Die Chronologie in ihrem ganzem Umfange, mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Unwendung in der Astronomie, Weltgeschichte und Urkundenlehre

Allgemeine Chronologie

In: Wilhelm Matzka (author): Die Chronologie in ihrem ganzem Umfange, mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Unwendung in der Astronomie, Weltgeschichte und Urkundenlehre. (German). Wien: Fr. Beck'schen Universitätsbuchhandlung, 1844. pp. [66]--112.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400376

Erste Abtheilung.

Allgemeine Chronologie.

2.

Zeitmessung und Zeitmaße.

Das Erforschen der Verhältnisse gleichartiger Größen zu einer bestimmten Größe dieser Art überhaupt, heißt das Messen dieser Größen durch diese eine bestimmte, welche man die Meßeinheit oder das Maß nennt. Das Messen der Zeiträume oder der Zeitgrößen wird die Zeitmessung, oder in so fern dabei die Zeitgrößen auf Zahlen zurückgeführt, durch Zahlen (ihre Zahlwerthe) dargestellt werden, Zeitrechnung genannt; und die dabei verwendete Einheit die Zeiteinheit oder das Zeitmaß.

Jedes Zeitmaß muß, gleich jedem anderen Maße, von bestimmter unwandelbarer Größe und hinreichend bekannt sein. Dazu eignen sich theils natürliche, durch wiederkehrende Erscheinungen am Himmel begrenzte Zeiträume; theils künstliche, an den durch Kunst hervorgebrachten Bewegungen unterscheidbare, Zeitabschnitte.

Von den natürlichen Zeiträumen ist allein die Zeit des scheinbaren Umlaufs der Firsterne, oder eigentlich die Zeit eines Umschwungs der Erde, Sterntag genannt, von stets gleicher Dauer, jedoch nur ein astronomisches, d. h. lediglich für den Astronomen brauchbares, Zeitmaß. Als bürgerliche, d. i. im bürgerlichen Leben verwendbare, Zeitmaße lassen sich blos die scheinbaren Umlaufzeiten der Sonne und des Mondes, welche Tag, Monat und Jahr genannt werden, obschon ihre Dauer einigermaßen schwankt, verwenden; weil diese Gestirne auf das Werden und Sein der belebten Welt so mächtig einwirken.

Künstliche Zeiträume, vorzüglich zur Messung von Theilen des Tages geeignet, sind die Stunden, Minuten, Secunden und Terzen, welche wir in der Zeit durch Vorrichtungen oder Werkzeuge willkürlich ausscheiden, die eine gleichförmige, meistens schwingende oder umdrehende, Bewegung unterhalten, wie Pendel und die mannigfaltigen Uhren, als Wasser- und Sanduhren, Sonnenuhren, Räderuhren, u. m. dgl.

3.
Der Tag.

Der Zeitraum, welcher sich dem Menschen am auffallendsten zu einem Zeitmaße anbietet, ist die Dauer eines scheinbaren Umlaufes der Sonne um die Erde, eigentlich die Zeit von einer bestimmten Stellung des, mit der Erde um die Achse derselben sich drehenden, Horizonts und Meridians gegen die fest stehende Sonne bis zur nächsten parallelen oder eben solchen Stellung. Er wird gewöhnlich Tag, bestimmter jedoch bürgerlicher oder Sonnentag genannt, und durch den Auf- und Untergang der Sonne in zwei Theile von sehr veränderlicher Dauer abgetheilt; von denen derjenige, während dessen die Sonne über dem Horizonte sich befindet, gleichfalls Tag, bezeichnender aber natürlicher Tag, der andere Nacht genannt wird.

Die Zeiten der abwechselnden Durchgänge des Horizonts und Meridians durch die Sonne heißen Morgen, Mittag, Abend und Mitternacht, zusammen die vier Tagszeiten, und dienen im bürgerlichen Leben zu einer sehr üblichen ungefähren Abtheilung des Tages.

Ursprünglich theilte man sowohl den natürlichen Tag, als auch die Nacht, troz ihrer wandelbaren Länge, in 12 gleiche Stunden; später wurde es allgemeine Sitte, den ganzen bürgerlichen Tag in 24 gleiche Stunden zu theilen, welche entweder, wie jezt gewöhnlich, in zwei Absäzen bis auf 12, oder von den Astronomen, Italiänern und Juden ununterbrochen bis 24 gezählt werden. Die Stunde pflegt man in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden, die Secunde aber entweder zehntheilig, oder noch ferner nach einem älteren Gebrauche in 60 Terzen zu 60 Quarten u. s. f. zu theilen.

Den Anfang des Tages verlegt man auf eine der vier Tagszeiten. Mit dem Morgen oder Sonnenaufgang den Tag anzufangen, wie die Babylonier thaten, ist jezt ganz ungebräuchlich. Abends oder bei Sonnenuntergang fangen ihn, wie ehedem die Griechen und die semitischen Völker, gegenwärtig noch die Italiäner, Juden und Mohammedaner an. Beide Tagesanfänge sind von dem Uebelstande begleitet, daß die übrigen Tageszeiten nicht immer auf einerlei Tagesstunden treffen. Ganz unbrauchbar im bürgerlichen Leben, und darum auch nie von einem Volke versucht, ist der Anfang des Tages mit dem Mittage, der oberen Culmination der Sonne; weil dadurch der eigentliche oder natürliche Tag, während dessen die Menschen am thätigsten im gegenseitigen Verkehre stehen, zur höchsten Unbequemlichkeit in der Zählung der Tage in zwei bürgerliche Tage vertheilt würde. Blos die Mehrzahl der Astronomen fängt ihn noch damit an, weil die obere Culmination der Sonne sich bequem und genau beobachten läßt; doch war dieser Grund nie von besonderer, und ist jezt, wo man scharfe Zeitbestimmungen meistens durch Fixstern-Beobachtungen ausführt, von gar keiner Erheblichkeit. Somit bleibt als einziger zweckmäßiger, und deswegen auch gegenwärtig bei allen gebildeten Völkern üblicher Tagesanfang die Mitternacht oder die untere Culmination der Sonne, die Mitte der Ruhezeit der bürgerlichen Geschäfte.

4.

Der synodische Mondmonat.

Das nächst größere natürliche Zeitmaß, welches die Menschen frühzeitig benüzten, ist die Zeit von einem Neumond oder Neulicht des Mondes, (von den Griechen νουμηνία genannt) dem Erscheinen der Mondsichel am Abendhimmel, bis zum anderen, der synodische Mondmonat. Seine Dauer ist im Durchschnitte nur wenig größer als $29\frac{1}{2}$ Tag; weswegen man in der bürgerlichen Zeitrechnung, wo blos volle Tage gerechnet werden können, zwei oder ein Paar nach einander folgende Mondmonate gewöhnlich zu 59 Tagen, den einen voll zu 30, den anderen hohl zu 29 Tagen zählt, und zuweilen einen hohlen 29tägigen Mondmonat zu einem vollen 30tägigen ergänzt.

Gegenwärtig begrenzen die Astronomen den synodischen Mondmonat schärfer durch zwei unmittelbar nach einander folgende Conjunctionen des Mondes mit der Sonne, worunter man die Zeitpunkte der Gleichheit der geocentrischen Längen dieser Gestirne versteht. Eine solche Conjunction auch Neumond zu nennen, was häufig geschieht, soll hier vermieden werden.

5.

Die Woche.

Der Mondmonat zerfällt durch die vier Hauptlichtgestalten (Phasen) des Mondes — Neumond, erstes Viertel, Vollmond, letztes Viertel — in vier Zeitabschnitte im Mittel von $7\frac{1}{3}$ Tagen.

Darum benüzt man im bürgerlichen Verkehre, seit uralten Zeiten, einen siebentägigen Zeitraum, unter der Benennung Woche, zur Abzählung mäßig großer Anzahlen von Tagen; wobei man die Wochentage theils wie gewöhnlich zählt, theils mit besonderen Namen belegt.

6.

Das Jahr.

Die Menschen wurden sehr früh veranlaßt, auf den Wechsel und die Wiederkehr derselben allgemeinen Witterungsverhältnisse aufzumerken, nach denen sie die Zustände der Pflanzen- und Thierwelt, und damit auch ihre eigenen Verrichtungen, besonders die auf Verschaffung der Nahrung zielenden, allmälig sich ändern und erneuern sahen. Der Zeitraum, während dessen die allgemeinen Verhältnisse der Witterung wiederkehren, Jahr genannt, wurde von ihnen bald als ein zur Messung langer Zeitstrecken geeignetes Maß erkannt.

In den gemäßigten Himmelsstrichen unterschied man darin noch hauptsächlich die Zeitabschnitte der beiden Extreme von Wärme, der Hize und Kälte, nebst den zwei dazwischen fallenden Uebergangszeiten mit gemäßigter Wärme, die vier Jahrszeiten, die wir Sommer, Herbst, Winter und Frühling nennen. Die Ausmittlung der Dauer des Jahres in Tagen und Theilen des Tages ward jedoch nur sehr allmälig zu Stande gebracht.

7.
Das Mondjahr.

Anfangs genügte die Wahrnehmung, daß das Jahr ungefähr 12, oder 6 Paar, synodische Mondmonate halte, und so bildete sich das Mondjahr von 354 Tagen.

8.
Das Sonnenjahr.

Als jedoch später der geregelte Betrieb des Ackerbaues, der Jagd und Fischerei eine genauere Kenntniß der Zeit der Erneuerung der Witterungsverhältnisse forderte, und man merkte, daß dieselben hauptsächlich durch die Dauer der Anwesenheit und den täglichen höchsten Stand der Sonne über dem Horizonte bedingt werde; betrachtete man eifrig diejenigen Fixsterne, zwischen denen die Sonne nach und nach erscheint, von welchen jene, denen sie sich nähert, am Abendhimmel bald hinter der Sonne untergehen, diejenigen dagegen, von denen sie sich entfernt, am Morgenhimmel kurz vor ihr aufgehen; und so überzeugte man sich, daß das Jahr die Zeit sei, in welcher die stets wechselnden scheinbaren Stellungen der Sonne gegen die Fixsterne sich wiederholen, oder die Sonne am Fixsternhimmel von Westen nach Osten in einem Kreise herum zu laufen scheint. Dies gab das Sonnenjahr, welches man Anfangs 365 Tage lang, und später noch um etwa einen Vierteltag länger fand. Endlich lehrten schärfere astronomische Beobachtungen, daß das Jahr, welches die Wiederkehr der Längen der natürlichen Sonnentage und der allgemeinen Witterungsverhältnisse bedingt, die Zeit ist, in der die Sonne zu dem Punkte ihrer scheinbaren Bahn zurückkehrt, von dem sie ausging, z. B. zu einem der Wendepunkte — τροπαι — eigentlich die Zeit, in welcher die Erde bei ihrer Bewegung um die Sonne dieselbe heliocentrische Länge wieder erreicht; wodurch man es als das tropische Sonnenjahr anerkannte. Zugleich führte man anstatt der physischen Jahrszeiten, die keiner allgemeinen Bestimmung fähig sind, astronomische ein, deren Eintritte die vier Jahrpunkte, und der Reihe nach Frühlingsnachtgleiche, Sommer-Sonnenwende, Herbstnachtgleiche und Winter-Sonnenwende heißen, und die abwechselnden Durchgänge des Erdäquators und des Colurs der Solstitien — der durch die Erdachse auf der

Ebene der Erdbahn senkrechten Ebene — durch den Mittelpunkt der Sonne sind; indem namentlich die Durchgänge des Aequators die beiden Tag- und Nachtgleichen (Aequinoctien), die Durchgänge des Colurs aber die beiden Sonnenstillstände (Solstitien) oder Sonnenwenden bewirken.

Das Sonnenjahr läßt man wohl gewöhnlich in der Nähe eines Jahrpunktes, aber auch sonst noch mit höchst verschiedenen Zeitpunkten anfangen.

9.

Der Sonnenmonat.

Die Gewohnheit, das Jahr aus 12 Mondmonaten bestehend anzunehmen, mag vielleicht die nächste Ursache gewesen sein, daß man auch das Sonnenjahr in 12 Sonnenmonate abtheilt; welche demnach in der bürgerlichen Zeitrechnung entweder theils 30, theils 31 Tage erhalten, oder ganz gleich lang zu 30 Tagen gemacht, und die noch übrigen Tage als Ergänzungstage angehängt werden.

Die Monate, aus denen die Jahre bestehen, pflegt man fast immer mit besonderen Namen zu belegen, selten zu zählen. Die Tage der Monate dagegen werden, wenigstens jezt überall, vom ersten bis zum lezten gezählt; sonst kömmt aber auch theils die Benennung aller Monatstage, theils die Benennung einzelner und damit verbundene Zählung der dazwischen fallenden vor.

10.

Der Sterntag.

Die bisher aufgeführten Zeitmaße leiden an dem gemeinschaftlichen Fehler, daß ihre Dauer, wenn gleich zwischen nicht sehr weiten Grenzen schwankt; weswegen sie zwar zu dem im bürgerlichen Verkehre vorkommenden, keine volle Genauigkeit fordernden Zeitrechnungen, keineswegs aber zu scharfen astronomischen Zeitbestimmungen geeignet sind. Darum ist es sehr erwünscht, an der mit dem Namen Sterntag belegten Zeit der Umdrehung der Erde um ihre Achse, oder der Zeit von einer Culmination eines Fixsterns zur nächsten, ein Zeitmaß von stets gleich bleibender Dauer zu besizen, um damit die Längen der veränderlichen Zeitmaße sowohl einzeln, als im Mittel bestimmen, und mit Hilfe der Rechnung zu völlig genauen Zeitmessungen verwenden zu können.

Man theilt den Sterntag, eben so wie den Sonnentag, in 24 Stunden zu 60 Minuten von je 60 Secunden, und läßt ihn mit der oberen Culmination des Frühlingspunktes anfangen. Dazu benüzt man eigens eingerichtete Pendeluhren, welche Sternuhren heißen und die jedesmalige Sternzeit zeigen.

11.

Mittlerer Sonnentag.

Obschon die Sonnentage von verschiedener Dauer sind, so läßt sich doch ihr arithmetisches Mittel denken, indem man einen durch zwei sehr weit von einander entfernte Culminationen der Sonne begrenzten Zeitraum in so viele gleiche Zeiträume, als dazwischen Sonnentage verflossen sind, abgetheilt sich vorstellt; wornach jeder dieser gleichen Zeiträume jenes Mittel der Sonnentage ist und ein **mittlerer Sonnentag**, daher ein eigentlicher zur Unterscheidung ein **wahrer Sonnentag** genannt wird. Dieser mittlere Tag wird eben so wie der wahre eingetheilt. In Sternzeit wird man seine Dauer ausgedrückt erhalten, sobald man den von den beiden Culminationen der Sonne begrenzten Zeitraum in Sternzeit bekannt hat; oder auch aus der in Sternzeit bekannten Länge des tropischen Sonnnenjahrs auf folgende Weise.

Man denke sich die Ebene des Mittelpunktes der fest stehenden Sonne und der Umdrehungsachse der die Sonne umkreisenden Erde, die so genannte **Declinations-** oder **Stundenebene** der Sonne; und stelle sich vor, ein angewiesener oberer Meridian gehe durch die Sonne, oder die Sonne culminire in ihm. Beide Ebenen fallen demnach in diesem Augenblicke in eine zusammen, welche als ihre gemeinschaftliche ursprüngliche Lage in Gedanken fixirt sein soll. Es sei ferner die jährliche Präcession der Nachtgleichen im Aequator $= p$ Grad, so durchläuft die Stundenebene der Sonne von ihrer ursprüngliche Lage aus, während eines tropischen Umlaufs der Erde, bis sie wieder dieselbe heliocentrische Länge erreicht, z. B. zu der ihr um p Grad entgegen kommenden Frühlings-Nachtgleichenlinie zurückkehrt, $360 - p$ Grad; daher, wenn das tropische Jahr λ Sterntage währt, ist die mittlere Bewegung c der Stundenebene in einem Sterntage $c = (360 - p) : \lambda$ Grad. — Wenn nun die Erde auf ihrer Bahn von einer Culmination der Sonne an, wo Meridian und Stundenebene zusammenfallen, einen Umschwung um ihre Achse vollendet hat, also ein Sterntag beendigt ist; so hat der Meridian sich einmal ganz umgekehrt, ist nemlich zu der bei der Culmination inne gehabten Lage parallel geworden, und hat sonach 360 Grad durchstreift; die Stundenebene dagegen nur c Grad. Allein der Meridian hat die Stundenebene noch nicht erreicht, sondern er wird erst dann in sie fallen, wenn die Stundenebene die in einem mittleren Sonnentage zu durchlegenden C Grad, folglich er selbst, über die 360 Grade, noch einen gleichen Winkel von C Graden, also im ganzen mittleren Sonnentage $360 + C$ Grad durchstreift haben wird. Wegen der Gleichförmigkeit der Bewegungen beider Ebenen sind nun die zurückgelegten Wege der einen jenen der anderen und auch den darauf verwendeten Zeiten proportional, nemlich

$$\text{mittlerer Sonnentag : Sterntag} = \frac{C}{c} = \frac{360+c}{360}, \text{ also} = \frac{360}{360-c},$$
$$= 1 : 1 - \frac{c}{360} = \lambda : \lambda - \frac{\lambda c}{360} \text{ oder}$$
$$= \lambda : \lambda - 1 + \frac{p}{360}.$$

Vernachlässigt man die etwa 50 Sec. betragende jährliche Präcession p, so ist

$$\text{mittl. Sonnentag : Sterntag} = \lambda : \lambda - 1,$$

folglich

$$\text{trop. Jahr} = \lambda \text{ Sterntage} = \lambda - 1 \text{ mittl. Sonnentage},$$

d. h. das tropische Jahr hält (höchst nahe) um einen Sterntag mehr als mittlere Sonnentage.

Nimmt man nun mit Lalande das tropische Jahr = 366 T. 5 St. 48′ 48″ Sternzeit, also $\lambda = 366\frac{109}{450}$, so findet man

$$\text{mittl. Sonnentag : Sterntag} = 329618 : 328718 = 1{\cdot}002738 : 1$$
$$= 1 : 0{\cdot}997269$$

also ist mittlerer Sonnentag = 24 St. 3′ 56·″5 Sternzeit
und Sterntag = 23 St. 56′ 4·″1 des mittl. Tages.

Die mittlere tägliche Bewegung c der Stundenebene der Sonne, daher auch die Dauer des mittleren Sonnentags ist übrigens, wie Theorie und Beobachtung begründen, von unveränderlicher Dauer.

12.
Wahre und mittlere Sonnenzeit.

Ist eine Uhr so eingerichtet, daß sie zur Mitternacht, d. i. bei dem Durchgange des unteren Meridians durch die Sonne, jedes Mal 0 oder 24, und zu Mittag 12 Uhr zeigt, zugleich von einer Mitternacht zur nächsten gleichförmig geht; so gibt sie die wahre Sonnenzeit an. Solche Uhren sind, wenigstens bei Sonnenschein, die Sonnenuhren; mechanische Uhren von gleichförmigem Gange würden entweder öfteres Richtigstellen oder eine besonders künstliche Einrichtung fordern, daher läßt man sie nicht nach wahrer Zeit gehen.

Eine Uhr dagegen, welche gleichförmig gehend während eines Sterntags 23 Stunden 56′ 4·″1 zählt, dabei in den beiden Nachtgleichen genau wahre Sonnenzeit angibt, zeigt die mittlere Sonnenzeit oder bürgerliche Zeit. Solche Uhren sind alle unsere gut geregelten mechanischen Uhren; und diese mittlere Zeit ist immer gemeint, wenn keine weitere Unterscheidung beigesezt wird. Der jedesmalige Unterschied der wahren und mittleren Zeit heißt die Zeitgleichung.

Zur Versinnlichung kann man sich mit den Astronomen eine so genannte mittlere Sonne, nemlich einen Punkt einbilden, welcher sich in einer auf der Erdachse senkrechten und mit ihr nur parallel zu sich selbst fortrückenden, aber nicht mit der Erde sich umdrehenden Ebene, in beliebiger Entfernung von der Achse, in einer Kreislinie gleichförmig so bewegt, daß seine gerade Aufsteigung (Rectascension) stets der mittleren geocentrischen Länge der Sonne gleicht. Geht der obere Meridian eines Ortes der Erde durch diesen Punkt, so sagt man, die mittlere Sonne culminire, oder es sei mittlerer Mittag. Diese Tage sind durchaus von gleicher Dauer, und eine gleichförmig gehende Uhr, welche in jedem mittleren Mittage 12 zeigt, geht nach mittlerer Zeit.

13.

Mittlerer synodischer Monat, mittleres Mondjahr und mittleres tropisches Jahr.

Die Dauer der synodischen Umläufe des Mondes ist so sehr verschieden, daß die längste und kürzeste um 13 Stunden und darüber von einander abstehen. Den mittleren synodischen Mondmonat bestimmte Hipparch, 100 Jahre vor Chr., zu 29 T. 12 St. 44′ 3.″5, Tobias Mayer*) berechnete für das Jahr 300 vor Chr. 3.″4015 und für das Jahr 1700 nach Chr. 2.″8283, welches die gewöhnliche Annahme in der Zeitkunde ist. Burckhardt's Mondtafeln, die neuesten und bewährtesten, geben ihn für das Ende des 17 + i ten Jahrhunderts durch den Ausdruck

29 T. 12 St. 44′ 2.″854788 — i. 0.″028434 — i^2.0.″0000885.

Nach Tobias Mayer's Bestimmung ist demnach das mittlere Mondjahr zu 12 synodischen Monaten = 354 T. 8 St. 48′ 33.″9396.

Das tropische Jahr ist, wegen der Mannigfaltigkeit der Stellungen der Planeten gegen die Erde, wodurch ihre gegenseitige Anziehung und darnach ihr Umlauf um die Sonne abgeändert wird, von einer, jedoch nur wenig, schwankenden Dauer. Die Astronomie lehrt,**) daß das tropische Jahr gegen das Jahr 3040 vor Chr. seine größte Länge, 365 T. 5 St. 49 M. 24.″83 hatte, daß es seit jener Zeit bis auf die unsere abgenommen hat, im J. 2360 nach Chr. seine mittlere Länge 365 T. 5 St. 48′ 46.″83 und im J. 7600 nach Chr. seine kürzeste von 365 T. 5 St. 48′ 8.″83 haben und von da allmälig wieder wachsen wird; wornach also seine mittlere Dauer von der längsten und kürzesten um 38″ sich unterscheidet.

Hipparch (140 vor Chr.) erachtete das tropische Jahr um 1/300 Tag = 4′ 48″ kürzer als 365¼ Tag, wie man es vor und zu seiner Zeit annahm, also zu 365 T. 5 St. 55′ 12″, fast um 6′ zu lang. Die Alphonsinischen Tafeln (um 1250 nach Chr.) nahmen es im Mittel zu 365 T. 5 St. 49′ 16″, Copernicus (1543 nach Chr.) noch um 23½‴ länger an. Lalande berechnete

*) Lalande Astronomie t. 2. p. 157.

**) Littrow Wunder des Himmels. Stuttgart 1836. Bd. 3. S. 138.

in seinem **Mémoire sur la durée de l'année solaire (Mémoires de l'Acad. de Paris, 1782)** die mittlere Dauer des tropischen Jahres zu 365 T. 5 St. 48′ 48″, eine gegenwärtig fast allgemein angenommene Bestimmung. Bessel gibt*) für das Jahr $1800 + t$, wofern $t \leqq 100$ ist, die Dauer des tropischen Jahres durch den Ausdruck an

$$365 \text{ T. } 5 \text{ St. } 48' \, 47.''8091 - t. \; 0.''00595.$$

14.

Bezeichnung und Zählung der Jahre.

Anfangs genügte es den Bedürfnissen der Völker, in ihren Privat- und öffentlichen Geschäften, nur die Jahre nach alljährlich wechselnden Obrigkeiten oder Priestern zu benennen oder zu bezeichnen, wie bei den Römern nach den Consuln, bei den Athenern nach den Archonten, bei den Spartanern nach den Ephoren; oder die Jahre der Herrschaft ihrer jedesmaligen Regenten, der Amtsverwaltung ihrer weltlichen oder geistlichen Vorstände u. dgl. zu zählen, wie bei den Aegyptern, Babyloniern u. m. a. die Jahre der Regierung ihrer Könige, zu Argos die Jahre der Amtsverwaltung der Priesterin der Juno u. m. a.

I. **Fortlaufende Jahrzählung.** Als aber Geschichtschreiber es unternahmen, die Schicksale und Thaten der Völker und ihrer Großen nach ihrer Zeitfolge geordnet zusammen zu stellen, reichten sie mit solchen kurzen Zeitabrissen nicht aus, sondern sahen sich genöthigt, aus der Vergangenheit oder Gegenwart einen, durch eine denkwürdige Begebenheit, ausgezeichneten Zeitpunkt hervor zu heben, und von ihm an die Jahre zu zählen. Ein solcher geschichtlich merkwürdiger Zeitpunkt oder Zeiteinschnitt pflegt überhaupt eine Epoche, und eine Reihe von einer Epoche fortlaufend gezählter Jahre eine Aere (aera), Jahrreihe oder Jahrrechnung, so wie die auf ein Jahr treffende Nummer die Jahrzahl desselben genannt zu werden. Zu einer solchen Epoche, an die man den Anfang einer Jahrrechnung knüpfte, wählte man bald die Gründung oder Zerstörung einer bedeutenden Stadt, bald die Stiftung neuer Reiche durch neue Herrscher, oder ausgeführte Colonieen, bald die Veränderung einer Regierungsform oder Gesezgebung u. m. dgl. So zählten die Römer ihre Jahre von der Gründung der Stadt Rom, die älteren Griechen von der Zerstörung Troja's, die Syrer von der Gründung des Reichs der Seleukiden, die späteren Aegypter von dem Regierungsantritte des römischen Kaisers Diocletian. Gegenwärtig ist die wichtigste Jahrrechnung die bei den christlichen Völkern gebräuchliche, welche die Jahre von der Geburt Christi zählt, und die christliche, gemeine oder europäische Aere genannt wird, und nach der wir jezt die Jahrzahl 1844 schreiben. Dabei

---

*) Vergl. Schuhmacher Astronomische Nachrichten. Nr. 133.

begreift man unter den Jahren einer Aere gewöhnlich nur diejenigen, welche ihrer Epoche nachfolgen; doch zählt man auch unterweilen die Jahre von dieser Epoche, als einem fixen Zeitpunkte, in die Vergangenheit zurück, nach der von Eins an fortlaufenden natürlichen Zahlenreihe, und nennt sie, zur Unterscheidung, Jahre vor der Epoche, die ersteren daher Jahre nach der Epoche. Dann folgen das erste Jahr vor und das erste Jahr nach der Epoche unmittelbar nach einander; mithin muß man (vermöge **XVII, 1** der Vorbegriffe) in den algebraischen Rechnungen der Zeitkunde, wenn man die Jahre nach der Epoche für positiv ansieht, das Jahr a vor der Epoche als das Jahr $-(a-1)=-a+1$ in Rechnung nehmen, und umgekehrt das aus einer Rechnung sich ergebende Jahr $-a$ als das Jahr $a+1$ vor dieser Epoche erklären.

II. **Wiederkehrende Zählung der Jahre.** Man zählt jedoch auch sehr oft von bedeutsamen Ereignissen die Jahre nicht ununterbrochen weiter, sondern von Eins an nur bis zu einer gewissen höchsten Zahl, und dann vom Neuen wiederholt auf gleiche Weise; besonders dann, wenn nach einer solchen Reihe von Jahren gewisse Zeitverhältnisse oder Erscheinungen immer wiederkehren. Eine derartige Partie einer Jahrreihe nennt man einen Kyklus, Cirkel, Zeitkreis, und mehrere Zeitkreise zusammen eine Periode, obschon dies Wort auch mit den ersteren gleichbedeutend gebraucht wird. So zählten die Griechen von der alle 4 Jahre wiederkehrenden Feier ihrer olympischen und nemeischen Spiele nach vierjährigen Kykeln, Olympiaden und Nemeaden genannt; ein solcher Zeitkreis war der von Meton entdeckte neunzehnjährige Mondkyklus, und die aus vier solchen Kyklen bestehende sechsundsiebzigjährige Mondperiode des Kallippus, nach denen die Neumonde in dieselben Stellungen im tropischen Jahre oder gegen die vier Jahrpunkte zurückkehren, der fünfzehnjährige Indictionskreis unter den späteren römischen Kaisern, nach welchem die Grundsteuer-Bemessung erneuert und berichtiget wurde u. m. a. Selbst bei der fortlaufenden Zählung der Jahre kann man als natürlich sich darbietende chronologische Perioden die Zehner, Hunderte, Tausende und Zehntausende von Jahren unter den Namen Jahrzehent, Jahrhundert, Jahrtausend und Myriade ausscheiden. Hieher lassen sich sogar auch die Zeitkreise rechnen, welche man aus wiederkehrend gezählten Tagen zusammenstellt, wie unsere siebentägige Woche und die bald zehntägige bald neuntägige Dekade der Griechen.

15.

Continuirliches Zeitmessen. Kalender. Datirung.

Nach den bisher beschriebenen Zeitmaßen werden nun, mittelst der Zeitmeßwerkzeuge, in die stetig fort strömende Zeit Einschnitte gemacht, die ausgeschnittenen Maße gezählt, und in größere Maße vereint. So zählen uns die Uhren die Secunden in Minuten, oder wenigstens die Minuten in Stunden, und diese wieder in Tage zusammen, zuweilen auch noch die Tage in Wochen oder Monate. Gewöhnlich aber benüzt man zur Zählung der Tage in Wochen und Monate, und der Monate in Jahre, so wie zum Zählen der Jahre den Kalender, dem Wesentlichen nach ein Verzeichniß aller einzelnen in Wochen und Monaten nach einander gereihten Tage eines oder mehrerer Jahre, an denen gewöhnlich noch die wichtigsten Erscheinungen am Himmel, die politischen, ländlichen und religiösen Feste, denkwürdige geschichtliche Erinnerungen, und mancherlei auf das bürgerliche Leben beziehliche Notizen angesezt werden.

Soll nun die Zeit irgend einer Begebenheit angesagt werden, so geschieht dies nach dem Grade der möglichen oder beabsichtigten Genauigkeit sehr verschieden. Bei oberflächlichen Zeitangaben der Geschichte genügt oft schon das Jahrhundert oder Jahrzehent einer Aere. In der allgemeinen Weltgeschichte pflegt man bei den meisten Begebenheiten nur das Jahr, in den Specialgeschichten noch den Monat anzuführen. Für völlig bestimmt erachtet man in der Geschichte und im bürgerlichen Verkehre die Zeitangabe eines Factums, wenn sie die Zeitrechnung, die Aere, das Jahr, den Monat und Tag nennt. Diese Zusammenstellung pflegt man das Datum des Factums zu nennen; und so zu datiren ist gegenwärtig fast allgemein üblich. Zu einer Mehrbestimmung, wie sie vorzüglich im Mittelalter bei Ausstellung von Urkunden im Gebrauche stand, führt man zuweilen noch bei dem Jahre und Tage mancherlei ihnen zukommende chronologische Merkmale an, z. B. man nennt den Wochentag, auf den dieser Tag trifft; ein Fest, welches an ihm begangen zu werden pflegt; seinen Abstand von einem solchen Feste; dem Jahre sezt man bei, das wie vielte es seit einem denkwürdigen Ereignisse oder in einer anderen Jahrreihe ist, zu welchem Zwecke man ehedem z. B. die unten zu erklärenden Sonnencirkel, goldenen Zahlen und Indictionen u. m. a. anführte; oder man datirt nach mehr als Einer Zeitrechnung. — Ist die Zeit des Factums an dem betreffenden Tage selbst genauer anzugeben, so nennt man noch Tageszeit und Stunde; bei astronomischen und physikalischen Beobachtungen sogar nach Maßgabe der gewünschten Bestimmtheit, Minuten, Secunden und Theile der Secunden.

16.

Ausgleichung der bürgerlichen Zeitrechnung mit der mittleren astronomischen.

Das tropische Jahr, der synodische Monat und das astronomische Mondjahr sind, in ihrer mittleren Dauer, durch den mittleren Sonnentag unmeßbar; und doch erheischt die bürgerliche Zeitrechnung, daß man dieselbe nur nach vollen mittleren Tagen zähle, und daß sonach die an ihre Stelle tretenden bürgerlichen oder Kalender-Jahre und Monate nahe genug mit den mittleren und wirklichen astronomischen anfangen, daß z. B. ein gewisser Jahrpunkt immer auf den ersten Tag des bürgerlichen Jahres, oder eine bezeichnete Mondphase (gewöhnlich der Neumond) auf den ersten Tag des bürgerlichen Monats treffe; hauptsächlich damit religiöse und ländliche Feste zu bestimmten Jahrszeiten oder Lichtgestalten des Mondes gefeiert werden können, damit in jedem Monat wenigstens im Allgemeinen gewisse Witterungsverhältnisse und Stände der Vegetation eintreffen, und die darnach sich richtenden Geschäfte, als Feldarbeiten, Reisen u. dgl., schon nach dem Namen der Monate unternommen werden können, ohne erst den Himmel befragen zu müssen, in welche Jahrszeit sie jezt fallen, und damit aus den Zeitangaben längst geschehener Facta die Jahrszeit wenigstens ungefähr erkannt werde, und nicht etwa z. B. ein Sommerfeldzug in die dermaligen Wintermonate treffe.

Die Abweichung der bürgerlichen Zeitrechnung von der astronomischen ist demnach unvermeidlich, doch soll sie immer so klein als möglich gehalten, daher zeitweise eine Ausgleichung oder Berichtigung der bürgerlichen Zeitrechnung vorgenommen werden. Zu diesem Zwecke pflegt man im Allgemeinen die nächst zustimmende (nächst kleinere oder nächst größere) Anzahl voller Tage der mittleren Dauer des betreffenden astronomischen Zeitmaßes dem gleichnamigen bürgerlichen beizulegen, und nachdem man dies mehrere Male wiederholt hat, und der mitgeführte Fehler bereits zu vollen Tagen oder Monaten angewachsen ist, die zu viel gezählten Tage oder Monate wieder auszumerzen, oder die zu wenig gezählten nachträglich einzurechnen, einzuschalten. Da das Leztere am häufigsten vorkommt, so nennt man gewöhnlich das ganze Ausgleichen das Einschalten ('εμβαλλειν, intercalare), den eingeschalteten Tag oder Monat den Schalttag oder Schaltmonat (dies v. mensis intercalaris, 'εμβολιμαιος), ein Jahr, in welchem eingeschaltet wird, ein Schaltjahr, und im Gegensaze jedes andere ein Gemeinjahr; endlich wenn das Einschalten in geregelten Zwischenräumen wiederholt wird, jedes solche Intervall einen Schaltkreis oder eine Schaltperiode, und den Inbegriff der Geseze, nach denen eingeschaltet wird, die Schaltweise oder Schaltrechnung.

Bei dem bürgerlichen Jahre begründet sofort die Regelung seiner Dauer nach dem Laufe der Sonne oder des Mondes, die Bemessung der Länge seiner Monate und die Stellung des Schalttages oder Schaltmonates die Form oder Anordnung des Jahres, die Jahrform. Dieser gemäß unterscheidet man die bürgerlichen Jahre, rücksichtlich des Gestirns, nach dessen Bewegung sie sich richten, in Sonnen- oder Mondjahre; je nachdem sie zeitweis berichtiget werden oder nicht, in feste oder bewegliche; und die festen, je nachdem sie nur nach einem oder beiden Gestirnen gerichtet werden, in freie oder gebundene. Vornehmlich werden in der Zeitkunde betrachtet: 1. das bewegliche Sonnenjahr, 2. das freie, vom Mondlaufe unabhängige Sonnenjahr, 3. das freie, vom Sonnenlaufe unabhängige Mondjahr, und 4. das gebundene, nach dem Sonnenlaufe geregelte Mondjahr.

Den alten Anordnern der bürgerlichen Zeitrechnungen mußte die Feststellung der Geseze der periodischen Berichtigung derselben, bei ihrer beschränkten Rechenkunst und der mangelhaften Kenntniß der mittleren Dauer der astronomischen Zeitmaße, eine weit schwierigere Aufgabe als uns gegenwärtig sein. Zur Würdigung ihrer Leistungen sollen hier die allgemeinen Grundsäze der mathematischen Ausgleichung der bürgerlichen Zeitrechnung mit der astronomischen erörtert werden. Sie zerfällt 1. in die Ermittelung der angemessensten Perioden der Ausgleichung, und 2. in die möglichst genaue Vertheilung der kleineren und größeren bürgerlichen Zeitmaße in jeder Periode.

17.

I. Bestimmung der Perioden zur Ausgleichung der bürgerlichen Zeitrechnung.

Sei λ die mittlere Länge eines astronomischen Zeitmaßes, l und L die Länge des kürzeren und längeren gleichnamigen ganztägigen bürgerlichen Zeitmaßes, welche als eine untere und obere Grenze der mittleren Dauer λ angewendet werden sollen, indem man voraussezt, daß $l < \lambda < L$ sei. In jeder Periode von P' solchen astronomischen Zeitmaßen mögen m' kürzere und M' längere bürgerliche vorkommen; so muß zuvörderst sein

$$m' + M' = P'.$$

Die Dauer der kürzeren Zeitmaße beträgt $m'l$, jene der längeren $M'L$ und die der ganzen Periode $P'\lambda$. Bei vollkommener Ausgleichung muß die leztere genau den beiden ersteren zusammen genommen gleich sein, folglich hat man

$$m'l + M'L = P'\lambda.$$

Aus diesen Gleichungen findet man

$$(1) \qquad \frac{m'}{L-\lambda} = \frac{M'}{\lambda - l} = \frac{P'}{L-l}.$$

Drückt man demnach die Verhältnisse der drei Unterschiede

$$L-\lambda,\ \lambda-l,\ L-l$$

in ganzen Zahlen aus, so geben diese die gesuchten Zahlen

$$m',\ M',\ P'.$$

Weil jedoch diese Verhältnißzahlen fast immer zu groß ausfallen, so muß man mittels der zusammenhängenden Brüche (Kettenbrüche) kleinere Näherungswerthe für selbe bestimmen. Seien diese beziehlich

$$m, M, P$$

und (indem man den Buchstaben δ als ein anderes Differenz- oder Variationszeichen verwendet) δP der Ueberschuß der Dauer der astronomischen Periode über die der bürgerlichen,*) so ist zwar gleichfalls

$$m + M = P,$$

aber

$$ml + ML = P\lambda - \delta P$$

und daher der Fehler der gewählten Periode

$$(2) \qquad \delta P = P\lambda - (ml + ML) = m(\lambda - l) - M(L - \lambda)$$
$$= P(\lambda - l) - M(L - l) = m(L - l) - P(L - \lambda).$$

Ferner ist die mittlere Länge des bürgerlichen Zeitmaßes in einer solchen Periode

$$(3) \quad \lambda - \Delta\lambda = \frac{ml + ML}{P} = \lambda - \frac{\delta P}{P} = l + \frac{M}{P}(L - l) = L - \frac{m}{P}(L - l)$$

folglich ihre Abweichung von der Dauer des mittleren astronomischen Zeitmaßes

$$(4) \qquad \Delta\lambda = \frac{\delta P}{P}.$$

18.

II. Vertheilung der kürzeren und längeren bürgerlichen Zeitmaße in den Ausgleichungs-Perioden.

Bei dieser kann man entweder bedingen, daß jedes bürgerliche Zeitmaß nur so wenig als möglich, mithin um weniger als der Unterschied $L - l$ der beiden anzuwendenden bürgerlichen Zeitmaße L und l, **vor** dem mittleren astronomischen, also dieses noch sicher in ihm beginne; oder (was zweckmäßiger sein dürfte, damit die Anfänge der **wirklichen** astronomischen Zeitmaße nicht in drei, sondern nur in zwei bürgerlichen schwanken mögen), daß der Anfang jedes bürgerlichen Zeitmaßes so nahe als möglich an, **vor** oder **nach**, den Anfang des mittleren astronomischen falle, folglich ihm höchstens um den halben genannten Unterschied, $\frac{1}{2}(L - l)$, vorgehe oder nachfolge.

Man hat demnach überhaupt unter jede, nach der natürlichen Zahlenfolge aufsteigende, Anzahl (P) von bürgerlichen Zeitmaßen so viel (m) kürzere (l) und so viel (M) längere (L) zu vertheilen, daß die, im §. 17 allgemein ausgedrückte, Abweichung (δP) der Anfänge der bürgerlichen Zeitmaße von jenen der astronomischen die vorgesteckte Grenze nicht übersteige. Wie dies allgemein durchzuführen sei, und daß man auf diesem Wege selbst die angemessensten Ausgleichungs-Perioden zu entdecken vermöge, wird sich leichter, als

*) Eigentlich ist $\delta P = \Delta(P\lambda)$ oder, weil P unveränderlich vorausgesezt wird, $\delta P = P\Delta\lambda$.

hier geschehen könnte, aus den sogleich folgenden Ausgleichungsweisen entnehmen lassen. Ist der Unterschied $L - l = 1$, wie meistens, so ist es am natürlichsten (und lag auch den Alten höchst nahe, obschon nur die Araber davon Gebrauch gemacht zu haben scheinen), die mittlere Dauer (λ) des astronomischen Zeitmaßes wiederholt zu sich selbst zu addiren, die Dauer der aus diesen (P) Zeitmaßen zusammengestellten Zeiträume in ganzen Einheiten zu bestimmen, im ersten Falle mit bloser Weglassung der Brüche, im anderen aber, indem man nur diejenigen Brüche weg läßt, welche kleiner oder höchstens so groß als $\frac{1}{2}$ sind, die größeren aber für 1 annimmt; sofort jede solche ganztägige Dauerzeit von der nächst längeren abzuziehen, um an den Unterschieden die nach einander folgenden bürgerlichen Zeitmaße, so wie sie der gestellten Forderung entsprechen, zu finden. Daß man hier auch nur den in der Länge des Zeitmaßes vorkommenden echten Bruch wiederholt zu sich zu addiren brauche, kann sich jeder leicht selbst sagen.

19.

Ausgleichung des bürgerlichen Sonnenjahres mit dem mittleren tropischen.

I. Bestimmung der zweckmäßigen Schaltperioden für freie Sonnenjahre. Regelt man die Zeitrechnung nach dem mittleren tropischen Sonnenjahre, dessen Dauer λ nur wenig kürzer als $365\frac{1}{4}$ Tag ist; so ist es am angemessensten, mehrentheils Gemeinjahre von $365 = l$ Tagen und von Zeit zu Zeit ein Schaltjahr von $366 = l + 1 = L$ Tagen zu nehmen. Man wird demnach, vermöge §. 17, unter je P Jahren M Schaltjahre sein lassen, indem man nach Möglichkeit genähert

$$\frac{M}{P} = \lambda - 365$$

und dabei P möglichst klein wählt. Dann ist die Dauer jedes Pjährigen Schaltkyklus zu kurz um

$$\delta P = P(\lambda - 365) - M \text{ Tage},$$

die Länge des mittleren bürgerlichen Jahres

$$\lambda - \Delta\lambda = 365 + \frac{M}{P},$$

daher zu kurz um $\Delta\lambda = \delta P : P = \lambda - 365 - \frac{M}{P}$; und dieser Fehler erreicht die Größe von einem vollen Tage nach $1 : \Delta\lambda = P : \delta P$ Jahren.

Es kommt demnach hier ganz auf die anzunehmende mittlere Länge λ des tropischen Jahres an. (§. 13.)

a) Nimmt man nun nach den Alphonsinischen Tafeln und nach Copernicus $\lambda = 365$ T. 5 St. $49' \; 16'' = 365\frac{5239}{21600}$ Tage; $= 365{\cdot}242546$ T.; so hat man, nach der Lehre von den Kettenbrüchen,

$$\begin{array}{ccccccc} & 4 & 8 & 7 & 2 & 2 & 17 \\ 21600 : & 5239 : & 644 : & 87 : & 35 : & 17 : & 1, \end{array}$$ also

$$\frac{M}{P} = \frac{1}{4},\quad \frac{8}{33},\quad \frac{57}{235},\quad \frac{122}{503},$$ u. s. f.

b) Nach Lalande ist $\lambda = 365$ T. 5 St. 48′ 48″ $= 365\frac{109}{450}$ T. $= 365{\cdot}242222$ T.; daher findet man

$$\begin{array}{ccccccc} & 4 & 7 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 450 : & 109 : & 14 : & 11 : & 3 : & 2 : & 1, \end{array}$$ folglich

$$\frac{M}{P} = \frac{1}{4},\ \frac{7}{29},\ \frac{8}{33},\ \frac{31}{128},\ \frac{39}{161},\ \frac{109}{450}.$$

c) Nach Littrow ist $\lambda = 365$ T. 5 St. 48′ 46.″83 $= 365\frac{2092683}{8640000}$ T. $= 365.242209$ T.; daraus erhält man

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 7 & 1 & 3 & 2 & \\ 8640000 : & 2092683 : & 269268 : & 207807 : & 61461 : & 23424 \\ \underline{8370732} & \underline{1884876} & & & & \\ 269268 & 207807 & & & & \end{array}$$

$$\frac{M}{P} = \frac{1}{4},\quad \frac{7}{29},\quad \frac{8}{33},\quad \frac{31}{128},\quad \frac{70}{289}.$$

Von diesen Näherungsbrüchen heben wir zunächst den kleinsten, $\frac{1}{4}$, und den aus ihn ableitbaren Zwischen- oder eingeschalteten Bruch*), $\frac{1}{5}$ hervor. Sie geben also an, daß man in der Regel nach 4 Jahren, zuweilen aber auch nach 5 Jahren, einen Tag einzuschalten habe. Im ersteren Falle ist das Jahr im Mittel $= 365\frac{1}{4}$ Tage, also nach der Lalande'schen Bestimmung zu lang um $\frac{7}{900}$ Tag, welcher Fehler schon nach $\frac{900}{7} = 128$ Jahren einen Tag beträgt.

Unter den nächst folgenden Näherungsbrüchen ist $\frac{8}{33}$ ausgezeichnet; er läßt erkennen, daß man während 33 Jahren 7 Mal nach 4, und 1 Mal nach 5 Jahren einzuschalten habe. Da ist das Jahr im Durchschnitt $= 365$ T. 5 St. 49′ 5″.5 $= 365{\cdot}242424$ Tage, also gegen die Lalande'sche Bestimmung nur noch zu lang um 17″.5 $= 0.000202$ T., welches erst in 4950 Jahren einen Tag beträgt.

Schon diese kurze Periode gibt eine sehr große Genauigkeit; eine für unsere, noch nicht vollkommene, Kenntniß der mittleren Dauer des tropischen Sonnenjahres gänzlich ausreichende Schärfe bietet jedoch der nächst spätere Näherungsbruch $\frac{31}{128}$, nach welchem man während 128 Jahren 4 Mal nach 5

*) Diese gewinnt man nemlich, wenn man Zähler und Nenner eines Näherungsbruches zum Zähler und Nenner des nächst vorhergehenden wiederholt, jedoch nicht so oft addirt, als wie groß der nächst folgende Theilnenner ist. Z. B. aus $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{4}$ erhält man $\frac{0+1}{1+4} = \frac{1}{5}$, $\frac{1+1}{5+4} = \frac{2}{9}$, $\frac{2+1}{9+4} = \frac{3}{13}$ u. s. f. Vergl. Vega Vorles. 1. Bd., verbessert von Matzka, 1837, S. 133; Salomon und Beskiba, Lehrbücher der Arithmetik. Wien.

und 27 Mal nach 4 Jahren einschalten soll. Dann wird das Jahr im Durchschnitt 365 T. 5 St. 48′ 45″ = 365·242187 T., daher nach der Lalande'schen Bestimmung blos um 3″ = 0·000035 T. zu kurz, welches erst nach 28800 Jahren einen Tag ausmacht, und nach Littrow's Angabe gar nur um 1″.83 = 0.000021 T. zu kurz, was erst nach 47200 Jahren einen Tag beträgt.

20.

Fortsetzung.

II. Vertheilung der Schaltjahre in den Schaltkreisen.

Sollen die Schaltjahre dergestalt vertheilt werden, daß der Anfang jedes bürgerlichen Jahres von jenem des mittleren um höchstens einen halben Tag abstehe, so kann man zur Auffindung der Schaltjahre einen der folgenden zwei Wege einschlagen.

I. Erstes Verfahren. Rechnet man nach Lalande die mittlere Dauer des tropischen Jahres $\lambda = 365\frac{109}{450}$ Tage, und nimmt man $\frac{1}{450}$ Tag zur Zeiteinheit, so sind P bürgerliche Jahre, worunter M Schaltjahre vorkommen, vermöge §. 17, Gl. (2), wo jetzt $L - l = 450$ und $\lambda - l = 109$ ist, zu kurz um

$$\delta P = 109\,P - 450\,M,$$

folglich, da $\delta P \leqq \frac{1}{2}$ Tag oder $\leqq \frac{450}{2}$, nemlich $\delta P \leqq 225$ sein muß, ist die Abweichung

$$\delta P = \pm\, r\frac{\pm 109\,P}{450} \equiv 109\,P,\ \text{mod}\ 450,$$

nemlich der kleinste Rest von 109 P durch 450.

Nun soll für das erste Schaltjahr $\delta P > 225$ ausfallen, daher muß $109\,P > 225$ und P der obere Quotient von 225 getheilt durch 109, nemlich $P = -\,q\frac{-225}{109} = 3$ sein. Das 3te Jahr ist also das erste Schaltjahr, mithin ist auch in jedem 4- oder 5jährigen Schaltkreise das 3te Jahr das Schaltjahr, und sein Fehler $\delta 3 \equiv 3.109 \equiv 327$, daher $= -123$.

Der Fehler jedes 4jährigen Schaltkreises ist $\delta 4 \equiv 4.109 \equiv 436$, also $= -14$. Nimmt man daher vom 3ten Jahre an jedes 4te zum Schaltjahr, so ist am Schlusse des Jahres $3 + 4n$ der Fehler $\delta(3 + 4n) = \delta 3 + n\delta 4 = -(123 + 14n)$. Soll er noch möglichst klein bleiben, so muß $123 + 14n < 225$, also $n < \frac{102}{14}$, und für das späteste Schaltjahr $n = q\frac{102}{14} = 7$ sein. Man kann demnach höchstens $n = 7$ Mal jedes 4te Jahr, nemlich die 7 Jahre 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31 zu Schaltjahren machen. Dann ist für $n = 7$ der Fehler des letzten $\delta 31 = -(123 + 98) = -221$.

Damit nun das mte Jahr nach 31 das nächstfolgende Schaltjahr sei, muß $\delta(31 + m) = \delta 31 + \delta m = -221 + 109m > 225$, also $m > \frac{446}{109}$, und die kleinste Zahl $m = 5$ sein, d. h. man muß jezt einmal nach 5 Jahren, folglich im Jahre 36 einschalten; was auch aus dem Früheren (§. 19) hätte erschlossen werden können. Der Fehler von 5 Jahren ist aber $\delta 5 \equiv 5.109 \equiv 545$, also $= 95$, daher im 36sten Jahre $\delta 36 = -221 + 95 = -126$.

Nimmt man von da an n vierjährige Schaltkreise, so ist für das lezte Schaltjahr $\delta(36 + 4n) = \delta 36 + n\delta 4 = -(126 + 14n)$. Da noch immer $126 + 14n < 225$, also $n < \frac{99}{14}$ und dabei doch möglichst groß ausfallen soll, muß $n = \text{E}\frac{99}{14} = 7$ sein. Man erhält demnach die weiteren 7 Schaltjahre 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, und den Fehler des lezten $\delta 64 = -(126 + 7.14) = -224$.

Nun ist wieder einmal nach 5 Jahren, d. i. im $64 + 5 = 69$. Jahre einzuschalten, wonach der Fehler $\delta 69 = \delta 64 + \delta 5 = -224 + 95 = -129$ wird.

Auf gleiche Weise findet man $\delta(69 + 4n) = -(129 + 14n)$, also $129 + 14n < 225$, und sofort $n = \text{E}\frac{96}{14} = 6$. Man hat demnach nur 6 Mal nach je 4 Jahren, nemlich in den 6 Jahren 73, 77, 81, 85, 89, 93 einzuschalten; und dann wird der Fehler des lezten $\delta 93 = -(129 + 84) = -213$.

Wird neuerdings einmal im 5. Jahre, d. i. im Jahre 98 eingeschaltet, so ist darnach der Fehler $\delta 98 = \delta 93 + \delta 5 = -213 + 95 = -118$.

Weiter findet man $\delta(98 + 4n) = -(118 + 14n)$, daher $118 + 14n < 225$, und $n = \text{E}\frac{107}{14} = 7$; mithin die 7 Schaltjahre 102, 106, 110, 114, 118, 122, 126, als die lezten in der 128jährigen Schaltperiode.

II. Zweites Verfahren. Soll das Jahr a zum Schaltjahr gemacht werden, so muß, wenn man die Fehler stets positiv darstellt, sein Fehler

$$\delta a = \text{r}\frac{109\,a}{450} > 225, \text{ also} = 225 + \varphi, \text{ dabei } \varphi = 1, 2, \ldots 224,$$

und der Fehler des vorhergehenden Jahres

$$\delta(a-1) = \text{r}\frac{109\,(a-1)}{450} \overline{\overline{<}}\ 225, \text{ also} = 225 - \omega, \text{ dabei } \omega = 0, 1, \ldots 225,$$

sein. Daraus folgt nun

$$109\,(a-1) \equiv 225 - \omega, \text{ mod } 450$$
$$109\,a \equiv 225 + \varphi$$

und wenn man abzieht $\varphi + \omega = 109$,

weil diese Summe < 450 sein muß. Von diesen Zahlen ω und φ muß demnach $\omega = 0, 1, \ldots 108$ und $\varphi = 109, 108, \ldots 1$ sein. Dieselben Congruenzen geben

$$109a \equiv 116 - \omega \equiv 225 + \varphi, \text{ mod } 450.$$

Löst man daher vorerst die Congruenz $109x \equiv 1$, mod 450 auf, so findet man, wie früher in §. 19, b)

$$\begin{array}{llllllll} \text{die Quoti} & & 4 & 7 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ \text{daher die Zahlen} & & 161 & 39 & 5 & 4 & 1 & 1,\ \text{und } x = -161. \\ & & - & + & - & + & - & + \end{array}$$

Die Auflösung der gegebenen Congruenz ist demnach

$$a \equiv 161\omega - 224 \equiv 225 - 161\varphi, \text{ mod } 450.$$

Würde man hierin für ω oder φ ihre 109 Werthe setzen, so erhielte man alle 109 Schaltjahre der völlig genauen 450jährigen Periode; folglich auch die 31 der 128jährigen Periode. Um aber alle zu hohen sogleich in der Rechnung auszuscheiden, kann man folgenden Weg einschlagen.

Nimmt man von der letzten Congruenz und von der Gleichung $\varphi + \omega = 109$ die Differenzen, so findet man

$$\Delta a \equiv 161\,\Delta\omega \equiv -161\,\Delta\varphi, \text{ mod } 450; \qquad \Delta\omega = -\Delta\varphi.$$

Weil a nicht größer als 128, mithin $a < 129$ sein soll, so muß $\Delta a < 128$ sein. Damit aber $a < 129$ ausfalle, muß

$$161\omega - 224 < 129, \qquad 129 > 225 - 161\varphi$$

also $\qquad \omega < \frac{353}{161} \qquad$ und $\qquad \varphi > \frac{96}{161}$,

dabei aber auch ω möglichst groß und φ möglichst klein,

daher $\omega = \mathrm{E}\frac{353}{161} = 2$ und $\varphi = -\mathrm{E}\frac{-96}{161} = 1$ sein. Dafür erhält man

$a = 98 \qquad$ und $a = 64$.

Sollen ferner die kleinsten Zahlen $\Delta\omega$ gesucht werden, bei welchen einerseits $161\Delta\omega < 450$ und andererseits $161\Delta\omega > 450$ ausfällt, so hat man dort $\Delta\omega < \frac{450}{161}$, und da $\Delta\omega > \frac{450}{161}$; also dort $\Delta\omega = \mathrm{E}\frac{450}{161} = 2$, und da $\Delta\omega = \mathrm{E}\frac{450}{161} + 1 = 3$. Dazu findet sich $\Delta a = -128$ und $\Delta a = 33$; wovon jedoch der erstere Werth zu groß ist. Aus beiden findet man jedoch für $\Delta\omega = 2 + 3 = 5$, sogleich $\Delta a = -128 + 33 = -91$; was brauchbar ist.

Oder, soll $\Delta a \equiv 161\Delta\omega$, mod 450, so klein als möglich ausfallen, muß $161\Delta\omega - 450x$ nahe $= 0$, also $\frac{\Delta\omega}{x}$ nahe $= \frac{450}{161}$ sein. Schickt man sich aber an, die Näherungswerthe von $\frac{450}{161}$ zu nehmen, so findet man

$$\begin{array}{c} 2 \quad 1 \quad 3 \\ 450 : 161 : 128 : 33 \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll} \Delta\omega = & 2, & 3, & (5), & (8), & 11, & \ldots,\ \text{daher} \\ \Delta a = & -128, & 33, & -95, & -62, & -29, & \ldots \end{array}$$

Somit gehören als anwendbare Werthe zusammen

$$\Delta\omega = 3 \text{ mit } \Delta a = 33, \text{ und } \Delta\omega = 5 \text{ mit } \Delta a = -95;$$

daher auch noch $\Delta\varphi = 3$ mit $\Delta a = -33$, und $\Delta\varphi = 5$ mit $\Delta a = 95$.

Aus diesen Anfangsgliedern und Unterschieden lassen sich nunmehr, indem man ω und φ nicht über die größere Hälfte von 109, d. i. über 55, sich erheben läßt, folgende Reihen zusammen stellen:

$\omega =$ 2, 7, 10, 13, 16, 21, 24, 27, 30, 35, 38, 41, 44, 49, 52, 55.
a = 98, 3, 36, 69, 102, 7, 40, 73, 106, 11, 44, 77, 110, 15, 48, 81.
$\varphi =$ 1, 4, 9, 12, 15, 18, 23, 26, 29, 32, 37, 40, 43, 46, 51, 54.
a = 64, 31, 126, 93, 60, 27, 122, 89, 56, 23, 118, 85, 52, 19, 114, 81.

Man findet demnach auf beiden Wegen folgende 31 Schaltjahre in der 128jährigen Schaltperiode:

im ersten 33jähr. Schaltkreise	die 8 Jahre	3,	7,	11,	15,	19,	23,	27,	31,
» zweiten 33 »	» » 8 »	36,	40,	44,	48,	52,	56,	60,	64,
„ dritten 29 „	» » 7 „	69,	73,	77,	81,	85,	89,	93,	
» vierten 33 „	» „ 8 »	98,	102,	106,	110,	114,	118,	122,	126,

und darin unter Einem die Vertheilung der 8 Schaltjahre im 33jährigen Schaltkreise.

21.

Ausgleichung des bürgerlichen Mondmonates mit dem mittleren synodischen.

I. Bestimmung der zweckmäßigen Ausgleichungs-Perioden. Verlangt man, daß die Anfänge der Mondmonate immer nahe auf eine bestimmte Lichtgestalt des Mondes treffen; so nimmt man, weil nach der Tob. Mayer'schen Berechnung (§. 13) die mittlere Dauer des synodischen Mondmonates $\lambda = 29$ T. 12 St. 44′ 2″.8283 $= 29\frac{458 \cdot 428283}{864}$ T. $= \left(30 - \frac{405 \cdot 571717}{864}\right)$ T. $= 29 \cdot 530588290$ T. ist, etwas mehr volle Monate zu $30 = L$ Tagen als hohle zu $29 = l$ Tagen; nemlich unter je P Monate m hohle. Man wählt daher möglichst genähert

$$\frac{m}{P} = \lambda - 30 = \frac{405 \cdot 571717}{864},$$

und dabei P so klein als thunlich.

Zur Ermittelung dieser Näherungswerthe nach der Lehre von den Kettenbrüchen dient folgende Rechnung:

			m:P
864000000	405571717	2	1: 2
811143434	369995962	7	7:15
52856566	35575755	1	8:17
35575755	34561622	2	23:49
17280811	1014133	17	399:850
1014133	81100		
7139481	203133	25	
7098931	202750		
40550			

Der in den kleinsten Zahlen ausgedrückte Näherungsbruch $\frac{1}{2}$ und der einschaltbare $\frac{1}{3}$ lassen erkennen, daß man in der Regel jeden zweiten, und nur manchmal den dritten Monat hohl zu machen habe. Aus den zwei folgenden Näherungsbrüchen $\frac{7}{15}$ und $\frac{8}{17}$ erkennt man, daß man gewöhnlich unter je 17 Monaten 8, und zuweilen unter 15 Monaten 7 hohl sein lassen könne. Nimmt man diese Vertheilung nach einander vor, so entspricht man der Forderung des aus diesen beiden ableitbaren Zwischenbruches $\frac{15}{32}$. Ein bereits sehr genauer Näherungswerth ist der nächst spätere $\frac{23}{49}$, nach welchem 2 achtmonatliche Perioden mit einer siebenmonatlichen zu vereinen kommen; er gibt den mittleren bürgerlichen Mondmonat zu $(30 - \frac{23}{49})$ T. $= 29\frac{26}{49}$ T. $=$ 29·5306122 T. $=$ 29 T. 12 St. 44′ 4″.898, also nur um 2″.070 $=$ 0·0000239 T. zu lang, was erst in 41740 Mondmonaten einen Tag ausmacht. — Für völlig genau kann man den noch angegebenen Näherungsbruch $\frac{399}{850}$ ansehen; nach ihm ist der mittlere bürgerliche Mondmonat $= (30 - \frac{399}{850})$ T. $= 29\frac{451}{850}$ T. $=$ 29·530588235 T. $=$ 29 T. 12 St. 44′ 2″.8235, daher dem mittleren synodischen ganz gleich zu achten.

II. **Vertheilung der hohlen Monate.** Hier ist es besonders wünschenswerth, die hohlen Monate so zu vertheilen, daß die Anfänge der bürgerlichen Monate so wenig als möglich, folglich höchstens um einen halben Tag, von den Anfängen der mittleren synodischen Mondmonate abweichen. Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir die eben gefundene, hinreichend genaue Dauer des mittleren synodischen Monates $\lambda = 29\frac{451}{850}$ Tag, und den 850sten Theil des Tages zur Zeiteinheit an. Dann sind P bürgerliche Mondmonate, worunter m hohle vorkommen, vermöge §. 17, Gl. (2), wo jezt $L - l = 850$, $\lambda - l = 451$ und $L - \lambda = 399$ ist, zu kurz um

$$\delta P = 850m - 399P;$$

folglich, da $\delta P \leqq \frac{1}{2}$ Tag oder $\leqq 425$ sein muß, ist die Abweichung

$$\delta P = \pm \not{r}\frac{\mp 399P}{850} \equiv -399P, \bmod 850.$$

Soll nun der ate Monat hohl werden, so muß, wenn man die Fehler durchgängig negativ darstellt, einerseits

$$-\delta(a-1) = \not{r}\frac{399(a-1)}{850} < 425, \text{ also } = 425 - \omega,$$

$$\text{dabei } \omega = 1, 2, \ldots 425,$$

und andererseits $-\delta a = \not{r}\frac{399a}{850} \geqq 425$, also $= 425 + \varphi$,

$$\text{dabei } \varphi = 0, 1, \ldots 424 \text{ sein.}$$

Hieraus ergibt sich

$$399(a-1) \equiv 425 - \omega, \bmod 850$$

$$399a \equiv 425 + \varphi,$$

und wenn man abzieht $\qquad \varphi + \omega = 399,$

weil diese Summe < 850 sein muß. Von diesen zwei Zahlen muß demnach

$$\omega = 1, 2, \ldots 399 \text{ und } \varphi = 398, 397, \ldots 0 \text{ sein.}$$

Dieselben Congruenzen geben

$$399a \equiv -26 - \omega \equiv 425 + \varphi, \text{ mod } 850.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber für $\frac{399}{850}$ der nächste Näherungsbruch $\frac{23}{49}$, und zwar der vierte, daher $399 \cdot 49 \equiv 1$; die Auflösung dieser Congruenz ist demnach

$$a \equiv 426 - 49\omega \equiv 425 + 49\varphi, \text{ mod } 850;$$

und wenn man davon, so wie von der lezten Gleichung, die Differenzen nimmt,

$$\Delta a \equiv -49\,\Delta\omega \equiv 49\,\Delta\varphi, \text{ mod } 850; \qquad \Delta\omega = -\Delta\varphi.$$

Will man nun in der 49monatlichen Periode ihre 23 hohlen Monate vertheilen, so muß $a \leqq 49$ und $\Delta a < 49$ sein. Das Erstere fordert

$$426 - 49\omega < 49, \qquad 425 + 49\varphi - 850 < 49$$

also $\qquad \omega > \frac{377}{49}, \qquad \varphi < \frac{474}{49}$

und zugleich ω so klein und φ so groß als möglich, daher ist

$$\omega = \left[\tfrac{377}{49}\right] + 1 = 8, \qquad \varphi = \left[\tfrac{474}{49}\right] = 9,$$

und dazu gehört $\qquad a = 34, \qquad a = 16.$

Sollen ferner die kleinsten Zahlen $\Delta\omega$ gesucht werden, für welche $\Delta a \equiv -49\,\Delta\omega$, mod 850 so klein als möglich ausfällt, so muß man $850x - 49\,\Delta\omega$ nahe $= 0$, also $\frac{\Delta\omega}{x}$ nahe $= \frac{850}{49}$ haben.

Sucht man hiezu die Näherungswerthe, so rechnet man wie folgt:

$$\begin{array}{c} 17 \quad 2 \\ 850 : 49 : 17 : 15 \end{array}$$

$$\Delta\omega = 17, \quad (18), \; 35, \ldots$$

$$\text{daher } \Delta a = 17, -32, -15, \ldots$$

Als brauchbare Werthe gehören demnach zusammen:

$\Delta\omega = 17$ mit $\Delta a = 17$ und $\Delta\omega = 18$ mit $\Delta a = -32$, also auch

$\Delta\varphi = 17$ mit $\Delta a = -17$ und $\Delta\varphi = 18$ mit $\Delta a = 32$.

Daraus kann man demnach, wenn man ω und φ nicht über die größere Hälfte von 399, d. i. nicht über 200, steigen läßt, folgende Reihen zusammen stellen:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
\omega = & 8, & 26, & 43, & 60, & 78, & 95, & 112, & 130, & 147, & 164, & 182, & 199, \\
a = & 34, & 2, & 19, & 36, & 4, & 21, & 38, & 6, & 23, & 40, & 8, & 25; \\
\varphi = & 9, & 27, & 44, & 61, & 79, & 96, & 113, & 131, & 148, & 165, & 183, & 200, \\
a = & 16, & 48, & 31, & 14, & 46, & 29, & 12, & 44, & 27, & 10, & 42, & 25.
\end{array}$$

Demnach sollen in der 49monatlichen Ausgleichungs-Periode folgende 23 Monate hohl sein:

im ersten 17 monatlichen Kyklus die 8 Monate	2,	4,	6,	8,	10,	12,	14,	16,
» zweiten 15 » » » 7 »	19,	21,	23,	25,	27,	29,	31,	
» dritten 17 » » » 8 »	34,	36,	38,	40,	42,	44,	46,	48.

22.

Ausgleichung des bürgerlichen Mondjahres mit dem mittleren astronomischen.

I. **Bestimmung der zweckmäßigen Schaltperioden.** Wird die Zeitrechnung nach dem Laufe des Mondes abgeglichen, so kann man sich, wofern nicht die kleinlichste Genauigkeit gefordert wird, auch begnügen, blos nach ganzen Mondjahren die Ausgleichung der bürgerlichen Zeitrechnung vorzunehmen. Die mittlere Dauer des astronomischen Mondjahres fanden wir (§. 13) nach Tob. Mayer $\lambda = 354$ T. 8 St. $48' 33''.9396 = 354\frac{79 \cdot 284849}{216}$ T. $= 354{\cdot}3670595$ T.; folglich werden in der Regel gemeine Mondjahre von $354 = l$ Tagen und zeitweise Schaltjahre von $355 = L$ Tagen zu wählen sein. Sollen nun auf je P Mondjahre M Schaltjahre kommen, so nimmt man möglichst nahe

$$\frac{M}{P} = \lambda - 354,$$

und zugleich P so klein als möglich.

Die Näherungswerthe ermittelt man durch folgende Rechnung:

			M:P
216000000	79284849	2	1:2
158569698	57430302	1	1:3
57430302	21854547	2	3:8
43709094	13721208	1	4:11
13721208	8133339	1	7:19
8133339	5587869	1	11:30
5587869	2545470	2	29:79
5090940	2484645	5	156:425
496929	60825	8	

Die beiden ersten Näherungsbrüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ geben zu erkennen, daß bei den Mondjahren in der Regel nach 3, zuweilen aber auch nach 2 Jahren ein Tag einzuschalten ist. Der dritte Näherungsbruch $\frac{3}{8}$ und der vierte $\frac{4}{11}$ zeigen, daß man entweder in 8 Jahren 3 Mal oder etwas genauer in 11 Jahren 4 Mal einschalten soll. Eine solche 11- und 8jährige Periode stellen die durch den fünften Näherungsbruch $\frac{7}{19}$ bestimmte 19jährige Periode mit 7 Schaltjahren zusammen, in welcher das mittlere bürgerliche Mondjahr 354 T. 8 St. $50'$ $31.''5$ beträgt, folglich noch um $1'$ $57.''6$ zu lang ist. Diese 19- und jene 11jährige Periode vereint, liefern die vom sechsten Näherungsbruche $\frac{11}{30}$ angegebene 30jährige Periode mit 11 Schaltjahren, in der das mittlere Jahr

354 T. 8 St. 48′ 0″ hält, mithin um 33.″94 zu kurz ist. Höchst genau wäre die vom siebenten Näherungsbruche $\frac{29}{79}$ angedeutete 79jährige Periode mit 29 Schaltjahren, weil ihr mittleres Jahr 354 T. 8 St. 48′ 36″.45 enthielte, also nur um 2″.51 zu lang wäre. Für ganz genau läßt sich endlich die durch den achten Näherungsbruch $\frac{156}{425}$ bestimmte 425jährige Periode mit 156 Schaltjahren ansehen; denn ihr mittleres Jahr ist $= 354\frac{156}{425}$ Tag = 354 T. 8 St. 48′ 33″.8824, mithin von dem mittleren astronomischen Mondjahre gewiß um weniger als dessen wahrscheinlichen Beobachtungsfehler verschieden, und sofort darf es ihm gleich geachtet werden.

II. Vertheilung der Schaltjahre in den Schaltkreisen.

Will man die Schaltjahre so vertheilen, daß der Anfang jedes bürgerlichen Mondjahres von dem des mittleren astronomischen um höchstens einen halben Tag abstehe; so nehme man, zur Vereinfachung der Rechnung, die eben gefundene zureichend genaue Dauer des mittleren astronomischen Mondjahres $\lambda = 354\frac{156}{425}$ Tag, und den 425sten Theil des Tages zur Zeiteinheit an. Dann sind P bürgerliche Mondjahre, unter denen M Schaltjahre vorkommen, vermöge §. 17, wo jetzt $L - l = 425$, und $\lambda - l = 156$ ist, zu kurz um

$$\delta P = 156\,P - 425\,M,$$

daher, weil $\delta P \gtrless \frac{1}{2}$ Tag oder < 213 sein soll, ist der Fehler

$$\delta P = \pm r\frac{\pm 156\,P}{425} \equiv 156\,P, \bmod 425.$$

Da in der Regel im dritten und zeitweise im zweiten Jahre einzuschalten ist, so berechnet man dafür die Fehler

$$\delta 2 = 312 - 425 = -113,$$
$$\delta 3 = 468 - 425 = 43.$$

Bezeichnet nun a ein Schaltjahr überhaupt, so muß das erste Schaltjahr $a = 2$ und sein Fehler $\delta a = \delta 2 = -112$ werden. Uebergeht man ferner von einem Schaltjahre a auf ein um Δa späteres $a + \Delta a$, so ändert sich sein Fehler, von δa in $\delta(a + \Delta a) = \delta a + \delta\Delta a$, um $\delta\Delta a$; folglich, da diese Aenderung von δa auch, vermöge Vorbeg. XVI, durch $\Delta\delta a$ darzustellen kommt, ist $\Delta\delta a = \delta\Delta a$, d. h. die Aenderung des Fehlers gleich dem Fehler der Aenderung der Jahrzahl. Soll dies spätere Jahr gleichfalls ein Schaltjahr sein, so muß es um

$$\Delta a = 2 \text{ oder } 3 \text{ Jahre später eintreten,}$$

und bis zu ihm der Fehler sich ändern um

$$\Delta\delta a = \delta\Delta a = \delta 2 \text{ oder } \delta 3, \text{ d. i. um}$$
$$\Delta\delta a = \delta\Delta a = -113 \text{ oder } 43.$$

Wäre nun δa negativ, und käme dazu noch $\Delta\delta a = -113$, so müßte $-(\delta a + \delta\Delta a) < 213$, also $-\delta a < 100$ sein. So oft demnach der Fehler δa negativ und < 100 ist, kann man um $\Delta a = 2$ Jahr später einschalten und zum Fehler $\Delta\delta a = -113$ hinzufügen; sonst wird immer nach $\Delta a = 3$ Jahren eingeschaltet und dem Fehler $\Delta\delta a = 43$ zugelegt. Auf diese Weise müssen die Fehler am Ende der Schaltjahre durchgängig negativ ausfallen, und man vermag sehr leicht sowohl die negativen Fehler δa, als auch die 355tägigen Schaltiahre a, nach deren Schluß sie eintreten, dabei leztere nach der natürlichen Zahlenfolge, in folgende zwei Reihen, die bis an den Schluß einer 79jährigen Schaltperiode reichen, zusammen zu stellen.

$-\delta a =$	113,	70,	183,	140,	97,	210,	167,	124,	81,	194,	151,	108,	65,	178,	135,
$a =$	2,	5,	7,	10,	13,	15,	18,	21,	24,	26,	29,	32,	35,	37,	40,
$-\ a =$	92,	205,	162,	119,	76,	189,	146,	103,	60,	173,	130,	87,	200,	157,	
$a =$	43,	45,	48,	51,	54,	56,	59,	62,	65,	67,	70,	73,	75,	78.	

Dieselben Jahre findet man auch nach der in §. 20 II. und in §. 21 angewendeten Methode.

III. Anordnung des freien Mondjahres. Nach dem Gefundenen läßt sich nun das freie Mondjahr entweder dermaßen anordnen, daß man die hohlen Mondmonate fortlaufend nach einer der in §. 21. II ermittelten Perioden vertheilt, und dann je 12 nach einander folgende Monate in ein Mondjahr zusammen faßt, welches daher 6 oder 7 volle Monate, also 354 oder 355 Tage hält; oder man kann, in den (§. 22. I) gefundenen Schaltperioden, 354tägige gemeine Mondjahre mit 355tägigen Schaltjahren abwechseln lassen, und den Schalttag irgendwo, am besten am Ende des Jahres, einrechnen. Nach beiden Verfahren werden die Längen der Jahre fast immer gleich ausfallen.

23.

Ausgleichung des Mondjahres mit dem tropischen Sonnenjahre.

Sollen, wie bei den meisten semitischen Völkern, die Feste des Cultus nach dem Stande des Mondes und der Sonne gefeiert werden, so sind die Umlaufszeiten beider Gestirne dergestalt auszugleichen, daß sie als aliquote Theile desselben Zeitraumes erscheinen, oder daß eine volle Anzahl der einen Umlaufszeiten nahe genug einer vollen Anzahl der anderen gleicht; mit anderen Worten, es ist ein Kreis von ganzen nach der Sonne abgemessenen Jahren zu finden, der zugleich eine ganze Zahl synodischer Monate enthält. Ein solcher Zeitkreis wird sich ergeben, wenn man das Verhältniß beider Umlaufszeiten, wenigstens genähert, in ganzen Zahlen ausdrückt; denn ist dies Verhältniß

$$\text{Tropisches Jahr : Synodischer Monat} = a : m,$$

so hat man

$$m \text{ trop. Jahre} = a \text{ synod. Monate} = \text{gesuchter Zeitkreis.}$$

Da sich hiebei zeigt, daß das tropische Jahr nahe $12\frac{1}{3}$ synodische Monate enthält, so kann man bald $12 = l$, bald $13 = L$ synodische Monate in ein

Mondjahr zusammen fassen, welches auch im ersten Falle ein Gemeinjahr, im anderen aber, wo es um den Schaltmonat länger ist, ein Schaltjahr genannt wird, und sonach ein gebundenes Mondjahr ist.

I. Bestimmung der Schaltperioden für gebundene Mondjahre. Nach der Bestimmung T. Mayer's ist der synodische Monat $= 29\frac{458 \cdot 428283}{864}$ Tage $= \frac{25514 \cdot 428283}{864}$ Tag, und nach Lalande's Berechnung das tropische Sonnenjahr $= 365$ T. 5 St. $48' \, 48'' = 365\frac{209 \cdot 28}{864}$ Tag $= \frac{315569 \cdot 28}{864}$ Tag.

Demnach ist

$$\frac{\text{trop. Jahr}}{\text{synod. Monat}} = \frac{31556928}{2551442 \cdot 8283} = 12\frac{9396140604}{25514428283}$$
$$= 12 \cdot 36826773 = \lambda.$$

Man hat sofort, vermöge §. 17, unter je P Jahre M Schaltjahre zu vertheilen, indem man möglichst genähert

$$\frac{M}{P} = \lambda - 12 = \frac{9396140604}{25514428283} = 0 \cdot 36826773$$

und dabei P so klein als möglich wählt.

Sucht man die Näherungswerthe, so findet man zuvörderst die Quoti

$$2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 17,\ 2,\ 20, \ldots$$

und darnach die Näherungsbrüche $\frac{M}{P} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{7}{19}, \frac{123}{334}, \frac{253}{687}, \ldots$

Die fünf ersten Näherungsbrüche, und der aus dem vierten und fünften folgende Zwischenbruch $\frac{11}{30}$ sind ganz die sechs ersten Näherungsbrüche bei der Ausgleichung der bürgerlichen freien Mondjahre; folglich sind wenigstens die kleineren Schaltkreise, nach denen man das Mondjahr, durch Einschaltung eines Monates, mit dem Sonnenlaufe ausgleicht, dieselben, als nach welchen man es, durch Einschaltung eines Tages, mit dem Mondlaufe in Uebereinstimmung bringt. Ziemlich genau ist der fünfte Näherungsbruch $\frac{7}{19} = 0 \cdot 368421$, nur um $0 \cdot 000153$ zu groß; noch genauer ist der sechste $\frac{123}{334} = 0 \cdot 3682635$, also blos um $0 \cdot 000043$ zu klein; endlich für völlig genau dürfte man immerhin den siebenten $\frac{253}{687} = 0 \cdot 36826783$ anerkennen, da er blos um $0 \cdot 0000001$ zu groß ist.

Weil nun das Verhältniß

$$\frac{\text{trop. Jahr}}{\text{synod. Monat}} = \lambda = 12 + \frac{M}{P}$$

ist, so findet man genähert

$$P \text{ tropische Jahre} = (12\,P + M) \text{ synodische Monate;}$$

z. B. nach dem Näherungsbruche $\frac{7}{19}$, nahe

$$19 \text{ tropische Jahre} = 235 \text{ synodische Monate;}$$

nemlich nach etwa 19 tropischen Jahren oder 235 synodischen Mondmonaten, dem von Meton entdeckten Mondkreise, (§. 14. II) wiederkehren dieselben Stellungen der Lichtgestalten des Mondes gegen die Jahrpunkte.

II. **Vertheilung der Schaltmonate in den Schaltkreisen der gebundenen Mondjahre.** Sollen die Anfänge der Mondjahre von jenen der tropischen Jahre möglichst wenig, folglich höchstens um einen halben synodischen Monat abstehen; so nehme man, für die Austheilung der Schaltmonate, zur Vereinfachung der Rechnung, die eben gefundene Dauer des tropischen Jahres $\lambda = 12\frac{253}{687}$ synodische Monate, und den 687sten Theil eines solchen Monates zur Zeiteinheit an. Dann sind P astronomische Mondjahre mit M Schaltmonaten, vermöge §. 17, Gl. (2), wo für den vorliegenden Fall $L - l = 687$ und $\lambda - l = 253$ ist, kürzer als P tropische Jahre um

$$\delta P = 253P - 687M;$$

folglich, weil $\delta P \leqq \frac{1}{2}$ synod. Monat oder < 344 sein soll, ist der Fehler

$$\delta P = \pm r\frac{\pm 253P}{687} \equiv 253P, \bmod 687.$$

Gewöhnlich wird, wie bei freien Mondjahren (§. 22.), im dritten und *zuweilen im zweiten Jahre eingeschaltet, folglich* sind dafür die Fehler

$$\delta 2 = 506 - 687 = -181$$
$$\delta 3 = 759 - 687 = 72.$$

Bezeichnet wieder a *ein Schaltjahr überhaupt, so ist das erste Schaltjahr* $a = 2$ *und sein Fehler* $\delta a = \delta 2 = -181$. Das nächste Schaltjahr $a + \Delta a$ tritt um

$$\Delta a = 2 \text{ oder } 3 \text{ Jahre später ein,}$$

und inzwischen ändert sich der Fehler um

$$\Delta\delta a = \delta\Delta a = -181 \text{ oder } 72.$$

Sollte dabei δa negativ sein, und dazu noch $\Delta\delta a = -181$ kommen, so müßte $-(\delta a + \delta\Delta a) < 344$ also $-\delta a < 163$ sein. So oft demnach der Fehler δa negativ und < 163 ist, kann man um $\Delta a = 2$ Jahre später einschalten und zum Fehler $\Delta\delta a = -181$ hinzufügen; sonst wird immer nach $\Delta a = 3$ Jahren eingeschaltet, und dem Fehler $\Delta\delta a = 72$ zugesezt. Auf diese Weise fallen am Ende der Schaltjahre die Fehler stets negativ aus, und man ist im Stande, sowohl die negativen Fehler δa, als auch die 13monatlichen Schaltjahre, denen sie zukommen, in folgende zwei Reihen, welche ebenfalls, wie die obige (in §. 22. II), 79 Jahre umfassen, zusammen zu stellen.

$-\delta a =$ 181, 109, 290, 218, 146, 327, 255, 183, 111, 292, 220, 148, 329, 257, 185,
$a =$ 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 21, 24, 26, 29, 32, $\underline{34}$, 37, 40,

$-\delta a =$ 366, 294, 222, 150, 331, 259, 187, 115, 296, 224, 152, 333, 261, 189,
$a =$ $\underline{42}$, 45, 48, 51, $\underline{53}$, 56, 59, 62, $\underline{64}$, 67, 70, $\underline{72}$, 75, 78.

Bis auf die unterstrichenen Jahre, in denen die Einschaltung um ein Jahr früher erfolgt, stimmen diese 29 Schaltjahre ganz mit den oben (in §. 22. II) für die freien Mondjahre gefundenen überein.

24.

Anzahl und Kennzeichen der Schaltjahre einer Aere.

I. Sind in einer Aere die Schaltjahre periodisch vertheilt, dergestalt, daß in jeder ϖjährigen Periode ε Schaltjahre vorkommen, namentlich die Jahre $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{\varepsilon-1}$; so läßt sich aus diesen Angaben leicht die Hilfszahl δ nach Vorb. (177) oder (178) bestimmen, mit der Bemerkung, daß weil vor dem ersten Jahre kein Schaltjahr sein kann, nach (180) $\varepsilon + \delta = 0, 1, \ldots \varpi - 1$ sein muß; und sofort ergibt sich die Anzahl e der vom Beginn der Aere bis zum Anfange des Jahres a verflossenen Schaltjahre, wenn man in Vorb. (189) x in a, und u in e umtauscht,

$$(5) \qquad e = \mathfrak{q}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}.$$

Das Jahr ist ein Schaltjahr, wenn bei dem Uebergange von a auf a + 1 die Anzahl e gleichfalls um 1 zunimmt, also vermöge (196), wenn

$$(6) \qquad \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi} \geqq \varpi - \varepsilon \text{ oder } > \varpi - \varepsilon - 1$$
$$= \varpi - \varepsilon,\ \varpi - \varepsilon + 1, \ldots . \varpi - 1 \text{ ist.}$$

Bezeichnet man die Anzahl der Einschaltungen (der Schalttage oder Schaltmonate), welche im Jahre a überhaupt eintreten, mit i; wornach also i in Gemeinjahren 0 und in Schaltjahren 1 ist; so erhält man dafür, indem man in Gl. (193) i statt w schreibt, den Ausdruck

$$(7) \qquad i = \mathfrak{q}\frac{\varepsilon(a+1)+\delta}{\varpi} - \mathfrak{q}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi} = \mathfrak{q}\frac{\varepsilon + \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}}{\varpi}.$$

Beispiel. Rechnet man nach freien Mondjahren, und läßt man, so wie oben in §. 22. II. gefunden wurde, in jeder 30jährigen Periode die 11 Jahre 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 21, 24, 26, 29, Schaltjahre sein; so hat man $\varpi = 30$, $\varepsilon = 11$, und in (175)

$$\Sigma\xi = 2+5+7+10+13+15+18+21+24+26+29 \equiv 20, \bmod 30$$

daher nach (177)

$$\delta \equiv -\frac{11+1}{2} - 20, \bmod 30 \equiv -6+10 \equiv 4$$

und vermöge (180) $\delta = 4$.

In einer solchen Aere verfließen bis zum Jahre a der Schaltjahre $e = \mathfrak{q}\frac{11a+4}{30}$; und das Jahr a ist selbst ein Schaltjahr, wenn $\mathfrak{r}\frac{11a+4}{30} \geqq 19$ oder > 18; überhaupt enthält es $i = \mathfrak{q}\frac{11+\mathfrak{r}\frac{11a+4}{30}}{30}$ Schalttage.

Z. E. Bis zum Anfange des Jahres 1246 = a sind $e = \mathfrak{q}\frac{13710}{30}$ $= 457$ Schaltjahre, mithin $(1246 - 1) - 457 = 1245 - 457 = 788$ Gemeinjahre vergangen, es ist $\mathfrak{r}\frac{13710}{30} = 0$, und $i = \mathfrak{q}\frac{11+0}{30} = 0$, folglich dieses Jahr ein Gemeirjahr.

II. Ist insbesondere in einem ϖjährigen Schaltkreise nur das Jahr ξ ein Schaltjahr, so verfließen in der Aere bis zum Jahre a vermöge (202)

$$(8) \qquad e = \mathfrak{q}\frac{a+\varpi-\xi-1}{\varpi} \text{ Schaltjahre;}$$

das Jahr a ist ein Schaltjahr, so oft $a \equiv \xi$, mod ϖ ist, und es kommen in ihm überhaupt

$$(9) \qquad i = \mathfrak{q}\frac{a+\varpi-\xi}{\varpi} - \mathfrak{q}\frac{a+\varpi-\xi-1}{\varpi} = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{a-\xi}{\varpi}}{\varpi} \text{ Einschaltungen vor.}$$

Beispiel. Läßt man bei einer Zeitrechnung nach Sonnenjahren, so wie oben (§. 19.) gefunden wurde, in jedem $4 = \varpi$jährigen Schaltkreise eines der Jahre $1, 2, 3, 4 = \xi$ den Schalttag enthalten; so kommen bis zum Jahre a

$$\text{Schaltjahre } e = \mathfrak{q}\frac{a+2}{4},\ \mathfrak{q}\frac{a+1}{4},\ \mathfrak{q}\frac{a}{4},\ \mathfrak{q}\frac{a-1}{4} \text{ vor;}$$

das Jahr a ist ein Schaltjahr, wenn

$$a \equiv 1, \quad 2, \quad 3, \quad 0, \text{ mod } 4;$$

und enthält Schalttage $i = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{a-1}{4}}{4},\ \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{a-2}{4}}{4},\ \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{a+1}{4}}{4},\ \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{a}{4}}{4}$.

25.

Zu einem Monatstage den Jahrstag und umgekehrt bestimmen.

Um zu jedem Monatstage anzugeben, der wievielte Tag im Jahre er sei, können zwar gleichfalls aus den Längen der Monate algebraische Formen aufgestellt werden, wie es bei einigen Zeitrechnungen geschehen soll; allein meistens ist es bequemer, in einem besonderen Täfelchen ersichtlich zu machen: die Folge und Dauer der Monate der angegebenen Jahrform, ferner die Summe der nach jedem Monate abgelaufenen Tage, und den Jahrstag des nullten Tages jedweden Monates, nemlich der wievielte Tag im Jahre der lezte Tag des nächst vorangehenden Monates ist, oder nach dem wievielten Tage des Jahres dieser Monat anfängt.

Zeigt nun eine solche Tafel, daß der 0^{te} Tag eines Monates der $d_0{}^{te}$ im Jahre ist, so muß der t^{te} Tag dieses Monates der $d_0 + t = d^{te}$ Tag des Jahres sein.

Mittels derselben Tafel kann man auch umgekehrt bestimmen, in welchen Monat und auf den wievielten Tag desselben der d^{te} Tag des Jahres trifft. Denn zeigt die Tafel, daß der diesem d^{ten} Jahrstage zunächst vorangehende nullte Monatstag der $d_0{}^{te}$ Tag im Jahre ist, so muß der d^{te} Jahrstag in demselben Monate der $d - d_0 = t^{te}$ Tag sein.

Anwendungen hievon finden sich in §. 41.

26.

Zu einem Jahr und Tag den Tag der Aere bestimmen.

Bei einer Zeitangabe (einem Datum) wird gewöhnlich das Jahr einer Aere, der Monat desselben, und darin der Tag angeführt. Statt des Monatstages kann man, nach dem so eben Gesagten, den für die Rechnung bequemeren Jahrstag einführen. Da nun wirft sich die in vielen folgenden Forschungen wiederkehrende wichtige Frage auf: »Wenn aus einem Jahre einer Aere ein Tag, mittels seiner Nummer, angegeben wird; der wievielte Tag ist er in der Aere selbst?«

I. Sei das Jahr a der Aere, und in ihm der d^{te} Tag bezeichnet, so sind bis zum Anfange dieses Jahres $a - 1$ Jahre verflossen. Unter diesen seien e Schaltjahre, folglich $a - 1 - e$ Gemeinjahre; dabei halte ein Gemeinjahr l, ein Schaltjahr aber $l + \Delta l$ Tage. Dann vergingen bis zum Anfange jenes Jahres

$$(a - 1 - e)\, l + e\,(l + \Delta l) = (a - 1)\, l + e\Delta l \text{ Tage.}$$

Soll nun sein d^{ter} Tag der n^{te} in der ganzen Aere sein, so hat man

$$(10) \qquad n = (a - 1)\, l + e\Delta l + d.$$

Sind die Schaltjahre, auf die (in §. 24.) beschriebene Weise, periodisch in der Aere vertheilt, so kann man e durch den dortigen Ausdruck (5) oder (8) ersetzen, und erhält

$$(11) \qquad n = (a - 1)\, l + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\,\Delta l + d.$$

II. Die bis zum Anfange des Jahres a vergangenen

$$n - d = (a - 1)\, l + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\,\Delta l \text{ Tage}$$

gestatten noch ein Paar andere brauchbare Ausdrücke. Es ist

$$a = \varpi\,\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi} + \mathfrak{R}\frac{a}{\varpi},$$

daher

$$\mathfrak{q}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi} = \varepsilon\,\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi} + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon\,\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} + \delta}{\varpi},$$

folglich wird

$$n - d = (\varpi l + \varepsilon\Delta l)\,\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi} + \left(\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} - 1\right) l + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon\,\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} + \delta}{\varpi}\,\Delta l.$$

Da in jeder ϖjährigen Schaltperiode ε Schaltjahre vorkommen, welche um Δl Tage länger als die $l$tägigen Gemeinjahre sind, so enthält die ganze Periode

$$(12) \qquad \varpi l + \varepsilon \Delta l = p \text{ Tage};$$

und dadurch übergeht obiger Ausdruck in

$$(13) \quad n - d = p\,\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi} + \left(\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} - 1\right) l + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon\,\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} + \delta}{\varpi}\,\Delta l.$$

Sezt man endlich hierin, vermöge **VI**, (7) und (8), $\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi} = \mathfrak{q}\frac{a-1}{\varpi}$ und $\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} = \mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi} + 1$, oder gleich ursprünglich $a - 1 = \varpi\mathfrak{q}\frac{a-1}{\varpi} + \mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi}$; so gewinnt man auch noch den Ausdruck

$$(14) \quad n - d = p\,\mathfrak{q}\frac{a-1}{\varpi} + \mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi}\,l + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon\,\mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi} + \varepsilon + \delta}{\varpi}\,\Delta l.$$

Vom Anbeginn der Aere sind aber bis zum Jahre a volle ϖjährige Schaltkreise $\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi} = \mathfrak{q}\frac{a-1}{\varpi}$, und vom laufenden Schaltkreise noch $\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} - 1 = \mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi}$ Jahre verflossen. Die ersten Glieder der aufgestellten Ausdrücke geben demnach die in den verflossenen ganzen Schaltkreisen, die zwei lezten Glieder zusammen, die in den abgelaufenen Jahren des eben im Zuge begriffenen Schaltkreises enthaltenen Tage an, insbesondere das zweite Glied die gewöhnlich laufenden Tage und das dritte Glied die Schalttage; und darnach lassen sich jene Ausdrücke auch direct aufstellen. Sie gewähren hauptsächlich den Vortheil, daß man in einer Tafel die, in den nach einander folgenden Anzahlen voller Schaltkreise (mindestens in 1, 2, ... 9 Schaltkreisen) enthaltenen Tage, und in einer anderen die nach den einzelnen Jahren eines Schaltkreises vergangenen Tage verzeichnen, und durch Anwendung dieser Tafeln die Rechnung bedeutend abkürzen kann.

27.

Zu einem Tage einer Aere Jahr und Tag bestimmen.

Eben so wichtig, wie die vorhergehende, ist die umgekehrte Aufgabe: »Wenn ein Tag einer Aere angegeben wird, zu bestimmen, in das wievielte Jahr, und auf den wievielten Tag desselben er trifft.«

Sei nun der $n$te Tag einer Aere angegeben, und das Jahr a so wie der Tag d desselben zu suchen, worauf er trifft.

I. Geschieht die Einschaltung beliebig, periodisch oder nicht, so kann man a und d aus der Gleichung

$$(10) \qquad (a - 1)\,l + e\Delta l + d = n$$

auf folgende Weise finden. Zunächst erhält man aus ihr

$$(a - 1)\, l + d = n - e\Delta l.$$

Vernachlässigt man hierin vorerst die Schalttage $e\Delta l$, deren in Vergleich gegen n nur wenige sind, und bezeichnet man den vorläufigen, wenigstens einiger Maßen genäherten, Werth von a durch a'; so kann man, weil $d = 1, 2, \ldots l + \Delta l$ sein muß, setzen

$$a' - 1 = \mathfrak{Q}\frac{n}{l}$$

oder (15) $$a' = \mathfrak{Q}\frac{n}{l} + 1 = -\,\mathfrak{q}\frac{-n}{l}$$
$$= \text{oberer Quotus von } n : l.$$

Zu dieser ungefähr richtigen Jahrzahl a', welche höchstens etwas zu hoch sein kann, läßt sich sofort die ihr entsprechende Anzahl der Schaltjahre e' berechnen, die folglich gleichfalls etwas zu groß sich ergeben könnte.

Sei nun die richtige Jahrzahl a um $\Delta a'$ kleiner als die beiläufige a', nemlich (16) $a = a' - \Delta a'$,
und die wahre Anzahl der Schaltjahre e um $\Delta e'$ kleiner als die beiläufige e' nemlich (17) $e = e' - \Delta e'$.

Dann liefern obige Gleichungen

$$d = n - (e' - \Delta e')\,\Delta l - l\,(a' - 1 - \Delta a')$$
$$= n - l\,\mathfrak{Q}\frac{n}{l} - e'\Delta l + l\,.\,\Delta a' + \Delta l\,.\,\Delta e'$$

oder (18) $$d = \mathfrak{R}\frac{n}{l} - e'\Delta l + l\Delta a' + \Delta l\,.\,\Delta e'.$$

So lange nunmehr $e'\Delta l < \mathfrak{R}\frac{n}{l}$ ausfällt, kann man sowohl $\Delta a' = 0$, als auch $\Delta e' = 0$ setzen, und findet sonach

$$a = a', \quad e = e', \quad d = \mathfrak{R}\frac{n}{l} - e'\Delta l.$$

Sobald aber $e'\Delta l \geqq \mathfrak{R}\frac{n}{l}$ sich ergibt, bemißt man, weil $d = 1, 2, \ldots l + \Delta l$ sein muß, nach dem Unterschiede $e'\Delta l - \mathfrak{R}\frac{n}{l}$ die erforderliche Zurückschiebung $\Delta a'$ des Jahres a', so daß $l\Delta a'$ größer als dieser Unterschied ausfällt, indem man

(19) $$\Delta a' = \text{oberen Quotus von} \left(e'\Delta l - \mathfrak{R}\frac{n}{l}\right) : l.$$
$$= -\,\mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{n}{l} - e'\Delta l}{l} = \mathfrak{Q}\frac{e'\Delta l - \mathfrak{R}\frac{n}{l}}{l} + 1$$

annimmt. Daraus ersieht man dann zugleich, ohne besondere Schwierigkeit, die Anzahl $\Delta e'$ der Schaltjahre, um welche bei der bestehenden Schaltweise bis zum Jahre $a' - \Delta a'$ weniger sind, als bis zum Jahre a'. Kennt man aber $\Delta a'$ und $\Delta e'$, so kann man sogleich a, e und d genau berechnen.

II. Etwas einfacher stellt sich die Lösung der Aufgabe auf folgendem Wege. Aus der Gleichung (10) folgt sogleich

$$a - 1 \leqq \mathfrak{Q}\frac{n}{l}$$

daher

$$a - 1 = \mathfrak{Q}\frac{n}{l} - \Delta a.$$

Dann ist $\quad d = n - l\,\mathfrak{Q}\frac{n}{l} - e\Delta l + l\Delta a,$

oder $\quad d = \mathfrak{R}\frac{n}{l} - e\Delta l + l\Delta a.$

Bestimmt man demnach $n = l\,\mathfrak{Q}\frac{n}{l} + \mathfrak{R}\frac{n}{l}$, nemlich, indem man n durch l außerordentlich theilt, die Zahlen $\mathfrak{Q}\frac{n}{l}$ und $\mathfrak{R}\frac{n}{l}$; so ist ein vorläufiger Werth für die Jahrzahl $a = \mathfrak{Q}\frac{n}{l} + 1$. Dazu sucht man e, und $\mathfrak{R}\frac{n}{l} - e\Delta l$, woraus man dann fast immer sehr leicht entnimmt, wie groß man, damit d wenigstens 1 und höchstens $= l + \Delta l$ werde, die Correction Δa zu nehmen hat. Nach ihr bestimmt man sofort die richtige Jahrzahl

$$(20) \qquad a = \mathfrak{Q}\frac{n}{l} + 1 - \Delta a,$$

aus dieser die wahre Anzahl e der bisherigen Einschaltungen, und darnach endlich den Jahrestag

$$(21) \qquad d = \mathfrak{R}\frac{n}{l} - e\Delta l + l\Delta a.$$

28.

Fortsezung.

III. Wird periodisch eingeschaltet, nemlich in je ϖ Jahren ε Mal, so kann man a und d aus einer der weiteren Gleichungen in §. 26. berechnen. Wählt man dazu die erstere

$$(11) \qquad (a-1)\,l + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\,\Delta l + d = n,$$

so multiplicire man sie mit ϖ, und seze darin

$$\varpi\,\mathfrak{q}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi} = \varepsilon a + \delta - \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi};$$

dadurch erhält man

$$a\,(\varpi l + \varepsilon\Delta l) - \varpi l + \varpi d - \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\,\Delta l = \varpi n - \Delta l.\delta$$

oder wegen §. 26. Gl. (12)

$$p\,(a-1) + \varpi d - \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\,\Delta l = \varpi n - (\delta + \varepsilon)\,\Delta l.$$

Ist nun $\quad d = 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ l,$

folglich $\quad \varpi d = \varpi,\ 2\varpi,\ \ldots\ldots\ \varpi l,$

so ist $$\mathfrak{E}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi} = \varpi-1,\ \varpi-2,\ \ldots\ldots\ 1,\ 0,$$

daher $$\varpi d - \mathfrak{E}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\,\Delta l = \varpi - (\varpi-1)\,\Delta l,\ \ldots\ldots\ \varpi l < p.$$

Diese Reste werden also im Allgemeinen so lange negativ ausfallen, als nicht $\varpi d \geqq \mathfrak{E}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\,\Delta l$, folglich $d \geqq 1 + \left(\mathfrak{E}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\,\Delta l \underset{\mathfrak{Q}}{:} \varpi\right)$ ist; jedoch sicher positiv, sobald $d \geqq \Delta l$ ist. Für den gewöhnlichsten Fall, wo $\Delta l = 1$ ist, werden sie jedoch durchgängig positiv > 0 und $< p$.

Ist aber in einem Schaltjahre $d = l + \Delta l$, so muß $\mathfrak{E}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi} \geqq \varpi - \varepsilon$ sein, also ist $\varpi d - \mathfrak{E}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi} \leqq \varpi l + \varepsilon\Delta l$, d. h. höchstens $= p$.

Man kann demnach, wenn $\Delta l = 1$ ist, jederzeit, und falls $\Delta l > 1$ sein sollte, wenigstens für eine äußerst genaue Annäherung, vermöge Vorbegr. V, 2, setzen

$$(22)\qquad a = \mathfrak{Q}\frac{\varpi n - (\delta+\varepsilon)\,\Delta l}{p} + 1 = \mathfrak{Q}\frac{\varpi(n+l) - \Delta l.\delta}{p}$$

und $$\varpi d - \mathfrak{E}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\,\Delta l = \mathfrak{R}\frac{\varpi n - (\delta+\varepsilon)\,\Delta l}{p} = \mathfrak{R}\frac{\omega(n+l) - \Delta l.\delta}{p};$$

woraus sogleich sich ergibt

$$(23)\qquad d = \left(\mathfrak{E}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\,\Delta l + \mathfrak{R}\frac{\varpi n - (\delta+\varepsilon)\Delta l}{p}\right) : \varpi.$$

Doch kann man auch nach Gl. (11) den Ausdruck

$$(24)\qquad d = n - (a-1)\,l - \mathfrak{q}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\,\Delta l \text{ verwenden.}$$

Für den äußerst seltenen Fall, wo $d > l + i\Delta l$ (die Zahl i nach §. 24, (7) oder (9) bestimmt), d. h. d größer als die Anzahl der Tage des Jahres a werden sollte, was nur möglich wäre, wenn $\Delta l > 1$ ist; fällt der angegebene $n$te Tag der Aere in's nächst folgende Jahr $a+1$ auf den Tag $d-(l+i\Delta l)$.

IV. Benützt man dagegen die Gleichung (13), so hat man

$$p\,\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi} + \left(\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} - 1\right)l + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}+\delta}{\varpi}\,\Delta l + d = n.$$

Im ersten Theile dieser Gleichung drückt die Summe der drei letzten Glieder, vermöge §. 26, II, aus, der wievielte der angegebene Tag in der laufenden Schaltperiode ist, folglich kann diese Summe von 1 bis p reichen. Demgemäß gibt die Gleichung, nach Vorbegr. V, 2, die Anzahl der verflossenen vollen Schaltkreise

$$(25)\qquad \mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi} = \mathfrak{Q}\frac{n}{p},$$

und überdies die Nummer des zu suchenden Tages in der laufenden Periode,

$$(26)\quad \left(\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} - 1\right)l + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon\,\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} + \delta}{\varpi}\Delta l + d = \mathfrak{R}\frac{n}{p}.$$

Aus der letzteren Gleichung findet man nach der gleichgestalteten (11), so wie in (22) und (23), das Jahr in der Periode

$$(27)\quad \mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} = \mathfrak{Q}\frac{\varpi\,\mathfrak{R}\frac{n}{p} - (\delta+\varepsilon)\Delta l}{p} + 1,$$

und den Jahrstag

$$(28)\qquad d = \left(\mathfrak{r}\frac{\varepsilon\,\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} + \delta}{\varpi}\Delta l + \mathfrak{R}\frac{\varpi\,\mathfrak{R}\frac{n}{p} - (\delta+\varepsilon)\Delta l}{p}\right) : \varpi.$$

Die Gleichung (26) gestattet aber auch folgende Auflösung. Es ist

$$\mathfrak{q}\frac{\varepsilon\,\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} + \delta}{\varpi}\Delta l = (0, 1, \ldots \varepsilon)\,\Delta l$$

$$d = 1, 2, \ldots l + \Delta l$$

daher $\left(\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} - 1\right)l = \mathfrak{R}\frac{n}{p} - 1,\ \mathfrak{R}\frac{n}{p} - 2, \ldots \mathfrak{R}\frac{n}{p} - l - (1+\varepsilon)\Delta l$

und $(29)\qquad \mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} \geqq \dfrac{\mathfrak{R}\frac{n}{p} - (\varepsilon+1)\Delta l}{l}$, aber $< \dfrac{\mathfrak{R}\frac{n}{p}}{l} + 1$.

Das Jahr $\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}$ der Periode wird demnach meistens $= \mathfrak{Q}\dfrac{\mathfrak{R}\frac{n}{p}}{l} + 1$, oder höchstens um 1 kleiner sein. Zu diesem Resultate gelangt man auch, wenn man in der Gleichung (26), so wie in §. 27. I die ohnehin nicht über $\varepsilon\Delta l$ steigenden Schalttage vernachlässigt.

Nach ihm bestimmt man sofort den Jahrstag

$$(30)\qquad d = \mathfrak{R}\frac{n}{p} - \left(\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} - 1\right)l - \mathfrak{q}\frac{\varepsilon\,\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} + \delta}{\varpi}\Delta l.$$

Aus $\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi}$ und $\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}$ findet man endlich die Jahrszahl selbst

$$(31)\qquad a = \varpi\,\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi} + \mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}.$$

V. Besitzt man zwei Tafeln, wie die oben in §. 26, II beschriebenen, so entnimmt man für den gegebenen nten Tag der Aere aus der ersten Tafel die Tage $p\,\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi}$ der bis zu ihm verflossenen vollen Schaltperioden, und zugleich die Anzahl $\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi}$ dieser Schaltperioden, oder besser die Zahl der in ihnen enthaltenen Jahre $\varpi\,\mathrm{Q}\frac{a}{\varpi}$. Zieht man die erstere Zahl $p\,\mathrm{Q}\frac{a}{\varpi}$, welche auch anzeigt, der wievielte Tag der Aere der nullte der laufenden Periode ist, von der Nummer n ab, so gibt der Rest $n - p\,\mathrm{Q}\frac{a}{\varpi}$ an, der wievielte Tag der laufenden Periode der angewiesene nte Tag der Aere ist. — Zu diesem Reste liefert die größte darin enthaltene Zahl der zweiten Tafel,

$$\left(\mathrm{R}\frac{a}{\varpi} - 1\right)l + \mathrm{q}\frac{\varepsilon\,\mathrm{R}\frac{a}{\varpi} + \delta}{\varpi}\Delta l,$$

die Tage der in dieser Periode bis zum Beginn des laufenden Jahres vergangenen ganzen Tage, welche Zahl zugleich ansagt, der wievielte Tag der laufenden Periode der nullte Tag des laufenden Jahres ist; überdies erfährt man auch die Nummer $\mathrm{R}\frac{a}{\varpi}$ des laufenden Jahres, und wenn man diese zur obigen Zahl $\varpi\,\mathrm{Q}\frac{a}{\varpi}$ addirt, die verlangte Jahrzahl a selbst. Zieht man sofort die aus der zweiten Tafel entnommene Zahl von dem ersten Reste ab, so ist der zweite Rest der gesuchte Jahrstag d selbst.

29.

Fortsetzung.

VI. Endlich läßt sich zur Auflösung dieser Aufgabe auch die Gleichung (14) verwenden, indem man zur deutlicheren Einsicht in den Gang der Rechnung die, vor dem zu betrachtenden Tage, verflossenen Tage zählt, und ihr die Gestalt

$$p\,\mathrm{q}\frac{a-1}{\varpi} + \mathrm{r}\frac{a-1}{\varpi}\,l + \mathrm{q}\frac{\varepsilon\,\mathrm{r}\frac{a-1}{\varpi} + \varepsilon + \delta}{\varpi}\Delta l + d - 1 = n - 1$$

anweist. Daraus findet sich nun sogleich die Anzahl der verflossenen vollen Schaltkreise

$$\mathrm{q}\frac{a-1}{\varpi} = \mathrm{q}\frac{n-1}{p}, \tag{32}$$

und die Anzahl der vor dem zu suchenden Tage von der laufenden Periode bereits vergangenen Tage

$$\mathrm{r}\frac{a-1}{\varpi}\,l + \mathrm{q}\frac{\varepsilon\,\mathrm{r}\frac{a-1}{\varpi} + \varepsilon + \delta}{\varpi}\Delta l + d - 1 = \mathrm{r}\frac{n-1}{p}.$$

Vernachlässigt man hierin die durch das zweite Glied angegebenen Schalttage, da ihrer höchstens $\varepsilon\Delta l$ sein können, so findet man die Zahl der von der laufenden Periode schon verflossenen Jahre

$$\mathrm{r}\frac{a-1}{\varpi} = \mathrm{q}\frac{\mathrm{r}\frac{n-1}{p}}{l}, \tag{33}$$

und die vom laufenden Jahre vergangenen Tage

$$(34)\qquad d-1=\mathfrak{r}\frac{n-1}{p}-\left(\mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi}\,l+\mathfrak{q}\frac{\varepsilon\,\mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi}+\varepsilon+\delta}{\varpi}\,\Delta l\right).$$

Daraus ergibt sich leicht die ganze Zahl der abgelaufenen Jahre

$$(35)\qquad a-1=\varpi\mathfrak{q}\frac{a-1}{\varpi}+\mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi},$$

und darnach die verlangte Jahrzahl a, so wie der Jahrstag d.

VII. Besonders, wenn man die oben in §. 26, II beschriebenen Tafeln besitzt, ist der Zug der Rechnung höchst klar und einfach. Man theile die um 1 verringerte Ordnungszahl n des angegebenen Tages der Aere, d. i. die Anzahl n — 1 der vor ihm verflossenen Tage, durch die Zahl p der Tage eines Schaltkreises. Der Quotus gibt die Anzahl der abgelaufenen vollen Schaltkreise $\mathfrak{q}\frac{n-1}{p}$, und wenn man mit ihm die Zahl ϖ der Jahre eines Schaltkreises multiplicirt, die in jenen Kreisen enthaltenen Jahre selbst. Der Rest $\mathfrak{r}\frac{n-1}{p}$ aber zeigt die von der laufenden Periode bereits vergangenen Tage an. Alles dieses gibt die Tafel der Dauer der vollen Schaltkreise noch leichter mit einer einzigen Subtraction. Hebt man ferner aus der zweiten Tafel die größte in dem Reste noch enthaltene Zahl, d. i. die Tage der vor dem laufenden Jahre verflossenen Jahre der Periode; so gibt ihre Ergänzung zum Reste die Anzahl d — 1 der vor dem zu suchenden Tage vergangenen Tage, und um 1 vermehrt zeigt sie den geforderten Jahrstag d. Zugleich liefert die zweite Tafel auch die schon abgelaufenen Jahre $\mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi}$ der Periode; addirt man sie zu den Jahren $\varpi\mathfrak{q}\frac{a-1}{\varpi}$ der abgelaufenen Schaltkreise, so erhält man die vor dem zu suchenden Jahre hergehenden Jahre a—1, und wenn man dazu noch 1 zählt, die Jahrzahl a selbst.

30.

Berechnung der Wochentage.

Legt man den 7 Tagen der Woche, statt ihrer Namen, Nummern auf, nach dem gewöhnlichen Gebrauche die Nummern von 1 bis 7; so kann man mit diesen wie mit anderen Ordnungszahlen rechnen. Nach diesen 7 Zahlen zählt man demnach die fortlaufenden Tage der Monate, Jahre, Jahrkreise und Aeren stets wiederkehrend. Daher ist die Bestimmung des Wochentags, auf den ein bezeichneter Tag eines Jahres trifft, eine sehr gewöhnliche Aufgabe, die hier nach ihren Grundzügen gelöst werden soll.

Ist nun ein Datum durch Aere, Jahr, Monat und Tag angegeben, so kann man den Monatstag, nach §. 25, auf den Jahrstag, und diesen wieder, nach §. 26, auf den Tag der Aere zurückführen. Sei dieser Tag der nte in der Aere, und er treffe auf den noch zu bestimmenden hten Wochentag. Bekannt sei hiebei, daß ein anderer Tag dieser Aere, der Nte auf den Wochentag H treffe. Unter diesen Voraussezungen hat man, in XVIII, 5 der Vorbegriffe, nur t, p und P in 7, h und H umzutauschen, und erhält sogleich nach (84) für den verlangten Wochentag h überhaupt den Ausdruck

$$(36)\qquad h \equiv H + n - N,\ \text{mod}\ 7$$

und wenn man, wie üblich, die Wochentage von 1 bis 7 zählt

$$(37)\qquad h = R\frac{n - N + H}{7}.$$

Der erstere Ausdruck ist in der Darstellung einfacher und in der Rechnung bequemer; er möge daher im Folgenden jederzeit den lezteren vertreten. Bei seiner Anwendung kann man sogar die höchst bequemen kleinsten Reste nach dem Theiler oder Modul 7 zur Numerirung der Wochentage verwenden, indem man sich, was wohl keine Mühe fordert, gewöhnt,

die negativen Reste	0,	— 1,	— 2,	— 3
den Wochentagen	7,	6,	5,	4

beizulegen, so daß 0 den Schlußtag der Woche, — 1 den ersten, — 2 den zweiten und — 3 den dritten Tag vor dem Schlußtage bezeichnet; und im Zusammenhange

den Wochentagen	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	1,	2,	3, . . .
die kleinsten Reste	1,	2,	3,	— 3,	— 2,	— 1,	0,	1,	2,	3, . . .

zuzuweisen. Selbst der Modul 7 kann weg bleiben, wo man mit Bestimmtheit weiß, daß h einen Wochentag andeutet.

Sei H_0 der Wochentag des 0ten Tags der Aere, oder die Aere fange nach dem H_0ten Wochentage an, so kann man $N = 0$ und $H = H_0$ sezen. Oder überhaupt sei $H - N \equiv H_0$, mod 7, nemlich H_0 der kleinste Rest von $H - N$ durch 7. Dann vereinfacht sich der Ausdruck des Wochentages h, auf den der nte Tag der Aere trifft, in

$$(38)\qquad h \equiv n + H_0.$$

Ist der 0te Tag eines Jahres der Nte in der Aere und trifft er auf den Wochentag H, oder fängt dies Jahr nach dem Hten Wochentage an; so fällt der dte Tag dieses Jahres, als der $N + d =$ nte Tag der Aere auf den Wochentag

$$(39)\qquad h \equiv d + H.$$

Will man im vorigen Falle n durch Jahr a und Tag d ausdrücken, so hat man, nach §. 26,

$$(10)\qquad n = (a - 1)\,l + e\Delta l + d;$$

daher den Wochentag des dten Tages im aten Jahre

$$(40)\qquad h \equiv (a - 1)\,l + e\Delta l + d + H_0.$$

Wird periodisch, in je ϖ Jahren ε Mal, eingeschaltet, so ist, nach §. 24,

$$(5) \qquad e = \mathfrak{q}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi},$$

also auch

$$(41) \qquad h \equiv (a-1)\,l + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\Delta l + d + H_0.$$

Da man immer bequemer mit den Resten als mit den Quotis rechnet, so kann man folgende Umstaltung dieser Congruenz vornehmen. Es ist nach Gl. (5)

$$\varepsilon a + \delta = \varpi e + \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi},$$

also

$$\varpi e = \varepsilon a + \delta - \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}.$$

Gibt nun das ψfache von ϖ durch 7 getheilt den Rest 1, so daß

$$(42) \qquad \varpi\psi \equiv 1, \text{ mod } 7$$

ist, so übergeht diese Gleichung, wenn man sie mit ψ multiplicirt, in

$$e \equiv \psi\left(\varepsilon a + \delta - \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\right), \text{ mod } 7.$$

Durch Einführung dieses Ausdruckes in (41) ergibt sich sofort

$$(43) \qquad h \equiv a(l + \psi\varepsilon\Delta l) + \psi\left(\delta - \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\right)\Delta l + d + H_0 - l.$$

Nun ist aber die Zahl der Tage eines ϖjährigen Schaltkreises, nach §. 26, II,

$$(12) \qquad \varpi l + \varepsilon\Delta l = p,$$

daher wenn man diese Gleichung mit ψ multiplicirt, vermöge (42)

$$l + \psi\varepsilon\Delta l \equiv p\psi, \text{ mod } 7.$$

Dadurch verwandelt sich der Ausdruck des Wochentages noch in den für die Rechnung bequemsten

$$(44) \qquad h \equiv p\psi . a - \psi\Delta l . \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi} + d + H_0 - l + \psi\Delta l . \delta.$$

Setzt man darin $d = 0$, so findet man den Wochentag H des 0. Tages im Jahre a

$$(45) \qquad H \equiv p\psi . a - \psi\Delta l . \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi} + H_0 - l + \psi\Delta l . \delta,$$

und wie früher den Wochentag des $d$ten Tages dieses Jahres

$$(39) \qquad h \equiv d + H.$$

31.

Verwandlung der Data.

Allgemeines Verfahren.

Eine der Hauptaufgaben der Chronologie verlangt, daß zu einem bekannten Datum nach einer Zeitrechnung das entsprechende nach einer anderen gesucht werde. Da jedoch die Tage der Zeitrechnungen nicht durchgängig mit einerlei Tageszeit anheben; so ist es am angemessensten, jeden außermitternächtlichen Anfang stets auf die nächste Mitternacht zu verlegen, und zwar auf die nächst vorhergehende, wenn der Tag entweder Morgens oder Mittags beginnt, dagegen auf die nächst folgende Mitternacht, wenn der Tag Abends anfängt*). Demnach entsprechen Tage zweier Zeitrechnungen einander, wenn sie mit derselben Mitternacht beginnen, und überhaupt ihre Mittage sammt den Nachmittagen zusammen fallen. Die allgemeine Lösung der Aufgabe ergibt sich auf folgende Weise.

Aus dem Jahre, Monate und Tage des bekannten Datums berechne man, nach §. 26, der wievielte der bezeichnete Tag in der gewählten Aere ist. Diese Nummer vermehre oder vermindere man um jene Anzahl Tage, um welche die Epochen beider Aeren von einander abstehen, je nachdem die zweite Aere früher oder später als die erste anfängt. Dadurch erfährt man, der wievielte jener Tag in der zweiten Aere ist; folglich hat man zu ihm nur noch Jahr, Monat und Tag, nach §. 27—29, zu berechnen.

Damit die Data jeder zwei Zeitrechnungen leicht auf einander zurückgeführt werden können, ist es vortheilhaft, die Abstände ihrer Epochen von einer zur Hilfe genommenen dritten Aere, welche früher als jede von beiden anhebt, oder älter als jede von ihnen ist, zu bestimmen; da dann die jüngere, oder später anfangende der beiden Aeren um den Unterschied dieser zwei Abstände später als die andere ältere oder früher anfangende Aere beginnt. Zu mehreren Aeren wählt man die älteste aus ihnen als Hilfsäre. Ein solcher Abstand der Epoche einer Aere von jener einer festgesezten frühesten Aere wird von manchen Chronologen mit einem der ohnehin schon so vieldeutigen Namen »Wurzel" oder „Absolutzahl" belegt.

Sei, um den Zug der Rechnung in allgemeinen Zeichen anschaulich zu machen, das bekannte Datum der dte Tag des Jahres a einer gewissen Aere; das Gemeinjahr halte l, das Schaltjahr l + Δl Tage, und bis zum Jahre a sei e Mal eingeschaltet worden. Dann ist vermöge §. 26 jenes Datum in der Aere der Tag

$$(10) \qquad n = (a - 1) l + e\Delta l + d.$$

Wird periodisch, in je ϖ Jahren ε Mal, eingeschaltet, so enthält der Schaltkreis Tage

$$(12) \qquad p = \varpi l + \varepsilon\Delta l.$$

Aus den Nummern der Schaltjahre jedes Schaltkyklus ergibt sich, nach **XXII**, 3 der Vorbegriffe, die Constante δ; und sofort sind vor dem Jahre a Schaltjahre

---

*) Vergl. Ideler Handb. 1. Bd. S. 99.

$$(5) \qquad e = \mathfrak{q}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}.$$

Daher hat man auch, nach §. 26,

$$(11) \qquad n = (a-1)\,l + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\,\Delta l + d, \text{ oder}$$

$$(13) \qquad n = p\,\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi} + \left(\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} - 1\right) l + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon\,\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} + \delta}{\varpi}\,\Delta l + d, \text{ oder}$$

$$(14) \qquad n = p\,\mathfrak{q}\frac{a-1}{\varpi} + \mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi}\,l + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon\,\mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi} + \varepsilon + \delta}{\varpi}\,\Delta l + d.$$

Ist ferner die Epoche dieser Aere um g Tage später als die Epoche der Hilfsäre, so ist jener angegebene Tag der $n + g$te in dieser Hilfsäre.

Bezeichnet man andererseits die auf die zweite Aere sich beziehenden Zahlen mit denselben Buchstaben und einem aufgesetzten Accent oder Strich, so ist der angegebene Tag in der Hilfsäre auch der $n' + g'$te Tag, daher

$$(46) \qquad n' + g' = n + g;$$

folglich erhält man überhaupt

$$(47) \qquad n' = n + g - g'$$

und insbesondere $n' = n + (g - g')$ oder $n' = n - (g' - g)$,
je nachdem $g >$ oder $< g'$ ist, also die zweite Aere entweder um $g - g'$ früher oder um $g' - g$ später als die erste beginnt.

Hat man somit erfahren, daß der angegebene Tag der n'te in der zweiten Aere ist, so findet man hierin das Jahr a' und den Tag d' entweder, nach §. 27, II, Gl. (20) und (21), aus

$$a' = \mathfrak{Q}\frac{n'}{l'} + 1 - \Delta a$$

$$d' = \mathfrak{R}\frac{n'}{l'} - e'\Delta l' + l'\Delta a$$

oder vermöge §. 28, Gl. (22) — (24), aus den Gleichungen

$$a' = \mathfrak{Q}\frac{\varpi'(n' + l') - \Delta l'.\delta'}{p'}$$

$$d' = \left(\mathfrak{r}\frac{\varepsilon' a' + \delta'}{\varpi'}\,\Delta l' + \mathfrak{R}\frac{\varpi'(n' + l') - \Delta l'.\delta'}{p'}\right) : \varpi'$$

$$= n' - (a' - 1)\,l' - \mathfrak{q}\frac{\varepsilon' a' + \delta'}{\varpi'}\,\Delta l'$$

oder nach §. 28, Gl. (25) — (31) aus

$$\mathfrak{Q}\frac{a'}{\varpi'} = \mathfrak{Q}\frac{n'}{p'}$$

$$\mathfrak{R}\frac{a'}{\varpi'} = \mathfrak{Q}\frac{\varpi'\left(\mathfrak{R}\frac{n'}{p'} + l'\right) - \Delta l'.\delta'}{p'}$$

$$a' = \varpi' \mathfrak{Q}\frac{a'}{\varpi'} + \mathfrak{R}\frac{a'}{\varpi'}$$

$$d' = \left(\mathfrak{F}\frac{\varepsilon' \mathfrak{R}\frac{a'}{\varpi'} + \delta'}{\varpi'} \Delta l' + \mathfrak{R}\frac{\varpi'\left(\mathfrak{R}\frac{n'}{p'} + l'\right) - \Delta l'.\delta'}{p'} \right) : \varpi',$$

oder endlich auch nach §. 28, V und §. 29.

32.

Fortsetzung. Besondere Fälle.

Zur Abkürzung späterer Rechnungen wird es förderlich sein, einige häufig vorkommende besondere Fälle eigens zu betrachten. Zu diesem Zwecke gebe man dem Ausdrucke von n in Gl. (10) die hier brauchbare Gestalt

$$n = (a-1)\left(l + \frac{e\Delta l}{a-1}\right) + d.$$

Wird periodisch eingeschaltet, nemlich in je ϖ Jahren ε Mal, so ist

$$e = \mathfrak{F}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi} = \left(\varepsilon a + \delta - \mathfrak{F}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\right) : \varpi$$

$$= \frac{\varepsilon(a-1)}{\varpi} + \left(\varepsilon + \delta - \mathfrak{F}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\right) : \varpi.$$

Im letzten Dividende ist, weil für $a = 1$ gewiß $e = 0$, also $\mathfrak{F}\frac{\varepsilon + \delta}{\varpi} = 0$ sein muß, $\varepsilon + \delta < \varpi$. Der größte positive Werth des zweiten Quotienten ist daher $\frac{\varepsilon + \delta}{\varpi} < 1$, und sein größter negativer $-\left(1 - \frac{\varepsilon + \delta + 1}{\varpi}\right)$ höchstens $= -1$. Man kann demnach ohne erheblichen Fehler diesen zweiten Quotienten außer Acht lassen, und sehr nahe

$$e = \frac{\varepsilon(a-1)}{\varpi}$$

setzen. Dann ist genähert

$$n = (a-1)\left(l + \frac{\varepsilon\Delta l}{\varpi}\right) + d.$$

Hier drückt $l + \frac{\varepsilon\Delta l}{\varpi} = \frac{p}{\varpi}$ Tage die bestimmte mittlere Länge des Jahres in einem ϖjährigen Schaltkreise aus; dagegen oben $l + \frac{e\Delta l}{a-1}$ Tage die durchschnittliche, etwas Weniges veränderliche, Länge des bürgerlichen Jahres während der vergangenen $a-1$ Jahre. Beide sind einander überhaupt desto näher, je größer a ist, und insbesondere werden sie jedesmal völlig gleich, so oft mit dem Jahre a ein neuer Schaltkreis anhebt, also $a-1$ durch ϖ theilbar ist, weil dann $a \equiv 1$, mod ϖ, also $e = \varepsilon(a-1) : \varpi$ wird. Bezeichnet man daher jenes oder dieses mittlere Jahr mit Λ, so hat man, wo nicht völlig genau, so wenigstens sehr genähert

$$n = (a-1)\Lambda + d,$$

und ähnlich

$$n' = (a'-1)\Lambda' + d'.$$

Die Zahl Λ ist zwar fast nie eine ganze Zahl; dessen ungeachtet kann man durch $q\frac{g-g'}{\Lambda}$ die positive oder negative ganze Zahl andeuten, welche anzeigt, wie oft Λ in $g-g'$ dergestalt enthalten ist, daß der Rest $r\frac{g-g'}{\Lambda}$ positiv und $< \Lambda$ ausfällt. Nimmt man zugleich für diesen Rest die nächst zustimmende ganze Zahl, so darf man mit genügender Annäherung sezen

$$g-g'=\Lambda q\frac{g-g'}{\Lambda}+r\frac{g-g'}{\Lambda}.$$

Bringt man diese Ausdrücke in die Gleichung (47), so verwandelt sie sich in die nahe richtige

$$(a'-1)\Lambda'+d'=(a-1)\Lambda+d+g-g'$$

oder in

$$(a'-1)\Lambda'+d'=\left(a-1+q\frac{g-g'}{\Lambda}\right)\Lambda+r\frac{g-g'}{\Lambda}+d.$$

I. Sind nun, was häufig vorkommt, die mittleren bürgerlichen Jahre Λ und Λ' in den mit einander verglichenen Zeitrechnungen entweder ganz oder wenigstens hinreichend nahe gleich; so kann man immerhin, weil $r\frac{g-g'}{\Lambda}+d$ nie zwei solche Jahre beträgt,

$$(48) \qquad a'=a+q\frac{g-g'}{\Lambda}=a-Q\frac{g'-g}{\Lambda}-1$$

sezen, dann ist

$$d'=d+r\frac{g-g'}{\Lambda}.$$

Sollte hiebei d' schon größer ausfallen, als des Jahres a' Länge

$$l'+i'\Delta l'=l'+q\frac{\varepsilon'+r\frac{\varepsilon'a'+\delta'}{\varpi'}}{\varpi'}\Delta l' \text{ Tage};$$

so wäre dem Jahre a' noch eines zuzuzählen; und in diesem Jahre $a'+1$ ist dann der gesuchte Jahrstag der sovielte, als um wie viel d' mehr Tage als das Jahr a' zählt. Zur Vereinfachung der Berechnung des Jahrstages d', oder noch besser des ihm entsprechenden Monatstages, kann man in einer kleinen Tabelle ausweisen, auf die wievielten Monatstage der zweiten Aere überhaupt die $t$ten Tage der einzelnen Monate der ersten Aere treffen; denn die Monatstage der ersten Aere werden entweder genau oder wenigstens nahe immer auf einerlei Monatstage der zweiten Aere fallen, oder die allenfallsige Abweichung läßt sich doch allgemein ausdrücken.

II. Ist insbesondere die Jahrform, die Länge und Vertheilung der Gemein- und Schaltjahre in beiden Aeren gleich, also das mittlere Jahr in ihnen dasselbe, und fängt das eine Jahr während eines Monates des anderen Jahres an, so treffen die Monatstage der einen Aere immer auf einerlei, aber nicht nothwendig auf die gleichvielten, Monatstage der anderen; weil der hier bestehende, von Null verschieden vorausgesezte, Abstand

$d' - d = \mathfrak{r}\frac{g-g'}{\Lambda}$ der einander entsprechenden Jahrstage d und d' durchgängig derselbe bleibt.

III. Setzt man in beiden Fällen, um den Anfang des Jahres a der ersten Aere in der anderen Aere zu bestimmen, $d = 0$ oder 1, so wird nahe oder völlig richtig $d' = \mathfrak{r}\frac{g-g'}{\Lambda}$ oder $\mathfrak{R}\frac{g-g'+1}{\Lambda}$. Das Jahr a der ersten Aere fängt demnach entweder genau oder wenigstens nahe nach dem $\mathfrak{r}\frac{g-g'}{\Lambda}$ten Tage am $\mathfrak{R}\frac{g-g'+1}{\Lambda}$ten Tage des Jahres $a' = a + \mathfrak{q}\frac{g-g'}{\Lambda}$ der zweiten Aere an, und endigt sich im darauf folgenden Jahre $a' + 1 = a + \mathfrak{q}\frac{g-g'}{\Lambda} + 1$.

Nimmt man überdies noch als bekannt an, daß das Jahr A der ersten Aere im Jahre A' der anderen anfängt, so ist auch $A' = A + \mathfrak{q}\frac{g-g'}{\Lambda}$, daher der unveränderliche Abstand der Jahrzahlen beider Aeren

$$\mathfrak{q}\frac{g-g'}{\Lambda} = A' - A = a' - a;$$

folglich beginnt, wie man auch aus den Vorbegr. XVII, Gl. (76) erschließen konnte, das Jahr a der ersten Aere im Jahre

$$(49) \qquad a' = a + A' - A$$

der zweiten Aere, und endigt sich im Jahre

$$(50) \qquad a' + 1 = a + A' - A + 1.$$

IV. Fängt jedes Jahr der einen Aere am ersten Tage eines gewissen Monates der anderen Aere an, — mag dieser der erste Monat im Jahre sein oder nicht — und haben die nach einander folgenden Monate in beiden Jahrformen gleich viel Tage, übrigens die nemlichen oder verschiedene Namen, so treffen die Monatstage der einen Aere stets auf die gleichvielten Tage des entsprechenden Monates der anderen, und man nennt die Monate beider Aeren einander p a r a l l e l g e s t e l l t. Sind dabei diese Monate, so wie sie einander entsprechen, auch nicht gleichvielte in den Jahren beider Aeren, so gelten dennoch die vorigen Vergleichungen zwischen den Jahren a und a'.

V. Sind endlich diese parallelen Monate auch noch gleichvielte in den Jahren der Aeren, so fangen die Jahre und ihre gleichvielten Monate immer zugleich an; daher ist für $d = 0$ auch $d' = 0$, also $\mathfrak{r}\frac{g-g'}{\Lambda} = 0$, sonach auch überhaupt $d' = d$, d. h. die entsprechenden Jahrstage sind gleichvielte. Dies Letztere wird auch schon bestehen, wenn nur $\mathfrak{r}\frac{g-g'}{\Lambda} = 0$ ist, und die Jahre der zwei Aeren gleich viel Tage enthalten, ohne gerade ganz gleich geformt zu sein. Die Anfänge beider Aeren stehen also um eine Anzahl voller Jahre, $\mathfrak{q}\frac{g-g'}{\Lambda}$, von einander ab; mithin stimmt das Jahr a der ersten Aere genau mit dem Jahre $a' = a + q\frac{g-g'}{\Lambda}$ der zweiten überein. Ist ferner bekannt, daß das Jahr A der ersten Aere mit dem Jahre A′ der anderen zusammen fiel, so muß auch $A' = A + q\frac{g-g'}{\Lambda}$, folglich wie früher der unveränderliche Unterschied der Jahrzahlen beider Aeren

$$q\frac{g-g'}{\Lambda} = A' - A = a' - a$$

sein, und somit ist das Jahr a der ersten Aere völlig übereinstimmend mit dem Jahre

$$(49) \qquad a' = a + A' - A$$

der zweiten Aere. Auch hier sind die einander entsprechenden Monatstage gleichvielte.

VI. Von dieser Gleichung

$$a' = a + A' - A,$$

welche ausdrückt, daß, so wie das Jahr A einer Aere in oder mit dem Jahre A′ einer anderen anfängt, auch das Jahr a der ersteren in oder mit dem Jahre a′ der lezteren anfängt, macht man stets da Gebrauch, wo blos die Jahre der Begebenheiten anzugeben oder mit einander zu vergleichen sind; oder wo angeführt wird, im wievielten Jahre nach oder vor einem bedeutsamen Ereignisse sich eine Begebenheit zutrug.

33.

Fortsezung.

Tittel's näherungsweise Verwandlung der Data.

Die so eben in §. 32 gefundene, angenähert richtige Gleichung

$$(a'-1)\Lambda' + d' = (a-1)\Lambda + d + g - g'$$

dient auch zur Aufstellung der zuerst von Tittel*) bekannt gemachten interessanten Formel zur näherungsweisen Uebertragung der Data aus einer Zeitrechnung in eine andere. Denn drückt man die im Mittel vor dem bezeichneten Datum in der zweiten Aere vergangene Zeit in Tagen aus, so ist sie

$$(a'-1)\Lambda' + d' - 1 = (a-1)\Lambda + d - 1 + g - g'.$$

In mittleren Jahren Λ′ der zweiten Aere ausgedrückt sei diese Zeit m′, so ist

$$m' = a' - 1 + \frac{d'-1}{\Lambda'} = \frac{\Lambda}{\Lambda'}(a-1) + \frac{d-1}{\Lambda'} + \frac{g-g'}{\Lambda'}$$

oder $$(51) \qquad m' = \frac{\Lambda}{\Lambda'}a + \frac{1}{\Lambda'}d - \frac{\Lambda+1}{\Lambda'} + \frac{g-g'}{\Lambda'}.$$

Drückt man die Abstände g und g′ der Epochen dieser Aeren von der älteren Hilfsäre nicht in Tagen, sondern in Jahren von λ Tagen, z. B. in Jahren

*) Vergl. Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von Bohnenberger und Lindenau, Tübingen 1816—18. Bd. 2. S. 251.

von $365\frac{1}{4} = 365{\cdot}25$ Tagen, aus, und seien diese Abstände γ und γ' solche Jahre; so hat man

$$\gamma = \frac{g}{\lambda},\ \gamma' = \frac{g'}{\lambda} \text{ oder } g = \gamma\lambda,\ g' = \gamma'\lambda,$$

folglich auch

$$(52) \qquad m' = \frac{\Lambda}{\Lambda'}\,a + \frac{1}{\Lambda'}\,d - \frac{\Lambda+1}{\Lambda'} + \frac{\lambda}{\Lambda'}(\gamma - \gamma').$$

34.

Bestimmung des in einem Jahre einer Aere beginnenden Jahres einer anderen Aere.

Ist die mittlere Dauer der bürgerlichen Jahre zweier Zeitrechnungen merklich verschieden, so läßt sich das Jahr einer Aere, welches in einem angewiesenen Jahre einer anderen Aere anfängt, nicht so leicht, wie eben in §. 32 gezeigt wurde, sondern auf folgendem etwas mühsameren Wege finden.

Sei also das Jahr einer Aere zu suchen, welches im Jahre a′ einer zweiten Aere anfängt.

Zu diesem Zwecke suchen wir zuvörderst das Jahr a und den Tag d der ersten Aere, in und an welchem der nullte Tag des Jahres a′ der zweiten Aere eintritt. Dieser nullte Tag nun ist, nach §. 26, in der zweiten Aere der Tag

$$\begin{aligned} n' &= (a'-1)\,l' + e'\Delta l' \\ &= (a'-1)\,l' + \not{q}\,\frac{\varepsilon' a' + \delta'}{\varpi'}\,\Delta l' \\ &= p'\,\not{Q}\,\frac{a'}{\varpi'} + \left(\not{R}\,\frac{a'}{\varpi'} - 1\right) l' + \not{q}\,\frac{\varepsilon'\,\not{R}\,\frac{a'}{\varpi'} + \delta'}{\varpi'}\,\Delta l'; \end{aligned}$$

daher nach §. 31 in der ersten Aere der Tag

$$(47) \qquad n = n' + g' - g$$

folglich trifft er vermöge §. 27 und 28

in das Jahr $\quad a = \not{Q}\,\frac{n}{l} + 1 - \Delta a$

und auf den Tag $\quad d = \not{R}\,\frac{n}{l} - e\Delta l + l\Delta a,$

wo Δa angemessen zu wählen ist;

oder in das Jahr $a = \not{Q}\,\frac{\varpi(n+l) - \Delta l.\delta}{p}$

und auf den Tag $\quad d = \left(\not{r}\,\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\,\Delta l + \not{R}\,\frac{\varpi(n+l) - \Delta l.\delta}{p}\right) : \varpi$

$$= n - (a-1)\,l - \not{q}\,\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\,\Delta l;$$

oder nach der Periode $\not{Q}\,\frac{a}{\varpi} = \not{Q}\,\frac{n}{p}$

in das Jahr $$\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} = \mathfrak{Q}\frac{\varpi\left(\mathfrak{R}\frac{n}{p}+1\right)-\Delta l.\delta}{p}$$

der nächst folgenden Periode, also in das Jahr

$$a=\varpi\,\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi}+\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}$$

der ersten Aere, auf den Tag

$$d=\left(\mathfrak{r}\frac{\varepsilon\,\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}+\delta}{\varpi}\,\Delta l+\mathfrak{R}\frac{\varpi\left(\mathfrak{R}\frac{n}{p}+1\right)-\Delta l.\delta}{p}\right);\varpi.$$

In diesem Jahre a wird, vermöge §. 24 Gl. (7)

$$i=\mathfrak{q}\frac{\varepsilon+\mathfrak{r}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}}{\varpi}\ \text{Mal}$$

eingeschaltet, nemlich $i=0$ Mal im Gemeinjahr und $i=1$ Mal im Schaltjahr; daher beträgt die Länge desselben Jahres

$$l+i\Delta l \text{ Tage.}$$

Sein Schluß erfolgt also nach dem 0. Tage des Jahres a' am

$$d'=l+i\Delta l-d^{\text{ten}} \text{ Tage.}$$

Im Jahre a' der zweiten Aere schließt sich demnach das Jahr a der ersten Aere, oder es ist der 0. Tag des Jahres $a+1$

am Tage $$d'=l+i\Delta l-d$$

und somit beginnt das Jahr $a+1$

am Tage $$d'+1=l+i\Delta l-d+1.$$