KAPITOLA I.

Úvod.

§ 1. Množiny a množinové operace.

1·1. Teorie *množin* (*Menge, ensemble, set*) má centrální postavení v celé moderní matematice. Podrobná logická analysa pojmu množiny zavedla by nás na pole spíše filosofické; musil bych referovati o různých názorech někdy značně si odporujících a narazili bychom na mnohé problémy, jejichž vyjasnění přinese teprve budoucnost. Také by tyto úvahy sotva byly užitečné začátečníkovi, kterému je především určena tato kniha. Pro naše účely zcela postačí říci prostě, že je množina souhrn nějakých věcí, které nazýváme *prvky* (*Element, élément, element*) množiny. Množina je svými prvky úplně určena; mají-li dvě množiny A a B stejné prvky, jsou *identické* neboli *rovné* a píšeme $A = B$.

Zpravidla budeme značiti množiny velkými latinskými písmeny a jejich prvky malými latinskými písmeny. Nezřídka však učiníme výjimky z tohoto pravidla. Jednu z těchto výjimek popíši hned. Předmětem našich úvah bude zpravidla nějaká skupina S množin, které budeme značiti velkými latinskými písmeny; vedle množin skupiny S budou se však vyskytovati mnohdy i množiny, jejichž prvky samy budou zase množinami, totiž množinami skupiny S. Tyto *množiny množin* budeme pak zpravidla značiti velkými švabachovými písmeny. Místo *množina množin* budeme ostatně raději říkati *systém množin*.

Příklady množin: [1] množina všech slov otištěných v této knize; [2] množina všech pěticiferných prvočísel; [3] množina všech prvočísel tvaru $2^{2^n} + 1$ ($n = 5, 6, 7, \ldots$); [4] množina všech *přirozených* čísel $1, 2, 3, 4, \ldots$; [5] množina všech tečen dané kružnice; [6] množina všech bodů, společných dvěma daným koulím.

Je účelné počítati mezi množiny také množinu *prázdnou* (*leer, vide, vacuous*), která nemá vůbec žádný prvek. Ježto je množina svými prvky úplně určena, existuje jen jedna prázdná množina; budeme ji stále značiti symbolem $\emptyset$. Mnozí autoři značí prázdnou množinu cifrou 0; někteří ji značí symbolem Λ. Kdybychom nezavedli prázdnou množinu, nevěděli bychom, existuje-li množina [3], a množina [6] by existovala jen pro některé polohy obou koulí.

Je-li a jakákoli věc, pak (a) znamená množinu, která obsahuje jediný prvek, totiž právě věc a. Množina $\emptyset$ nemá žádný prvek, kdežto množina $(\emptyset)$ má prvek jeden, totiž množinu $\emptyset$.

Jsou-li A a B nějaké výroky, pak jsou čtyři možnosti, které se navzájem vylučují: [1] A platí, B platí; [2] A neplatí, B neplatí; [3] A neplatí, B platí; [4] A platí, B neplatí. Nastane-li některá z prvých tří možností, pravíme, že výrok A *implikuje* výrok B a píšeme

$$\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}; \tag{1}$$

na př. $1 < 2 \Rightarrow 1 < 2$; $1 > 2 \Rightarrow 1 > 2$; $1 > 2 \Rightarrow 1 < 2$, nikoli však $1 < 2 \Rightarrow 1 > 2$. Nastane-li některá z prvých dvou možností, píšeme

$$\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}. \qquad (2),$$

Tedy $\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}$ znamená, že platí současně $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$ i $\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{A}$. Jsou-li A_1 A_2, B tři výroky, pak

$$\mathsf{A}_1,\ \mathsf{A}_2 \Rightarrow \mathsf{B}$$

znamená, že současná platnost výroků A_1 a A_2 implikuje výrok B; podobně pro více než tři výroky.

Jsou-li A a B dva výroky a platí-li (1), říkáme někdy také, že *je platnost výroku* A *postačující podmínkou pro platnost výroku* B nebo že *je platnost výroku* B *nutnou podmínkou pro platnost výroku* A. Ježto (2) znamená, že platí současně $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$ i $\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{A}$, čteme (2) také, že *je platnost výroku* A *nutnou a postačující podmínkou pro platnost výroku* B; (2) čteme někdy také: A *platí tehdy a jen tehdy, když platí* B, nebo: A *platí, když a jen když platí* B.

1·2. Abychom stručně naznačili, že je věc a prvkem množiny A píšeme

$$a \in A.$$

Řecké písmeno epsilon se vyskytuje v této knize ve dvou typech $\in$ a ε. Prvého typu budeme užívati výhradně ve smyslu právě popsaném.

Jsou-li A a B dvě dané množiny, pravíme, že je prvá *podmnožinou* nebo *částí* (*Untermenge* nebo *Teilmenge, sous-ensemble, subset*) druhé, když:

$$x \in A \Rightarrow x \in B,$$

t. j. když množina A nemá prvek, který by nebyl také prvkem množiny B. Abychom to stručně vyjádřili, píšeme

$$A \subset B \text{ nebo } B \supset A.$$

Pro libovolné množiny platí následující jednoduché zákony:

$$\emptyset \subset A;\ A \subset A;\ A \subset \emptyset \Rightarrow A = \emptyset;$$
$$A \subset B \subset C \Rightarrow A \subset C;\text{*)}$$
$$A \subset B \subset A \Rightarrow A = B.$$

*) $A \subset B \subset C$ znamená ovšem, že platí současně $A \subset B$ i $B \subset C$.

Poslední zákon je přes svou jednoduchost velice důležitý. Máme-li dokázati, že jsou dvě množiny A a B identické, postupujeme zpravidla tak, že odvodíme nejprve:

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

a potom:

$$x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Mnozí autoři píší $A \subseteq B$ místo $A \subset B$, užívajíce $A \subset B$ pouze v tom případě, kdy je podmnožina A různá od množiny B.

1·3. Velmi často bývá předmětem úvah pevná množina P a její podmnožiny. Je-li $\mathsf{V}(x)$ nějaká vlastnost, která má smysl pro každý $x \in P$ (pro každý $x \in P$ buďto platí nebo neplatí $\mathsf{V}(x)$), označíme

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[\mathsf{V}(x)]$$

podmnožinu těch $x \in P$, které mají vlastnost $\mathsf{V}(x)$. Podobně

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[\mathsf{V}(x),\ \mathsf{W}(x)]$$

je podmnožina těch $x \in P$, které mají současně obě vlastnosti $\mathsf{V}(x)$ a $\mathsf{W}(x)$. Může-li nastati pochybnost o P, píšeme určitěji

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[x \in P,\ \mathsf{V}(x)] \text{ místo } \underset{x}{\mathrm{E}}[\mathsf{V}(x)].$$

Na př., když P je množina všech reálných čísel, pak

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[0 < x < 1]$$

je otevřený interval s krajními body 0 a 1,

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[0 \leqq x \leqq 1]$$

je uzavřený interval s týmiž krajními body, kdežto

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[0 > x > 1] = \emptyset.$$

1·4. Jsou-li A a B dané množiny,*) pak: [1] nazýváme jejich *součtem* (*Summe, somme, sum*) a značíme $A + B$ množinu skládající se z těch prvků x, pro které platí buďto $x \in A$ nebo $x \in B$**); [2] nazýváme jejich *průnikem* neboli *součinem* (*Durchschnitt* neboli *Produkt, partie commune* neboli *produit, intersection* neboli *product*) a značíme AB

---

*) Nepředpokládá se $A \neq B$; takový předpoklad by byl výslovně uveden.

) Do $A + B$ patří i ty prvky, pro které je současně $x \in A$ i $x \in B$. Obecně, když jsou **A a **B** nějaké výroky, pak „**A** nebo **B**“ znamená, že že čtyř možností uvedených na str. 4, ř. 5 až 7 platí jiná než druhá.

nebo $A \,.\, B$*) množinu skládající se z těch prvků x, pro které platí současně $x \in A$ i $x \in B$.**)

Obecněji nechť je každému prvku z dané množiny $\mathbf{C} \neq \emptyset$ podle nějakého zákona přiřazena množina $A(z)$. Pak: [1] nazýváme *součtem* všech množin $A(z)$ a značíme

$$\sum A(z) \text{ nebo } \sum_z A(z) \text{ nebo } \sum_{z \in \mathbf{C}} A(z)$$

množinu skládající se z těch prvků x, k nimž existuje takový $z \in \mathbf{C}$, že $x \in A(z)$; [2] nazýváme *průnikem* neboli *součinem* všech množin $A(z)$ a značíme

$$\prod A(z) \text{ nebo } \prod_z A(z) \text{ nebo } \prod_{z \in \mathbf{C}} A(z)$$

množinu skládající se z těch prvků x, pro které platí $x \in A(z)$, ať zvolíme jakkoli $z \in \mathbf{C}$.

Zvláště častý je případ, kdy je $\mathbf{C}$ množina všech přirozených čísel; je-li A_n množina přiřazená číslu n, pak součet a součin všech množin A_n značíme resp.

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \prod_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Není již třeba, abych čtenáři výslovně vykládal, co bude znamenati třeba

$$\sum_{n=1}^{3} A_n = A_1 + A_2 + A_3$$

nebo

$$\prod_{n=1}^{4} A_n = A_1 A_2 A_3 A_4.$$

Množiny A a B nazveme *disjunktní* (*fremd* neboli *punktfremd, disjoint, mutually exclusive*), když $AB = \emptyset$. Systém množin $\mathfrak{A}$ nazveme *disjunktní*, když

$$A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{A},\ A \neq B \Rightarrow A \,.\, B = \emptyset.$$

Součet $\sum_{z \in \mathbf{C}} A(z)$ nazveme *disjunktní* nebo řekneme, že má *disjunktní sčítance*, když

$$z \in \mathbf{C},\ z' \in \mathbf{C},\ z \neq z' \Rightarrow A(z) \,.\, A(z') = \emptyset.$$

Mnozí autoři užívají názvu součet a znaků $+$ a Σ pouze pro disjunktní součty, nazývajíce obecný součet *sjednocením* (*Vereinigungsmenge*).

1·5. Jsou-li A a B dané množiny, pak nazýváme jejich *rozdílem* (*Differenz, différence, difference*) a značíme $A - B$ množinu skládající se z těch prvků, které náležejí do množiny A, nikoli však do množiny B. Mnozí autoři užívají znaku $A - B$ pouze v případě $A \supset B$.

*) Nikoli však $A \times B$; v. **2·1**.
**) $3 \,.\, 4 = 12$, ale $(3) \,.\, (4) = \emptyset$; $3 + 4 = 7$, $(3) + (4) \neq (7)$.

Cvičení.*)

1·1. $A + B = B + A$; $AB = BA$; $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$; $(AB) . C = A . (BC) = ABC$.

1·2. $A + A = AA = A$; $A + \emptyset = A - \emptyset = A$; $A . \emptyset = \emptyset - A = \emptyset$.

1·3. $A \subset B \Leftrightarrow A = AB \Leftrightarrow A + B = B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$.

1·4. $A + AB = A$, $A(A + B) = A$.

1·5. $(A + B) C = AC + BC$; $AB + C = (A + C)(B + C)$.

1·6. $A - B = (A + B) - B = A - AB$; $A - (A - B) = AB$.

1·7. $C-(A+B) = (C-A)(C-B)$; $C-AB = (C-A) + (C-B)$.

1·8. $C - \Sigma A(z) = \Pi[C - A(z)]$; $C - \Pi A(z) = \Sigma[C - A(z)]$.

1·9. $A - (B + C) = (A - B) - C$; $(A - B) C = AC - BC = AC - B$; $(A + B) - C = (A - C) + (B - C)$; $AB - C = A(B - C) = (A - C) . (B - C)$.

1·10. $A - (B - C) = (A - B) + AC$.

1·11. $C - A \neq \emptyset \Rightarrow A - (B - C) \neq (A - B) + C$.

1·12. $A \supset C \Rightarrow A - (B - C) = (A - B) + C$.

1·13. $A = (A - B) + AB$; $A + B = (A - B) + (B - A) + AB$; součty napravo jsou disjunktní.

1·14. $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$, $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \prod_{n=1}^{\infty} C_n$, kde $B_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$, $C_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$.

1·15. Množiny A a $\emptyset$ jsou disjunktní.

1·16. Množiny A a $B \supset A$ jsou disjunktní $\Leftrightarrow A = \emptyset$.

1·17. $A(z) \subset B(z) \Rightarrow \Sigma A(z) \subset \Sigma B(z)$, $\Pi A(z) \subset \Pi B(z)$.

1·18. $A \subset B \Rightarrow C - A \supset C - B$.

1·19. Má-li množina A konečný počet $n \geqq 0$ prvků, pak A má 2^n podmnožin.

§2. Zobrazení.

2·1. Nechť A a B jsou dvě dané množiny. Nazveme jejich *kartézským součinem* (*produit cartésien*) a označíme $A \times B$ množinu všech párů (x, y), kde $x \in A$, $y \in B$. Je-li $x \in AB$, $y \in AB$, $x \neq y$, pak pár (x, y) považujeme za různý od páru (y, x). Název kartézský součin, zavedený nedávno Kuratowským,**) upomíná na důležitý zvláštní případ, kdy $A = B$ je množina všech reálných čísel a $A \times B$ je aritmetický ekvivalent roviny: každý bod je zastoupen svými kartézskými souřadnicemi. Dosti obvyklý je název *kombinatorický součin* (*produit combinatoire*) pro $A \times B$.

Podobně, když A, B a C jsou tři dané množiny, nazveme jejich kartézským součinem a označíme $A \times B \times C$ množinu všech trojic (x, y, z), kde $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$. Stejně při libovolném konečném počtu daných množin.

Poznámka. Množiny $(A \times B) \times C$, $A \times (B \times C)$ a $A \times B \times C$ jsou různé: prvá se skládá z párů (ξ, z) kde ξ je pár (x, y), $x \in A$, $y \in B$,

*) Cvičení, jejichž výsledků se dovoláváme později v textu, jsou označena hvězdičkou. Ale čtenář začátečník nechť pečlivě probírá *všecka* cvičení, neboť jen tak může dobře vniknouti do probírané látky. Jednoduchých výsledků cvičení k §1 užívá se v textu bez jakékoli citace; proto nejsou označena hvězdičkou.

**) Topologie I, str. 7.

a $z \in C$; druhá se skládá z párů (x, η), kde $x \in A$ a $\eta = (y, z)$, $y \in B$, $z \in C$; třetí se skládá z trojic (x, y, z), kde $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$. Je však patrné, že je rozdíl mezi těmito třemi množinami pouze formální a pro stručnost dikce jej budeme zanedbávati, takže pro nás bude $(A \times B) \times \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$. Obecněji bude $P \times Q = R$, když $P = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$, $Q = A_{m+1} \times A_{m+2} \times \ldots \times A_{m+n}$, $R = = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{m+n}$. Naproti tomu budeme rozlišovati mezi $A \times B$ a $B \times A$.

2·2. Nechť opět A a B jsou dvě dané množiny. Nechť je dána podmnožina f množiny $A \times B$ a nechť ke každému $x \in A$ existuje právě jeden $y \in B$ takový, že $(x, y) \in f$. Pak pravíme, že f je *zobrazení* (*Abbildung*) množiny A **do** množiny B. Vedle názvu zobrazení užívá se také názvů *transformace*, *operace*, *korespondence*, ale též slova *funkce*, kterého však zde budeme užívati v užším smyslu (v. **2·3**). Je-li f zobrazení množiny A do množiny B, pak libovolný prvek $x \in A$ určuje jednoznačně ten prvek $y \in B$, pro který jest $(x, y) \in f$; píšeme zpravidla $y = f(x)$ a pravíme, že y jest *obrazem* prvku x (při zobrazení f).

Je-li f_1 zobrazení množiny A_1 do množiny B_1 a je-li f_2 zobrazení množiny A_2 do množiny B_2, pak ovšem $f_1 = f_2$ tehdy a jen tehdy, když: [1] $A_1 = A_2$; [2] $x \in A_1 \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$.

Když f je zobrazení množiny A do množiny B a když $y \in B$, pak nemusí existovati takový $x \in A$, pro nějž $f(x) = y$; také může takových x existovati více, i nekonečně mnoho. Je-li C množina těch $y \in B$, pro které existuje aspoň jeden $x \in A$, jehož obrazem je y, pravíme, že f je zobrazení množiny A **na** množinu C.

2·3. V celé knize znamená $\mathbf{R}$ množinu všech reálných čísel, rozmnoženou o další dva prvky: $\infty = + \infty$ a $- \infty$. Zobrazení f libovolné množiny A do množiny $\mathbf{R}$ nazveme *funkcí*. Množinu A nazveme *oborem* (*Bereich*, *domaine*, *domain*) funkce f. Obraz $f(x)$ libovolného $x \in A$ při funkci f nazveme *hodnotou* (*Wert*, *valeur*, *value*) funkce f v prvku x. Když ani ∞ ani $- \infty$ se nevyskytne mezi hodnotami funkce f, řekneme, že f je *konečná* (*endlich*, *finie*, *finite*) funkce. Když dokonce existuje reálné číslo c takové, že pro každý $x \in A$ je $|f(x)| \leqq c$, pak řekneme, že f je *omezená* (*beschränkt*, *bornée*, *bounded*) funkce.

Nechť je P daná množina. Každé množině $A \subset P$ můžeme přiřaditi funkci χ_A v oboru P, kladouce:

$$x \in A \Rightarrow \chi_A(x) = 1, \quad x \in P - A \Rightarrow \chi_A(x) = 0.$$

Funkce χ_A se nazývá *charakteristická funkce* (*fonction caractéristique*) množiny A (v oboru P).

2·4. Když f je zobrazení množiny A do množiny B a když je dána $M \subset A$, pak definujeme *parciální zobrazení* f_M množiny M do množiny B vztahem

$$f_M = (M \times B) \,.\, f,$$

tedy: je-li $x \in M$, pak $f_M(x) = f(x)$, kdežto pro $x \in A - M$ symbol $f_M(x)$ je bezvýznamný. Když $B = \mathbf{R}$, mluvíme ovšem o *parciální funkci*.

2·5. Nechť f je zobrazení množiny A na množinu B a nechť $\mathfrak{A}$ je systém všech podmnožin množiny A a podobně $\mathfrak{B}$ je systém všech podmnožin množiny B. Zobrazením f je určeno zobrazení F systému $\mathfrak{A}$ do systému $\mathfrak{B}$ a zobrazení φ systému $\mathfrak{B}$ do systému $\mathfrak{A}$. Tato dvě nová zobrazení jsou takto definována: [1] když $M \in \mathfrak{A}$, pak $F(M)$ je množina obrazů všech $x \in M$ při zobrazení f; [2] když $N \in \mathfrak{B}$, pak $\varphi(N)$ je množina všech těch $x \in A$, jejichž obraz $f(x)$ náleží do N.

Zobrazení φ budeme zpravidla značiti f_{-1}; nezřídka se píše f^{-1} místo f_{-1}. Zobrazení F budeme bez obavy z nedorozumění značiti prostě f. Tedy pro $M \subset A$ jest

$$f(M) = \mathop{\mathrm{E}}_{y}[y = f(x),\ x \in M],$$

a pro $N \subset B$ jest

$$f_{-1}(N) = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) \in N].$$

2·6. Nechť f je zobrazení množiny A do množiny B. Pravíme, že zobrazení f je *prosté* (*schlicht*), když

$$x \in A,\ y \in A,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Nechť $C = f(A)$. Když $y \in C$, pak existuje právě jeden $x \in A$ takový, že $f(x) = y$; píšeme-li $x = g(y)$, pak je zřejmě g prosté zobrazení množiny C na množinu A. Pravíme, že zobrazení g je *inversní* ke zobrazení f. Tento pojem je tedy definován pouze pro *prosté* zobrazení f. Zobrazení g inversní ke prostému zobrazení f budeme značiti f_{-1} (také se značí f^{-1}); čtenář si lehko ujasní, že to není ve sporu s označením f_{-1} zavedeným ve **2·5**. Zřejmě $(f_{-1})_{-1} = f$.

Cvičení.

2·1. $(A + B) \times (C + D) = (A \times C) + (A \times D) + (B \times C) + (B \times D)$.
2·2. $AC \times BD = (A \times B) \,.\, (C \times D)$.
2·3. $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.
2·4. $A \subset B,\ C \subset D \Rightarrow (A \times C) \subset (B \times D)$. Když $A \neq \emptyset \neq C$, lze psáti $\Leftrightarrow$ místo $\Rightarrow$.
2·5. $(P \times Q) - (A \times B) = (P - A) \times Q + P \times (Q - B)$.
2·6. $A \subset P,\ B \subset Q \Rightarrow A \times B = (A \times Q) \,.\, (P \times B)$.
Ve cvičeních *2·7*—*2·18* f znamená zobrazení množiny A do množiny B.
2·7. $M_1 \subset M_2 \subset A \Rightarrow f(M_1) \subset f(M_2)$.
2·8. $M(z) \subset A \Rightarrow f[\sum_z M(z)] = \sum_z f[M(z)]$.
2·9. $M_1 \subset A,\ M_2 \subset A \Rightarrow f(M_1) - f(M_2) \subset f(M_1 - M_2)$.
2·10. $M(z) \subset A \Rightarrow f[\prod_z M(z)] \subset \prod_z f[M(z)]$.
2·11. $N_1 \subset N_2 \subset B \Rightarrow f_{-1}(N_1) \subset f_{-1}(N_2)$.
2·12. $N(z) \subset B \Rightarrow f_{-1}[\sum_z N(z)] = \sum_z f_{-1}[N(z)]$.
*2·13.** $N_1 \subset B,\ N_2 \subset B \Rightarrow f_{-1}(N_1 - N_2) = f_{-1}(N_1) - f_{-1}(N_2)$.
2·14. $N(z) \subset B \Rightarrow f_{-1}[\prod_z N(z)] = \prod_z f_{-1}[N(z)]$.

2·15. Když zobrazení f je prosté, pak ve *2·9* a *2·10* lze napravo místo $\subset$ psáti $=$.

2·16. Když $N \subset B$, pak $f_{-1}(N) = \emptyset \Rightarrow N \,.\, f(A) = \emptyset$.

2·17. Když $N \subset B$, pak $f[f_{-1}(N)] = N \,.\, f(A)$.

2·18. Když $M \subset A$, $N \subset B$, pak $(f_M)_{-1}(N) = M \,.\, f_{-1}(N)$.

Ve cvičeních *2·19—2·24* znamená χ_A charakteristickou funkci množiny $A \subset P$ (P jest obor funkce χ_A); stejně χ_B pro $B \subset P$ atp. x znamená libovolný prvek množiny P.

2·19. $\chi_{AB}(x) = \chi_A(x) \,.\, \chi_B(x) = \min\,[\chi_A(x),\ \chi_B(x)]$.*)

2·20. $\chi_{A+B}(x) = \max\,[\chi_A(x),\ \chi_B(x)]$.

2·21. Když $AB = \emptyset$, pak $\chi_{A+B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$.

2·22. $\chi_{A-B}(x) = \max\,[0, \chi_A(x) - \chi_B(x)]$; když $B \subset A$, pak $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x) - \chi_B(x)$.

2·23. Když $A_n \subset A_{n+1}$, $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, pak $\chi_A(x) = \lim \chi_{A_n}(x)$.

2·24. Když $A_n \supset A_{n+1}$, $A = \prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, pak $\chi_A(x) = \lim \chi_{A_n}(x)$.

2·25. $\chi_{A+B}(x) = 1 - [1 - \chi_A(x)]\,[1 - \chi_B(x)]$.

§3. Spočetné množiny.

3·1. V tomto paragrafu **N** znamená množinu všech přirozených čísel 1, 2, 3, . . .

Zobrazení množiny **N** (do jakékoli množiny) se nazývá *posloupnost* (*Folge, suite, sequence*). Obraz přirozeného čísla n v posloupnosti se značí zpravidla a_n (nebo b_n, α_n, A_n atp.) a nazývá se n-tý *člen* (*Glied, terme, term*) posloupnosti. Posloupnost pak značíme $\{a_n\}$ nebo $\{a_n\}_1^{\infty}$ nebo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $\{a_n\}$ jest *prostá* (ve smyslu odst. **2·6**), když: $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$, $m \neq n \Rightarrow a_m \neq a_n$. Když členy posloupnosti $\{A_n\}$ jsou množiny, pravíme, že posloupnost $\{A_n\}$ je *disjunktní,* jestliže: $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$, $m \neq n \Rightarrow A_m A_n = \emptyset$.

Právě definované posloupnosti nazveme někdy určitěji *nekonečné posloupnosti. Konečnou posloupností* rozumíme pak zobrazení množiny všech přirozených čísel $\leqq p$, kde p je dané přirozené číslo; označení $\{a_n\}_1^p$ atp.

Je-li $\{i_n\}$ *stoupající* (t. j. $i_n < i_{n+1}$) posloupnost přirozených čísel (t. j. $i_n \in \mathbf{N}$) a je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost, pravíme, že posloupnost $\{a_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je *vybrána* (*Teilfolge, suite partielle, partial sequence*) z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Zřejmě posloupnost vybraná z posloupnosti vybrané z posloupnosti $\{a_n\}$ je zase posloupnost vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$.

*) Význam znaku min (stejně v dalším max) je zřejmý. Ostatně v. odst. **4·10**.

Abychom definovali nějakou posloupnost $\{a_n\}$, stačí: [1] definovati prvý člen a_1; [2] pro každé $n > 1$ definovati a_n pomocí předcházejících členů $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Takové definici posloupnosti se říká *rekurentní* (*rekurrent, recursive, recursory*).

3·2. Množina A se nazývá *konečná* (*endlich, fini, finite*), když má konečný počet prvků, jinak se nazývá *nekonečná* (*unendlich, infini, infinite*). Prázdnou množinu $\emptyset$ počítáme mezi konečné množiny.

Každou konečnou množinu počítáme mezi množiny *spočetné* (*abzählbar, dénombrable, countable*). *Nekonečná* množina A pak se nazývá *spočetnou*, když existuje prosté zobrazení množiny $\mathbf{N}$ všech přirozených čísel na množinu A, jinak řečeno, když existuje posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ taková, že $a_n \in A$ a že ke každému $a \in A$ existuje právě jeden index n takový, že $a_n = a$. Množina A se nazývá *nespočetná* (*unabzählbar, indénombrable, uncountable*), když není spočetná. Mnozí autoři nepočítají konečné množiny mezi množiny spočetné.

3·3. 3·3·1. *Každá podmnožina C množiny $\mathbf{N}$ je spočetná.*

To je zřejmé, když je množina C konečná. Je-li však množina C nekonečná, existuje dokonce prostá *stoupající* posloupnost $\{i_n\}$, jejíž členy tvoří právě množinu C.

3·3·2. *Každá podmnožina B spočetné množiny A je spočetná.*

To je zřejmé, když množina B je konečná. Je-li B nekonečná, také A je nekonečná, takže existuje prostá posloupnost $\{a_n\}$, jejíž členy tvoří právě množinu A. Ježto B je nekonečná, množina C těch n, pro něž $a_n \in B$, je nekonečná, takže podle **3·3·1** existuje posloupnost $\{a_{i_n}\}$ vybraná z $\{a_n\}$ (tedy prostá), jejíž členy tvoří právě množinu B.

3·4. 3·4·1. *Nechť A je spočetná množina. Nechť existuje zobrazení f množiny A na množinu B. Pak B je spočetná množina.*

To je zřejmé, když množina B je konečná. Když množina B je nekonečná, pak vyberme ke každému $y \in B$ právě jeden $x \in A$ takový, že $f(x) = y$; nechť C je množina těch vybraných $x \in A$. Jest $C \subset A$, takže množina C podle **3·3·2** je spočetná. Zřejmě $\varphi = f_C$ (v. **2·4**) je prosté zobrazení množiny C na B. Ježto B je nekonečná a zobrazení φ je prosté, také C je nekonečná. Ježto C je spočetná, existuje prostá posloupnost $\{a_n\}$, jejíž členy tvoří právě množinu C. Pak $\{\varphi(a_n)\}$ je prostá posloupnost, jejíž členy tvoří právě množinu B.

Když ve **3·4·1** volíme $A = \mathbf{N}$, dostáváme větu:

3·4·2. *Množina všech členů libovolné posloupnosti je spočetná.*

3·5. 3·5·1. $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ *je nekonečná spočetná množina.*

Důkaz. Když $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, položme $f(m, n) = 2^{m+n} + m$. Jest $0 < m < 2^m < 2^{m+n}$, tedy $2^{m+n} < f(m, n) < 2^{m+n+1}$, takže, známe-li $f(m, n)$, dovedeme určiti též $m + n$, tedy také m a n. Tedy f je prosté zobrazení množiny $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ do množiny $\mathbf{N}$. Je-li $C = f(\mathbf{N} \times \mathbf{N})$, pak f_{-1} je (prosté) zobrazení spočetné (podle **3·3·1**) množiny C na množinu $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, takže $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ je spočetná podle **3·4·1**. Ovšem $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ je nekonečná.

Když každému $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ přiřadíme číslo $\frac{m}{n}$, dospějeme podle **3·4·1** a **3·5·1** k výsledku:

3·5·2. *Množina všech kladných racionálních čísel je spočetná.*

3·6. *Nechť $\mathbf{C} \neq \emptyset$ je spočetná množina. Pro každý $z \in \mathbf{C}$ nechť $A(z)$ je spočetná množina. Pak $\sum\limits_{z \in \mathbf{C}} A(z)$ je spočetná množina.*

Důkaz. Když $\Sigma A(z) = \emptyset$, je to zřejmé. Nechť tedy existuje $\alpha \in \Sigma A(z)$ (α zvolíme libovolně, ale pevně). Ježto $\mathbf{C} \neq \emptyset$ je spočetná množina, existuje prostá (konečná nebo nekonečná) posloupnost $\{c_m\}_{m=1}^{p}$ ($p \in \mathbf{N}$) nebo $\{c_m\}_{m=1}^{\infty}$ taková, že $\mathbf{C}$ je právě množina všech členů této posloupnosti. Když množina $A(c_m)$ je nekonečná, existuje prostá nekonečná posloupnost $\{a_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž členy tvoří právě množinu $A(c_m)$; když množina $A(c_m)$ je konečná, zřejmě existuje (ne už prostá) posloupnost $\{a_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž členy tvoří právě množinu $A(c_m) + (\alpha)$. Je-li množina $\mathbf{C}$ konečná a je-li $m > p$, položme $a_{mn} = \alpha$. Pro $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ položme $f(m, n) = a_{mn}$. Pak f je zobrazení spočetné (podle **3·5·1**) množiny $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ na množinu $\sum\limits_{z \in \mathbf{C}} A(z)$, takže tato množina je spočetná podle **3·4·1**.

3·7. *Existují nespočetné množiny.* Neboť:

3·7·1. *Spočetná množina reálných čísel nemůže obsahovati žádný interval.*

Důkaz. Nechť naopak existují reálná čísla a a b taková, že $a < b$, a posloupnost $\{c_n\}$ reálných čísel obsahující každé reálné číslo x takové, že $a < x < b$. Určeme index ν_1 tak, aby bylo: [1] $a < c_{\nu_1} < b$, [2] aby index ν_1 byl co nejmenší; položme $u_1 = c_{\nu_1}$. Určeme index μ_1 tak, aby bylo: [1] $a < u_1 < c_{\mu_1} < b$, [2] aby index μ_1 byl co nejmenší; položme $v_1 = c_{\mu_1}$. V konstrukci posloupností $\{u_n\}_1^{\infty}$, $\{v_n\}_1^{\infty}$, jejichž první členy byly sestrojeny, pokračujme rekurentně tak, aby bylo pro každé n: $a < u_n < v_n < b$ (jak tomu skutečně bylo pro $n = 1$). Když při určitém $p > 1$ byly již sestrojeny členy u_n a v_n pro všecka $n < p$, pak určeme index ν_p tak, aby bylo: [1] $a < u_{p-1} < c_{\nu_p} < v_{p-1} < b$, [2] aby index ν_p byl co nejmenší; položme $u_p = c_{\nu_p}$; dále určeme index μ_p tak, aby bylo: [1] $a < u_p < c_{\mu_p} < v_{p-1} < b$, [2] aby index μ_p byl co nejmenší; položme $v_p = c_{\mu_p}$. Pak pro každé n je $a < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$, takže $\{u_n\}$ je stoupající omezená posloupnost reálných čísel, takže podle známé věty z teorie reálných čísel existuje $\lim u_n = \alpha$. Jest $a < u_1 \leqq \alpha \leqq v_1 < b$, tedy existuje index k takový, že $\alpha = c_k$. Pro každé n je $u_n < c_k < v_n$. Ježto byly indexy ν_n a μ_n zvoleny vždy co nejmenší, je $k > \nu_n$ pro všecka n, což je ovšem nemožné, neboť zřejmě $\nu_n < \mu_n < \nu_{n+1}$, takže $\lim \nu_n = \infty$.

Cvičení.

*3·1.** Množina všech racionálních čísel je spočetná.

3·2. Množina všech iracionálních čísel obsažených v daném intervalu je nespočetná.

3·3. Jsou-li A a B spočetné množiny, pak $A \times B$ je spočetná.

3·4. Systém všech konečných podmnožin spočetné množiny je spočetný.

3·5. Množina všech čísel tvaru $\sum\limits_{n \in A} 2^{-n}$, kde A probíhá všecky podmnožiny (mimo $\emptyset$) množiny $\mathbf{N}$, jest identická s intervalem $\underset{t}{\mathrm{E}}(0 < t \leqq 1)$.

3·6. Systém všech podmnožin množiny $\mathbf{N}$ je nespočetný.

3·7. Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.

3·8. Systém všech podmnožin nekonečné množiny je nespočetný.

3·9. Systém všech nekonečných podmnožin nekonečné množiny je nespočetný.

3·10. Množina všech polynomů $\sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k$ s celými koeficienty $a_k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ a_p \neq 0$ je spočetná.

3·11. Množina všech reálných algebraických čísel je spočetná.

3·12. Existují reálná transcendentní čísla.

3·13. Množina všech transcendentních čísel v daném intervalu je nespočetná.

*3·14.** Nechť A je spočetná množina taková, že $0 \in A$. Nechť $\mathfrak{A}$ je systém všech posloupností $\{a_n\}_1^{\infty}$ takových, že: [1] $a_n \in A$ pro každé n, [2] existuje index p takový, že $a_n = 0$ pro všecka $n > p$. Pak systém $\mathfrak{A}$ je spočetný.

§4. Uspořádané množiny.

4·1. *Uspořádati* (*ordnen, ordonner, order*) množinu P znamená udati pravidlo, podle něhož se rozhodne, zda prvek $a \in P$ je *před* prvkem $b \in P$; toto pravidlo musí splňovati tři podmínky:

[1] *když je a před b, pak není b před a*;

[2] *když není ani a před b ani b před a, pak $a = b$*;

[3] *když je a před b a také b před c, pak je a před c.*

Podle [1] nikdy a není před a. Když je a před b, pravíme, že je b *za* a. Když je buďto současně a před b a b před c nebo je současně a za b a b za c, pravíme, že b je *mezi* a a c (nebo mezi c a a). Pravíme, že je $a \in P$ *první* prvek, když není žádný $x \in P$ před ním; pravíme, že je $a \in P$ *poslední* prvek, když není žádný $x \in P$ za ním. Podle [2] existuje nejvýš jeden první a nejvýš jeden poslední prvek.

Množina P může býti ovšem uspořádána rozmanitými způsoby. Je-li uspořádána podle jednoho pravidla, obdržíme nové uspořádání, řekneme-li, že v novém smyslu je a před b právě tehdy, když v původním smyslu bylo a za b. Nové uspořádání se nazývá *inversní* k původnímu. Říkáme také, že jsou obě uspořádání *navzájem inversní.*

Je-li množina P uspořádána podle nějakého pravidla, pak totéž pravidlo uspořádává také libovolnou podmnožinu $A \subset P$. Mluvíme-li o uspořádání podmnožiny A uspořádané množiny P, rozumíme ovšem ono uspořádání množiny A, které je určeno daným uspořádáním množiny P.

E_1 v celé knize znamená množinu všech reálných čísel. R pak, jak již výše (v odst. **2·3**) bylo řečeno, znamená množinu E_1 rozmnoženou o dva nové prvky, z nichž jeden označíme $+\infty$ nebo také jednoduše ∞ a druhý označíme $-\infty$. Je-li $x \in \mathsf{R}$, $y \in \mathsf{R}$, pak nechť výrok „x je před y" znamená, že $x < y$, při čemž (v celé knize)

$$-\infty < \infty, \quad -\infty < c, \quad c < \infty$$

pro každé $c \in \mathsf{E}_1$. Tím je dáno t. zv. *přirozené uspořádání* množiny R, jež určuje *přirozené uspořádání* každé její podmnožiny. $-\infty$ je první a $+\infty$ je poslední prvek množiny R v jejím přirozeném uspořádání, kdežto množina E_1 přirozeně uspořádaná nemá ani první ani poslední prvek.

4·2. Nechť P a Q jsou dvě uspořádané množiny. Pravíme, že jsou *podobně uspořádány* nebo že jsou jejich (daná) uspořádání *podobná* (*ähnlich, semblable, similar*), když existuje zobrazení f množiny P na množinu Q takové, že pro $a \in P$, $b \in P$ jest:

$$a \text{ před } b \Rightarrow f(a) \text{ před } f(b).$$

V témž smyslu také říkáme, že je f *podobné zobrazení* množiny P na množinu Q. Je-li $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$, je buďto a před b, tedy $f(a)$ před $f(b)$, tedy $f(a) \neq f(b)$, nebo je b před a a zase $f(a) \neq f(b)$. Tedy je zobrazení f prosté, takže existuje inversní zobrazení f_{-1} množiny Q na množinu P. Čtenář snadno dokáže, že f_{-1} je *podobné* zobrazení množiny Q na množinu P.

4·3. Nechť P je uspořádaná množina. Pravíme, že P je *dobře uspořádaná* (*wohlgeordnet, bien ordonné, well ordered*), když pro $\emptyset \neq A \subset P$ vždy existuje první prvek $x \in A$, t. j. takový, že

$$y \in A, \ y \neq x \Rightarrow x \text{ před } y.$$

Přirozené uspořádání množiny všech celých čísel $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ nebo libovolné její podmnožiny je dobré uspořádání. Teorie dobře uspořádaných množin má četné aplikace, z nichž mnohé plynou z proslulé Zermelovy věty, že lze každou množinu dobře uspořádati. Ale v této knize se nebudeme touto teorií zabývati. Úvod do teorie dobrého uspořádání nalezne český čtenář v Jarníkově *Úvodu do teorie množství*, který tvoří dodatek k Petrovu *Počtu integrálnímu*.

4·4. Když je P uspořádaná množina, když $a \in P$, $b \in P$, když je a před b a když není žádný $x \in P$ mezi a a b, řekneme, že je a *přímo před* b nebo že je b *přímo za* a.

Poznámka: Když P je uspořádaná množina, když $a \in P$, $b \in P$, když je a před b a když je mezi a a b jen konečný ($\geqq 0$) počet prvků, pak existuje prvek x přímo za a a prvek z přímo před b.

Dokažme třeba první tvrzení (druhé se dokáže stejně nebo se převede na první pomocí inversního uspořádání): Nechť $x \in P$ je za a a je takový, že mezi a a x je *co nejméně* prvků. x existuje, ježto b je za a a ježto mezi a a b je konečný počet prvků. Kdyby nebyl x přímo za a, existoval by $y \in P$, mezi a a x. Každý prvek mezi a a y je také mezi a a x, ale mezi a a y je méně (totiž aspoň o prvek y méně) prvků než mezi a a x. To je spor, takže je x přímo za a.

Přirozené uspořádání množiny všech celých čísel $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ a každé její podmnožiny P má tu vlastnost, že pro každý pár $a \in P$, $b \in P$ je mezi a a b jen konečný počet prvků. Obráceně:

4·4·1. *Nechť je množina $P \neq \emptyset$ uspořádána tak, že, kdykoli $a \in P$, $b \in P$, jen konečný počet prvků $x \in P$ je mezi a a b. Rozeznávejme čtyři případy*: [1] *P má první i poslední prvek*, [2] *P má první a nemá poslední prvek*, [3] *P nemá první a má poslední prvek*, [4] *P nemá první ani poslední prvek. Pak dané uspořádání množiny P je podobné přirozenému uspořádání*: [1] *množiny přirozených čísel $\leq p$, kde p je počet prvků množiny P*, [2] *množiny všech přirozených čísel*, [3] *množiny všech záporných celých čísel*, [4] *množiny všech celých čísel.**)

Důkaz. Počněme případem, kdy existuje první prvek, a označme jej a_1. Když pro nějaké n je definován $a_n \in P$ a když a_n není poslední, pak existuje $b \in P$, b za a_n. Mezi a_n a b je jen konečný počet prvků, takže podle hořejší *poznámky* existuje $a_{n+1} \in P$ přímo za a_n. Jsou dva možné případy: buďto (případ α) dospějeme ke konečné posloupnosti $\{a_n\}_1^p$ takové, že a_p je poslední prvek množiny P nebo (případ β) dospějeme k nekonečné posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$. Lehko se ukáže, že v obou případech posloupnost $\{a_n\}$ je prostá. Dokažme, že v obou případech množina všech členů posloupnosti $\{a_n\}$ se rovná celé množině P. Předpokládáme-li opak, pak existuje $x \in P$ různý od všech a_n. Ježto a_1 je první, x je za a_1; nemůže však býti x za všemi a_n: v případě α proto, že a_p je poslední a v případě β proto, že mezi a_1 a x je jen konečný počet prvků. Tedy existuje v posloupnosti $\{a_n\}$ člen a_n ($1 \leq n < p$ v případě α) takový, že x je za a_n, ale není za a_{n+1}, takže x je mezi a_n a a_{n+1}. To je spor, neboť a_{n+1} je přímo za a_n. Tedy P je množina všech členů posloupnosti $\{a_n\}$. Klademe-li $f(a_n) = n$, máme, jak se lehko nahlédne, podobné zobrazení množiny P na množinu přirozených čísel $\leq p$ (v případě α) nebo na množinu všech přirozených čísel (v případě β). Zároveň vidíme, že v případě β množina P nemá posledního prvku.

Obraťme se ke případu, kdy P má poslední prvek. Pomocí inversního uspořádání se převede tento případ na předchozí. Tedy když P nemá první a má poslední prvek, sestrojíme posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ takovou, že, klademe-li $f(b_n) = -n$, dostaneme podobné zobrazení množiny P na množinu všech záporných celých čísel.

---

*) Případ [1] nastane ovšem, když a jen když je množina P konečná.

Zbývá případ, kdy P nemá ani první ani poslední prvek. Zvolme libovolně $a_0 \in P$. Definujme $P_1 \subset P$ a $P_2 \subset P$ takto:

$$P_1 = \underset{x}{\mathrm{E}} [a_0 \text{ před } x], \quad P_2 = \underset{x}{\mathrm{E}} [a_0 \text{ za } x].$$

Ježto a_0 není první ani poslední, jest $P_1 \neq \emptyset \neq P_2$. Mimo to

$$P = (a_0) + P_1 + P_2$$

s disjunktními sčítanci. Obě množiny P_1 a P_2 mají tu vlastnost, že mezi dvěma svými prvky má každá z nich jen konečný počet prvků. Mimo to se lehko přesvědčíme, že P_1 má první a nemá poslední prvek, kdežto P_2 nemá první a má poslední prvek. Tedy existují dvě posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$ a $\{a_{-n}\}_1^\infty$ takové, že P_1 je množina všech členů posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$, že P_2 je množina všech členů posloupnosti $\{a_{-n}\}_1^\infty$ a že

$$1 \leqq m < n \Rightarrow a_m \text{ před } a_n, \; a_{-m} \text{ za } a_{-n}.$$

Klademe-li $f(a_n) = n$ pro $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, dostaneme podobné zobrazení množiny P na množinu všech celých čísel.

4·5. Nechť je P uspořádaná množina. Pravíme, že P je *hustě uspořádaná* nebo, že dané uspořádání je *husté* (*dicht*, *dense*, *dense*), když P obsahuje aspoň dva různé prvky a když neexistuje pár $a \in P$, $b \in P$ takový, aby byl a přímo před b. *Hustě uspořádaná množina P je nekonečná.* Dokonce, podle *poznámky* v odst. **4·4**, *když $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$, množina všech $x \in P$ ležících mezi a a b je nekonečná.*

Přirozené uspořádání množiny všech racionálních čísel je husté. Připomeňme si, že tato množina je spočetná (v. cv. *3·1*).

4·6. 4·6·1. *Nechť P je spočetná uspořádaná množina. Nechť H je hustě uspořádaná množina. Pak existuje množina $Q \subset H$ taková, že P a Q jsou podobně uspořádány.* (Uspořádání množiny Q je ovšem určeno daným uspořádáním množiny $H \supset Q$ podle **4·1**.)

Důkaz. Když $P = \emptyset$, stačí zvoliti $Q = \emptyset$. Nechť tedy $P \neq \emptyset$. P je konečná (případ α) nebo nekonečná (případ β). V případě α existuje konečná prostá posloupnost $\{a_n\}_1^p$, v případě β nekonečná prostá posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ taková, že je v obou případech P množina všech členů posloupnosti $\{a_n\}$. Ježto H je hustě uspořádaná, je nekonečná, takže můžeme zvoliti $b_1 \in H$ tak, že b_1 není ani první ani poslední prvek množiny H. (Tím nikterak netvrdíme, že by v H musil existovati první nebo poslední prvek.) Nechť při určitém $q = 1, 2, 3, \ldots$ (v případě α nechť $q < p$) byly již sestrojeny prvky $b_n \in H$ $(1 \leqq n \leqq q)$ tak, že není žádný z nich ani první ani poslední v H a že pro $1 \leqq m \leqq q$, $1 \leqq n \leqq q$ jest:

$$a_m \text{ před } a_n \Leftrightarrow b_m \text{ před } b_n. \tag{1}$$

(Tomu je pro $q = 1$ vyhověno.) Dokážeme, že lze zvoliti $b_{q+1} \in H$ tak, že b_{q+1} není ani první ani poslední v H a že platí (1) pro $1 \leqq m \leqq$

$\leqq q+1$, $1 \leqq n \leqq q+1$. Rozeznávejme tři případy: [1] Nechť je a_{q+1} před a_n pro $1 \leqq n \leqq q$; zřejmě existuje index m $(1 \leqq m \leqq q)$ takový, že

$$1 \leqq n \leqq q,\ n \neq m \Rightarrow a_m \text{ před } a_n;$$

ježto b_m není první v H a ježto H je hustě uspořádaná, existuje $b_{q+1} \in H$ takový, že b_{q+1} není první v H a že b_{q+1} je před b_m; lehko se zjistí, že b_{q+1} není poslední v H a že (1) platí pro $1 \leqq m \leqq q+1$, $1 \leqq n \leqq q+1$. [2] Nechť je a_{q+1} za a_n pro $1 \leqq n \leqq q$. Sestrojíme b_{q+1} podobně jako v případě předešlém. [3] Nechť existuje aspoň jeden index n takový, že $1 \leqq n \leqq q$ a že a_{q+1} je před a_n a také aspoň jeden index n takový, že $1 \leqq n \leqq q$ a že a_{q+1} je za a_n; zřejmě existuje index h $(1 \leqq h \leqq q)$ takový, že a_{q+1} je před a_h a že

$$1 \leqq n \leqq q,\ n \neq h,\ a_{q+1} \text{ před } a_n \Rightarrow a_h \text{ před } a_n;$$

podobně existuje index k $(1 \leqq k \leqq q)$ takový, že a_{q+1} je za a_k a že

$$1 \leqq n \leqq q,\ n \neq k,\ a_{q+1} \text{ za } a_n \Rightarrow a_k \text{ za } a_n;$$

ježto H je hustě uspořádaná, existuje $b_{q+1} \in H$ mezi b_h a b_k; lehko se zjistí, že b_{q+1} není první ani poslední v H a že (1) platí pro $1 \leqq m \leqq q+1$, $1 \leqq n \leqq q+1$.

Takto postupujíce, sestrojíme v případě α konečnou posloupnost $\{b_n\}_1^p$ a v případě β nekonečnou posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ takovou, že, když klademe $f(a_n) = b_n$, v obou případech je f podobné zobrazení množiny P na množinu $Q \subset H$ všech členů posloupnosti $\{b_n\}$.

Když ve **4·6·1** zvolíme za H množinu všech racionálních čísel přirozeně uspořádanou, máme větu:

4·6·2. *Nechť P je spočetná uspořádaná množina. Existuje množina Q taková, že:* [1] *prvky množiny Q jsou racionální čísla*; [2] *dané uspořádání množiny P je podobné přirozenému uspořádání množiny Q.*

4·7. 4·7·1. *Nechť P a Q jsou hustě uspořádané spočetné množiny bez prvního a bez posledního prvku. Pak P a Q jsou uspořádány podobně.*

Důkaz. Ježto P a Q jsou hustě uspořádané, jsou nekonečné. Tedy existují prosté posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$ a $\{b_n\}_1^\infty$ takové, že množiny všech jejích členů jsou resp. P a Q. Sestrojíme rekurentně dvě nové prosté posloupnosti $\{u_n\}$ a $\{v_n\}$ takto: Nechť $u_1 = a_1$, $v_1 = b_1$. Nechť při určitém $q = 1, 2, 3, \ldots$ byly již sestrojeny členy $u_n \in P$ a $v_n \in Q$ $(1 \leqq n \leqq q)$ tak, že pro $1 \leqq m \leqq q$, $1 \leqq n \leqq q$ jest

$$u_m \text{ před } u_n \Leftrightarrow v_m \text{ před } v_n. \tag{1}$$

Rozeznávejme dva případy. Když *předně* q je liché, zvolíme napřed $u_{q+1} = a_h$, kde za h zvolíme *nejmenší* index takový, že $a_h \neq u_n$ pro $1 \leqq n \leqq q$; na to položíme $v_{q+1} = b_k$, kde k zvolíme tak, aby (1) platilo pro $1 \leqq m \leqq q+1$, $1 \leqq n \leqq q+1$; že b_k existuje, odvodí se stejně jako při obdobné úvaze v předešlém důkaze. Když *za druhé* q je sudé, zvolíme napřed $v_{q+1} = b_h$, kde za h zvolíme *nejmenší* index takový, že $b_h \neq v_n$ pro $1 \leqq n \leqq q$; na to položíme $u_{q+1} = a_k$, kde k zvolíme tak, aby (1) platilo pro $1 \leqq m \leqq q + 1$, $1 \leqq n \leqq q + 1$. Tímto postupem dostaneme dvě prosté posloupnosti $\{u_n\}_1^\infty$ a $\{v_n\}_1^\infty$. Ježto byl index h vždy volen co nejmenší, je množina všech členů posloupnosti $\{u_n\}$ rovná množině P a stejně pro $\{v_n\}$ a Q. Relace (1) platí pro všecka přirozená čísla m a n; z toho následuje, že, položíme-li $f(u_n) = v_n$, f je podobné zobrazení množiny P na množinu Q.

Když ve **4·7·1** zvolíme za Q množinu všech racionálních čísel přirozeně uspořádanou, máme větu:

4·7·2. *Nechť P je spočetná hustě uspořádaná množina bez prvního a bez posledního prvku. Pak P je podobně uspořádána s přirozeně uspořádanou množinou všech racionálních čísel.*

4·8. Nechť P je uspořádaná množina. Nazveme *řezem* (*Schnitt, coupure, section*) (uspořádané) množiny P každou dvojici $\alpha = (A_1, A_2)$, kde $A_1 \subset P$, $A_2 \subset P$, $A_1 + A_2 = P$ a

$$x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2 \Rightarrow x_1 \text{ před } x_2. \qquad (1)$$

Všimněme si, že podmínka (1) implikuje $A_1 \,.\, A_2 = \emptyset$. Množinu A_1 nazveme *dolní skupinou* a množinu A_2 *horní skupinou* řezu α.

Důležitý případ řezu dostaneme takto: zvolme $a \in P$ a definujme A_1 a A_2 tak, že

$$x \text{ před } a \Rightarrow x \in A_1,\quad x \text{ za } a \Rightarrow x \in A_2,$$

kdežto a dáme podle libosti do některé z obou množin A_1 a A_2, ovšem ale jen do jedné z nich. V obou případech je (A_1, A_2) řez množiny P; o obou řezech řekneme, že jsou *vytvořeny* prvkem a. V případě $a \in A_1$ prvek a je poslední v dolní skupině, v případě $a \in A_2$ prvek a je první v horní skupině. Obráceně, když $\alpha = (A_1, A_2)$ je řez takový, že v A_1 existuje poslední prvek, α je tímto prvkem vytvořen; a když $\alpha = (A_1, A_2)$ je řez takový, že v A_2 existuje první prvek, α je tímto prvkem vytvořen.

Řez $\alpha = (A_1, A_2)$ se nazývá *skok* (*Sprung, saut, saltus*), když existuje i poslední prvek a_1 dolní skupiny i první prvek a_2 horní skupiny; řez α je pak vytvořen i prvkem a_1 i prvkem a_2; obráceně řez, který se dá vytvořiti dvěma různými prvky množiny P, je skok. Kdyby byl prvek $x \in P$ mezi a_1 a a_2, nemohl by býti ani v A_1 ani v A_2; tedy a_1 je přímo před a_2, takže *hustě uspořádaná množina nemá skoků.*

Řez $\alpha = (A_1, A_2)$ se nazývá *mezerou* (*Lücke, lacune, gap*), když $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$ a když ani neexistuje poslední prvek dolní skupiny ani neexistuje první prvek horní skupiny. Mezera se nedá vytvořiti žádným $a \in P$.

Dvojice $\alpha_1 = (P, \emptyset)$ je řez množiny P; existuje-li poslední prvek množiny P, je jím α_1 vytvořen; neexistuje-li, nedá se α_1 vytvořiti žádným $a \in P$. Dvojice $\alpha_2 = (\emptyset, P)$ je řez množiny P; existuje-li první prvek množiny P, je jím α_2 vytvořen; neexistuje-li, nedá se α_2 vytvořiti žádným $a \in P$.

Když uspořádaná množina P má první i poslední prvek a když nemá mezer, pak se každý její řez dá vytvořiti nějakým $a \in P$; když mimo to P je hustě uspořádaná, pak se každý řez dá vytvořiti jen jediným $a \in P$.

4·9. Nechť M je množina všech *racionálních* čísel. Je-li α *iracionální* číslo a položíme-li

$$A_1 = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[x \in M,\ x < \alpha],\ A_2 = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[x \in M,\ x > \alpha],$$

pak (A_1, A_2) je mezera (přirozeně uspořádané) množiny M, o které řekneme (v poněkud jiném smyslu než v odst. **4·8**, neboť α nenáleží do M), že je *vytvořena* iracionálním číslem α. Různá iracionální čísla vytvořují různé mezery množiny M. Z teorie reálných čísel je známo, že obráceně každá mezera množiny M je vytvořena určitým iracionálním číslem; v Dedekindově teorii*) přímo se *definují* iracionální čísla jako mezery množiny M. Přirozeně uspořádaná množina E_1 všech reálných (racionálních i iracionálních) čísel nemá pak už mezer.**) Tato fakta tvoří, jak známo, basi při exaktním budování celé matematické analysy. Odvodíme si zde jejich abstraktní jádro.

Nechť P je uspořádaná množina a nechť Q je množina všech jejích mezer. Pro přehlednost budeme značiti malými latinskými písmeny prvky množiny P a malými řeckými písmeny prvky množiny Q, tedy mezery v P, kladouce $\alpha = (A_1, A_2)$, $\beta = (B_1, B_2)$ atp. Ovšem $P \,.\, Q = \emptyset$. Víme, co znamená „a před b" ($a \in P$, $b \in P$). Definujme: [1] „a před α" ($a \in P$, $\alpha = (A_1, A_2) \in Q$) znamená, že $a \in A_1$; [2] „α před a" znamená, že $a \in A_2$; [3] „α před β" ($\alpha = (A_1, A_2)$, $\beta = (B_1, B_2)$) znamená, že $A_1 \subset B_1 \neq A_1$. Abychom dokázali, že jsme definovali uspořádání množiny $P + Q$, musíme (v. **4·1**) dokázati tři věci:

I. Ze dvou prvků množiny $P + Q$ nemůže býti současně první před druhým i druhý před prvním. Víme ovšem, že nemůže býti současně a před b i b před a. Kdyby bylo a před α i α před a, bylo by $a \in A_1$, $a \in A_2$, což nejde, neboť $A_1 \,.\, A_2 = \emptyset$. Kdyby bylo α před β i β před α, bylo by $A_1 \subset B_1 \neq A_1$, $B_1 \subset A_1 \neq B_1$, což také nejde.

II. Když ze dvou prvků množiny $P + Q$ není ani první před druhým ani druhý před prvním, pak oba prvky splynou. Předně víme, že když není ani a před b, ani b před a, jest $a = b$. Za druhé ukažme, že předpoklad, že není ani a před α, ani α před a, vede ke sporu; učiněný předpoklad znamená, že není ani $a \in A_1$, ani $a \in A_2$, což je spor, neboť $a \in P = A_1 + A_2$. Za třetí nechť není ani α před β ani β před α; máme ukázati, že $\alpha = \beta$. Ježto $A_2 = P - A_1$, $B_2 = P - B_1$, stačí ukázati,

*) Stručný přehled Dedekindovy teorie najde český čtenář v Petrově *Počtu diferenciálním.*

**) Ovšem ani množina R, která vznikne z E_1 přidáním prvního prvku $-\infty$ a posledního prvku $+\infty$, nemá mezer.

že $A_1 = B_1$. Nechť naopak $A_1 \neq B_1$. Ježto není α před β, není $A_1 \subset B_1$, takže existuje $a \in A_1 - B_1$; podobně existuje $b \in B_1 - A_1$, ježto není β před α. Jest $a \in A_1 - B_1 = A_1(P - B_1) = A_1 . B_2$ a podobně $b \in A_2 . B_1$. Ježto $a \in A_1$, $b \in A_2$, je a před b; avšak ježto $a \in B_2$, $b \in B_1$, je b před a; to je spor.

III. Když ze tří prvků množiny $P + Q$ je první před druhým i druhý před třetím, pak je první před třetím. Jest celkem zkoumati osm případů: [1] a před b před c; víme, že a je před c. [2] α před b před c; ježto α před b, je $b \in A_2$; kdyby bylo $c \in A_1$, bylo by c před b, neboť (A_1, A_2) je řez; tedy $c \in A_2$, t. j. α je před c. [3] a před β před c, tedy $a \in B_1$, $c \in B_2$, tedy a je před c. [4] a před b před γ; ježto b před γ, je $b \in C_1$; kdyby bylo $a \in C_2$, bylo by a za b; tedy $a \in C_1$, t. j. a je před γ. [5] α před β před c; ježto β před c, jest $c \in B_2$; ježto α před β, je $A_1 \subset B_1$, tedy $A_2 = P - A_1 \supset P - B_1 = B_2$, tedy $c \in A_2$, t. j. α je před c. [6] α před b před γ, tedy $b \in A_2C_1$; kdyby nebylo α před γ, bylo by (v. II výše) $\alpha = \gamma$ nebo γ před α, takže by bylo $C_1 \subset A_1$, tedy $b \in A_2C_1 \subset$ $\subset A_1A_2 \neq \emptyset$, což je spor; tedy je α před γ. [7] a před β před γ; jest $a \in B_1 \subset C_1$, tedy $a \in C_1$, t. j. a je před γ. [8] α před β před γ; jest $A_1 \subset$ $\subset B_1 \subset C_1 \neq B_1$, tedy $A_1 \subset C_1 \neq A_1$, t. j. α je před γ.

Tedy jsme skutečně sestrojili uspořádání množiny $P + Q$, které určuje ono uspořádání podmnožiny P, jež bylo původně dáno. Toto uspořádání množiny $P + Q$ má následující čtyři vlastnosti:

[1] *Před každým $\alpha \in Q$ je nějaký $a \in P$*, totiž každý $a \in A_1$.

[2] *Za každým $\alpha \in Q$ je nějaký $a \in P$*, totiž každý $a \in A_2$.

[3] *Když $\alpha \in Q$, $\beta \in Q$, $\alpha \neq \beta$, pak mezi α a β existuje vždy nějaký $a \in P$.* Nechť třeba α před β. Pak $A_1 \subset B_1 \neq A_1$, takže $\emptyset \neq B_1 - A_1 =$ $= A_2B_1$. Zvolíme-li $a \in A_2B_1$, pak je a za α a před β, t. j. a je mezi α a β.

[4] *Když $a \in P$, $\alpha \in Q$, pak existuje mezi a a α vždy nějaký $b \in P$.* Nechť je třeba a před α, tedy $a \in A_1$. Ježto $\alpha = (A_1, A_2)$ je mezera v P, není v A_1 posledního prvku, takže za a existuje $b \in A_1$. Ježto $b \in A_1$, je b před α. Ježto je b také za a, b je mezi a a α.

Sestrojené uspořádání množiny $P + Q$ nemá mezer.

Důkaz. Nechť je $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ řez množiny $P + Q$ a nechť $\mathfrak{A}_1 \neq \emptyset \neq \mathfrak{A}_2$. Máme dokázati, že existuje buďto poslední prvek skupiny $\mathfrak{A}_1$ nebo první prvek skupiny $\mathfrak{A}_2$. Nechť $A_1 = P . \mathfrak{A}_1$, $A_2 = P . \mathfrak{A}_2$. Zřejmě je $\alpha = (A_1, A_2)$ řez množiny P. Ježto $\mathfrak{A}_1 \neq \emptyset$, existuje $\beta \in \mathfrak{A}_1$; je-li $\beta \in P$, jest $\beta \in A_1$; je-li $\beta \in Q$, víme, že před β existuje $b \in P$; ježto b je před β, $\beta \in \mathfrak{A}_1$, není $b \in \mathfrak{A}_2$, tedy je $b \in \mathfrak{A}_1$; ježto $b \in P$, je $b \in A_1$. Tedy v obou případech je $A_1 \neq \emptyset$ a stejně se dokáže, že $A_2 \neq \emptyset$. Rozeznávejme tři případy.

Předně nechť existuje poslední prvek b množiny A_1. Předpokládejme, že b není poslední prvek množiny $\mathfrak{A}_1$. Pak existuje za b prvek $\beta \in \mathfrak{A}_1$. Ježto $P\mathfrak{A}_1 = A_1$ a β je za posledním prvkem množiny A_1, není $\beta \in P$, tedy je $\beta \in Q$. Ježto b je před β, podle hořejší vlastnosti [4] existuje $c \in P$ mezi b a β, tedy za b a před β. Ježto $c \in P$ je za posledním prvkem množiny A_1, není $c \in A_1$; ježto c je před $\beta \in \mathfrak{A}_1$, není $c \in \mathfrak{A}_2$, tedy $c \in \mathfrak{A}_1$, tedy $c \in P\mathfrak{A}_1$, t. j. přece $c \in A_1$; to je spor. Tedy b je poslední prvek množiny $\mathfrak{A}_1$.

Za druhé nechť existuje první prvek b množiny A_2. Stejně jako v případě prvním se ukáže, že b je první prvek množiny $\mathfrak{A}_2$.

Za třetí nechť neexistuje ani poslední prvek v A_1 ani první prvek v A_2. Ježto $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$, je $\alpha = (A_1, A_2)$ mezera množiny P, tedy $\alpha \in Q$. Nechť $\beta \in P + Q$ je před α. Je-li $\beta \in P$, je $\beta \in A_1$, tedy $\beta \in \mathfrak{A}_1$. Je-li $\beta \in Q$, podle hořejší vlastnosti [3] existuje $a \in P$ mezi α a β, tedy před α a za β. Ježto $a \in P$ je před α, je $a \in A_1$, tedy $a \in \mathfrak{A}_1$. Ježto β je před a, není $\beta \in \mathfrak{A}_2$, tedy $\beta \in \mathfrak{A}_1$. Tedy ať již $\beta \in P$ či $\beta \in Q$, vždy

$$\beta \text{ před } \alpha \Rightarrow \beta \in \mathfrak{A}_1;$$

a stejně se dokáže, že

$$\beta \text{ za } \alpha \Rightarrow \beta \in \mathfrak{A}_2.$$

Ježto $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 = P + Q$, je buďto $\alpha \in \mathfrak{A}_1$ nebo $\alpha \in \mathfrak{A}_2$. V prvém případě α je poslední v $\mathfrak{A}_1$, ve druhém α je první v $\mathfrak{A}_2$.

4·10. Skončeme tento paragraf připomenutím několika známých důsledků fakta, že přirozené uspořádání množiny $\mathbf{R}$ nemá ani skoků ani mezer.

Nechť je dána libovolná množina $M \subset \mathbf{R}$. Označme A_2 množinu těch $x \in \mathbf{R}$, pro které:

$$y \in M \Rightarrow y < x,$$

a položme $A_1 = \mathbf{R} - A_2$. Snadno se přesvědčíme, že je (A_1, A_2) řez (přirozeně uspořádané) množiny $\mathbf{R}$. Podle poznámky na konci odst. **4·8** existuje právě jedno $\alpha \in \mathbf{R}$, které vytvořuje řez (A_1, A_2). Lehko se ukáže, že číslo α je charakterisováno následujícími dvěma vlastnostmi:

[1] když $\beta \in \mathbf{R}$, $\beta < \alpha$, existuje $y \in M$, $y \geqq \beta$;

[2] $\beta \in \mathbf{R}$, $\beta > \alpha$, $y \in M \Rightarrow y < \beta$.

Podle Hausdorffa nazveme α *supremum* množiny M a označíme je

$$\sup M.^{*)}$$

Místo supremum říká se také ***horní mez*** nebo ***horní hranice*** (*obere Grenze* nebo *obere Schranke*, *borne supérieure*, *upper boundary*). Když $\alpha \in M$, zřejmě je α největší číslo obsažené v množině M; nazýváme je pak také *maximum* množiny M a značíme je někdy

$$\max M.^{**)}$$

Když $\alpha \in \mathbf{R} - M$, pak neexistuje maximum množiny M.

Podobně lze přiřaditi každé množině $M \subset \mathbf{R}$ číslo $\alpha' \in \mathbf{R}$, charakterisované vlastnostmi:

---

*) Když f je funkce v oboru P, pak $\sup f(P)$ značíme také $\sup\limits_{x \in P} f(x)$; podobně pro infimum, maximum a minimum.

**) $\max(a, b)$ znamená maximum množiny složené ze dvou prvků $a \in \mathbf{R}$ a $b \in \mathbf{R}$; podobně pro minimum.

[1′] když $\beta \in \mathbf{R}$, $\beta > \alpha'$, existuje $y \in M$, $y \leqq \beta$,
[2′] $\beta \in \mathbf{R}$, $\beta < \alpha'$, $y \in M \Rightarrow y > \beta$.
Číslo α' nazveme *infimum* množiny M a označíme je

$$\inf M.$$

Místo infimum se říká také *dolní mez* nebo *dolní hranice* (*untere Grenze* nebo *untere Schranke, borne inférieure, lower boundary*). Když $\alpha' \in M$, pak α' je *minimum* (nejmenší číslo) množiny M a značí se někdy

$$\min M.$$

Podle naší definice jest

$$\sup \emptyset = -\infty, \ \inf \emptyset = \infty.$$

Naproti tomu

$$M \neq \emptyset \Rightarrow \sup M \geqq \inf M.$$

Neboť nechť naopak $\alpha < \alpha'$. Zvolme $y \in M$. Podle [2] je $y < \alpha'$; když do [2′] dosadíme $\beta = y$, dostaneme spor $y > y$.

Množina M se nazývá *omezená* (*beschränkt, borné, bounded*), když $\sup M < \infty$ a $\inf M > -\infty$, jinak *neomezená* (*unbeschränkt, non borné, unbounded*). Lehko se přesvědčíme, že M je omezená tehdy a jen tehdy, když existuje $c \in \mathbf{E}_1$ takové, že

$$x \in M \Rightarrow -c < x < c.$$

Když f je funkce v oboru P, zřejmě množina $f(P)$ je omezená ve smyslu právě definovaném, když a jen když funkce f je omezená ve smyslu odst. **2·3**.

Cvičení.

4·1. Konečná množina o n prvcích má $n!$ uspořádání (také pro $n = 0$: $0! = 1$, a pro $n = 1$). Všecka tato uspořádání jsou mezi sebou podobná.

4·2. Množina všech možných uspořádání množiny všech přirozených čísel je nespočetná.

4·3. Nechť P a Q jsou uspořádané množiny. Pak jejich kartézský součin se dá uspořádati takto: (x_1, y_1) před $(x_2, y_2) \Leftrightarrow$ buďto x_1 před x_2 nebo současně $x_1 = x_2$, y_1 před y_2.

4·4. Nechť je každému prvku z uspořádané množiny $\mathbf{C} \neq \emptyset$ přiřazena uspořádaná množina $A(z)$ a nechť součet $\sum\limits_{z \in \mathbf{C}} A(z)$ je disjunktní. Pak množinu $M = \sum\limits_{z \in C} A(z)$ lze uspořádati takto: Když $x_1 \in M$, $x_2 \in M$, existují určité prvky $z_1 \in \mathbf{C}$, $z_2 \in \mathbf{C}$ takové, že $x_1 \in A(z_1)$, $x_2 \in A(z_2)$; x_1 před x_2 znamená, že buďto je z_1 před z_2 nebo je současně $z_1 = z_2$ a x_1 před x_2 v $A(z_1)$. Když daná uspořádání množiny $\mathbf{C}$ i všech množin $A(z)$ jsou dobrá, také uspořádání množiny M je dobré.

4·5. Přirozené uspořádání množiny všech konečných desetinných zlomků, nebo množiny všech racionálních čísel x takových, že $\alpha < x < \beta$, kde $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$, $\alpha < \beta$, nebo množiny všech reálných algebraických čísel je podobné přirozenému uspořádání všech racionálních čísel.

4·6. Nechť P je hustě uspořádaná spočetná množina. Pak P je podobně uspořádána s přirozeně uspořádanou množinou všech racionálních čísel obsažených v intervalu: [1] $\underset{x}{\mathrm{E}}[0 < x < 1]$, když P nemá ani první ani poslední prvek, [2] $\underset{x}{\mathrm{E}}[0 \leqq x < 1]$, když P má první a nemá poslední prvek, [3] $\underset{x}{\mathrm{E}}[0 < x \leqq 1]$, když P nemá první a má poslední prvek. [4] $\underset{x}{\mathrm{E}}[0 \leqq x \leqq 1]$, když P má první i poslední prvek.

4·7. Podmínka (1) při definici řezu na začátku odst. **4·8** se dá nahraditi kteroukoli ze dvou následujících

$$x_1 \text{ před } x_2,\ x_2 \in A_1 \Rightarrow x_1 \in A_1,$$
$$x_1 \text{ před } x_2,\ x_1 \in A_2 \Rightarrow x_2 \in A_2.$$

4·8. Nechť (A_1, A_2) je řez uspořádané množiny P. Pak (A_2, A_1) je řez inversně uspořádané množiny P. Když (A_1, A_2) je skok nebo mezera, také (A_2, A_1) je skok, resp. mezera.

4·9. Nechť P a P' jsou uspořádané množiny; nechť f je podobné zobrazení prvé na druhou. Nechť Q a Q' jsou množiny všech mezer množiny P, resp. P'. Uspořádejme množinu $P + Q$ jako v odst. **4·9** a stejně uspořádejme také množinu $P' + Q'$. Existuje právě jedno podobné zobrazení φ množiny $P + Q$ na množinu $P' + Q'$ takové, že $\varphi_P = f$ (ve smyslu odst. **2·4**).

4·10. Nechť Q je hustě uspořádaná množina, která nemá prvního ani posledního prvku a nemá mezer. Nechť $P \subset Q$ je spočetná množina. Nechť ke každému páru $x \in Q - P$, $y \in Q - P$, $x \neq y$ existuje $a \in P$ mezi x a y. Pak existuje podobné zobrazení f množiny Q na množinu $\mathbf{E}_1$ (přirozeně uspořádanou) takové, že $f(P)$ je množina všech racionálních čísel.

4·11. Nechť P je daná množina mající aspoň dva prvky. Nechť je dána množina $\mathbf{M} \subset P \times P \times P$ s následujícími vlastnostmi:

[1] $(a, c, b) \in \mathbf{M} \Rightarrow a \neq b$;
[2] $(a, c, b) \in \mathbf{M} \Rightarrow (b, c, a) \in \mathbf{M}$;
[3] $(a, c, b) \in \mathbf{M} \Rightarrow a \neq c$;
[4] $(a, d, c) \in \mathbf{M}$, $(a, c, b) \in \mathbf{M} \Rightarrow (a, d, b) \in \mathbf{M}$;
[5] $(a, d, c) \in \mathbf{M}$, $(d, c, b) \in \mathbf{M} \Rightarrow (a, c, b) \in \mathbf{M}$;
[6] $(a, x, b) \in \mathbf{M}$, $(a, y, b) \in \mathbf{M}$, $x \neq y \Rightarrow$ buďto $(a, x, y) \in \mathbf{M}$ nebo $(a, y, x) \in \mathbf{M}$;
[7] $(a, c, x) \in \mathbf{M}$, $(a, c, y) \in \mathbf{M}$, $x \neq y \Rightarrow$ buďto $(c, x, y) \in \mathbf{M}$ nebo $(c, y, x) \in \mathbf{M}$;
[8] $a \neq b \neq c \neq a \Rightarrow$ buďto $(a, b, c) \in \mathbf{M}$ nebo $(b, c, a) \in \mathbf{M}$ nebo $(c, a, b) \in \mathbf{M}$.

Pak existují právě dvě uspořádání množiny P, vzhledem k nimž je c mezi a a b tehdy a jen tehdy, když je $(a, c, b) \in \mathbf{M}$. Tato uspořádání jsou navzájem inversní.

§5. Cyklicky uspořádané množiny.*)

5·1. Uspořádání množiny P jsme mohli definovati jako podmnožinu $\mathbf{U}$ množiny $P \times P$ vyhovující určitým podmínkám, totiž podmnožinu $\underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x \text{ před } y]$. Podobně definujeme *cyklické uspořádání* množiny P jako podmnožinu $\mathbf{C}$ množiny $P \times P \times P$ vyhovující následujícím čtyřem podmínkám:

[1] $(a, b, c) \in \mathbf{C} \Rightarrow (b, c, a) \in \mathbf{C}$;
[2] nikdy není současně i $(a, b, c) \in \mathbf{C}$ i $(b, a, c) \in \mathbf{C}$;

*) Čtenáři začátečníku doporučuji, aby zatím vynechal tento paragraf, na který budou navázány další úvahy až v druhém dílu této učebnice.

[3] není-li ani $(a, b, c) \in \mathbf{C}$ ani $(b, a, c) \in \mathbf{C}$, pak není $a \neq b \neq c \neq a$;

[4] $(a, b, c) \in \mathbf{C}$, $(a, c, d) \in \mathbf{C} \Rightarrow (a, b, d) \in \mathbf{C}$.

Z [1] a [2] následuje:

[5] je-li $(a, b, c) \in \mathbf{C}$, pak je $(b, c, a) \in \mathbf{C}$ a $(c, a, b) \in \mathbf{C}$, ale není $(b, a, c) \in \mathbf{C}$ ani $(c, b, a) \in \mathbf{C}$ ani $(a, c, b) \in \mathbf{C}$.

Z [5] následuje:

[6] $(a, b, c) \in \mathbf{C} \Rightarrow a \neq b \neq c \neq a$.

Z [3] a [5] následuje:

[7] je-li $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_1$, pak $(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}) \in \mathbf{C}$ platí pro právě tři ze šesti permutací i_1, i_2, i_3 indexů 1, 2, 3.

Konečně platí následující obdoba k vlastnosti [4]:

[8] $(a, b, d) \in \mathbf{C}$, $(b, c, d) \in \mathbf{C} \Rightarrow (a, c, d) \in \mathbf{C}$. Neboť podle [5] je $(d, a, b) \in \mathbf{C}$, $(d, b, c) \in \mathbf{C}$, takže podle [4] je $(d, a, c) \in \mathbf{C}$, tedy $(a, c, d) \in \mathbf{C}$ podle [1].

5·2. Nechť P je cyklicky uspořádaná množina a nechť $a \in P$. Když $x \in P - (a)$, $y \in P - (a)$, pak nechť

$$x \text{ před } y \Leftrightarrow (a, x, y) \in \mathbf{C}.$$

Abychom se přesvědčili, že jsme skutečně definovali uspořádání množiny $P - (a)$, musíme zjistiti, že jsou splněny tři podmínky vyslovené na začátku odst. **4·1**.

I. Nechť je x před y. Pak je $(a, x, y) \in \mathbf{C}$. Podle [5] není $(a, y, x) \in \mathbf{C}$, t. j. y není před x.

II. Nechť není ani x před y ani y před x, t. j. ani $(a, x, y) \in \mathbf{C}$ ani $(a, y, x) \in \mathbf{C}$, takže podle [3] a [5] není $a \neq x \neq y \neq a$. Ježto $x \in P - (a)$, $y \in P - (a)$, je $x = y$.

III. Nechť x je před y a y je před z. Pak je $(a, x, y) \in \mathbf{C}$, $(a, y, z) \in \mathbf{C}$, tedy podle [4] je $(a, x, z) \in \mathbf{C}$, t. j. x je před z.

Tedy skutečně bylo definováno uspořádání množiny $P - (a)$, které označíme $\mathbf{U}(a)$ nebo určitěji $\mathbf{U}_{\mathbf{C}}(a)$.

Obráceně:

5·2·1. *Nechť $a \in P$ a nechť je dáno uspořádání množiny $P - (a)$. Pak existuje právě jedno cyklické uspořádání $\mathbf{C}$ množiny P takové, že dané uspořádání množiny $P - (a)$ je identické s $\mathbf{U}_{\mathbf{C}}(a)$.*

Důkaz. I. Existuje-li hledané cyklické uspořádání $\mathbf{C}$, pak podle [1], [6] a podle definice uspořádání $\mathbf{U}_{\mathbf{C}}(a)$ je:

$(a, x, y) \in \mathbf{C} \Leftrightarrow (x, y, a) \in \mathbf{C} \Leftrightarrow (y, a, x) \in \mathbf{C} \Leftrightarrow x \in P - (a), y \in P - (a), x$ před y.

Nechť nyní x, y a z jsou tři prvky množiny $P - (a)$ takové, že x je před z, t. j. $(a, x, z) \in \mathbf{C}$. Je-li $(x, y, z) \in \mathbf{C}$, pak podle [8] je $(a, y, z) \in \mathbf{C}$, t. j. y je před z. Jest $(x, y, z) \in \mathbf{C}$ a podle [1] je $(x, z, a) \in \mathbf{C}$, takže podle [4] je $(x, y, a) \in \mathbf{C}$, tedy podle [5] je $(a, x, y) \in \mathbf{C}$, t. j. x je před y. Tedy y je mezi x a z. Obráceně nechť y je mezi x a z. Ježto x je před z, je y za x a před z, t. j. $(a, x, y) \in \mathbf{C}$, $(a, y, z) \in \mathbf{C}$, takže podle [5] je $(y, z, a) \in \mathbf{C}$, $(y, a, x) \in \mathbf{C}$, tedy podle [4] je $(y, z, x) \in \mathbf{C}$, tedy podle [5] je $(x, y, z) \in \mathbf{C}$.

Nechť konečně x, y a z jsou tři prvky množiny $P - (a)$ takové, že x je za z. Pak z je před x, takže

$$(z, y, x) \in \mathbf{C} \Leftrightarrow y \text{ je mezi } x \text{ a } z.$$

Avšak podle [5], [6] a [7] je $(x, y, z) \in \mathbf{C}$ tehdy a jen tehdy, když $x \neq y \neq z \neq x$ a když není $(z, y, x) \in \mathbf{C}$.

Tedy, když x, y, z jsou prvky množiny $P - (a)$, pak $(x, y, z) \in \mathbf{C}$ tehdy a jen tehdy, když buďto

$$x \text{ před } y \text{ před } z$$

nebo

$$y \text{ před } z \text{ před } x$$

nebo

$$z \text{ před } x \text{ před } y.$$

Tedy množina $\mathbf{C}$ je daným uspořádáním množiny $P - (a)$ úplně určena.

II. Zbývá dokázati, že $\mathbf{C}$ je cyklické uspořádání množiny P, t. j. že platí vlastnosti [1]—[4]. Neboť z konstrukce $\mathbf{C}$ následuje snadno, že dané uspořádání množiny $P - (a)$ je identické s $\mathbf{U}_{\mathbf{C}}(a)$.

Nechť *předně* $(x, y, z) \in \mathbf{C}$. Máme dokázati, že $(y, z, x) \in \mathbf{C}$. To je zřejmé, i když je jeden z prvků x, y, z identický s a, i když jsou všecky $\neq a$.

Za druhé zjistíme snadno, že není nikdy současně $(x, y, z) \in \mathbf{C}$ i $(y, x, z) \in \mathbf{C}$.

Nechť *za třetí* není ani $(x, y, z) \in \mathbf{C}$ ani $(y, x, z) \in \mathbf{C}$. Zkoumajíce postupně případy $x = a$, $y = a$, $z = a$, $x \neq a \neq y \neq a \neq z$, nalezneme snadno, že není nikdy $x \neq y \neq z \neq x$.

Nechť *za čtvrté* $(x, y, z) \in \mathbf{C}$, $(x, z, u) \in \mathbf{C}$. Zkoumajíce postupně případy $x = a$, $y = a$, $z = a$, $u = a$, $x \neq a \neq y \neq a \neq z \neq a \neq u$, nalezneme pokaždé, že $(x, y, u) \in \mathbf{C}$.

5·3. Nechť P je cyklicky uspořádaná množina a nechť $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Označme $J(a, b)$ (určitěji $J_{\mathbf{C}}(a, b)$) a nazveme *intervalem* (cyklicky uspořádané) množiny P s *počátkem* a a *koncem* b množinu

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[(a, x, b) \in \mathbf{C}].$$

Je-li $x \in J(a, b)$, $y \in J(a, b)$, pak $a \neq x \neq b$, $a \neq y \neq b$, takže prvky x a y patří oba i do množiny $P - (a)$ i do množiny $P - (b)$. Je-li x před y vzhledem k uspořádání $\mathbf{U}(a)$ množiny $P - (a)$, je $(a, x, y) \in \mathbf{C}$; ježto také $(a, y, b) \in \mathbf{C}$, podle [5] je $(y, b, a) \in \mathbf{C}$, $(y, a, x) \in \mathbf{C}$, takže podle [4] je $(y, b, x) \in \mathbf{C}$, tedy podle [1] je $(b, x, y) \in \mathbf{C}$, t. j. x před y vzhledem k uspořádání $\mathbf{U}(b)$ množiny $P - (b)$. Obráceně, když je x před y vzhledem k uspořádání $\mathbf{U}(b)$ množiny $P - (b)$, je $(b, x, y) \in \mathbf{C}$; ježto také $(a, x, b) \in \mathbf{C}$, podle [5] je $(y, b, x) \in \mathbf{C}$, $(b, a, x) \in \mathbf{C}$, takže podle [8] je $(y, a, x) \in \mathbf{C}$, tedy podle [1] je $(a, x, y) \in \mathbf{C}$, t. j. x je před y vzhledem k uspořádání $\mathbf{U}(a)$ množiny $P - (a)$.

Tedy uspořádáním $\mathbf{U}(a)$ množiny $P - (a)$ i uspořádáním $\mathbf{U}(b)$

množiny $P - (b)$ je určeno stejné uspořádání množiny $J(a, b)$, které označíme $\mathsf{U}(a, b)$, určitěji $\mathsf{U}_{\mathsf{C}}(a, b)$.

Zřejmě

$$P = (a) + (b) + J(a, b) + J(b, a)$$

s disjunktními sčítanci. Obráceně:

5·3·1. *Nechť*

$$P = (a) + (b) + A + B$$

s disjunktními sčítanci, z nichž prvé dva obsahují po jediném prvku. Nechť množiny A a B jsou uspořádány. Pak existuje právě jedno cyklické uspořádání $\mathbf{C}$ množiny P takové, že: [1] $A = J(a, b)$, $B = J(b, a)$; [2] *daná uspořádání množin A a B jsou identická resp. s $\mathsf{U}_{\mathsf{C}}(a, b)$ a s $\mathsf{U}_{\mathsf{C}}(b, a)$.*

Důkaz. I. Nechť existuje hledané cyklické uspořádání $\mathbf{C}$. Jím je určeno uspořádání $\mathsf{U}(a)$ množiny $P - (a) = (b) + A + B$. Když $x \in A$, $y \in A$ nebo $x \in B$, $y \in B$, pak je x před y vzhledem k uspořádání $\mathsf{U}(a)$ tehdy a jen tehdy, když je x před y vzhledem k danému uspořádání množiny A, resp. B. Když $x \in A$, pak $(a, x, b) \in \mathbf{C}$, takže je x před b vzhledem k uspořádání $\mathsf{U}(a)$. Když $y \in B$, pak $(b, y, a) \in \mathbf{C}$, takže podle [5] je $(a, b, y) \in \mathbf{C}$, tedy je b před y vzhledem k uspořádání $\mathsf{U}(a)$. Když konečně $x \in A$, $y \in B$, jest $(a, x, b) \in \mathbf{C}$, $(b, y, a) \in \mathbf{C}$, tedy (podle [1]) $(a, x, b) \in \mathbf{C}$, $(a, b, y) \in \mathbf{C}$, tedy (podle [4]) $(a, x, y) \in \mathbf{C}$, tedy x je před y vzhledem k uspořádání $\mathsf{U}(a)$. Tedy je uspořádání $\mathsf{U}(a)$ množiny $P - (a)$ jednoznačně určeno.

II. Ke právě sestrojenému uspořádání množiny $P - (a)$ podle **5·2·1** existuje právě jedno cyklické uspořádání $\mathbf{C}$ množiny $P - (a)$ takové, že sestrojené uspořádání množiny $P - (a)$ je identické s $\mathsf{U}_{\mathsf{C}}(a)$. Je-li $x \in J(a, b)$, pak je $(a, x, b) \in \mathbf{C}$, tedy $x \in P - (a)$, a x je před b vzhledem k $\mathsf{U}(a)$, tedy $x \in A$; obráceně, když $x \in A$, je $x \in P - (a)$ a x je před b vzhledem k $\mathsf{U}(a)$, tedy $(a, x, b) \in \mathbf{C}$, t. j. $x \in J(a, b)$. Tedy $A = J(a, b)$ a podobně se dokáže, že $B = J(b, a)$. Dané uspořádání množiny A je částí uspořádání $\mathsf{U}(a)$ množiny $P - (a) \supset A$, tedy je identické s uspořádáním $\mathsf{U}(a, b)$. Podobně dané uspořádání množiny B je identické s $\mathsf{U}(b, a)$.

5·4. Nechť $\mathbf{C}$ je cyklické uspořádání množiny P. Definujme $\mathbf{C}^* \subset P \times P \times P$ takto:

$$(a, b, c) \in \mathbf{C}^* \Leftrightarrow (c, b, a) \in \mathbf{C}.$$

Pak $\mathbf{C}^*$ je cyklické uspořádání množiny P. Musíme zjistiti, že jsou splněny čtyři podmínky vyslovené na počátku odst. **5·1**:

I. Nechť $(a, b, c) \in \mathbf{C}^*$. Pak $(c, b, a) \in \mathbf{C}$, takže podle [5] jest $(a, c, b) \in \mathbf{C}$, tedy $(b, c, a) \in \mathbf{C}^*$.

II. Kdyby bylo současně $(a, b, c) \in \mathbf{C}^*$, $(b, a, c) \in \mathbf{C}^*$, bylo by současně $(c, b, a) \in \mathbf{C}$, $(c, a, b) \in \mathbf{C}$, což podle [5] je nemožné.

III. Není-li ani $(a, b, c) \in \mathbf{C}^*$ ani $(b, a, c) \in \mathbf{C}^*$, pak není ani

$(c, b, a) \in \mathbf{C}$ ani $(c, a, b) \in \mathbf{C}$, takže podle [5] není ani $(b, a, c) \in \mathbf{C}$, ani $(a, b, c) \in \mathbf{C}$, takže podle [2] není $a \neq b \neq c \neq a$.

IV. Je-li $(a, b, c) \in \mathbf{C}^*$, $(a, c, d) \in \mathbf{C}^*$, pak je $(d, c, a) \in \mathbf{C}$, $(c, b, a) \in \mathbf{C}$, takže podle [8] je $(d, b, a) \in \mathbf{C}$, t. j. $(a, b, d) \in \mathbf{C}^*$.

Cyklické uspořádání $\mathbf{C}^*$ se nazývá *inversní* k cyklickému uspořádání $\mathbf{C}$. Ovšem též naopak $\mathbf{C}$ je inversní k $\mathbf{C}^*$. Říkáme také, že jsou $\mathbf{C}$ a $\mathbf{C}^*$ *navzájem inversní.*

Je-li $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$, zřejmě

$$J_{\mathbf{C}^*}(a, b) = J_{\mathbf{C}}(b, a).$$

5·5. Nechť P je cyklicky uspořádaná množina. Když $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$, pak

$$J(a, b) + J(b, a) = P - [(a) + (b)], \; J(a, b) \,.\, J(b, a) = \emptyset.$$

5·5·1. *Když $c \in J(a, b)$, pak*

$$J(a, b) = (c) + J(a, c) + J(c, b)$$

s disjunktními sčítanci.

Důkaz. Nechť $x \in J(a, b)$, $x \neq c$. Ježto $c \in P - (a)$, $x \in P - (a)$, nastane právě jeden z obou případů: „x před c“ a „c před x“ vzhledem k uspořádání $\mathbf{U}(a)$ množiny $P - (a)$. Když je *předně* x před c, je $(a, x, c) \in \mathbf{C}$, t. j. $x \in J(a, c)$. Když je *za druhé* c před x, je $(a, c, x) \in \mathbf{C}$; ježto $x \in J(a, b)$, jest $(a, x, b) \in \mathbf{C}$. Podle [5] je $(x, b, a) \in \mathbf{C}$, $(x, a, c) \in \mathbf{C}$, takže podle [4] je $(x, b, c) \in \mathbf{C}$, tedy podle [5] je $(c, x, b) \in \mathbf{C}$, t. j. $x \in J(c, b)$. Tím je dokázáno, že

$$J(a, b) = (c) + J(a, b) \,.\, J(a, c) + J(a, b) \,.\, J(c, b)$$

s disjunktními sčítanci.*) Zbývá dokázati, že $J(a, c) + J(c, b) \subset J(a, b)$. Když *předně* $x \in J(a, c)$, je $(a, x, c) \in \mathbf{C}$; ježto $c \in J(a, b)$, je $(a, c, b) \in \mathbf{C}$; tedy podle [4] je $(a, x, b) \in \mathbf{C}$, t. j. $x \in J(a, b)$. Když *za druhé* $x \in J(c, b)$, je $(c, x, b) \in \mathbf{C}$. Ježto $(a, c, b) \in \mathbf{C}$, $(c, x, b) \in \mathbf{C}$, podle [8] je $(a, x, b) \in \mathbf{C}$, t. j. $x \in J(a, b)$.

Obráceně platí:

5·5·2. *Nechť množina P má aspoň tři různé prvky. Nechť každému páru (a, b) mezi sebou různých prvků množiny P jsou přiřazeny dvě podmnožiny A a B množiny P tak, že*

$$A + B = P - [(a) + (b)], \; AB = \emptyset.$$

Páru (b, a) nechť jsou přiřazeny stejné podmnožiny A a B jako páru (a, b). Jsou-li množiny A a B přiřazeny páru (a, b) a je-li $c \in A$ (tedy $a \neq c \neq b$), pak nechť jedna z obou podmnožin přiřazených páru (a, c) (označme ji C_1)

*) Kdyby totiž existovalo x takové, že $x \in J(a, c) \,.\, J(c, b)$, bylo by (podle [1] a [8]) $(a, x, c) \in \mathbf{C}$, $(c, x, b) \in \mathbf{C} \Rightarrow (a, x, c) \in \mathbf{C}$, $(x, b, c) \in \mathbf{C} \Rightarrow$ $\Rightarrow (a, b, c) \in \mathbf{C} \Rightarrow (c, a, b) \in \mathbf{C}$, což je podle [2] ve sporu s $c \in J(a, b)$, t. j. s $(a, c, b) \in \mathbf{C}$.

a jedna z obou podmnožin přiřazených páru (c, b) *(označme ji* C_2*) jsou takové, že*

$$A = (c) + C_1 + C_2$$

s disjunktními sčítanci. Pak existují právě dvě cyklická uspořádání $\mathbf{C}$ *množiny* P *taková, že pro každý pár* (a, b) $(a \neq b)$ *obě množiny tomuto páru přiřazené jsou identické s množinami* $J(a, b)$, $J(b, a)$. *Obě tato cyklická uspořádání množiny* P *jsou navzájem inversní.*

Důkaz. I. Zvolme pevně $a \in P$, $b \in P$ a označme A a B obě množiny přiřazené páru (a, b). Stačí ukázati, že existuje právě jedno cyklické uspořádání $\mathbf{C}$ množiny P vyhovující hořejším podmínkám a takové, že

$$A = J_{\mathbf{C}}(a, b). \tag{1}$$

Neboť z téhož důvodu existuje právě jedno cyklické uspořádání $\mathbf{C}'$ množiny P vyhovující hořejším podmínkám a takové, že

$$A = J_{\mathbf{C}'}(b, a). \tag{2}$$

Mimo to každé cyklické uspořádání množiny P vyhovující hořejším podmínkám splňuje zřejmě právě jednu z podmínek (1), (2); a když $\mathbf{C}$ vyhovuje hořejším podmínkám a podmínce (1), zřejmě inversní cyklické uspořádání $\mathbf{C}^*$ vyhovuje hořejším podmínkám a podmínce (2), takže $\mathbf{C}' = \mathbf{C}^*$.

II. Když $x \in A$, pak jedna z obou množin přiřazených páru (a, x) — označme ji $F_1(x)$ — a jedna z obou množin přiřazených páru (b, x) — označme ji $F_2(x)$ — jsou takové, že

$$A = (x) + F_1(x) + F_2(x) \text{ s disjunktními sčítanci.} \tag{3}$$

Druhá z obou množin přiřazených páru (a, x) je pak

$$G_1(x) = P - [(a) + (x) + F_1(x)];$$

ježto $b \in P - A$, podle (3) je $b \in G_1(x)$. Druhá z obou množin přiřazených páru (b, x) je

$$G_2(x) = P - [(b) + (x) + F_2(x)];$$

ježto $a \in P - A$, podle (3) je $a \in G_2(x)$. Ježto ani a ani b nepatří do množiny A, relace (3) se stane nesprávnou, když za $F_1(x)$ dáme $G_1(x)$ i když za $F_2(x)$ dáme $G_2(x)$. Tedy jsou množiny $F_1(x)$ a $F_2(x)$ určeny jednoznačně.

Když $x \in B$, pak jedna z obou množin přiřazených páru (a, x) — označme ji $F_1(x)$ — a jedna z obou množin přiřazených páru (b, x) — označme ji $F_2(x)$ — jsou takové, že

$$B = (x) + F_1(x) + F_2(x) \text{ s disjunktními sčítanci.} \tag{4}$$

Opět jsou $F_1(x)$ a $F_2(x)$ jednoznačně určeny.

III. Nechť $x \in A$, $y \in A$, $x \neq y$. Podle (3) nastane právě jeden z obou případů $y \in F_1(x)$, $y \in F_2(x)$. Nechť *předně* $y \in F_1(x)$. Podle předpokladu je

$$F_1(x) = (y) + H_1(y) + H_2(y),$$

kde $H_1(y)$ je buďto $= F_1(y)$ nebo $= G_1(y)$ a $H_2(y)$ je jedna z obou množin přiřazených páru (x, y). Ježto $b \in G_1(y)$, $b \in P - F_1(x)$, je $H_1(y) = F_1(y)$, tedy

$$x \in A,\ y \in F_1(x) \Rightarrow (y) + F_1(y) \subset F_1(x). \tag{5}$$

Nechť *za druhé* $y \in F_2(x)$. Podle předpokladu je

$$F_2(x) = (y) + K_1(y) + K_2(y),$$

kde $K_1(y)$ je jedna z obou množin přiřazených páru (x, y) a $K_2(y)$ je buďto $= F_2(y)$ nebo $= G_2(y)$. Ježto $a \in G_2(y)$, $a \in P - F_2(x)$, je $K_2(y) = F_2(y)$, tedy $F_2(x) \supset (y) + F_2(y)$. Podle relace (3), která platí i pro x i pro y, následuje, že

$$x \in A,\ y \in F_2(x) \Rightarrow (x) + F_1(x) \subset F_1(y). \tag{6}$$

Z relací (3), (5), (6) následuje, že pro $x \in A$, $y \in A$ platí právě jedna ze tří relací $x = y$, $(x) + F_1(x) \subset F_1(y)$, $(y) + F_1(y) \subset F_1(x)$. Pro $x \in A$, $y \in A$ nechť „x před y" znamená, že $(x) + F_1(x) \subset F_1(y)$. Snadno se přesvědčíme, že je tím definováno uspořádání množiny A, které označíme V_1. Stejně se dokáže, že existuje uspořádání V_2 množiny B, ve kterém: x před $y \Leftrightarrow x \neq y$, $F_1(x) \supset F_1(y)$.

IV. Nechť existuje hledané cyklické uspořádání $\mathbf{C}$ množiny P. Jest $A = J(a, b)$, takže $\mathbf{C}$ určuje (v. odst. **5·3**) uspořádání $\mathbf{U}(a, b)$ množiny A. Když $x \in A$, je $F_1(x) = J(a, x)$ nebo $G_1(x) = J(a, x)$. Ježto $b \in G_1(x)$, bylo by ve druhém případě $b \in J(a, x)$, t. j. $(a, b, x) \in \mathbf{C}$; to je však podle [5] nemožné, neboť $x \in J(a, b)$, t. j. $(a, x, b) \in \mathbf{C}$. Tedy $x \in A \Rightarrow F_1(x) = J(a, x)$. Nechť $x \in A$, $y \in A$. Je-li *předně* x před y vzhledem k uspořádání V_1, pak $(x) + F_1(x) \subset F_1(y)$, tedy $x \in F_1(y) = J(a, y)$, tedy $(a, x, y) \in \mathbf{C}$, tedy je x před y vzhledem k uspořádání $\mathbf{U}(a, b)$. Je-li *za druhé* x před y vzhledem k uspořádání $\mathbf{U}(a, b)$, pak je $(a, x, y) \in \mathbf{C}$, tedy $x \in J(a, y) = F_1(y)$, takže podle (5) je $(x) + F_1(x) \subset F_1(y)$, tedy je x před y vzhledem k uspořádání V_1. Tedy obě uspořádání V_1 a $\mathbf{U}(a, b)$ množiny $A = J(a, b)$ jsou stejná. Stejně se dokáže, že obě uspořádání V_2 a $\mathbf{U}(b, a)$ množiny $B = J(b, a)$ jsou stejná. Tedy podle **5·3** cyklické uspořádání $\mathbf{C}$ je jednoznačně stanoveno.

V. Zbývá ukázati, že cyklické uspořádání $\mathbf{C}$ množiny $P = (a) + (b) + A + B$, určené podle **5·3·1** podmínkami $A = J(a, b)$, $B = J(b, a)$, $V_1 = \mathbf{U}(a, b)$, $V_2 = \mathbf{U}(b, a)$, má tu vlastnost, že pro každý pár (x, y), kde $x \in P$, $y \in P$, $x \neq y$, obě množiny přiřazené páru (x, y) jsou $J(x, y)$ a $J(y, x)$. *Předně*: pro pár (a, b) je to zřejmé. *Za druhé* vyšetřujme pár (a, x), kde $x \in A$. $J(a, x)$ je množina všech $y \in J(a, b)$, pro které je y před x vzhledem k uspořádání $\mathbf{U}(a, b)$. $F_1(x)$ je množina všech $y \in A$, pro které je y před x vzhledem k uspořádání V_1.

Ježto $A = J(a, b)$, $V_1 = \mathbf{U}(a, b)$, je $J(a, x) = F_1(x)$. Ježto $P = (a) + (x) + J(a, x) + J(x, a) = (a) + (x) + F_1(x) + G_1(x)$ s disjunktními sčítanci, je $J(x, a) = G_1(x)$. *Třetí* případ páru (b, x), kde $x \in A$, jakož i *čtvrtý* a *pátý* případ páru (a, x), resp. (b, x), kde $x \in B$, vyšetří se stejně jako případ druhý. Vyšetřujme *šestý* případ páru (x, y), kde $x \in A$, $y \in B$. Nechť C_1 a C_2 jsou obě množiny přiřazené páru (x, y). Ježto $P = (x) + (y) + C_1 + C_2$ s disjunktními sčítanci, mohu předpokládati, že $a \in C_1$. Podle předpokladu je $C_1 = (a) + H + K$ s disjunktními sčítanci, kde je H jedna z obou množin přiřazených páru (a, x) a K je jedna z obou množin přiřazených páru (a, y). Je buďto $H = F_1(x)$ nebo $H = G_1(x)$. Je buďto $K = F_1(y)$ nebo $K = G_1(y)$. Ježto $y \in B \subset G_1(x)$, $x \in A \subset G_1(y)$ a ježto ani x ani y nepatří do C_1, je $H = F_1(x)$, $K = F_1(y)$, tedy $C_1 = (a) + F_1(x) + F_1(y) = (a) + J(a, x) + J(y, a)$. Ježto $x \in A = J(a, b)$, $y \in B = J(b, a)$, je $(a, x, b) \in \mathbf{C}$, $(b, y, a) \in \mathbf{C}$, tedy podle [5] je $(a, b, y) \in \mathbf{C}$, takže podle [4] je $(a, x, y) \in \mathbf{C}$, tedy podle [5] je $(y, a, x) \in \mathbf{C}$, tedy $a \in J(y, x)$, takže $(a) + J(y, a) + J(a, x) = J(x, y)$, tedy $C_1 = J(x, y)$. Ježto $P = (x) + (y) + C_1 + C_2 = (x) + (y) + J(x, y) + J(y, x)$ s disjunktními sčítanci, je $C_2 = J(y, x)$. Zbývá případ páru (x, y), kde buďto $(x) + (y) \subset A$ nebo $(x) + (y) \subset B$. Pro určitost nechť $(x) + (y) \subset A$. Jako ve III rozeznávejme dva podpřípady: $y \in F_1(x)$, $y \in F_2(x)$. Když $y \in F_1(x)$, viděli jsme ve III, že $F_1(x) = (y) + F_1(y) + H_2(y)$ s disjunktními sčítanci, kde $H_2(y)$ je jedna z obou množin přiřazených páru (x, y). Jest $F_1(x) = J(a, x)$, $F_1(y) = J(a, y)$, $y \in F_1(x)$, takže $J(a, x) = (y) + J(a, y) + H_2(y)$ s disjunktními sčítanci, takže podle **5·5·I** je $H_2(y) = J(y, x)$; druhá množina přiřazená páru (x, y) je ovšem $P - [(x) + (y) + H_2(y)] = P - [(x) + (y) + J(y, x)] = J(x, y)$. Když $y \in F_2(x)$, pak podle III je $F_2(x) = (y) + F_2(y) + K_1(y)$, kde $K_1(y)$ je jedna z obou množin přiřazených páru (x, y). Jest $F_2(x) = J(x, b)$, $F_2(y) = J(y, b)$, $y \in F_2(x)$, takže $J(x, b) = (y) + J(y, b) + K_1(y)$ s disjunktními sčítanci, takže podle **5·5·I** je $K_1(y) = J(x, y)$; druhá množina přiřazená páru (x, y) je ovšem $P - [(x) + (y) + K_1(y)] = P - [(x) + (y) + J(x, y)] = J(y, x)$.

Cvičení.

5·1. Konečná množina o $n > 0$ prvcích má $(n - 1)!$ cyklických uspořádání. Všecka tato cyklická uspořádání jsou mezi sebou podobná, definujeme-li podobnost cyklických uspořádání obdobně k podobnosti uspořádání definované ve **4·2**.

5·2. Množina všech možných cyklických uspořádání množiny všech přirozených čísel je nespočetná.

5·3. Nechť $\mathbf{C}$ je cyklické uspořádání množiny P. Pro $n = 3, 4, 5, \ldots$ definujme rekurentně podmnožinu $\mathbf{C}_n$ kartézského součinu n faktorů vesměs rovných P, a to takto: [1] $\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}$, [2] $\mathbf{C}_{n+1}$ je množina těch $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$, pro které platí i $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}_n$ i $(a_1, a_n, a_{n+1}) \in \mathbf{C}$. Je-li $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}_n$ a je-li $1 \leqq i < j < k \leqq n$, jest $(a_i, a_j, a_k) \in \mathbf{C}$.

5·4. Nechť P je cyklicky uspořádaná množina. Nechť pro $a \in P$,

$b \in P$, $a \neq b$ vždycky je $J(a, b) \neq \emptyset$. Pak všecky množiny $J(a, b)$ jsou nekonečné.

5·5. Nechť K je množina všech komplexních čísel $x + iy$ takových, že $x^2 + y^2 = 1$. Nechť $Im(x + iy)$ znamená y. Když $\alpha \in K$, $\beta \in K$, $\gamma \in K$, pak nechť $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{C}$ znamená, že $\beta \neq \gamma$ a že $Im \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \beta} > 0$. Pak $\mathbf{C}$ je cyklické uspořádání množiny K.

KAPITOLA II.

Obecné metrické prostory.

§6. Vzdálenost.

6·1. Nechť P je daná množina. Nechť ϱ je konečná funkce v oboru $P \times P$ taková, že

[1] $\varrho(x, x) = 0$; $x \neq y \Rightarrow \varrho(x, y) > 0$;

[2] $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$;

[3] $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geqq \varrho(x, z)$.

Pak pravíme, že ϱ je *metrika* v P. Množina P se nazývá *metrický prostor* (*metrischer Raum, espace métrique* neboli *espace distancié, metric space*), když byla určitým způsobem zvolena metrika ϱ v P; prvky metrického prostoru se nazývají zpravidla *body* (*Punkt, point, point*); jsou-li a, b dva body, pak jejich *vzdáleností* (*Entfernung, distance, distance*) rozumíme číslo $\varrho(a, b)$.

Metrický prostor P s metrikou ϱ označíme někdy určitěji (P, ϱ), zejména při srovnávání dvou různých metrik v témž P. Písmena P a ϱ budou v celé knize obyčejně znamenati metrický prostor a jeho metriku.

Množina $\mathbf{E}_1$ všech reálných čísel je metrický prostor, definujeme-li $\varrho(x, y) = |x - y|$. V dalším všude, kde není opak výslovně uveden, $\mathbf{E}_1$ znamená metrický prostor s právě zvolenou metrikou.

Obecněji označíme $\mathbf{E}_m$ a nazveme *m-rozměrným euklidovským prostorem* množinu $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_1 \times \ldots \times \mathbf{E}_1$ (s m faktory), ve které zvolíme metriku ϱ tak, že pro $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ položíme

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}. \ *)$$

Je zřejmé, že sestrojená funkce ϱ má vlastnosti [1] a [2]. Vlastnost

---

*) Když a je nezáporné reálné číslo, pak znamená $\sqrt{a}$ stále to *nezáporné* číslo b, pro které platí $b^2 = a$.