

# Bernard Bolzano's Schriften

---

Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von den drei Dimensionen des Raumes

In: Bernard Bolzano (author); Jan Vojtěch (author): Bernard Bolzano's Schriften. Band 5. Geometrische Arbeiten. (German). Praha: Královská česká společnost nauk v Praze, 1948. pp. 51–[66].

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/400231>

## Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

# VERSUCH EINER OBJECTIVEN BEGRÜNDUNG DER LEHRE VON DEN DREI DIMENSIONEN DES RAUMES

## VORWORT

Nicht groß ist in unseren Tagen die Zahl der Philosophen, deren mathematisches Wissen viel über den Satz, daß  $A$  gleich  $A$  ist, hinausreicht. Noch kleiner ist jedoch die Zahl der Mathematiker, die zuzugestehen bereit sind, daß ihre eigene Wissenschaft durch Hilfe der Philosophie zu einer höheren Stufe der Vollkommenheit erhoben werden könnte; die — um dieß näher zu bestimmen — zugeben, daß es ein Gewinn für ihre Wissenschaft wäre, wenn es uns gelänge, so viele hier vorkommende Begriffe, die man als ohnehin Jedem bekannt, ohne alle Erklärung läßt, in ihre wahren Bestandtheile zu zerlegen, und eine Menge von Sätzen, die man entweder gar nicht, oder ohne alle Beweise als für sich selbst einleuchtend aufstellt, aus ihren objectiven Gründen, d. h. aus gewissen reinen Begriffswahrheiten, welche viel allgemeiner sind als sie, zu folgern. Der ausgezeichneten Männer, die sich durch die Erweiterung des Gebietes dieser Wissenschaft oder durch ihre Anwendung auf die verschiedenartigsten Objecte des menschlichen Wissens allgemein zugestandene Verdienste sammeln, gibt es in unserer Zeit gewiß sehr viele: wie äußerst wenige dagegen, die an der festeren Begründung des mathematischen Systemes arbeiten! Eine Arbeit, die freilich nicht dazu nothwendig ist, um den Lehren der Mathematik erst Sicherheit zu verschaffen, die aber, wird sie anders mit einem nicht ganz unglücklichen Erfolge unternommen, die wesentlichsten, wenn gleich nicht eben zunächst materiellen Vortheile gewährt. Doch wie immer dieß sei, nur der sehr kleine Kreis von Philosophen und Mathematikern, wie ich so eben sie näher bezeichnet habe, ist es, von denen ich, wie meine früheren in das Gebiet der Mathematik einschlagenden Abhandlungen, so auch die gegenwärtige beurtheilt zu sehen wünsche. Diese besteht in einem Versuche, den ich bereits im Jahre 1815 entworfen, der sonach das Horazische: Nonum | prematur in annum, schon mehr als dreimal erfüllt hat, und in diesem Zeitraume von mir vielfältig überprüft, aber nur drei oder vier Personen mitgetheilt worden ist; unter welchen sich auch derselbe Ritter von Slivitz befindet, dessen in meinen mathematischen Arbeiten mir geleistete Hilfe ich schon in der Abhandlung „Über die Zusammensetzung der Kräfte“ S. 33 an-

gerühmt.<sup>35)</sup> Indem ich nun diesen Versuch endlich veröffentliche, erübrigt mir nichts Anderes als die Bitte, die ohnehin sehr geringe Anzahl von Gelehrten, die Sinn für solche Untersuchungen haben, wolle den kleinen Aufsatz einer um so sorgfältigeren Beachtung würdigen, und ihr Urtheil über ihn um so gewisser mich erfahren lassen, als der hier eingeschlagene Weg ein ganz verschiedener ist von denjenigen, die bisher Andere, namentlich Kant, Schelling, Fries, Herbart, Hegel, Weisse, Rosenkranz, Trendelenburg betraten; und als sich die hier angewendeten Begriffe und Grundsätze gebrauchen lassen, um nicht nur den auf dem Titel angegebenen Satz von den drei Dimensionen, sondern auch alle übrigen Beschaffenheiten des Raumes auf eine Weise herzuleiten, die mir, wenn irgend eine, den Namen einer objectiven Begründung (im Sinne der Wissenschaftslehre Bd. IV, § 525)<sup>36)</sup> zu verdienen scheint. |

3

§ 1.<sup>37)</sup>

Daß die Begriffe der Zeit und des Raumes in einem innigen Zusammenhange stehen, hat man von jeher erkannt; daher die Philosophen auch beide Begriffe fast immer mit einander zusammengestellt, und in einer gewissen Verbindung abgehandelt haben. Nur darüber war man nicht einig, ob es geziemender sei, den Begriff der Zeit vor dem des Raumes, oder umgekehrt jenen des Raumes vor dem der Zeit in Untersuchung zu nehmen. Mir nun dünkt, daß der Begriff der Zeit einfacher sei als der des Raumes, so zwar, daß dieser jenen in der That schon als einen Bestandtheil enthalte; und daß wir somit die Eigenschaften des Raumes, wenn wir sie ableiten wollen aus ihrem objectiven Grunde, aus jenen der Zeit herleiten müssen; woraus sich denn von selbst ergeben würde, daß man die Lehre von der Zeit bei einer streng wissenschaftlichen Abhandlung jener vom Raume vorauszuschicken habe.

Was aber fast ohne Widerspruch von Jedem mir dürfte zugegeben werden, ist, daß die aus beiden Begriffen der Zeit und des Raumes auf eine gleiche Weise zusammengesetzten Begriffe des Zeitlichen und des Räumlichen (d. i. des in der Zeit und des im Raume sich Befindenden) in dem Verhältnisse eines höheren und eines ihm untergeordneten Begriffes stehen; oder daß alles Räumliche schon eben darum auch etwas Zeitliches, nicht aber umgekehrt, ein jedes Zeitliche auch etwas Räumliches sei. Denn was einen Ort, und wäre es auch nur den eines Punctes, erfüllt, das muß ihn auch erfüllen zu einer gewissen Zeit, also ein Ding in der Zeit sein. Dagegen gibt es unstreitig Dinge, die in der Zeit und doch in keinem Raume sind, z. B. Gedanken, die in dem Gemüthe eines denkenden Wesens zu bestimmter Zeit entstehen und auch wieder auf-

hören. Wollte man auch einwerfen, daß dergleichen Gedanken immer nur vorhanden sein können in dem Gemüthe eines denkenden Wesens, einer Substanz, die wir trotz ihrer Einfachheit in einen Ort, nämlich nur in den einfachen eines einzigen Punctes versetzen: so wird doch kein Vernünftiger behaupten, daß Gedanken den Raum in einer solchen Weise erfüllen, daß, wo der Eine sich befindet, nicht gleichzeitig noch mancher andere sein könne; was wir jedenfalls bei Substanzen, welche den Raum erfüllen, nicht zugestehen. — Ist aber der Begriff des Zeitlichen unstreitig weiter als jener des Räumlichen: so folgt schon daraus allein, daß es gerathener sei, die Lehre von der Zeit jener vom Raume vortreten zu lassen. Wundre man sich also nicht, wenn ich auch hier für nöthig erachte, erst eine Erklärung von dem Begriffe der Zeit und die Angabe einiger ihrer Beschaffenheiten vorauszuschicken, ehe ich den Begriff des Raumes bestimme, und die versprochene Ableitung des Lehrsatzes von den drei Dimensionen des Raumes versuche. |

## § 2.

Was ist denn nun die Zeit? Eine berühmte, schon seit Jahrtausenden besprochene Frage! Wir bahnen uns aber den Weg zu ihrer Beantwortung, wenn wir erst Einiges, was die Zeit nicht ist, ausscheiden.

1. Die Zeit ist erstlich offenbar — keine Substanz. Denn sie müßte da entweder eine abhängige oder die eine unabhängige und eben deshalb allvollkommene Substanz der Gottheit selbst sein. Beides widerspricht durchaus dem Begriffe, den wir uns von der Zeit bilden. Die abhängigen oder bedingten Substanzen betrachten wir insgesamt als veränderlich, und setzen darum voraus, daß sie sich alle selbst in der Zeit befinden; wer aber könnte die Zeit (nämlich die Zeit an sich oder im eigentlichen Sinne genommen) für etwas Veränderliches erklären und somit eine andere Zeit, in der sie eben sich verändert, und für diese wieder eine dritte und so ohne Ende fort annehmen? Noch weniger können wir bei reifer Überlegung die Zeit mit der allvollkommenen Substanz der Gottheit verwechseln; schon darum nicht, weil wir genöthigt sind, das allvollkommene Wesen uns als dasjenige zu denken, das alles andere Wirkliche, so es noch außer ihm gibt, schafft und bewirkt; die Zeit aber denken wir uns als durchaus nichts für sich allein bewirkend, sondern nur als dasjenige, worin alle in einer bloßen Veränderung bestehenden Wirkungen vor sich gehen.

2. Die Zeit ist auch keine eigentliche Beschaffenheit der Dinge, die sich in ihr befinden. Denn wir betrachten es doch gewiß nicht als eine von den Beschaffenheiten, die z. B. diese so eben in uns vorhandene

Empfindung hat, daß sie so eben in uns vorhanden sei, da wir ja diesen jetzt eben gegenwärtigen Zeitpunkt an und für sich (d. h. abgesehen von den Ereignissen, die in ihm Statt finden) als einem jeden andern vollkommen gleich erachten. Zu den Beschaffenheiten einer Empfindung zählen wir z. B., daß sie angenehm oder unangenehm oder gemischt sei u. dgl. Wollten wir aber auch die Zeit, in der sie Statt findet, zu ihren Beschaffenheiten zählen; dann müßten wir ganz gegen allen Sprachgebrauch sagen, unsere Empfindung habe sich geändert, sobald sie aus einer Zeit in eine andere übergegangen, auch wenn sonst alle ihre Beschaffenheiten die nämlichen geblieben wären.

3. Die Zeit ist auch kein bloßes Verhältniß. Denn jedes Verhältniß ist nur eine gewisse Beschaffenheit, welche dem Ganzen, zwischen dessen Theilen es besteht, zukommt. So oft wir auch die Zeit ein Verhältniß zu nennen pflegen, geschieht es also doch nur uneigentlicher Weise, und wir wollen damit bloß sagen, daß die Theile der Zeit in verschiedenen Verhältnissen unter einander stehen. So steht z. B. der Zeitpunkt, in welchem Alexander der Große geboren ward, zu dem Zeitpunkte der Geburt des Julius Cäsar in dem Verhältnisse eines frühern zu einem spätern Zeitpunkte; die Dauer des dreißigjährigen zur Dauer des siebenjährigen Krieges in dem Verhältnisse der Zahlen 30 zu 7; allein nicht dieses letztere Verhältniß 30 : 7 selbst schon ist eine Zeit zu nennen.

4. Die Zeit ist endlich auch keine bloße Vorstellung, weder in der subjectiven noch objectiven Bedeutung des Wortes. Wäre die Zeit eine subjective, d. h. gedachte Vorstellung, ein Gedanke: so hätte sie namentlich bei uns Menschen ein Dasein; sie würde entstehen, nämlich in dem Gemüthe desjenigen, der eine gewisse Zeit |  
5 sich eben jetzt denkt, und wieder vergehen, wenn dieser Gedanke verginge, um einem andern Platz zu machen; Behauptungen, die kein Vernünftiger zugeben wird, weil nicht die Zeit an sich, sondern nur die Ereignisse in der Zeit entstehen und vergehen. Die Zeit ist aber auch eben so wenig eine bloß objective Vorstellung, d. h. eine Vorstellung an sich, durch deren Auffassung in das Gemüth eines denkenden Wesens erst eine subjective Vorstellung entsteht. Denn wie verschieden sind nicht die Beschaffenheiten der Zeit und der Vorstellungen an sich! So läßt sich z. B. jede Zeitlänge theilen in jede beliebige Anzahl von Theilen, die wieder und zwar ihr durchaus ähnliche Zeitlängen sind: von welcher Vorstellung aber könnte man sagen, daß sie sich theilen läßt in andere ihr durchaus ähnliche Vorstellungen?

5. Um von diesen negativen Bestimmungen nunmehr zu einer positiven zu übergehen, bemerke ich, daß die Zeit, in der sich ein Ding

befindet, obgleich sie nicht zu den Beschaffenheiten desselben gehört, doch gewiß eine seiner Bestimmungen ist, dieß Wort genommen in der Bedeutung, die ich bereits in der Wissenschaftslehre, Bd. I, § 80, besprochen habe. Eine an einem Gegenstande  $X$  befindliche Bestimmung nenne ich nämlich jedes beliebige  $\text{Etwas} = A$ , wenn dessen Vorstellung den Gegenstand  $X$  — gleichviel ob ausschließlich oder zugleich mit mehrern andern — vorstellt. Befindet sich nun ein Gegenstand  $X$  in der Zeit  $t$ , so ist die Vorstellung „eines in der Zeit  $t$  Seienden“ — ohne Zweifel eine derjenigen, welche den Gegenstand  $X$  vorstellen, also „das Sein in der Zeit  $t$ “ eine Bestimmung von  $X$ . — Das Verhältniß, in welchem Beschaffenheiten zu den Bestimmungen stehen, erkläre ich dahin, daß jedes zu einer Beschaffenheit  $b$  gehörige Concretum, d. h. die Vorstellung: „Etwas, das (die Beschaffenheit)  $b$  hat“, zugleich eine Bestimmung des Gegenstandes  $X$  ist, dem die Beschaffenheit  $b$  zukommt; daß aber nicht umgekehrt jede Bestimmung des  $X$  auf einer Beschaffenheit desselben beruht. Hier eben haben wir an den Zeiten, in welchen die Dinge sich befinden, ein Beispiel von Bestimmungen, die keineswegs Beschaffenheiten sind, wie vorhin gezeigt worden ist.<sup>38)</sup>

6. Untersuchen wir endlich genauer, was für eine Bestimmung es sei, welche wir uns an einem Gegenstande denken, wenn wir denselben als befindlich in diesem oder jenem Zeitpunkte denken: so wird uns kaum entgehen, daß die Bestimmungen der Zeit das Eigene haben, daß sie sich nur an Dingen, die etwas Wirkliches sind, befinden, an diesen aber auch durchaus — mit Ausnahme der einzigen allvollkommenen Substanz der Gottheit — anzutreffen sein müssen. An jedem Wirklichen, wenn es ein Abhängiges ist, haftet die Zeitbestimmung. Es kann uns ferner auch nicht entgehen, daß alle diese bedingten Wirklichen veränderlich sind, und daß es eben nur die Zeit sei, in welcher sie sich verändern können; daß es endlich nur, wenn wir die Zeitbestimmung mit in die Vorstellung von einem solchen Wirklichen aufnehmen, d. h. wenn wir uns von demselben die Vorstellung: „dieß in der Zeit  $t$  befindliche Wirkliche“ bilden, gelte, daß von je zwei einander widersprechenden Beschaffenheiten immer die eine demselben beigelegt, die andere abgesprochen werden müsse. So läßt sich z. B. von einem Baume, wenn wir in die Subjectvorstellung unseres Urtheiles über denselben die Vorstellung einer Zeit (namentlich eines bestimmten Augenblicks) nicht mit aufnehmen wollen, also vielleicht nur schlechtweg „dieser Baum“ | sagen, mit Wahrheit weder das Urtheil: er blühe, noch auch das Urtheil: er blühe nicht, fällen; weil weder das Eine, noch das Andere zu allen Zeiten geschehen mag. Fügen wir aber die Zeit oder eigentlich

den einfachen Zeitpunkt, in welchem sich befindend er in dem Satze gedacht werden soll, hinzu; bilden wir also eine Subjectvorstellung von der Form: „dieser Baum in dem Zeitpuncte  $t$ “: dann ist unstreitig einer der beiden Sätze: er blüht, und er blüht nicht, wahr und der andere falsch. Sollte Jemand vermeinen, daß auch schon unter den beiden Sätzen: dieser Baum blüht, oder blüht nicht, ein wahrer sein müsse: so käme das nur, weil er sich die Bedingung: „in der Gegenwart“, also doch Eine Zeitbedingung stillschweigend hinzudenkt.

7. Man überzeugt sich bald, daß die so eben betrachtete Eigenschaft der Zeit ausschließlich zukomme. Wofern sie also nicht den wirklichen Begriff der Zeit darbietet, so bietet sie wenigstens einen demselben gleichgeltenden Begriff dar. Allein ich glaube nicht zu irren, wenn ich (aus Gründen, deren Auseinandersetzung hier zu weitläufig wäre) behaupte, daß wir, so oft wir uns den Begriff der Zeit, oder genauer zu reden, den eines einfachen Zeittheiles, d. h. eines Zeitpunctes oder Augenblicks denken, in der That gar nichts Anderes denken, als den Begriff eines Etwas, das zu der Vorstellung jedes bedingten Wirklichen, als eine nähere Bestimmung desselben hinzugefügt werden muß, wenn von je zwei einander widersprechenden Beschaffenheiten eine mit Wahrheit ihm beigelegt, die andere abgesprochen werden soll. Der Inbegriff aller Zeitpuncte, die zwischen zwei gegebenen liegen, bildet eine Zeitdauer oder Zeitlänge; der Inbegriff aller Zeitpuncte, die es nur überhaupt gibt, bildet die Eine vollständige Zeit.

### § 3.

Aus diesem Begriffe der Zeit lassen sich alle Beschaffenheiten derselben, deren Angabe und objective Begründung der reinen Zeitlehre obliegt, entwickeln. Hier werde ich nur etliche dieser Beschaffenheiten, die zu dem Lehrsätze von den drei Dimensionen des Raumes führen, hervorheben, ohne mich jedoch in eine objective Begründung derselben einzulassen.

1. Jeder einfache Zeittheil oder Augenblick ist jedem andern ähnlich in der Bedeutung, die in der Wissenschaftslehre (Bd. I, § 91, Anm. 4) oder auch in der Abh. über die Zusammensetzung der Kräfte (§ 6) erklärt ist\*), d. h. es ist kein durch | bloße Begriffe

---

\*) Es sei mir erlaubt, über die hohe Wichtigkeit dieses Begriffes einige Worte zu sagen. Nur einer deutlichen Auffassung dessen, was Ähnlichkeit ist, bedarf es, um die schon tausend Jahre lang immer vergeblich gesuchte richtige Theorie der Parallelen, die Lehre von der Ähnlichkeit der Linien, Flächen und Körper, die bekannten Lehrsätze von der Rectification, Complanation und Cubi-

erfaßbarer Unterschied in ihren inneren Beschaffenheiten zu finden;<sup>39)</sup> sondern wir können dergleichen Augenblicke bloß durch ihre Verhältnisse, z. B. dadurch unterscheiden, daß wir den Einen als denjenigen, in welchem diese, den andern als denjenigen, in welchem eine andere mit jener in Widerstreit stehende Erscheinung Statt gefunden hat, bezeichnen.

2. Auch die zwischen zwei Augenblicken Statt findende Entfernung oder Zeitlänge ist jeder andern zwischen zwei Augenblicken statt findenden ähnlich. Wir können die Zeitlänge einer Minute von der einer Secunde durch keinen bloß auf ihre innere Beschaffenheiten gerichteten Begriff, sondern nur durch Verhältnisse unterscheiden; wenn wir z. B. die eine als die Dauer eines unserer Pulsschläge, die andere als eine sechszigmal längere beschreiben.

3. Auch welcher von zwei Augenblicken der frühere oder spätere sei, läßt sich durch keinen inneren Unterschied zwischen denselben, sofern er durch einen bloßen Begriff aufgefaßt werden soll, erkennen. So schließe ich, daß der Augenblick, in welchem ich eine gewisse Empfindung gehabt, ein früherer sei, als der, in welchem ich eine gewisse andere Empfindung gehabt, etwa nur daraus, weil bei der letzteren mir eine Erinnerung an die erstere kam.

4. Wenn Ein Augenblick  $t$ , dann die zwischen ihm und einem andern  $\vartheta$  statt findende Entfernung, endlich auch noch der Umstand, welcher von diesen beiden Augenblicken der frühere sei, gegeben ist: so läßt sich keines von diesen drei Stücken weder (wie wir so eben gesehen) für sich allein, noch auch aus seinem Verhältnisse zu den beiden andern durch bloße Begriffe bestimmen. Aus der Verbindung dieser drei Stücke aber läßt sich jeglicher andere Augenblick  $x$  mittelst bloßer Begriffe (die sein Verhältniß zu jenen

---

rung, die statischen Lehren von der Zusammensetzung der Kräfte an einem sowohl als an mehren Punkten, und viele andere wichtige Wahrheiten in den verschiedensten Zweigen der Mathematik, welche man außerdem höchst mühsam oder gar nicht zu erweisen, geschweige denn aus ihrem objectiven Grunde abzuleiten vermöchte, mit vieler Leichtigkeit zu begründen. Ich habe dieß hinsichtlich auf die zwei erst genannten Gegenstände in der kleinen | Schrift: Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie (Prag) schon im J. 1804, hinsichtlich des dritten Gegenstandes in der Schrift: Die drei Probleme der Rectification u. s. w. (Leipzig bei Kummer, 1817), hinsichtlich der zuletzt erwähnten Lehren theilweise in der schon oben gedachten Abhandlung über die Zusammensetzung der Kräfte (Prag, 1842) nachgewiesen; denn noch jetzt halte ich die in diesen Schriften gewagten Versuche für richtig, und nur in Betreff einiger, an der Hauptsache nichts verändernder Punkte, die in der zweiten Abtheilung der Betrachtungen besprochen werden, denke ich gegenwärtig anders.



drei Stücken betreffen) dergestalt bestimmen, daß es nur einen einzigen gibt, der diesen Begriffen entspricht. Gibt man uns nämlich an (was man durch bloße Begriffe angeben kann), welches Verhältniß die zwischen dem gegebenen Augenblicke  $t$  und dem zu bestimmenden  $x$  Statt findende Entfernung zu der gegebenen zwischen  $t$  und  $\vartheta$  Statt findenden Entfernung habe; und sagt man noch (was sich abermals durch bloße Begriffe ausdrücken läßt), ob der Augenblick  $x$  ein späterer oder ein früherer sei als  $t$ : so ist durch diese Angaben  $x$  völlig bestimmt, d. h. es gibt nur einen einzigen Augenblick, bei welchem die angegebenen Begriffs-Verhältnisse Statt finden.

5. Da nun, was wir von  $x$  gesagt, von jedem in der Zeit befindlichen Augenblicke, also auch von der ganzen Zeit überhaupt gilt: so gibt es **8** drei, und nicht mehr als drei | Stücke in der Zeit, deren jedes für sich allein sowohl als auch durch sein Verhältniß zu den beiden andern vermittelt bloßer Begriffe unbestimmt bleibt, die aber, wenn sie uns (etwa durch die Beziehung auf gewisse Anschauungen, wie in N. 1) gegeben sind, hinreichen, jeden andern Augenblick in der Zeit, somit die ganze Zeit überhaupt vermittelt bloßer Begriffe (solcher nämlich, die ihre Verhältnisse zu jenen drei gegebenen Stücken beschreiben), zu bestimmen.

#### § 4.

Aus diesen wenigen, der reinen Zeitlehre entnommenen Wahrheiten werden wir den Lehrsatz von den drei Dimensionen des Raumes so objectiv, wie die Folge aus ihrem Grunde, ableiten können, sobald wir nur noch den Begriff des Raumes selbst in seine Bestandtheile aufgelöst haben. Von diesem gegenwärtig.

1. Ähnlich wie von der Zeit ist auch vom Raume einzusehen, daß er fürs Erste keine Substanz sei. Keine abhängige oder bedingte, denn diese versetzen wir selbst in den Raum; wir lassen sie ferner die eine auf die andere einwirken, während doch Niemand sagen wird, daß Ein Theil des Raumes auf den andern einwirke, d. h. Veränderungen in ihm hervorbringe! Auch nicht die unabhängige Substanz der Gottheit ist der Raum; denn er für sich allein wirkt ja gar nichts, geschweige denn, daß er die Ursache von dem Vorhandensein aller abhängigen Substanzen wäre.

2. Der Raum ist auch keine eigentliche Beschaffenheit der Dinge, welche sich in ihm befinden. Denn Jedermann gesteht, daß ein Ding keine Änderung in seinen Beschaffenheiten erfahre, wenn sich nichts Anderes als nur der Ort, in dem es sich befindet, ändert.

3. Der Raum ist also auch kein Verhältniß (§ 2, N. 3), sondern diejenigen Verhältnisse, welche man räumliche zu nennen pflegt, und mit dem Raume selbst zuweilen verwechselt, sind nur Verhältnisse zwischen verschiedenen Orten. So sind z. B. Rechts und Links offenbar nur Verhältnisse zwischen den Orten, welche gewisse Theile unseres Leibes einnehmen können; Oben und Unten Verhältnisse nur zwischen den Orten, welche die Erde und die auf oder außer ihr befindlichen und von ihr angezogenen Körper einnehmen, u. s. w.

4. Der Raum ist endlich auch keine bloße Vorstellung. Keine subjective oder gedachte, weil er sonst etwas wäre, das anfangen und aufhören kann. Auch keine objective; denn wie ungereimt wäre es zu sagen, daß eine objective Vorstellung drei Dimensionen habe, sich theilen lasse in das Unendliche, daß man aus Einer Vorstellung, nämlich derjenigen, welche ein Punct ist, ein Loth fallen könne auf eine andere Vorstellung, nämlich auf diejenige, die eine gerade Linie ist, u. s. w.

5. Der Raum, oder vielmehr der Ort, den ein Ding einnimmt, ist eine an demselben befindliche Bestimmung (§ 3, N. 5); es befinden sich aber bloß Substanzen, und zwar abhängige (bedingte, endliche) im Raume, und jede einzelne behauptet in jedem einzelnen Augenblicke nur einen einzigen einfachen Ort, einen dergleichen wir auch einen Punct zu nennen pflegen.

6. Wenn wir nun nachdenken, welche an den geschaffenen Substanzen haftende Bestimmung es eigentlich sei, die zu erfahren wir verlangen, indem wir nach ihren Orten | fragen: so kann es uns fast nicht entgehen, es sei diejenige, die den Grund angibt, warum jene Substanzen bei den Kräften und sämtlichen übrigen Beschaffenheiten, welche sie haben, innerhalb einer gegebenen Zeitdauer gerade diese und keine andere Veränderungen in einander bewirken. Die besonderen Orte, welche so eben ich selbst, dieß vor mir liegende Papier, jene an meiner linken Hand stehende Lampe, die hinter mir sich befindende Wanduhr einnehmen u. s. w., erklären, aus welchem Grunde die Lampe das Papier in der Art beleuchtet, daß ich darauf zu schreiben vermag, während die Wanduhr von mir zwar nicht gesehen, aber doch gehört wird, u. s. w. 9

7. Unstreitig ist die hier besprochene Eigenschaft eine dem Raume ausschließlich zukommende, ja wir werden uns, je öfterer wir uns prüfen, um so vollkommener überzeugen, daß sie allein es sei, woran wir denken, wenn wir die Orte der Dinge erfahren wollen. Ich stelle es somit als eine Erklärung auf: Die Orte der abhängigen Substanzen sind diejenigen Bestimmungen derselben, in denen der Grund

liegt, daß sie bei ihren Beschaffenheiten gerade diese und keine anderen Veränderungen, die Eine in der andern, innerhalb einer gegebenen Zeitlänge bewirken. Dasjenige Ganze endlich, in welchem Alles, was ein Ort sein kann, für irgend eine abhängige Substanz, als Theil enthalten ist, nenne ich Raum überhaupt, oder den ganzen Raum.<sup>40)</sup>

## § 5.

Diese Erklärung von dem Begriffe des Raumes läßt uns sogleich erkennen, daß die Beschaffenheiten desselben von jenen der Zeit abhängen. Soll uns jedoch vollkommen klar werden, in welcher Weise das geschehe, so müssen wir uns erst noch mit folgenden der Metaphysik entlehnten Wahrheiten vertraut machen.

1. Wir sagen, daß ein Gegenstand  $N$  durch den Begriff  $\mathfrak{Q}$  des Verhältnisses, in welchem er zu einem andern  $M$  steht, entweder nur theilweise oder auch ganz bestimmt werde, wenn es irgend eine reine Begriffswahrheit gibt, vermittelt deren als eines Obersatzes sich entweder nur einige oder auch alle Beschaffenheiten und Bestimmungen des  $N$  aus denen des  $M$  ableiten lassen. Sage ich ohne Beisatz, daß ein Gegenstand  $N$  durch einen andern  $M$  bestimmt werde, so verstehe ich immer eine vollständige Bestimmung.

2. Der erwähnte Obersatz muß also ein Satz von der Form sein: Wenn ein gewisser Gegenstand ( $M$ ) die Beschaffenheiten und Bestimmungen  $m, m', m'', \dots$ , hat, so muß ein anderer ( $N$ ), der zu ihm in dem Verhältnisse  $\mathfrak{Q}$  steht, die Beschaffenheiten und Bestimmungen  $n, n', n'', \dots$  haben.

3. Wenn  $N$  durch  $M$  vollständig (d. h. in allen seinen Beschaffenheiten und Bestimmungen) bestimmt wird, so gibt es zu einem einzigen  $M$  auch nur ein einziges  $N$ , das in dem angegebenen Begriffsverhältnisse  $\mathfrak{Q}$  zu demselben steht. Denn gäbe es zwei, so müßten sie durchaus die nämlichen Beschaffenheiten und Bestimmungen haben, was (nach dem Leibnitzischen Grundsätze von der Einerleiheit des Nichtzuunterscheidenden) ungereimt ist; denn soll der Gegenstand  $N'$  ein  
10 anderer sein als  $N''$ , so muß es für | jeden aus ihnen auch eine eigene ausschließlich ihn nur darstellende Vorstellung geben, und dieses schon ist ein Unterschied zwischen ihnen.

4. Welche Beschaffenheiten oder Bestimmungen an  $N$  durch bloße Begriffe vorgestellt werden können, diese müssen sich aus Beschaffenheiten oder Bestimmungen an  $M$ , die gleichfalls durch bloße Begriffe

vorgestellt werden, ableiten lassen; denn in diesem Falle muß es einen Obersatz von folgender Form geben: Wenn der Gegenstand  $M$  die Beschaffenheiten oder Bestimmungen  $m, m', m'', \dots$  hat, so muß der Gegenstand  $N$  die Beschaffenheiten oder Bestimmungen  $n, n', n'', \dots$  besitzen, worin die Buchstaben  $M, N, m, m', m'', \dots, n, n', n'', \dots$  bloße Begriffe bezeichnen. Denn nur wenn es einen solchen Obersatz gibt läßt sich nach N. 1 behaupten, daß der Gegenstand  $M$  durch sein Verhältniß zu  $N$  den Gegenstand  $N$  bestimme.

5. Wenn es dagegen an  $N$  selbst gewisse Beschaffenheiten oder Bestimmungen gibt, die sich durch keine Begriffe (ausschließlich) vorstellen lassen\*): so muß es auch an  $M$  gewisse durch keine Begriffe erfaßbare Beschaffenheiten oder Bestimmungen geben, deren Voraussetzung uns jene an  $N$  befindliche Unbestimmtheit erklärt. Denn wenn wir uns mehrere  $N$ , z. B.  $N'$  und  $N''$  denken, die bloß in einem durch keine Begriffe erfaßbaren Umstande, der in dem einen  $v'$  in dem andern  $v''$  heißen mag, sich unterscheiden: so muß es zur Erklärung dieses Unterschiedes auch in den ihnen zugehörigen  $M'$  und  $M''$  eine Verschiedenheit geben, welche sich uns gleichfalls durch keine Begriffe kund gibt. Denn würden sich  $M'$  und  $M''$  in gar keiner Weise unterscheiden, so könnten sich (nach N. 1) auch  $N'$  und  $N''$  in gar keiner Weise unterscheiden. Würden sich aber  $M'$  und  $M''$  in einem Umstande unterscheiden, der durch ein paar reine Begriffe  $m'$  und  $m''$  vorgestellt werden könnte: so müßten sich nach N. 3 auch  $N'$  und  $N''$  im Begriffe unterscheiden.

6. Wenn endlich der Gegenstand  $M$ , der den  $N$  vollständig bestimmt, seinem Begriffe nach durchaus nichts anderes ist und sein soll, als irgend ein Etwas, das uns das Dasein von  $N$  und dessen sämtliche Beschaffenheiten und Bestimmungen erklärt: so dürfen wir der durch keinen Begriff erfaßbaren Eigenheiten, oder, wie sich das auch ausdrücken läßt, der Unbestimmtheiten an  $M$  nie mehr annehmen, als nach dem N. 5 Gesagten nothwendig sind, um die an  $N$  vorfindlichen Unbestimmtheiten zu erklären. Denn ein Mehres wäre offenbar überflüssig, weil wir uns niemals genöthigt fänden, uns auf dergleichen Unbestimmtheiten zur Erklärung der an  $N$  wahrgenommenen Beschaffenheiten oder Bestimmungen zu berufen.

---

\*) Wenn man von irgend Etwas sagt, es sei durch keinen Begriff erfaßbar oder vorstellbar, so versteht man darunter immer nur, es gebe keinen Begriff, der dasselbe ausschließlich vorstellt, d. h. es zu seinem einzigen Gegenstande hat; denn einen Begriff, der es gemeinschaftlich mit andern Dingen vorstellt, gibt es freilich für jedes beliebige Etwas.

## § 6.

Wir können nun ungehindert folgende Wahrheit, welche dem Lehrsatz von den drei Dimensionen des Raumes gleichgilt, auf eine objective Art begründen. |

- 11 Es gibt Systeme von vier Puncten, in welchen keiner wie nicht an sich, so auch nicht durch sein Verhältniß zu den drei übrigen, so fern es durch einen reinen Begriff aufgefaßt werden soll, bestimmt wird. Ist aber ein solches System von vier Puncten gegeben, so läßt sich ein jeder andere Punct und jeder Inbegriff von Puncten (jegliches Raumdng also) durch bloße Begriffe, die dessen Verhältniß zu jenen vier Puncten ausdrücken, bestimmen.

### Beweis.

1. Nach § 4 sind die Orte der Dinge diejenigen Bestimmungen an denselben, in denen der Grund liegt, daß sie bei ihren Beschaffenheiten gerade diese Veränderungen innerhalb einer gegebenen Zeit gegenseitig hervorbringen. Sind also die Orte, in welchen sich gewisse auf einander einwirkende Substanzen so eben befinden, bestimmt: so ist hiedurch auch bestimmt und vollkommen bestimmt, welche Veränderungen sie innerhalb einer bestimmten Zeitlänge nach ihren Kräften und gesammten übrigen Beschaffenheiten hervorbringen müssen; ja wir haben von dem, was jene Orte sind, gar keine andere Vorstellung, als nur eben die, daß sie dasjenige sind, was die besagten Veränderungen in jenen Zeiten vermittelt der gegebenen Kräfte bewirkt. Die Orte, in denen die auf einander wirkenden Dinge von gegebener Beschaffenheit sich befinden, einerseits, und die Veränderungen, die diese Dinge in gegebener Zeitlänge erfahren, andererseits — sind also ein Paar Gegenstände, die zu einander in demselben Verhältnisse stehen, wie die in § 5 besprochenen *M* und *N*. Wir müssen daher so viele, aber auch nur so viele in den möglichen Orten der Dinge, d. h. im Raume überhaupt, Statt findende Eigenheiten, die sich durch keine Begriffe bestimmen lassen, voraussetzen, als die auch in der Zeit Statt findenden Eigenheiten, die sich durch keine Begriffe bestimmen lassen, erheischen.

2. Um zu erkennen, wie viele und welche nicht durch Begriffe zu bestimmende Eigenheiten im Raume zu diesem Zwecke vorausgesetzt werden müssen, wird es am dienlichsten sein, von einer möglichst einfachen Begebenheit in der Zeit auszugehen, wenn es nur eine solche ist, darin alle in der Zeit obwaltende Unbestimmtheiten vorkommen. Denn jeder Umstand, den wir noch überdieß aufnehmen, würde die Unter-

suchung ohne Noth nur verwickelter machen. Eben so müssen auch die räumlichen Verhältnisse, die wir bei jener Begebenheit zu Grunde legen, so einfach als möglich angenommen werden, sind sie nur doch so zusammengesetzt, daß wir der Unbestimmtheiten darin so viele unterscheiden können, als gemäß allen in der Zeit möglichen Unbestimmtheiten erforderlich sind. Was mehr ist, würde die Betrachtung abermal nur verwickelter machen.

3. Der erste und einfachste Fall, bei welchem eine Unbestimmtheit in der Zeit eintritt, ist bekanntlich schon da, wenn wir nur einen einzigen, einfachen Zeittheil, d. h. einen bloßen Augenblick, annehmen. In einem solchen kann aber noch keine Veränderung vor sich gehen, sondern es können nur Ursachen vorhanden sein, die, wenn sie fort-dauern, innerhalb einer bestimmten Zeitlänge erst eine bestimmte Veränderung bewirken. Allein der einfachste zu dem Vorhandensein einer solchen Ursache gehörige Fall erfordert schon das | Dasein mindestens 12 zweier einfacher Substanzen. Denn zwei ist die kleinste Zahl von Substanzen, welche in dem Verhältnisse einer gegenseitigen Einwirkung auf einander befindlich sein können. Zu diesen gehören denn auch zwei einfache Orte oder Punkte. Wie also nach § 3, N. 1 kein einzelner Augenblick durch diejenigen seiner innern Beschaffenheiten, welche durch bloße Begriffe erfaßbar sind, bestimmt wird: so darf nach § 5, N. 5 auch kein System zweier Punkte (um so weniger also ein einzelner Punkt) durch diejenigen seiner inneren Beschaffenheiten, welche durch bloße Begriffe erfaßbar sind, bestimmt werden.

4. Das Nächste ist nun, daß wir nebst dem bisher betrachteten Einen Augenblicke  $t$  noch irgend einen andern  $\vartheta$  (gleichviel ob er ein früherer oder ein späterer sei) annehmen und voraussetzen, daß in diesem ein Zustand obwalte, der sich von dem in  $t$  vorhandenen unterscheidet. Dann muß nothwendig auch entweder in den Beschaffenheiten der beiden Substanzen oder in ihren Orten eine Veränderung vor sich gegangen sein, oder es muß irgend eine dritte Substanz mit ihrer Einwirkung hinzugetreten sein. Und wenn uns der angenommene Fall eine Gelegenheit darbieten soll, auf die Beschaffenheiten des Raumes zu schließen: so müssen wir voraussetzen dürfen, daß in den räumlichen Verhältnissen etwas geändert worden sei. Das Geringste ist nun, daß wir statt zweier Punkte jetzt drei zu betrachten haben; wie etwa, wenn die eine der beiden Substanzen in dem einen Augenblicke an einem andern Orte als in dem andern sich befände. Da sich jedoch in dem Verhältnisse der beiden Augenblicke  $t$  und  $\vartheta$  eine Entfernung befindet, welche sich nach § 3, N. 2 durch keinen bloßen Begriff ihrer innern Be-

schaffenheit nach unterscheiden läßt, in dieser Beziehung also unbestimmt bleibt: so müssen wir nach § 5, N. 5 annehmen, daß es Systeme von drei Punkten geben könne, die sich durch keinen bloßen Begriff, sofern wir nur ihre inneren Beschaffenheiten allein berücksichtigen wollen, völlig bestimmen lassen.

5. Allein noch nicht genug! Aus § 3, N. 3 wissen wir, daß es an einem Systeme zweier Augenblicke nebst ihrer Entfernung von einander noch eine dritte durch keinen bloß von den inneren Beschaffenheiten dieses Systemes hergenommenen Begriff zu behebende Unbestimmtheit gebe, bestehend darin, welcher von beiden Augenblicken der frühere oder spätere sei. Nach § 5, N. 5 muß es also nebst den bisher gefundenen noch eine fernere Unbestimmtheit auch im Raume geben. Das Geringste, was wir annehmen können, ist offenbar nur, daß zu den drei Punkten, die wir so eben betrachteten, noch irgend ein vierter hinzukomme. Es muß also selbst Systeme von vier Punkten geben, in welchen keiner durch seine bloßen Verhältnisse zu den drei übrigen, sofern sie durch reine Begriffe aufgefaßt werden sollen, bestimmt wird.

6. Wenn aber erst Ein Augenblick  $t$ , sodann die zwischen ihm und einem andern  $\vartheta$  Statt findende Entfernung, endlich auch noch der Umstand, welcher aus beiden der frühere sei, gegeben ist: so gibt es nach § 3, N. 4 in der ganzen Zeit keinen einzigen Augenblick mehr, der sich nicht durch bloße Begriffe (beschreibend sein Verhältniß zu jenen drei gegebenen Stücken) bestimmen ließe. Nach § 5, N. 6 dürfen wir also auch im Raume nebst den bisher gefundenen sonst keine weiteren Unbestimmtheiten voraussetzen; wir müssen demnach schließen, daß sich aus einem Systeme von vier Punkten, die so gelegen sind, daß keiner derselben durch sein Verhältniß zu den drei übrigen, sofern es durch  
13 einen reinen | Begriff aufgefaßt werden soll, bestimmt wird, jeglicher andere Punkt durch bloße Begriffe, die sein Verhältniß zu jenen vier Punkten ausdrücken, bestimmen lasse.

#### § 7.

Wird es wohl nöthig sein, mit einigen Worten noch zu zeigen, daß die so eben erwiesene Wahrheit dem Lehrsatz von den drei Dimensionen des Raumes gleichgilt? Unter dem Letztern versteht man eigentlich den Satz, daß es drei, aber auch nicht mehr als drei auf einander senkrechte Richtungen aus einem Punkte gebe. Nun folgt schon daraus allein, daß es zu jedem Punkte  $a$  noch einen zweiten  $b$  gibt, es müsse aus jedem Punkte wenigstens Eine Richtung ( $ab$ ) hervorgehen. Sind aber zwei Punkte  $a$  und  $b$  gegeben, so läßt sich eine unendliche

Menge anderer (welche zusammen genommen die unbegrenzte durch  $a$  und  $b$  gehende Gerade ausmachen) mittelst bloßer Begriffe bestimmen, namentlich jeder derselben  $x$  durch die bloße Angabe des Verhältnisses der Entfernungen  $ax$  und  $bx$  zu der gegebenen  $ab$ , sofern dieß Verhältniß nur so geartet ist, daß eine von den drei Entfernungen  $ab$ ,  $ax$ ,  $bx$  der Summe der beiden übrigen gleich. Gibt es jedoch zu je zwei Punkten  $a$ ,  $b$  einen dritten  $c$ , der durch sein Verhältniß zu jenen beiden, sofern es durch bloße Begriffe aufgefaßt werden soll, noch nicht bestimmt wird: so folgt, daß  $c$  außer der Geraden  $ab$  liege, daß somit die Richtung  $ac$  mit der  $ab$  weder einerlei noch ihr entgegengesetzt sei, sondern einen wirklichen Winkel mit ihr bilde; und es ist leicht zu zeigen, daß es auch einen solchen Punkt  $c$  gebe, für welchen die Richtungen  $ab$  und  $ac$  auf einander senkrecht stehen. Eben so läßt sich erweisen, es gebe abermal eine unendliche Menge von Punkten, die durch ihr bloßes Verhältniß zu jenen drei  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , sofern dasselbe durch bloße Begriffe aufgefaßt werden soll, bestimmt sind; es sind dieß nämlich alle diejenigen, deren Inbegriff die unbegrenzte durch  $a$ ,  $b$ ,  $c$  gehende Ebene bildet.<sup>41)</sup> Wofern es aber zu jedem Systeme von drei Punkten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  noch einen vierten  $d$  gibt, der durch sein bloßes Verhältniß zu jenen, sofern es durch reine Begriffe dargestellt werden soll, noch nicht bestimmt ist: so folgt, daß der Punkt  $d$  außerhalb der Ebene  $abc$  liege; und es ist nun ein Leichtes zu erweisen, daß es ein Loth aus  $d$  auf die Ebene  $abc$  und eine diesem Lothe parallel laufende Richtung aus  $a$  gebe, die mit den beiden  $ab$  und  $ac$  ein System dreier auf einander senkrechter Richtungen darbeut. Gibt es endlich, wenn die vier Punkte  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  die angegebene Beschaffenheit haben, keinen fünften, der nicht durch einen bloßen Begriff seines Verhältnisses zu jenen schon bestimmt wäre: so folgt, daß jede andere aus  $a$  hervorgehende Richtung, welche auf zweien der nur eben gefundenen senkrecht aufsteht, mit der dritten entweder einerlei oder ihr entgegengesetzt ist; genau dasjenige, was in dem Lehrsatz von den drei Dimensionen des Raumes gemeint ist.<sup>42)</sup>



Vertical line on the left side of the page.