ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces.*
Note de M. **Ed. Weyr**, présentée par M. Hermite.

« Je me permets de présenter quelques résultats ultérieurs que j'ai obtenus dans la théorie des matrices.

» Soient M une matrice quelconque d'ordre n et μ_α une racine α^{uple} de M. En formant les puissances de $M-\mu_\alpha$, on tombe nécessairement sur une puissance $(M-\mu_\alpha)^\varrho$ qui est de nullité α; les puissances plus élevées sont de la même nullité.

» Désignons par $\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \ldots, \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\varrho=\alpha$ les degrés de nullité des matrices $M-\mu_\alpha$, $(M-\mu_\alpha)^2$, ..., $(M-\mu_\alpha)^\varrho$; alors je dis que *la suite des nombres* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ *ne peut jamais croitre*, c'est-à-dire qu'on a toujours

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_\varrho.$$

» Pour abréger, je dis que la racine μ_α a pour *caractéristiques* les nombres $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho)$.

» Soient maintenant μ_α, μ_β ..., μ_λ les racines de M, et soient leurs caractéristiques respectives $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho)$, $(\beta, \beta_1, \ldots, \beta_\sigma)$, ..., $(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_\tau)$.

Alors l'*équation de degré minimum, satisfaite par* M, *est la suivante*:

$$(M-\mu_\alpha)^\varrho (M-\mu_\beta)^\sigma \ldots (M-\mu_\lambda)^\tau = 0.$$

» Je dis, de deux matrices d'ordre n, qu'elles sont de même espèce si elles possèdent les mêmes racines aux mêmes caractéristiques.

» M *et* N *étant deux matrices de même espèce, on peut toujours assigner des matrices* Q, *de nullité zéro, telles qu'on ait*

$$N = Q^{-1}MQ.$$

Et, réciproquement, deux matrices M et N, liées par une telle équation, sont de même espèce.

» De là, on conclut qu'ayant trouvé une seule matrice M d'une certaine espèce, on les a toutes par la formule $Q^{-1}MQ$, Q étant une matrice quelconque de nullité zéro.

» Deux matrices de même espèce satisfont évidemment à la même équation de degré minimum; la réciproque n'a pas toujours lieu.

» Les entiers α, α_1, ..., α_ϱ; β, β_1, ..., β_σ, ...; λ, λ_1, ..., λ_τ ayant été choisis de manière que chacun d'eux soit au moins égal à 1, et que les suites $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_\sigma)$, ..., $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\tau)$ ne soient jamais croissantes, et que, de plus,

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_\varrho, \quad \beta = \beta_1 + \cdots + \beta_\sigma, \quad \ldots, \quad \lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_\tau,$$
$$n = \alpha + \beta + \cdots + \lambda,$$

je dis qu'*il existe toujours des matrices d'ordre n, ayant les racines μ_α, μ_β, $\dots$, μ_λ aux caractéristiques respectives $(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_\varrho)$, $(\beta, \beta_1, \dots, \beta_\sigma)$, $\dots$, $(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau)$, les valeurs μ_α, μ_β, $\dots$, μ_λ étant arbitraires, mais distinctes entre elles.*

En effet, on peut trouver une telle matrice M de la manière suivante :

Je forme d'abord une matrice H d'ordre α à la racine α^{uple}, μ_α caractérisée par les nombres $(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_\varrho)$.

Pour cet effet, désignons par $G_{\varrho-1} - \mu_\alpha$ la matrice zéro, et d'ordre α_ϱ, et posons successivement

$$G_{\varrho-2} - \mu_\alpha = \left\{ \begin{array}{c|c} \dfrac{G_{\varrho-1}-\mu_\alpha}{A_{\varrho-1}} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^{(\alpha_{\varrho-1})} \end{array} \right\}, \quad G_{\varrho-3} - \mu_\alpha = \left\{ \begin{array}{c|c} \dfrac{G_{\varrho-2}-\mu_\alpha}{A_{\varrho-2}} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^{(\alpha_{\varrho-2})} \end{array} \right\},$$

. . . .

$$G_1 - \mu_\alpha = \left\{ \begin{array}{c|c} \dfrac{G_2-\mu_\alpha}{A_2} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^{(\alpha_2)} \end{array} \right\}, \quad H - \mu_\alpha = \left\{ \begin{array}{c|c} \dfrac{G_1-\mu_\alpha}{A_1} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^{(\alpha_1)} \end{array} \right\}.$$

Les nombres $\alpha_{\varrho-1}, \alpha_{\varrho-2}, \dots, \alpha_1$, mis au-dessus des colonnes formées par des zéros, marquent le nombre de ces colonnes. Les compartiments $A_{\varrho-1}$, $A_{\varrho-2}$, $\dots$, A_1 sont formés de la manière suivante :

$$A_{\varrho-1} = \left\{ \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^{(\alpha_\varrho)} \right\} (\alpha_{\varrho-1}), \quad A_{\varrho-2} = \left\{ \begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^{(\alpha_\varrho)} & \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^{(\alpha_{\varrho-1})} \end{matrix} \right\} (\alpha_{\varrho-2}),$$

. . . .

Dans le cas de $\alpha_\varrho = \alpha_{\varrho-1}$, le compartiment $A_{\varrho-1}$ aura la forme d'un carré et ne contiendra pas les lignes remplies entièrement de zéros; les mêmes lignes manqueront dans $A_{\varrho-2}$, si $\alpha_{\varrho-1} = \alpha_{\varrho-2}$, et ainsi de suite.

A l'aide de H on peut former une matrice K d'ordre $\alpha+\beta$ ayant les racines μ_α et μ_β aux caractéristiques $(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_\varrho)$, $(\beta, \beta_1, \dots, \beta_\sigma)$. Il suffit de poser successivement

$$H_{\sigma-1}-\mu_\beta=\left\{\begin{array}{c|c} \dfrac{H-\mu_\beta}{B_\sigma} & \overbrace{\begin{matrix}0\ \ldots\ 0\\ \cdot\ \ldots\ \cdot\\ 0\ \ldots\ 0\end{matrix}}^{(\beta_\sigma)}\end{array}\right\};\quad H_{\sigma-2}-\mu_\beta=\left\{\begin{array}{c|c} \dfrac{H_{\sigma-1}-\mu_\beta}{B_{\sigma-1}} & \overbrace{\begin{matrix}0\ \ldots\ 0\\ \cdot\ \ldots\ \cdot\\ 0\ \ldots\ 0\end{matrix}}^{(\beta_{\sigma-1})}\end{array}\right\};$$

....

$$H_1-\mu_\beta=\left\{\begin{array}{c|c} \dfrac{H_2-\mu_\beta}{B_2} & \overbrace{\begin{matrix}0\ \ldots\ 0\\ \cdot\ \ldots\ \cdot\\ 0\ \ldots\ 0\end{matrix}}^{(\beta_1)}\end{array}\right\};\qquad K-\mu_\beta=\left\{\begin{array}{c|c} \dfrac{H_1-\mu_\beta}{B_1} & \overbrace{\begin{matrix}0\ \ldots\ 0\\ \cdot\ \ldots\ \cdot\\ 0\ \ldots\ 0\end{matrix}}^{(\beta_2)}\end{array}\right\}.$$

» Le compartiment B_σ est entièrement arbitraire et peut être rempli, par exemple, par des zéros; les compartiments $B_{\sigma-1}$, $B_{\sigma-2}$, ... , B_1 sont formés comme il suit :

$$\beta_{\sigma-1}=\left\{\begin{matrix} \overbrace{0\ \ldots\ 0}^{(\alpha)} & \overbrace{1\ 0\ \ldots\ 0}^{(\beta_\sigma)}\\ 0\ \ldots\ 0 & 0\ 1\ \ldots\ 0\\ \cdot\ \ldots\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \ldots\ \cdot\\ 0\ \ldots\ 0 & 0\ 0\ \ldots\ 1\\ 0\ \ldots\ 0 & 0\ 0\ \ldots\ 0\\ \cdot\ \ldots\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \ldots\ \cdot\\ 0\ \ldots\ 0 & 0\ 0\ \ldots\ 0\end{matrix}\right\}(\beta_{\sigma-1});\quad B_{\sigma-2}=\left\{\begin{matrix} \overbrace{0\ \ldots\ 0}^{(\alpha+\beta_\sigma)} & \overbrace{1\ 0\ \ldots\ 0}^{(\beta_{\sigma-1})}\\ 0\ \ldots\ 0 & 0\ 1\ \ldots\ 0\\ \cdot\ \ldots\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \ldots\ \cdot\\ 0\ \ldots\ 0 & 0\ 0\ \ldots\ 1\\ 0\ \ldots\ 0 & 0\ 0\ \ldots\ 0\\ \cdot\ \ldots\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \ldots\ \cdot\\ 0\ \ldots\ 0 & 0\ 0\ \ldots\ 0\end{matrix}\right\}(\beta_{\sigma-2}),$$

....

» Aprés avoir formé K, on formera de la même manière une matrice L d'ordre $\alpha+\beta+\gamma$ ayant les racines μ_α, μ_β, μ_γ aux caractéristiques données, et ainsi de suite jusqu'à la matrice cherchée M. Alors $Q^{-1}MQ$ donne toutes les matrices de l'espèce caractérisée. »