1815); pro determinanty třetího řádu znal tento výsledek již roku 1801 Karl Friedrich Gauss (1777–1855).

Roku 1881 byl Eduard Weyr jmenován profesorem české techniky a vzdal se docentury na univerzitě. Soukromým docentem na univerzitě se v tomto roce stal Ludvík Kraus (1857–1885); po absolvování pražské univerzity (doktorát r. 1878) studoval v Mnichově u Felixe Kleina (1849–1925) a čtyři semestry v Berlíně, kde působili zejména Karl Weierstrass (1815–1897) a Leopold Kronecker (1823–1891). Po své habilitaci přednášel Kraus čtyři semestry na české univerzitě a zaníceně šířil Weierstrassovy myšlenky a jeho pojetí výkladu matematiky (viz [40], [41]). Spřátelil se s Eduardem Weyrem a patrně v něm vzbudil zájem jak o Weierstrassův exaktní přístup k matematice, tak i o teorii matic.

Dne 25. dubna 1884 vystoupil Eduard Weyr na zasedání Královské české společnosti nauk s přednáškou *O základní větě v theorii matric.* Jeho přednáška se týkala Cayleyovy–Hamiltonovy věty. Je opět otištěna — podobně jako práce [W36] — ve *Zprávách o zasedání* (viz [W47]). Posiluje domněnku, že zájem o teorii matic vzbudil ve Weyrovi právě Ludvík Kraus. Ve své přednášce seznámil Eduard Weyr nejprve posluchače s tématem a pak řekl:

Hleděl jsem tuto větu obecně dokázati, však se mi to nepodařilo, neboť cesta, která v jednoduchých poměrně případech $n = 2, 3$ vedla k cíli, se v obecném případu stávala neschůdnou. Obrátil jsem se k svému příteli p. Dr. L. Krausovi, priv. docentu na zdejší české universitě, s prosbou, aby se pokusil o důkaz; byl jsem nemálo potěšen, obdržev ihned, čeho jsem si přál. Dovolím si reprodukovati doslovně pěkné úvahy p. dra Krause. ([W47], str. 150)

Dále Weyr uvedl nejprve Krausův důkaz Cayleyovy–Hamiltonovy věty a potom svoji modifikaci tohoto důkazu.

Cayleyova–Hamiltonova věta byla zformulována v Cayleově práci [9] nazvané *A Memoir on the Theory of Matrices* z roku 1858. Arthur Cayley (1821–1895) zde napsal, že toto tvrzení prověřil pro matice druhého a třetího řádu, předvedl důkaz pro $n = 2$ a poznamenal, že necítí potřebu podat obecný důkaz. [1]) William Rowan Hamilton (1805–1865) dokázal obdobné tvrzení pro kvaterniony ([26], str. 566–567); tento výsledek však znal již roku 1846.

Bartel Leenert van der Waerden (nar. 1903) uvádí v knize *History of Algebra*, že obecné důkazy Cayleyovy–Hamiltonovy věty podali Laguerre (1867), Frobenius (1878), Buchheim (1885), Weyr (1890), Taber (1890), Pasch (1891), Molien (1893) a Frobenius (1896) (viz [83], str. 190). Eduard Weyr je zde jmenován díky své pozdější práci [W64]; vzhledem k výsledkům uvedeným v práci [W47] je však třeba v uvedeném přehledu zařadit jména Krause a Weyra již k roku 1884. Připomeňme ještě, že Edmond Nicolas Laguerre (1834–1886) pouze prověřil tvrzení věty podobně jako Cayley (viz [45]). Autorem prvního obecného důkazu je tedy Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917) ([17], str. 353–354).

Je zajímavé, že o Weyrově důkazu Cayleovy–Hamiltonovy věty věděl již roku 1884 Sylvester, jak o tom svědčí jeho poznámka v práci [76] uveřejněné v časopise Comptes Rendus (viz poznámka [1])).

Cayleyovou prací [9] byl později datován zrod teorie matic a Cayley byl označen za jejího zakladatele. [2]) Cayley však ve své práci zavedl pouze formální aparát teorie matic (operace s maticemi), vytvořil z matic řádu n lineární asociativní algebru dimenze n^2 a reprezentoval Hamiltonovy kvaterniony jistými komplexními maticemi druhého řádu. Jediným hlubším výsledkem práce [9] je právě Cayleyova–Hamiltonova věta, podaná však bez obecného důkazu. Problematice vlastních čísel, na kterých jsou založeny nejdůležitější aplikace teorie matic, se Cayley nevěnoval. Přitom se problémy související s vlastními čísly objevovaly v matematice a nebeské mechanice už v 18. století. [3]) Řada výsledků teorie matic byla pak v 19. století zformulována a dokázána v ekvivalentním vyjádření v řeči bilineárních a kvadratických forem.

Cayleyova práce [9] vešla ve známost v Evropě až počátkem osmdesátých let, předtím ji znali prakticky pouze britští matematici. Teprve koncem minulého století došlo k propojení teorie forem a teorie matic. Právě Eduard Weyr je jedním z prvních matematiků, kteří ke sjednocování těchto dvou teorií podstatně přispěli (viz Weyrovy práce [W63] a [W64]).

Weyrova přednáška [W47] svědčí o tom, že Kraus i Weyr ovládali roku 1884 základní maticový aparát včetně obecného důkazu Cayleyovy–Hamiltonovy věty a že jejich znalost teorie matic byla na světové úrovni.

Svou přednáškou chtěl asi Weyr obrátit na teorii matic pozornost českých matematiků a snad chtěl i upozornit na schopnosti svého mladšího kolegy a přítele.

V práci [W48] z roku 1884 podal Eduard Weyr metodu, jak převést řešení tzv. bilaterální rovnice tvaru

$$a_0x^nb_0 + a_1x^{n-1}b_1 + \cdots + a_{n-1}xb_{n-1} = r,$$

kde $a_0, b_0, \cdots, a_{n-1}, b_{n-1}, r$ jsou dané kvaterniony a x hledaný kvaternion, na řešení obyčejných číselných rovnic. Zobecnil tak výsledky, ke kterým dospěl v témže roce James Joseph Sylvester (1814–1897); ten hledal řešení tzv. unilaterárních rovnic, kdy mocniny neznámého kvaternionu x jsou vynásobeny koeficienty pouze z jedné a téže strany (viz [77]–[79]). Poznamenejme, že Hamilton řešil pouze unilaterální rovnice druhého stupně, tj. rovnice

$$x^2 + px + q = 0, \qquad x^2 + xp + q = 0$$

(viz [26], str. 631–632). Sylvester reagoval na rozpracovávání svých myšlenek koncem roku 1884 v časopise *Nature* takto:

Předmět nemůže býti v lepších rukou. Míč jest vržen a nejzkušenější a nejobratnější hráči — Cayleyové, Lipschitzové, Poincaréové, Weyrové, Buchheimové (a kdo ví, kolik jich ještě?) — stojíce kolem a připraveni lapiti jej, sledují let jeho ve vzduchu. [4])

V práci [W49] sestrojil Eduard Weyr pro matici M druhého řádu matici e^M. Jsou-li μ_1, μ_2 charakteristické kořeny matice M, je

$$e^M = \frac{e^{\mu_1} - e^{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} \cdot M + \frac{\mu_1 \cdot e^{\mu_2} - \mu_2 \cdot e^{\mu_1}}{\mu_1 - \mu_2} \cdot E\,,$$

kde E je jednotková matice. Zjistil, že exponenciální funkce má skalární periodu $2\pi i$, tj. rovnost $e^{M+L} = e^M$ platí pro libovolnou matici M pouze v případě, že L je skalární matice určená hodnotou $2k\pi i$. Pokud se však omezíme na matice tvaru $\alpha M + \beta E$ (tzv. matice komplanární s M), má exponenciální funkce ještě neskalární periodu

$$\frac{2\pi i}{\mu_1 - \mu_2} \cdot (M - \mu_2 E)\,.$$

Přirozený logaritmus definoval Weyr rovností $e^{\log M} = M$ a odvodil odtud jeho explicitní vyjádření. Dále opravil jednu Hamiltonovu větu o periodách exponenciální funkce definované na množině komplanárních kvaternionů ([27], art. 241, 242).

Eduard Weyr byl patrně prvním nebo jedním z prvních, kdo studoval matice e^M a $\log M$. Později se k této problematice vrátil v pracích [W56], [W63] a [W64]. Cyrus Colton MacDuffee (1895–1961) uvádí ve své knížce *The theory of* *matrices*, že se exponenciální funkcí s maticovým argumentem zabývali Giuseppe Peano (1858–1932) roku 1888 v práci [58] a Emmanuel Carvallo (1856–1945) roku 1891 v práci [7]; Weyrovu práci [W49] z roku 1884 opomíjí (viz [46], str. 99). Poznamenejme, že v knížce *Calcolo geometrico* ([59], str. 150) zavádí Peano k danému endomorfismu R vektorového prostoru endomorfismus

$$e^R = 1 + R + \frac{R^2}{2!} + \cdots .$$

Morris Kline ve své knize *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* ([38], str. 811) píše, že transcendentní funkce s maticovým argumentem zavedl jako mocninné řady William Henry Metzler (1863–1943) roku 1892 v práci [47]. Funkce e^q a $\log q$, kde q je kvaternion, byly však studovány již Hamiltonem (viz [26] a [27]) a úzký vztah kvaternionů a matic byl od Cayleyho práce [9] znám alespoň britským matematikům.

Weyrovy práce [W48] a [W49] stejně jako pozdější [W52] a [W53] byly publikovány v časopise *Comptes Rendus*; francouzské akademii je předložil Charles Hermite (1822–1901).

Roku 1885 byl ve čtrnáctém ročníku *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* publikován Weyrův článek [W50], *O řešení lineárných rovnic.* Jeho cílem bylo seznámit českou matematickou veřejnost s problematikou řešení soustav lineárních rovnic. Připomeňme však nejprve něco z historie.

V polovině 18. století bylo objeveno Cramerovo pravidlo (roku 1750 je publikoval Gabriel Cramer (1704–1752), o dva roky dříve Colin MacLaurin (1698–1746), viz [5]); tento objev vedl ke vzniku a rozvoji teorie determinantů. Ještě zhruba o sto let později se však matematika v podstatě omezovala na případy soustav n rovnic o n neznámých s regulární maticí, kdy je právě možno Cramerova pravidla užít. Obecné vyřešení této problematiky, tj. nalezení nutné a postačující podmínky pro řešitelnost soustavy n lineárních rovnic o m neznámých s libovolnou maticí a nalezení metod pro stanovení všech řešení, je založeno na pojmu hodnosti matice. Tento pojem definoval explicite až Frobenius roku 1879; Sylvester razil nezávisle ekvivalentní pojem nulity matice (hodnost + nulita = řád). Implicite se však pojem hodnosti či nulity objevoval už dříve. První publikované vyjádření věty o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic je v knížce *An elementary treatise on determinants*, kterou vydal roku 1867 v Londýně anglický matematik Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898), známý pod pseudonymem Lewis Carroll.[5]) K obdobným výsledkům dospěli v poslední třetině 19. století Kronecker, Alfredo Capelli (1858–1916), Frobenius a další (odtud věta Kroneckerova–Capelliova, věta Frobeniova atd.).

Weyr vyšel ze známé monografie [1] německého matematika Heinricha Richarda Baltzera (1818–1887), ve které je podána Kroneckerova teorie soustav lineárních rovnic. Kroneckerův přístup přepracoval, přiblížil začátečníkům a podal *odpověď k dané otázce způsobem do jisté míry novým* ([W50], str. 101). Nejprve pomocí subdeterminantů definoval lineární nezávislost n-tic čísel (reálných či komplexních — jejich povaha se zde nespecifikuje), vyšetřoval jejich lineární kombinace a kromě jiného dokázal, že m daných n-tic může generovat nejvýše m lineárně nezávislých n-tic ([W50], str. 105–106). [6]) Dále studoval homogenní a nehomogenní soustavy, uvedl podmínky pro existenci řešení, zjistil dimenzi množiny všech řešení a podal metodu vyhledání všech řešení. Neužíval zde pojmu hodnosti či nulity, ale vybudoval celou teorii na nulovosti či nenulovosti příslušných subdeterminantů.

Dnes, kdy se tato problematika v lineární algebře vykládá elegantně pomocí homomorfismů (lineárních zobrazení) nebo lineárních forem či skalárního součinu a podstatně se využívá pojmu hodnosti matice, působí již Weyrův přístup velmi nemoderně a rozvláčně. Domníváme se však, že Weyrův článek [W50] byl ve své době důležitým přínosem k informovanosti českých matematických kruhů.

Roku 1885 vyšly ve francouzském časopise *Comptes Rendus* Weyrovy práce [W52] a [W53]: *Sur la théorie des matrices* a *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes espèces*; jejich resumé bylo otištěno v časopise *Bulletin des Sciences Mathématiques*. Oba články mají charakter dnešního předběžného oznámení výsledků. Weyr zde stručně prezentoval svoji teorii charakteristických čísel a „typických" matic, kterou později rozpracoval a podrobně vyložil ve spisu [W63], resp. [W64]. Tuto teorii vybudoval na pojmu nulita matice. Uveďme ve stručnosti přehled nejdůležitějších výsledků prací [W52] a [W53].

Prvním výsledkem práce [W52] je nalezení jistého anulujícího polynomu matice A, který — pokud to je možné — má menší stupeň než řád matice A. Důsledkem tohoto Weyrova výsledku je následující tvrzení:

(i) Nechť A je matice řádu n. Anulující polynom matice A stupně menšího než n existuje právě tehdy, když existuje charakteristický kořen λ matice A, pro který je nulita matice $A - \lambda E$ větší než jedna.

Weyr dále charakterizoval diagonalizovatelné matice, tj. matice podobné diagonálním maticím:

(ii) Matice A je diagonalizovatelná právě tehdy, když pro každý charakteristický kořen λ matice A je nulita matice $A - \lambda E$ rovna násobnosti tohoto kořene.

Třetím důležitým výsledkem je odhad nulity součinu dvou matic:

(iii) Pro nulitu součinu matic A_1, A_2 platí nerovnosti

$$n(A_i) \leq n(A_1 A_2) \leq n(A_1) + n(A_2)\,, \qquad i = 1, 2\,.$$

V práci [W53] zavedl Eduard Weyr tzv. charakteristická čísla. Jestliže A je komplexní matice řádu n a λ její s-násobný charakteristický kořen, pak existuje přirozené číslo r takové, že

$$n(A - \lambda E) < n(A - \lambda E)^2 < \cdots < n(A - \lambda E)^r = n(A - \lambda E)^{r+1} = \cdots\,.$$

Označme

$$n(A-\lambda E)=\alpha_1,$$
$$n(A-\lambda E)^2=\alpha_1+\alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n(A-\lambda E)^r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r\,.$$

Přirozená čísla $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ nazval Weyr charakteristická čísla matice A příslušná k charakteristickému kořenu λ ; ukázal, že pro ně platí následující vztahy:

(iv) $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r$,

(v) $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = s$.

Pomocí těchto pojmů vyjádřil minimální polynom matice A a tak zpřesnil výše uvedený výsledek (i) práce [W52]:

(vi) Jestliže $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ jsou charakteristické kořeny matice A a $r_1, \cdots, r_k$ počty příslušných charakteristických čísel, potom

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{r_k}$$

je minimální polynom matice A.

Weyr dále ukázal, že charakteristické kořeny a charakteristická čísla tvoří úplný systém invariantů podobnosti matic a že každé přípustné volbě těchto invariantů odpovídá třída podobných matic:

(vii) Matice A a B jsou podobné právě tehdy, když mají stejné charakteristické kořeny a stejná charakteristická čísla příslušná k jednotlivým kořenům.

(viii) Pro každou přípustnou volbu čísel

$$\lambda_1;\ \alpha_1^1, \cdots, \alpha_{r_1}^1,$$
$$\lambda_2;\ \alpha_1^2, \cdots, \alpha_{r_2}^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_k;\ \alpha_1^k, \cdots, \alpha_{r_k}^k,$$

(viz např. výše uvedené podmínky (iv) a (v)), existuje matice řádu n s charakteristickým kořeny λ_j a k nim příslušnými charakteristickými čísly $\alpha_1^j, \cdots, \alpha_{r_j}^j$ $(j=1, \cdots, k)$.

Při důkazu tvrzení (viii) sestrojil Eduard Weyr konkrétní matici M řádu n, která má předepsané charakteristické kořeny a předepsaná charakteristická čísla, a tak v dané třídě podobných matic nalezl reprezentanta M, z kterého se pomocí vztahu $X = Q^{-1}MQ$ získají všechny matice X této třídy. Weyrova matice M má velmi jednoduchý tvar. Obsahuje pouze nuly, jedničky a charakteristické kořeny λ_j; od Jordanovy matice reprezentující danou třídu podobných matic se liší pouze trochu jiným uspořádáním prvků. Pro tuto matici M zavedl Weyr později termín „typický tvar“ (viz [W56] a hlavně [W63] a [W64]).

Pokusme se nyní zařadit výsledky Weyrových prací [W52] a [W53] do rámce světové matematiky.

Pojem hodnosti matice zavedl roku 1879 Frobenius v pracích [18] a [19], [7]) implicite se však tento pojem objevoval i dříve, jak jsme se už výše zmínili (např. Dodgson). Sylvester užíval nezávisle pojmu nulita; jeho náznaky je snad možno nalézt již v práci [70] z roku 1850. Roku 1882 publikoval v práci [73] odhad nulity součinu matic: nulita součinu matic (téhož řádu) je větší nebo rovna nulitě každého činitele a menší nebo rovna součtu nulit všech činitelů. [8]) Vyjádříme-li tento výsledek pro dvě matice řádu n symbolicky pomocí dnes užívaného pojmu hodnost, dostaneme nerovnosti

$$r(AB) \leq r(A), \qquad r(AB) \leq r(B), \qquad r(A) + r(B) - n \leq r(AB),$$

které jsou často spojovány se Sylvesterovým jménem (viz např. [39], str. 61). Eduard Weyr publikoval tento výsledek roku 1885 (patrně nezávisle na Sylvesterovi). Poznamenal, že zná Sylvesterovu práci [75], že však neviděl práci [74]; práci [73], která je uveřejněna ve stejném časopise jako práce [74], neznal patrně rovněž (viz [W52], str. 788, a [W63], str. 25).

Otázky kanonických tvarů matic se poprvé objevily při transformaci bilineárních a kvadratických forem, kdy se vhodnými substitucemi lineárních kombinací nových proměnných přecházelo k jednodušším vyjádřením uvažovaných forem. Úvahami o podobnosti matic se zabývali již Cauchy, Sylvester a Henry John Stanley Smith (1826–1883). Roku 1868 publikoval Weierstrass svoji teorii elementárních dělitelů [86], kde mimo jiné podal nutné a postačující podmínky pro podobnost matic a pro diagonalizovatelnost matice a v podstatě dospěl k tzv. Jordanovu kanonickému tvaru. O dva roky později vydal Camille Jordan (1838–1922) svoje obsáhlé dílo [37], *Traité des substitutions*; v druhé knize této práce (str. 114–126) nacházíme rovněž převod matice na kanonický tvar. Frobenius se problematikou charakteristické rovnice, minimálního polynomu, podobnosti, invariantních faktorů a elementárních dělitelů zabýval roku 1878 v práci [17]; roku 1894 se k tomuto tématu vrátil a dal svým výsledkům exaktnější podobu (viz [20]). Všechny tyto výsledky byly zformulovány v řeči bilineárních a kvadratických forem a s využitím determinantů; jejich souhrn — podaný více méně v duchu původních prací, ale v maticové řeči — je dnes součástí základních kursů lineární algebry.

Eduard Weyr přistoupil k problematice podobnosti matic a k nalezení úplného systému invariantů podobnosti jiným způsobem. Jeho přístup je bližší pohledu algebry či funkcionální analýzy. Později svou metodu charakteristických čísel podrobněji rozpracoval a doplnil zavedením důležitého pojmu normální soustava (viz [W63], resp. [W64]).

Weyrovy práce [W52] a [W53] byly uvedeny v přehledu prací z teorie matic za období 1857–1893, který pod názvem *List of writings on the theory of matrices* uveřejnil roku 1898 Thomas Muir (1844–1934) v časopise *American Journal of Mathematics*. Seznam začíná Cayleyovou prací [9] a obsahuje padesát titulů.

Výklad Weyrovy teorie podali v létech 1892, 1904 a 1930 Metzler, Kurt Hensel (1861–1941) a Julius Wellstein (1888– ?) [9]) v pracích [47], [33] a [88]. Weyrovu teorii uvádějí i MacDuffee ve své knize *The theory of matrices* z roku 1933 a Rudolf Zurmühl (1904– ?) v knize *Matrizen* z roku 1950 ([46], str. 73–74; [89], str. 211–226, 371). Wolfgang Krull (1899–1971) ji roku 1921 rozšířil pro matice nad libovolným tělesem (viz [44]). Výše uvedený soubor čísel

$$(\alpha_1^1, \cdots, \alpha_{r_1}^1; \alpha_1^2, \cdots, \alpha_{r_2}^2; \cdots; \alpha_1^k, \cdots, \alpha_{r_k}^k)$$

bývá nazýván Weyrova charakteristika (viz [46], str. 73–74; [89], str. 212–214, 371; [61], str. 57; [4], str. 124, 167; [81], str. 80, 187–188).

Roku 1911 zobecnil Frobenius [21] Weyrovy výsledky z práce [W52] týkající se hodnosti matic a ocenil Weyrovu teorii charakteristických čísel; Frobenius ovšem cituje pozdější Weyrovu práci [W63]. [10]) Max Koecher uvádí roku 1983 ve své knize *Lineare Algebra und analytische Geometrie* (viz [39], str. 88) Weyrovy–Frobeniovy nerovnosti a cituje Frobeniovu práci [21].

Ještě padesát let od Weyrovy smrti nalézáme v české matematické literatuře odezvu na jeho teorii charakteristických čísel a typických tvarů matic. Prof. Otakar Borůvka (naroz. 1899) propagoval Weyrovu teorii nejen ve svých přednáškách, ale i ve svých pracích (např. [3]), a upozorňoval na možnosti jejího použití:

K integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty se obvykle používá klasické metody Weierstrassovy, spočívající na redukci matice koeficientů na kanonický tvar. ... Ve svých přednáškách o diferenciálních rovnicích, které jsem konal ve stud. roce 1948/49 na přírodovědecké fakultě M. U. v Brně, vyložil jsem integrační metodu založenou na Weyrově theorii matic. Tato metoda se vyznačuje tím, že vede k přehledným explicitním vzorcům pro integrály, vyjadřujícím algebraickou povahu problému. Nedávno uveřejnil M. Kumorovitz práci o integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty, která je s Weyrovou theorií matic v úzké souvislosti. ([3], str. 151)

Na společném 3. sjezdu československých a 7. sjezdu polských matematiků, který se konal v Praze 28. 8. – 4. 9. 1949, přednesl Miroslav Novotný (naroz. 1922) příspěvek o zobecnění Weyrovy teorie charakteristických čísel. Výtah z tohoto příspěvku byl publikován ve zprávách ze sjezdu (viz [56]).

Jiří Čermák se zabýval problematikou soustav diferenciálních a diferenčních rovnic v pracích [11], [12] a [13] z let 1953 až 1956. Nepoužíval Weierstrassovu teorii elementárních dělitelů, ale Weyrovu teorii charakteristických čísel, typických tvarů matic a normálních soustav *... k vyšetřování integrálů homogenního systému lineárních diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty ...* a k *... řešení homogenního systému lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty* ([11], str. 337, 338).

V české matematické literatuře je Weyrova teorie podrobně vyložena v Borůvkově knížce *Základy teorie matic* z roku 1971. Knížka vznikla z vysokoškolského textu, který měl tři vydání. Prof. Borůvka zde píše:

Weyrova teorie je obsahově rovnocenná s důležitou teorií elementárních dělitelů ... a svojí průhlednou algebraickou strukturou ji předčí. ([4], str. 116) [11])

Na jiném místě Borůvka píše:

Nicméně se mně zdá, že Weyrova práce nenalezla ve světové literatuře ono místo, které jí přináleží. Na př. v obsáhlé Wedderburnově knize o maticích z r. 1934 jsou sice v seznamu literatury obě Weyrovy práce uvedeny, avšak v textu není o jejich obsahu zmínky. ([3], str. 152)

V létech 1962–63 publikoval Richard W. Feldman sérii krátkých článků věnovaných historii teorie matic [15]; Weyrovy výsledky prací [W52] a [W53] však hodnotí chybně. [12])

Weyrově teorii charakteristických čísel přeložené do moderní řeči endomorfismů vektorových prostorů je věnován v této publikaci zvláštní článek. Jeho práce [W52] a [W53] jsou v přílohách. Vzhledem ke špatné kvalitě předloh nemohly být okopírovány; při přesázení však byla v maximální možné míře zachována jejich úprava.

Dne 1. ledna 1885 zemřel Ludvík Kraus v necelých osmadvaceti letech. [13]) Eduard Weyr o něm napsal články [W53a] a [W54]. Zdá se, že po Krausově smrti Weyrův zájem o matice postupně pohasl. Práce [W52] a [W53] byly psány buď ještě za Krausova života nebo těsně po jeho smrti; tyto práce byly předloženy francouzské akademii 16. března a 13. dubna 1885. Práce [W56], [W57] a [W58] byly publikovány do tří let po Krausově smrti. V pozdějších pracích [W63], [W64], [W90] už jde z větší části jen o propracování a doplnění dřívějších výsledků a o jejich podrobnější výklad.

V úvodu čtyřicetistránkové práce *O binarných matricích*, která byla předložena dne 11. března 1887 Královské české společnosti nauk, Eduard Weyr píše:

V jedné ze svých úvah o matricích ... vytknul Sylvester výslovně totožnost theorie binarných matric s theorií kvaternionů; ale již Cayley ... byl k souvislosti obou theorií poukázal.

Theorie kvaternionů založena Hamiltonem vzhledem k zamýšleným applikacím na úvahách geometrických; avšak nebude zajisté nezajímavo přihlédnouti k ní se stanoviska ryze počtářského, zaujatého v theorii matric.

Následující, arci velice elementarné úvahy obsahují základy theorie binarných matric a tím i základy theorie kvaternionů. ([W56], str. 358)

„Binarnými matricemi" míní Eduard Weyr matice druhého řádu. V prvních osmi paragrafech své práce (*Addice a subtrakce, Multiplikace, Divise, Reciproká matrice, Skalarné matrice, Celistvá a lomená funkce matrice, Základní rovnice dané matrice a redukce racionalných funkcí, O kořenech matrice*) uvádí základní fakta o maticích druhého řádu a o operacích s nimi. Matice a maticové operace přitom dává do souvislosti s transformacemi, které matice reprezentují. Ukazuje, že na základě Cayleyovy–Hamiltonovy věty je možno redukovat celistvou i racionální funkci φ matice M na lineární funkci tvaru $\alpha M + \beta E$, kde se skaláry α, β snadno vyjádří pomocí charakteristických kořenů matice M. [14])

V devátém paragrafu (*Obecná funkce matrice*) se zabývá podobnou problematikou jako v článku [W58] z téhož roku (viz dále). Dokazuje, že jestliže jsou oba charakteristické kořeny μ_1, μ_2 matice M v absolutní hodnotě menší než poloměr konvergence řady

$$\varphi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i ,$$

pak je definována matice

$$\varphi(M) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i M^i$$

a je to opět lineární funkce matice M, tj. $\varphi(M) = \alpha M + \beta E$, kde skaláry α, β se určí pomocí řady $\varphi(z)$. Platí pro ně stejné vztahy, jaké jsou uvedené v poznámce [14]). V desátém paragrafu *Typický tvar matrice* převádí Weyr elementárním způsobem matici M na některý z tvarů

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

a v jedenáctém paragrafu ukazuje, že pomocí tohoto převedení na typický tvar je možno jiným způsobem dospět k výsledkům paragrafu devátého.

V dalším paragrafu (*O rovnici nejnižšího stupně*) studuje Weyr minimální polynom, ve třináctém (*Řešení algebraické rovnice o skalarných koefficientech*) uvádí způsob nalezení všech matic M, které vyhovují rovnici

$$M^n + a_1 M^{n-1} + \cdots + a_n E = 0 ;$$

speciálně nachází matice M, pro které je $M^n - E = 0$. V dalším paragrafu (*O komplanarných matricích*) ukazuje, že všechny matice komplanární s M (tj. matice tvaru $\alpha M + \beta E$) jsou též komplanární navzájem a tvoří množinu uzavřenou na sčítání, odčítání a násobení (které je zde komutativní) a na tvoření celistvé i racionální funkce; jestliže je dále

$$X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n E = M ,$$

pak je X komplanární s M atd. Pro matici

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

je $M^2 = -E$, *pročež systém komplanarných matric $\alpha M + \beta$ podléhá těmže početním zákonům, jako systém obyčejných komplexních kvantit $\alpha\sqrt{-1} + \beta$* (str. 387).
Pro matici

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je $M^2 = E$ a uvažovaná množina odpovídá tzv. dvojným číslům (tento termín se však ve Weyrově práci neobjevuje). Skaláry uvažuje Weyr komplexní.

Další dva paragrafy (*Periody exponentialné funkce, Logarithmus matrice*) jsou (spolu s úplným závěrem práce — str. 400) rozšířeným přepisem dřívější Weyrovy práce [W49]. V sedmnáctém paragrafu (*Zavedení čtyr základních matric*) Weyr ukazuje, že po zvolení čtyř lineárně nezávislých matic J_1, J_2, J_3, J_4 můžeme každou matici M vyjádřit ve tvaru

$$M = \varrho_1 J_1 + \varrho_2 J_2 + \varrho_3 J_3 + \varrho_4 J_4$$

a matice druhého řádu pokládat za systém hyperkomplexních čísel se čtyřmi základními jednotkami. Weyr zavádí i tzv. strukturní konstanty, pomocí nichž se v tomto systému násobí (str. 393–394):

Položme tedy

$$J_k J_h = \sum_{(j)} \varepsilon_j^{(k,h)} J_j \ ; \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

i obdržíme pak součin každých dvou čísel našeho systemu opět ve tvaru čísla tohoto systemu

$$\sum_{(k)} \varrho_k J_k \cdot \sum_{(k)} \varrho'_k J_k = \sum_{(k,h)} \varrho_k \varrho'_h \cdot \sum_{(j)} \varepsilon_j^{(k,h)} J_j .$$

Jako příklad uvádí Weyr volbu základních matic

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

V posledních dvou paragrafech (*Hamiltonův system kvaternionů, Pokračování*) Weyr klade

$$J_1 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a nachází matice

$$J_2 = i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = j = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_4 = k = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},$$

pro které je $J_2 J_2 = J_3 J_3 = -J_1$ a $J_2 J_3 = -J_3 J_2 = J_4$ (viz str. 395).

Nyní jest patrné, že theorie matric jest totožná s theorií kvaternionů; stačí libovolnou matrici

$$M = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$$

uvést do tvaru $w + xi + yj + zk$, kde w, x, y, z jsou skalary, t. j. do tvaru kvaternionu, aby ona shoda byla patrna. (str. 397)

Weyr ovšem pracuje s kvaterniony s komplexními koeficienty (tzv. bikvaterniony); reálnými kvaterniony potom rozumí kvaterniony s reálnými koeficienty. Ukazuje, že mezi reálnými kvaterniony nejsou dělitelé nuly a že každým nenulovým reálným kvaternionem je možno dělit (na rozdíl od bikvaternionů). V závěru uvádí, kdy pro daný kvaternion q reprezentuje řada

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i q^i$$

opět určitý kvaternion, a píše (str. 400):

Tímto spůsobem bychom mohli všecky předcházející výsledky, jichž jsme se o matricích dodělali, přenésti do theorie kvaternionů.

Weyrova práce [W56] nové výsledky nepřináší. Byla zřejmě napsána pro popularizaci teorie matic a jejího vztahu k hyperkomplexním číslům. Českému čtenáři jistě dala řadu nových informací a pohledů.

V práci [W57] z roku 1887 sestrojil Eduard Weyr reprezentaci lineární asociativní algebry v algebře matic. Nechť A je lineární asociativní algebra s bází $\{e_1, \cdots, e_n\}$ a nechť násobení prvků báze je dáno vzorcem

$$e_h e_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}^{h} \cdot e_j, \qquad h, k = 1, \cdots, n\,;$$

α_{kj}^{h} jsou tzv. strukturní konstanty algebry. Vzhledem k asociativnosti je pro každé $k, h, i, s = 1, \cdots, n$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{k} \cdot \alpha_{js}^{h} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}^{h} \cdot \alpha_{is}^{j}\,.$$

Definujeme-li matice E_h rovnostmi

$$E_h = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{h} & \dots & \alpha_{n1}^{h} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n}^{h} & \dots & \alpha_{nn}^{h} \end{pmatrix}, \qquad h = 1, \cdots, n\,,$$

pak pro každé $h, k = 1, \cdots, n$ je

$$E_h E_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}^{h} \cdot E_j\,.$$

Vzhledem k tomu, že násobení jednotek $e_1, \cdots, e_n$ a matic $E_1, \cdots, E_n$ je „stejné", je zobrazení

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i E_i$$

reprezentací algebry A v algebře čtvercových matic řádu n.

Poznamenejme, že k obdobnému výsledku jako Weyr došli již dříve Charles Sanders Peirce (1839–1914) a Henri Poincaré (1854–1912) (viz [63]; dále viz [28], str. 248, [46], str. 2, [68] str. 170, [69] str. 416).

V práci [W58] z roku 1887 studoval Eduard Weyr lineární asociativní algebru A dimenze n nad tělesem reálných či komplexních čísel a došel k tomuto velmi významnému výsledku (str. 207):

Pro daný prvek $x \epsilon A$ definuje nekonečný součet

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$$

zcela určitý prvek y algebry A právě tehdy, když kořeny minimálního polynomu prvku x leží uvnitř kruhu konvergence mocninné řady $\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$.

Za uvedených předpokladů vyjádřil Weyr prvek

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$$

jako lineární kombinaci prvků $x, x^2, \cdots, x^{m-1}$, kde m je stupeň minimálního polynomu prvku x. K tomuto minimálnímu polynomu lze dospět postupnou eliminací základních jednotek $e_1, \cdots, e_n$ algebry A z rovnic

$$\begin{aligned} x &= a_{11}e_1 + \cdots + a_{1n}e_n, \\ x^2 &= a_{21}e_1 + \cdots + a_{2n}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Za předpokladu, že algebra A má jednotkový prvek a k prvku x existuje prvek inverzní, nalezl Weyr nutnou a postačující podmínku pro konvergenci řady $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i x^i$. Vzhledem k tomu, že matice řádu n tvoří lineární asociativní algebru dimenze n^2, je možno výsledky práce [W58] přepsat v maticové řeči, jak to ostatně Weyr udělal v pracích [W56] a [W63].

Práce [W58] je patrně nejvýznamnějším Weyrovým výsledkem. Jeho věta o konvergenci, dokázaná v obecné formulaci v práci [W58], pro matice druhého řádu v práci [W56] a pro matice řádu n v česky psaném spise [W63], byla až roku 1926, tj. po 39 letech znovu dokázána německým matematikem Kurtem Henselem. K tomuto faktu se ještě vrátíme při hodnocení práce [W63].

Uveďme nyní jen velmi stručně něco z historie teorie algeber. Představy o komplexních číslech jako bodech roviny či dvojicích reálných čísel inspirovaly ve čtyřicátých letech 19. století britské matematiky k hledání větších číselných oborů, tzv. hyperkomplexních čísel. Zprvu šlo o studium různých operací násobení na množině n-tic reálných či komplexních čísel. Hamilton objevil roku 1843 kvaterniony, John T. Graves (1806–1870) a Cayley nalezli roku 1843 a

1845 algebru oktáv, Augustus de Morgan (1806–1871) studoval různé algebry dimenze 3, Charles Graves (1810–1860) tzv. triplety atd. Tato problematika byla studována v úzkém vztahu k teorii matic; v Cayleyově práci [9] byla totiž zavedena algebra čtvercových matic. Benjamin Peirce (1809–1880) vytvořil obecný pojem lineární asociativní algebry konečné dimenze roku 1870 ve své práci *Linear associative algebras* a vyšetřoval mnoho různých algeber malých dimenzí. Obecnou teorií algeber se zabýval též Weierstrass ve svých přednáškách na berlínské univerzitě (viz např. [87]; tuto práci cituje Eduard Weyr ve svém článku [W58]). Dvě Hamiltonovy knihy o kvaternionech [26] a [27] a další publikace vedly v poslední třetině minulého století k velkému rozvoji teorie hyperkomplexních čísel. Rovněž Sylvesterovy články týkající se matic a hyperkomplexních čísel, které byly publikovány ve francouzském časopise *Comptes Rendus*, přispěly k rozšíření nových myšlenek po Evropě a inspirovaly jistě i Eduarda Weyra.

Královská česká společnost nauk vydala roku 1889 Weyrův spis *O theorii forem bilinearných*. Rukopis této práce byl společnosti nauk zaslán anonymně pod heslem „Plzeň"; vzhledem ke zkoumané problematice a citacím (viz např. [W63], str. 61) muselo však být jasné, že autorem je Eduard Weyr. Na schůzi společnosti dne 8. května 1889, po vyslechnutí posudků Františka Josefa Studničky (1836–1903) a Josefa Šolína (1841–1912), bylo rozhodnuto

... přítomný spis ... poctíti honorářem z jubilejního fondu pro vědeckou literaturu českou, a vydati jej nákladem téhož fondu. ([W63], str. 3–4)

Profesor Studnička ve svém posudku uvedl:

Obsahem svým řadí se spis tento k nejmodernějším vymoženostem vědy mathematické a jest hoden vším právem plného uznání, jakéhož se mu zajisté dostane, až bude uveřejněn. ([W63], str. 3)

V úvodu svého spisu Eduard Weyr píše:

Předním účelem tohoto spisu jest uvedení nové pomůcky do theorie bilinearných forem, t. theorie soustav, hlavně normalných soustav příslušných dané matici.

O plodnosti těchto úvah nechť čtenář sám rozhodne; zde jen tolik podotýkám, že nová methoda stačila m. j. na úplné řešení základního problemu současné transformace dvou bilinearných forem pro případ Weierstrassem řešený. ([W63], str. 5)

V poznámce pod čarou k tomu dodává:

V případě, který v této práci nebyl vzat v úvahu, podal řešení Kronecker ...

V prvních osmi kapitolách (*O počítání s maticemi, O skládání soustav, O nullitě matic, O kořenech matice a jich charakteristických číslech, O základní rovnici matice, O normalných soustavách příslušných dané matici, O podobných maticích, O stanovení všech matic o daných kořenech a charakteristických číslech; typický tvar*) Eduard Weyr vyložil základní fakta o maticích, operacích s maticemi, lineární závislosti n-tic, soustavách lineárních rovnic atd. a podrobně zpracoval svoji teorii charakteristických čísel a typických tvarů matic, kterou načrtnul v článcích [W52] a [W53] z roku 1885. Oboustranný odhad nulity součinu dvou matic publikovaný v práci [W52] doplnil následujícím tvrzením ([W63], str. 26–27):

Jsou-li φ a ψ nesoudělné polynomy, potom nulita součinu matic $\varphi(M)$ a $\psi(M)$ je rovna součtu nulit těchto matic, tj.

$$n(\ \varphi(M)\cdot\psi(M)\ ) = n(\ \varphi(M)\ ) + n(\ \psi(M)\ ).$$

Poznamenal též, že při násobení regulárními maticemi se nulita zachovává.

V obsáhlé šesté kapitole (str. 37–53, zejména článek 27) zavedl Weyr pojem normální soustavy příslušné k dané matici. Ukázal zde rovněž, jak je možno k dané matici najít všechny její normální soustavy. Weyrova normální soustava příslušná k matici N slouží k nalezení transformační matice Q převádějící N na její typický tvar M:

Každá matice N má svou typickou matici M; je-li M typickou maticí o týchž kořenech a číslech charakteristických jako N, lze dle čl. 27 stanoviti matici Q tak, že platí $N = Q^{-1}MQ$, a tu zoveme M typickou maticí náležející ku N. ([W63], str. 61)

Weyrovou metodou je možno převést každou (komplexní) matici na typický tvar (Jordanův kanonický tvar) a současně najít příslušnou transformační matici či dokonce všechny takovéto transformační matice. Význam této metody zdůraznil Weyr již v úvodu svého spisu.

V deváté a desáté kapitole (*Řešení rovnic o skalarných koefficientech; periodické matice, Stanovení všech matic záměnných s danou maticí*) se Weyr zabýval některými dalšími problémy teorie matic. K danému polynomu f nalezl všechny matice daného řádu, pro které je $f(M) = 0$. Ve speciálním případě $f(x) = x^k - 1$ tak popsal tzv. periodické matice (tj. matice M, pro které je $M^k = E$). Určil dále všechny matice, které komutují s danou maticí.

V jedenácté kapitole (*Problem současné transformace dvou bilinearných forem a jiná upotřebení*) Weyr ukázal, že pomocí své teorie charakteristických čísel může podat i řešení klasického problému teorie forem, který vyřešili Weierstrass v práci [86] z roku 1868 a Kronecker v pracích [42] a [43] z let 1868 a 1874. Weyr píše, že Kronecker tento problém zformuloval takto:

Nechť se stanoví nutné a postačující výminky, za kterými dva páry bilinearných forem jsou aequivalentní, a v případu aequivalence nechť se vyvine methoda ku stanovení transformace. ([W63], str. 76)

V maticové řeči je možno tento problém vyslovit následujícím způsobem:

Nechť P, Q, P', Q' jsou matice řádu n. Najděte nutnou a postačující podmínku pro existenci regulárních matic H, K, pro které je

$$P' = HPK\ , \qquad Q' = HQK\ ,$$

a metodu k nalezení transformačních matic H, K.

S tímto problémem se matematici setkávali např. v analytické geometrii a analýze. Ve speciálních případech ho řešili Cauchy roku 1829, Carl Gustav

Jacob Jacobi (1804–1851) roku 1834, Sylvester roku 1851 a Weierstrass roku 1858 (viz [8], [36], [71], [85]). O deset let později pak Weierstrass (viz [86]) podal řešení v případě existence čísel p, q, pro která je $det(pP + qQ) \neq 0$; hledanou ekvivalentní podmínkou je v tomto případě podobnost matic

$$Q(pP + qQ)^{-1}, \qquad Q'(pP' + qQ')^{-1}.$$

Leopold Kronecker pak vyřešil v pracích [42] a [43] zbývající případ, kdy pro každou dvojici čísel p, q je $det(pP + qQ) = 0$. [15])

Ve zbytku jedenácté kapitoly podal Weyr nové důkazy následujících známých vět:

(i) Kvadratickou formu n proměnných hodnosti r lze lineární transformací převést na kvadratickou formu r (ale ne méně) proměnných.
(ii) Jestliže pro čtvercovou matici M a vektory y, y', z, z' platí $My = y'$ a $M^T z = z'$, potom je $yz' = zy'$.
(iii) Reálná symetrická matice má reálné charakteristické kořeny. (Obecný důkaz tohoto faktu podal roku 1829 Cauchy v práci [8], roku 1855 pak Hermite dokázal obdobné tvrzení pro hermitovské matice — viz [35].)
(iv) Je-li λ s-násobným charakteristickým kořenem reálné symetrické matice A, pak má matice $A - \lambda E$ nulitu s. (Weierstrass [85])
(v) Je-li λ charakteristický kořen reálné ortogonální matice, je $|\lambda| = 1$. (Francesco Brioschi (1824–1897) - [6])
(vi) Je-li λ s-násobným charakteristickým kořenem reálné ortogonální matice, pak má matice $A - \lambda E$ nulitu s. (Frobenius [17])
(vii) Sylvesterův zákon setrvačnosti pro reálné regulární kvadratické formy. (Sylvester [72]; dříve však dokázali tento výsledek Jacobi a Gauss)

Myšlenky důkazů těchto vět jsou zcela moderní. Tvrzení (iv) a (vi) říkají, že reálné symetrické a ortogonální matice jsou diagonalizovatelné. Tvrzení (ii) je blízké tzv. Fredholmově alternativě; položíme-li $z' = 0$, můžeme tvrzení (ii) přeformulovat takto: Jestliže je soustava $My = y'$ řešitelná, pak sloupec pravých stran y' je kolmý na všechna řešení z soustavy $M^T z = 0$.

Ve dvanácté kapitole (*O skalarných funkcích matice*) stanovil Weyr nutné a postačující podmínky, aby pro danou čtvercovou matici M konvergovala mocninná řada

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i M^i \ .$$

Tato kapitola vznikla přenesením obecnějších výsledků práce [W58] do teorie matic. O konvergenci maticové mocninné řady píše MacDuffee ve své knížce *The theory of matrices* z roku 1933 toto:

Theorem 49. The power series $P(A)$ converges if and only if every characteristic root of A lies inside or on the circle of convergence of $P(\lambda)$, and for every ν-fold characteristic root λ_i which lies on the circle of convergence, the $(\nu - 1)$-th derivative $P^{(\nu-1)}(\lambda_i)$ converges.

This theorem and proof are due to K. Hensel. E. Weyr had previously proved the theorem for the case where no characteristic root lies on the circle of convergence. ([46], str. 98) [16])

MacDuffee cituje Henselovu práci [34] z roku 1926 a Weyrovu práci [W58]. Celý výsledek však patří Weyrovi, jak se přesvědčíme z následujícího citátu (viz [W63], str. 90; řadou (1) je míněna řada $\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu$ a φ je minimální polynom matice M).

Položme

$$f(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \zeta^\nu,$$

značíce literou ζ obyčejnou komplexní hodnotu, která se nalézá uvnitř konvergenčního kruhu napsané mocninové řady. Buďte dále $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ kořeny matice M, t. j. kořeny rovnice

$$\varphi(\mu) = 0.$$

Aby řada (1) *definovala určitou matici, jest nutné a stačí, aby kořeny matice M se nalezaly vesměs uvnitř konvergenční kružnice řady $f(\zeta)$.*

Vlastně bychom měli říci, že nutno a stačí, aby kořeny matice M se nalezaly uvnitř oné kružnice aneb na jejím obvodu, v posledním případě však s tou výhradou, že pro ony kořeny řada $f(\zeta)$ a její derivace dole uvažované konvergují, jakož z následující úvahy přímo vychází.

Poznamenejme, že pro k-násobný kořen tu jde o derivace až do $(k-1)$-ního řádu. [17])

Weyr dále ukázal, jak je možno vyjádřit řadu $\sum_{i=0}^{\infty} a_i M^i$ jako lineární kombinaci matic $E, M, M^2, \cdots, M^{m-1}$, kde m je stupeň minimálního polynomu matice M. Uvedené výsledky dále zobecnil pro mocninnou řadu

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i M^i,$$

kde M je regulární matice, a aplikoval je na exponenciální a logaritmickou funkci matice druhého řádu; s těmito funkcemi již pracoval v článcích [W49] a [W56]. V závěru kapitoly se zabýval exponenciální a logaritmickou funkcí pro matice řádu n.

V poslední kapitole (*Upotřebení v theorii linearných differencialných rovnic*) užil Weyr své metody převodu matice na typický tvar (a současné znalosti transformační matice) k odvození a doplnění výsledků, které publikoval německý matematik Immanuel Lazarus Fuchs (1833–1902) roku 1859 v práci [22] a které se týkaly fundamentálních systémů lineární diferenciální rovnice

$$y^{(m)} = p_1 y^{(m-1)} + p_2 y^{(m-2)} + \cdots + p_m y\,,$$

kde $p_1, \cdots, p_m$ jsou funkce komplexní proměnné.

Weyrova práce [W63] byla určena českým čtenářům; Eduard Weyr zde vyložil základní partie teorie matic a uvedl je do souvislosti s teorií lineárních a kvadratických forem. Jak už jsme se zmínili, Weyr byl jedním z prvních matematiků, kteří přispěli ke sjednocení těchto dvou teorií. [18]) V práci [W63] podal obecnější výklad než v práci [W56] a popularizoval zde i výsledky svých prací [W49], [W52], [W53] a [W58].

Zajímavé je, že roku 1889 v práci [W63] užívá Weyr již dnešního termínu *matice*, zatímco dříve (roku 1884 v práci [W47] a roku 1887 v práci [W56]) termínů *matrix* nebo *matrice*. [19])

Práce [W64] publikovaná v prvním ročníku vídeňského časopisu *Monatshefte für Mathematik und Physik*, který založili roku 1890 Gustav von Escherich (1849–1935) a Emil Weyr, je prakticky překladem spisu [W63]. Nejde však o překlad doslovný. Některé partie jsou mírně redukovány, některé opět rozvedeny, takže číslování odstavců se v obou pracích místy liší. Podstatnou odchylkou je to, že celá dvanáctá kapitola spisu [W63] nazvaná *O skalarných funkcích matice* do práce [W64] přeložena nebyla. A bohužel právě v této kapitole je významný Weyrův výsledek týkající se konvergence mocninné řady s maticovým argumentem. Kapitola byla při překladu vynechána patrně z toho důvodu, že její výsledky byly (v obecnější formulaci) publikovány již ve francouzsky psané práci [W58].

Zajímavým dokladem o náplni i charakteru Weyrových přednášek pro první a druhý ročník na technice jsou jeho dvoudílné *Výklady o mathematice* [W68] a [W72], které v létech 1891–92 vydal jeho asistent (později středoškolský profesor) Antonín Vaňourek (1866– ?). Představují záznam Weyrových přednášek z let 1890–92. V prvním díle *Výkladů* najdeme i partii věnovanou determinantům a soustavám lineárních rovnic ([W68], 3. vyd., str. 90–102). K zavedení determinantů užil Weyr permutační definici, znaménko permutace definoval pomocí počtu inverzí. Kromě základních vlastností determinantů dokázal zobecněný vzorec pro rozvoj determinantu ($\sum a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij} detA$) a větu o násobení determinantů. Cramerovo pravidlo z metodických důvodů uvedl pro soustavu tří rovnic, ale zdůraznil jeho obecnou platnost. Ukázal, že tohoto pravidla je možno užít i v případě, kdy determinant matice soustavy je roven nule; stačí vyjít od nějakého nenulového subdeterminantu matice soustavy. V přednáškách se stručně zabýval i homogenními a nehomogenními soustavami lineárních rovnic; na str. 100 nacházíme odkaz na jeho článek [W50]. Velmi zajímavé je, že ve *Výkladech* nenarazíme na pojem matice. Rovněž je překvapivé, že je zde uvedeno Cramerovo pravidlo, Sarrusovo pravidlo, objeví se i Kroneckerovo delta, ale jména těchto tří matematiků zde nenajdeme.

Determinanty užíval Weyr i v části věnované analytické geometrii (str. 160–206), např. ve vzorcích pro obsah trojúhelníku a pro objem čtyřstěnu (str. 164, 198). Z literatury o determinantech jsou na str. 102 uvedeny knížky Martina Pokorného (1836–1900), Františka Josefa Studničky, Karla Zahradníka (1848–1916) [20]) a slavná monografie [1] německého matematika Baltzera.

Dne 26. května 1901 přednesl Eduard Weyr na 3. sjezdu českých přírodozpytců a lékařů v Praze příspěvek s názvem *O theorii forem bilineárných*, který byl potom otištěn ve sjezdovém věstníku. Jeho obsah můžeme charakterizovat přímo Weyrovými slovy:

Ve spise téhož titulu, vydaném kr. českou společností nauk r. 1889, zavedl jsem do této theorie novou pomůcku, t. zv. normálné systemy, příslušné dané matici č. bilineárné formě; pomocí těchto systemů jsem pak řešil základní problem současné transformace dvou bilineárných forem P, Q pro případ Weierstrassem uvažovaný. V případě zbývajícím, kdy totiž determinant každé formy pP+qQ vymizí, podal řešení Kronecker; v následující stručné úvaze chci ukázati, že i v tomto případě možno s úspěchem užiti pomůcky vzpomenuté. ([W90], str. 164–165)

Poznamenejme, že Eduard Weyr ve své knize *Počet differenciálný* z roku 1902 věnoval jeden paragraf Jacobiho determinantům a jeden paragraf pozitivně definitním kvadratickým formám (paragrafy 111 a 116). Maticový počet užíval od konce osmdesátých let i ve svých pracích geometrických (viz např. [W62] a [W83]).

Weyrovy práce týkající se lineární algebry a teorie hyperkomplexních čísel byly ještě spolu s jinými pracemi hodnoceny v článku Karla Petra ([60], viz též [16]). Životu i dílu Eduarda Weyra byla věnována diplomová práce Karla Bartáka *O teorii bilineárních forem Eduarda Weyra* z roku 1976, kterou vedl Luboš Nový. Přehled některých reakcí na Weyrovy práce týkající se lineární algebry a teorie hyperkomplexních čísel je v poznámce [21]).

Poznámky

[1]) Citujme přímo z Cayleyovy práce:

... *but I have not thought it necessary to undertake the labour of a formal proof of the theorem in the general case of a matrix of any degree.* ([9], str. 24)

Pro zajímavost uveďme původní znění Cayleyovy–Hamiltonovy věty:

... *the determinant, having for its matrix a given matrix less the same matrix considered as a single quantity involving the matrix unity, is equal to zero.* ([9], str. 24)

Sylvester píše:

C'est dans les Lectures, publiées en 1844, que pour la premiére fois a paru la belle conception de l'équation identique appliquée aux matrices du troisième ordre, enveloppées dans un langage propre à Hamilton après lui mise à nu par M. Cayley dans un très important Mémoire sur les matrices dans les Philosophical Transactions pour 1857 ou 1858, et étendue par lui aux matrices d'un ordre quelconque, mais sans démostration; cette démonstration a été donnée plus tard per feu M. Clifford ..., par M. Buchheim ..., par M. Ed. Weyr, par nousmême, et probablement par d'antres; mais les quatre méthodes citées plus haut paraissent être tout à fait distinctes l'une de l'autre. ([76], str. 202)

Zmínky o Weyrově důkazu Cayleyovy–Hamiltonovy věty najdeme i jinde ([68], str. 71; [69], str. 418–419; [49], str. 448).

[2]) Roku 1884 označil Sylvester (viz [80]) za jediného objevitele matic Cayleyho; jeho práci [9] prohlásil za nové zrození algebry: *This paper constitutes a second birth of Algebra, its avatar in a new and glorified form.* Henry Taber (1860–1936) za zakladatele teorie matic označil roku 1890 Hamiltona. O rok později se vyslovil Josiah Willard Gibbs (1839–1903) v tom smyslu, že klíč k teorii matic je již v knize *Die lineale Ausdehnungslehre* z roku 1844 od Hermanna Grassmanna (1809–1877). Peter Guthrie Tait (1831–1901) přisoudil objev matic Hamiltonovi a Cayleyovu práci [9] nazval modifikací Hamiltonových myšlenek. K otázce zakladatele teorie matic se vyslovili též William Kingdon Clifford (1859–1879), Alfred Nors Whitehead (1861–1947), Arthur Buchheim (1859–1888) a T. J. J'Anson Bromwich (1875–1929). Roku 1974 přednesl Thomas Hawkins na mezinárodním matematickém kongresu ve Vancouveru příspěvek *The theory of matrices in the 19th century*, ve kterém na jedné straně ukazuje, že Cayleyův přínos teorii matic nebyl tak veliký, a na druhé straně vyzvedá Weierstrassovy výsledky týkající se spektrální teorie matic (teorie elementárních dělitelů). Snad byl Cayleyův přínos přeceněn i proto, že právě Cayley dal teorii jméno, které se ujalo. Podrobně se s historií teorie matic můžeme seznámit hlavně v pracích T. Hawkinse [29] - [32]. Viz též [10], [15], [24], [38], [39], [46], [61], [62], [82], [84].

[3]) Zkoumání sekulárních poruch pohybů planet vedlo k vyšetřování určitých soustav diferenciálních rovnic. Při tomto studiu se Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783), Joseph Louis Lagrange (1736–1813) a Pierre Simon Laplace (1749–1827) potýkali s problémem reálnosti vlastních čísel reálné symetrické matice. Teprve roku 1829 podal Cauchy úplný důkaz tohoto tvrzení. Hermite zobecnil roku 1855 Cauchyův výsledek pro tzv. hermitovské matice a o tři roky později ukázal Weierstrass [85], proč měli Lagrange a Laplace problémy v případě vícenásobných vlastních čísel. Tyto výsledky však nebyly zformulovány v maticové řeči; k tomu došlo až koncem 19. století.

[4]) Tento citát je převzat z článku Josefa Beneše *Drobné zprávy*, který byl otištěn v ČPMF 19(1890), str. 300–305. Uveďme pro zajímavost původní citát ze Sylvesterova článku; jde o poznámku pod čarou, která byla dne 8. listopadu připsána k textu ze dne 26. října 1884:

A letter just received from M. Hermite informs me that M. Poincarré, in a paper presented by him to the Institute on Monday last, takes up the wondrous tale of multiple quantity so largely treated of by me in recent articles in the Comptes Rendus. The subject could not be in better hands. The ball is served, and the most skilful and practised players — the Cayleys, the Lipschitzes, the Poincarrés, the Weyrs, the Buckheims (and who knows how many more?) — stand round ready to receive it, and keep it flying in the air. ([80], str. 36)

Citát zde uvádíme i s chybami: Poincarré, Buckheim.

Sylvester jmenuje Weyra i ve dvou svých pracích uveřejněných v časopise Comptes Rendus 99(1884) — viz Coll. Math. Papers, Vol. IV, str. 174, 202.

[5]) Dodgson zformuloval nutnou a postačující podmínku pro řešitelnost soustavy lineárních rovnic zhruba takto: Soustava n nehomogenních rovnic s m neznámými je řešitelná právě tehdy, když řád největšího nenulového subdeterminantu je stejný v matici soustavy jako v matici rozšířené.

[6]) Obecná formulace tohoto tvrzení je ekvivalentem tzv. Steinitzovy věty o výměně; teprve na základě těchto výsledků se většinou definuje dimenze vektorového prostoru. Steinitzovu větu (Ernst Steinitz (1871–1928), *Algebraische Theorie der Körper*, 1910) je však možno najít už v Grassmannově knize *Die Ausdehnungslehre* z roku 1862. Zajímavé je, že u Peana, který roku 1888 zveřejnil ve své knize *Calcolo geometrico* [59] axiomatickou definici vektorového prostoru a položil základy moderní teorie vektorových prostorů a jejich homomorfismů, nenajdeme obdobu Steinitzovy věty. Peano ovšem vychází z Grassmannovy *Die lineale Ausdehnungslehre* z roku 1844. Viz J. Bečvář: *Peanovo Calcolo geometrico z roku 1888*, Filozofické a vývojové problémy matematiky, JČSMF, Praha 1988, 149–172 (publikováno též ve sborníku *Matematyka przełomu XIX i XX wieku*, Katowice 1992).

[7]) *Wenn in einer Determinante alle Unterdeterminanten* $(m+1)$*ten Grades verschwinden, die mten Grades aber nicht sämmtlich Null sind, so nenne ich m den Rang der Determinante.* ([18], str. 435)

Gegeben sei ein endliches System A von Grössen $a_{\alpha\beta}$ $(\alpha = 1, \cdots, m\,; \beta = 1, \cdots, n)$, *die nach Zeilen und Colonnen geordnet sind. Wenn in demselben alle Determinanten* $(l+1)$*ten Grades verschwinden, die lten Grades aber nicht sämmtlich Null sind, so heisst l der Rang des Systems.* ([19], str. 484)

[8]) *If any number of matrices of the same order be multiplied together, the nullity of their product is not less than the nullity of any single factor and not greater than the sum of the nullities of all the several factors.* ([73], str. 646)

... the nullity of the product of two (and therefore of any number of) matrices cannot be less than the nullity of any factor nor greater than the sum of the nullities of the several factors which make up the product. ([74], str. 134)

O nulitě součinu matic se Sylvester zmiňuje i v práci [75], kde však odkazuje čtenáře na práci [74].

[9]) V úvodu své práce píše Hensel o krásných výsledcích Eduarda Weyra:

Bei dem hier gewählten Eingange ergeben sich die schönen Resultate, welche Eduard Weyr in seiner großen Abhandlung „Zur Theorie der bilinearen Formen" (Monatshefte ...) hergeleitet, aber nicht ohne beträchtliche Schwierigkeiten bewiesen hat, als selbstverständliche Folgerungen, ... ([33], str. 116–117)

Tato Henselova poznámka se týká pozdějšího zpracování Weyrovy teorie charakteristických čísel, tj. práce [W64].

Wellstein se odvolává na Weyra na str. 171, Metzler cituje Weyrovy práce [W52] a [W53] na str. 357.

[10]) *Die Reduktion einer Schar von bilinearen Formen auf die Normalform von Weierstrass hat Eduard Weyr in seiner Abhandlung ... mit Hilfe der Matrizenrechnung ausgeführt. Die invarianten Zahlen, von denen die Normalform abhängt, hat er, ebenso wie Weierstrass, aber auf einem ganz anderen Wege, direkt definiert, nicht, wie Camille Jordan oder Stickelberger, ihre Bedeutung aus der Normalform nachträglich abgelesen.*

Die Grundlage seiner Arbeit bildet außer der Formel von Sylvester

(1) $\varrho_{AB} \leq \varrho_A, \qquad \varrho_{AB} \leq \varrho_B$

die Beziehung

(2) $\varrho_A + \varrho_B \leq n + \varrho_{AB},$

worin ϱ_A *den Rang der Matrix nten Grades A bezeichnet. Beide Formeln sind enthalten in der Ungleichheit*

(3) $\varrho_{AB} + \varrho_{BC} \leq \varrho_B + \varrho_{ABC},$

die sich, ebenso wie (2), ohne weiteres aus dem Satze von Weyr ... ergibt. ([21], str. 479)

Der Beweis wird aber durchsichtiger, wenn man die Normalform auf dem Wege von Weyr entwickelt. ([21], str. 481)

[11]) Viz též [4], str. 5. Otakar Borůvka podal roku 1936 v práci [2] nový důkaz jedné Weyrovy věty o nulitách, která byla publikována v práci [W53]; uvádí to i Günter Pickert (viz [61], str. 47).

[12]) Feldman píše:

... a pair of articles ... by Edouard Weyr discussed the problems encountered in trying to find a minimal polynomial. However, the author was unable to shed any light on a method of finding the polynomial. ([15], str. 658)

[13]) Jako rok úmrtí Ludvíka Krause bývá často chybně udáván rok 1886 (např. i *Jubilejní almanach JČSMF* 1862–1987, str. 48). Omyl vznikl patrně tím, že Eduard Weyr napsal:

Neúprosný osud vyrval v novoroční den t. r. z řad českých pracovníků na poli vědeckém ... (viz [W54], str. 49)

Tento nekrolog, který byl napsán roku 1885, vyšel v ČPMF až roku 1886. Již Studnička chybně uvádí v časopise *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* 18(1886), Berlin 1889, že Kraus zemřel 1. ledna 1886. Jasným dokladem je však Weyrův článek [W53a], který vyšel již 15. února 1885.

[14]) Jsou-li charakteristické kořeny μ_1, μ_2 matice M různé, je

$$\alpha = \frac{\varphi(\mu_1) - \varphi(\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}, \qquad \beta = \frac{\mu_1 \cdot \varphi(\mu_2) - \mu_2 \cdot \varphi(\mu_1)}{\mu_1 - \mu_2};$$

je-li $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, je

$$\alpha = \varphi'(\mu) \ , \qquad \beta = \varphi(\mu) - \mu \cdot \varphi'(\mu) \ .$$

Eduard Weyr uvádí, že tyto vztahy jsou speciálním případem Sylvesterova vzorce (tzv. *seconde loi de mouvement algébrique* podle Sylvestera). Viz [W56], str. 373.

15) S touto problematikou se můžeme seznámit např. v Borůvkově knížce [4]. Podrobněji viz např. [53].

16) MacDuffee tuto informaci převzal z Henselovy práce [34]; Kurt Hensel zde píše:

Diese Frage hat nun eine sehr schöne und einfache, jedoch nicht vollständige Beantwortung durch einen Satz von E. Weyr gefunden ...; sein Beweis ist aber ziemlich kompliziert und gibt, wie mir scheint, nicht die volle Einsicht in die Natur dieser einfachen Frage.

Ihned po uvedení své věty Hensel znovu zdůrazňuje:

Nur den ersten Teil dieses allgemeinen Satzes hat E. Weyr in der oben erwähnten Abhandlung aufgestellt und bewiesen. ([34], str. 107 a 110)

Podobně jako MacDuffee hodnotí Weyrův a Henselův výsledek Nelson Dunford a Jacob T. Schwartz ve své monografii *Linear operators* ([14], 1. díl, str. 607) a Herbert Westren Turnbull a Alexander C. Aitken ([81], str. 81). V některých starších přehledných článcích je však Weyr uváděn. Např. Eduard Study (1862–1930) v německé encyklopedii matematických věd o práci [W58] píše:

Ed. Weyr hat die Bedingung dafür angegeben, dass eine Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ convergiert, in der die Coefficienten a_ν Gewöhnliche complexe Grössen sind, x aber eine Grösse eines beliebigen Systems bedeutet. Er findet, dass die Wurzeln r_κ der charakteristischen Gleichung (46) dem Convergenzgebiete der gewöhnlichen Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ angehören müssen. ([68], str. 182)

17) Podobná poznámka — snad méně srozumitelná — je již v práci [W58]:

A la verité, ces racines peuvent même être sur la circonférence de ce cercle, si toutefois la série $\varphi(\zeta)$ et ses dérivées considérées plus bas convergent pour $\zeta = \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$, comme cela découle immédiatement de la démonstration qu'on va lire. ([W58], str. 207)

18) Thomas Muir, autor rozsáhlé bibliografie teorie determinantů, píše o Weyrově práci [W63]:

The title of the paper might thus well have been The theory of matrices with an application to bilinear forms and an application to linear differential equations. ([52], str. 3–4)

19) V recenzi práce [W63] v ČPMF 19(1890), str. 318–328, je uvedeno:

... opírá se o jistý druh operačního kalkulu, o t. zv. theorii matric, čili jak se nyní s upřílišněným purismem říká, matic; ... (str. 318)

[20]) Pokorného kniha *Determinanty a vyšší rovnice* z roku 1865 je první českou učebnicí, která pojednává o determinantech. Byla určena zejména studentům prvního ročníku polytechniky. Studnička vydal roku 1870 knížku *O determinantech* určenou začátečníkům; o rok později vyšla tato knížka v němčině. Zahradníkova kniha *Prvé počátky nauky o determinatech* byla vydána roku 1879 a určena pro vyšší střední školy; chorvatská verze této knížky vyšla o rok dříve v Záhřebu. Studnička i Zahradník vydali později další knížky o determinantech.

[21]) Přehled některých reakcí na práce Eduarda Weyra, které jsou tématem tohoto článku:
1884: Sylvester [76], [80] atd. (týká se [W47], [W48])
1892: Metzler [47] ([W52], [W53])
1895: Schlesinger [64] ([W64])
1898: Muir [50] ([W52], [W53])
1899: Muth [53] ([W64])
1898–1904: Study [68] ([W57], [W58], [W64])
1898–1904: Meyer [48] ([W63], [W64])
1904: Hensel [33] ([W64])
1907: Netto, Vogt [55] ([W52], [W53])
1907: Study, Cartan [69] ([W47], [W49], [W57], [W58], [W64])
1907: Netto, Vavasseur [54] ([W50])
1907: Meyer, Drach [49] ([W64])
1908: Schlesinger [66] ([W64])
1909: Schlesinger [67] ([W63], [W64])
1910: Pascal [57] ([W57], [W64])
1911: Frobenius [21] ([W64])
1922: Schlesinger [65] ([W58])
1923: Muir [51] ([W36], [W50])
1926: Hensel [34] ([W58])
1930: Muir [52] ([W63], [W64])
1930: Wellstein [88] (uvádí jméno)
1932: Turnbull, Aitken [81] ([W58])
1933: MacDuffee [46] ([W53], [W57], [W58], [W64])
1934: Wedderburn [84] ([W47], [W52], [W53], [W56], [W57], [W63], [W64])
1936: Borůvka [2] ([W53], [W64])
1949: Novotný [56] (uvádí jméno)
1950: Zurmühl [89] ([W64])
1951: Hamburger, Grimshaw [25] ([W53], [W63], [W64])
1953: Pickert [61] (týká se [W52], [W53], [W64])
1953: Gantmacher [23] ([W64])
1954: Borůvka [3] (týká se [W52], [W53], resp. [W63], [W64])
1953–56: Čermák [11], [12], [13] (týká se [W52], [W53], resp. [W63], [W64])
1958: Dunford, Schwartz [14] ([W58])
1962–63: Feldman [15] ([W52], [W53])
1963: Dunford, Schwartz [14] ([W58])

1966: Gantmacher [23] ([W64])
1970–71: Tvrdá [82] ([W63])
1971: Borůvka [4] ([W63])
1972: Hawkins [28] ([W48], [W49], [W52], [W53], [W57])
1977: Hawkins [31] ([W52], [W53], [W64])
1977: Hawkins [32] ([W52], [W53], [W63], [W64])
1983: Koecher [39] (týká se [W64])
1985: Waerden [83] (týká se [W64])

Literatura

[1] Baltzer R.: *Theorie und Anwendung der Determinanten. Mit Beziehung auf die Originalquellen*, Leipzig 1857 (francouzsky: Paris 1861; další něm. vyd. 1864, 1870, 1875, 1881)

[2] Borůvka O.: *Sur les matrices singulières*, Comptes Rendus 203(1936), 600–602, 762

[3] Borůvka O.: *Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty*, ČPM 79(1954), 151–155

[4] Borůvka O.: *Základy teorie matic*, Academia, Praha 1971

[5] Boyer C. B.: *Colin MacLaurin and Cramer's Rule*, Scripta Math. 27(1966), 377–379

[6] Brioschi F.: *Note sur un théorème relatif aux déterminants gauches*, J. Math. pures et appl., 1. sér., 19(1854), 253–256 (Opere Mat., V, 161–164)

[7] Carvallo E.: *Sur les systèmes linéaires, le calcul des symboles différentiels et leur application à la physique mathématique*, Monatshefte Math. Phys. 2(1891), 177–216, 225–266, 311–330

[8] Cauchy A. L.: *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes*, Exer. de math. 4(1829) (Oeuvres (2) 9, 174–195)

[9] Cayley A.: *A Memoir on the Theory of Matrices*, Phil. Trans. R. Soc. London 148(1858), 17–37 (Coll. Math. Papers, Vol. II, 475–496)

[10] Crilly T.: *Cayley's Anticipation of a generalized Cayley–Hamilton Theorem*, Historia Math. 5(1978), 211–219

[11] Čermák J.: *O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic*, Práce moravskoslezské akademie věd přírodních, sv. XXV, spis 12, sešit 6, 1953, 337–356

[12] Čermák J.: *O systémech lineárních diferenčních rovnic s periodickými koeficienty*, ČPM 79(1954), 141–150

[13] Čermák J.: *Poznámka o limitním přechodu diferenčních rovnic v rovnice diferenciální*, ČPM 81(1956), 224–228

[14] Dunford N., Schwartz J. T.: *Linear operators*, I. *General theory*, 1958, II. *Spectral theory*, 1963, III. *Spectral operators*, 1971 (rusky: 1962, 1966, 1974)

[15] Feldmann R. W.: *Arthur Cayley — founder of matrix theory. Basic properties, The characteristic equation; minimal polynomials, The „transposed" or „conjugate" matrix; orthogonal matrices, Matric equations, Similar and congruent matrices; nullity, vacuity, and rank.* Math. Teacher 55(1962), 482–484, 589–590, 657–659; 56(1963), 37–38, 101–102, 163–164

[16] Folta J., Nový L.: *Eduard Weyr a pražská matematika 2. poloviny 19. století*, Acta Polytechnica VI, 1, 1969, 253–268

[17] Frobenius G.: *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, J. reine angew. Math. 84(1878), 1–63 (Gesammelte Abh. I, 343–405)*

[18] Frobenius G.: *Über homogene totale Differentialgleichungen*, J. reine angew. Math. 86(1879), 1–19 (Gesammelte Abh. I, 435–453)

[19] Frobenius G.: *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten*, J. reine angew. Math. 86(1879), 146–208 (Gesammelte Abh. I, 482–544)

[20] Frobenius G.: *Über die Elementarteiler der Determinanten*, Sitz.-ber. Königl. Preuss. Akad. d. Wiss. Berlin 1894, 7–20 (Gesammelte Abh. II, 577–590)

[21] Frobenius G.: *Über den Rang einer Matrix*, Sitz.-ber. d. Königl. Preuss. Akad. d. Wiss. Berlin 1911, 20–29, 128–129 (Gesammelte Abh. III, 479–490)

[22] Fuchs L.: *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten*, J. reine angew. Math. 66(1866), 121–160, (Gesammelte Math. Werke I, 159–203)

[23] Gantmacher F. R.: *Teorija matric*, Moskva 1953, 1966

[24] Greenberg M. J.: *Note on the Cayley–Hamilton Theorem*, Amer. Math. Monthly 91(1984), 193–195, ibid. 92(1985), 583

[25] Hamburger H. L., Grimshaw M. E.: *Linear transformations in n-dimensional vector spaces. An introduction to the theory of Hilbert space*, Cambridge 1951

[26] Hamilton W. R.: *Lecture on Quaternions*, Dublin 1853

[27] Hamilton W. R.: *Elements of Quaternions*, London 1866

[28] Hawkins T.: *Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory*, Arch. Hist. Exact Sci. 8(1972), 243–287

[29] Hawkins T.: *The Theory of Matrices in the 19th Century*, Proc. Int. Congress of Math., Vancouver 1974, 561–570

[30] Hawkins T.: *Cauchy and the Spectral Theory of Matrices*, Historia Math. 2(1975), 1–29

[31] Hawkins T.: *Another Look at Cayley and the Theory of Matrices*, Archives Int. Hist. Sci. 27(1977), 82–112

[32] Hawkins T.: *Weierstrass and the Theory of Matrices*, Archiv Hist. Exact Sci. 17(1977), 119–163

[33] Hensel K.: *Theorie der Körper von Matrizen*, Journal reine angew. Math. 127(1904), 116–166

[34] Hensel K.: *Über Potenzreihen von Matrizen*, Journal reine angew. Math. 155(1926), 107–110

[35] Hermite Ch.: *Remarque sur un théorème de Cauchy*, Comptes Rendus 41(1855), 181–183 (Oeuvres 1, 479–481)

[36] Jacobi C. G. J.: *De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares ...*, J. für Math. (Crelle) 12(1834), 1–69 (Werke 3, 191–268)

[37] Jordan C.: *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris 1870

[38] Kline M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York 1972

[39] Koecher M.: *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Springer-Verlag 1983

[40] Kraus L.: *Základové arithmetiky. Dle výkladů professora K. Weierstrassa*, ČPMF 12(1883), 153–184, 232–264

[41] Kraus L.: *Základové náuky o funkcích racionálných*, ČPMF 14(1885), 49–66

[42] Kronecker L.: *Ueber Schaaren quadratischer Formen*, M'ber. d. kgl. Preuss. Akad. d. Wiss. Berlin 1868, 339–346 (Werke I, 163–174)

[43] Kronecker L.: *Ueber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen*, M'ber. d. kgl. Preuss. Akad. d. Wiss. Berlin 1874, 59–76, 149–156, 206–232 (Werke I, 349–413)

[44] Krull W.: *Über Begleitmatrizen und Elementarteilertheorie*, Freiburg 1921

[45] Laguerre E.: *Sur le calcul des systèmes linéaires*, J. Ec. Polyt. 62(1867), 215–264 (Oeuvres, Vol. I, 221–267)

[46] Mac Duffee C. C.: *The Theory of Matrices*, Berlin 1933

[47] Metzler W. H.: *On the roots of matrices*, Amer. J. Math. 14(1892), 326–377

[48] Meyer W. F.: *Invariantentheorie*, Encyklopädie der math. Wiss. I, 1, Leipzig 1898–1904, 320–403

[49] Meyer W. F., Drach J.: *Theorie des formes et des invariants*, Encyclopédie des sci. math. I, 2, Paris, Leipzig 1907, 386–520

[50] Muir T.: *List of writings on the theory of matrices (1857–1893)*, Amer. J. 20(1898), 225–228

[51] Muir T.: *The theory of determinants in the historical order of development* I.–IV., London 1906, 1911, 1920, 1923

[52] Muir T.: *Contributions to the History of Determinants 1900–1920*, London 1930

[53] Muth P.: *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*, Leipzig 1899

[54] Netto E., le Vavasseur R.: *Les fonctions rationnelles*, Encyclopédie des sci. math. I, 2, Paris, Leipzig 1907, 1–232

[55] Netto E., Vogt H.: *Analyse combinatoire et theorie des déterminants*, Encyclopédie des sci. math. I, 1, Paris, Leipzig, 1907, 63–132

[56] Novotný M.: *O zobecnění Weyrovy theorie charakteristických čísel matic*, ČPMF 74(1949), 239–241

[57] Pascal E.: *Repertorium der höheren Mathematik*, 2. Auflage (P. Epstein), I, 1, Leipzig und Berlin 1910

[58] Peano G.: *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari*, Atti R. Acad. Torino 22(1887), 437–446; překlad: *Intégration par séries des équations différentielles linéaires*, Math. Ann. 32(1888), 450–456

[59] Peano G.: *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino 1888

[60] Petr K.: *O Weyrově činnosti v math. analysi a algebře*, ČPMF 34(1905), 468–489

[61] Pickert G.: *Normalformen von Matrizen*, Enzyklopädie der Math. Wiss., Band I, 1, Heft 3, Teil 1, Leipzig 1953, 44–72

[62] Pickert G.: *Lineare Algebra*, Enzyklopädie der Math. Wiss. Band I, 1, Heft 3, Teil 1, Leipzig 1953, 1–43

[63] Poincaré H.: *Sur les nombres complexes*, Comptes Rendus 99(1884), 740–742 (Oeuvres, Vol. V, 77–79)

[64] Schlesinger L.: *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Leipzig 1895

[65] Schlesinger L.: *Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln*, Leipzig 1900 (2. vyd. Leipzig 1904, 3. vyd. Berlin-Leipzig 1922 pod názvem *Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage*)

[66] Schlessinger L.: *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*, Leipzig-Berlin 1908

[67] Schlessinger L.: *Bericht über die Entwickelung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865*, Leipzig und Berlin 1909 (Jahresbericht d. deutsch. Math.-Verein. XVIII)

[68] Study E.: *Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen*, Encyklopädie der math. Wiss. I, 1, Leipzig 1898–1904, 147–183

[69] Study E., Cartan E.: *Nombres complexes*, Encyclopédie des sci. math. I, 1, Paris, Leipzig 1907, 329–468

[70] Sylvester J. J.: *Additions to the articles, „On a new class of theorems“, and „On Pascal's theorem“*, Phil. Mag. 37(1850), 363–370 (Coll. Math. Papers, Vol. I, 145–151)

[71] Sylvester J. J.: *An enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order*, Phil. Mag. 1(1851), 119–140 (Coll. Math. Papers, Vol. I, 219–240)

[72] Sylvester J. J.: *A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the*

form of a sum of positive and negative squares, Phil. Mag. 4(1852), 138–142 (Coll. Math. Papers, Vol. I, 378–381)

[73] Sylvester J. J.: *On the properties of a split matrix*, J. Hopkins Univ. Circulars 1(1882), 210–211 (Coll. Math. Papers, Vol. III, 645–646)

[74] Sylvester J. J.: *On involutants and other allied species of invariants to matrix systems*, J. Hopkins Univ. Circulars 3(1884), 9–12, 34, 35 (Coll. Math. Papers, Vol. IV, 133–145)

[75] Sylvester J. J.: *Sur l'équation en matrices* $px = xq$, Comptes Rendus 99(1884), 67–71, 115, 116 (Coll. Math. Papers, Vol. IV, 176–180)

[76] Sylvester J. J.: *Sur la résolution générale de l'équation linéaire en matrices d'un ordre quelconque*, Comptes Rendus 99(1884), 409–412, 432–436 (Coll. Math. Papers, Vol. IV, 199–205)

[77] Sylvester J. J.: *Sur la solution d'une classe très étendue d'équations en quaternions*, Comptes Rendus 98(1884), 651–652 (Coll. Math. Papers, Vol. IV, 162)

[78] Sylvester J. J.: *On the solution of a class of equations in quaternions*, Phil. Mag. 17(1884), 392–397 (Coll. Math. Papers, Vol. IV, 225–230)

[79] Sylvester J. J.: *On Hamilton's quadratic equation and the general unilateral equation in matrices*, Phil. Mag. 18(1884), 454–458 (Coll. Math. Papers, Vol. IV, 231–235)

[80] Sylvester J. J.: *The genesis of an idea, or story of a discovery relating to equations in multiple quantity*, Nature 31(1884/85), 35–36 (13. 11. 1884)

[81] Turnbull H. W., Aitken A. C.: *An introduction to the theory of canonical matrices*, Edinburgh 1932 (5. vydání Glasgow 1952)

[82] Tvrdá J.: *Vznik teorie matic*, DVT 3(1970), 11–23 (angl. *On the Origin of the Theory of Matrices*, Acta hist. rerum nat. necnon tech. Czech. Stud. Hist. Sci., Spec. Issue 5(1971), 335-354)

[83] Waerden B. L. van der: *A History of Algebra. From al-Khwárizmí to Emmy Noether*, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, Springer-Verlag 1985

[84] Wedderburn J. H. M.: *Lectures on matrices*, New York 1934

[85] Weierstrass K.: *Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen*, M'ber. d. kgl. Preuss. Akad. d. Wiss. Berlin 1858, 207–220 (Werke 1, 233–246)

[86] Weierstrass K.: *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*, M'ber. d. Berlin Akad. d. Wiss. 1868, 310–338 (Werke 2, 19–44)

[87] Weierstrass K.: *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen*, Nachr. kgl. Ges. Wiss. Göttingen 1884, 395–414 (Werke 1, 311–332)

[88] Wellstein J.: *Über symmetrische, alternierende und orthogonale Normalformen von Matrizen*, J. reine angew. Math. 163(1930), 166–182

[89] Zurmühl R.: *Matrizen*, Springer-Verlag 1950

O THEORII

FOREM BILINEARNÝCH

SEPSAL

EDUARD WEYR

SPISŮV POCTĚNÝCH JUBILEJNÍ CENOU KRÁL. ČESKÉ SPOLEČNOSTI NAUK V PRAZE

ČÍSLO II.

V PRAZE
Nákladem jubilejního fondu král. české společnosti nauk
1889