IV.

ÜBER HALTUNG, RICHTUNG, KRÜMMUNG UND SCHNÖRKELUNG BEI LINIEN

sowohl als Flächen sammt einigen verwandten Begriffen

VORWORT

Unter denjenigen Lehren der Raumwissenschaft, von denen man allgemein zugibt, daß ihre Darstellung noch große Mängel und Unvollkommenheiten hat, dürfte es nächst der Lehre von den Parallelen, dem Satze von den drei Dimensionen des Raumes und den drei Problemen, welche die Rectification der Curven, die Complanation der Flächen und die Cubirung der Körper betreffen, — wohl keinen Gegenstand geben, der noch so viel zu wünschen übrig ließe, als die Lehre von der Haltung, Richtung, Krümmung und Schnörkelung der Linien sowohl als Flächen. Denn daß man für die zwei Begriffe, die ich hier mit den Worten Haltung und Schnörkelung bezeichne, nicht einmal noch eine Benennung gehabt, wird man mir ohne Widerspruch zugestehen: allein wie Vieles fehlt, daß auch nur derjenige Begriff, welchen man unter dem Worte Krümmung verbindet und am Ausführlichsten betrachtet hat, gehörig aufgehellt wäre.[65]) Und nicht bloß dem Begriffe mangelt noch Deutlichkeit: auch in der Art, wie man die Krümmung namentlich bei Linien von sogenannter doppelter Krümmung bestimmt, liegt etwas ganz Willkürliches, ja Falsches. Denn durch den Kreis, den man uns als ihren angeblichen Krümmungskreis, d. h. als diejenige Linie darstellt, die in allen ihren Puncten die nämliche Krümmung besitzen soll, welche die Curve in einem Puncte hat, wird jene Eigenthümlichkeit, die diese Krümmung gerade darum hat, weil sie nicht eine einfache, sondern doppelte Krümmung ist, d. h. weil auch das kleinste Stück der Curve in keiner Ebene liegt, so wenig ausgedrückt, als etwa die Natur der Krümmung einer Linie von einfacher Krümmung durch eine sie berührende Gerade ausgedrückt würde, d. h. gar nicht.[66]) Was endlich den schon von Newton gemachten Vorschlag anlangt, die Aenderung (Zu- oder Abnahme), die eine Curve in ihrer Krümmung erfährt, durch eine sie osculirende Parabel zu bestimmen, dieser Vorschlag, der seitdem noch durch keinen besseren verdrängt worden ist, war — wenn ich aufrichtig gestehen soll, wie es mir vorkommt — ein ganz verunglückter Gedanke. Denn sollen wir die Art, wie die Krümmung einer Linie in einem gegebenen Puncte zu- oder abnehme, durch eine andere Linie bestimmen, so haben wir dabei offenbar nur den Zweck, die Art jener Zu- oder Abnahme durch diese andere Linie anschaulicher zu machen. Wir sollten sonach eine Linie wählen, in welcher diese Zu- oder Abnahme beständig dieselbe verbleibt. Diese Bedingung aber erfüllt nicht eine einzige parabolische Linie, sondern (unter den Linien von einfacher Krümmung) offenbar nur die logarithmische Spirale.[67])

Viel schlimmer als mit den Linien steht es begreiflich und zugestandenermaßen noch mit der Lehre von der Krümmung der Flächen, welche der eine Geometer auf diese, der andere auf jene Weise behandelt.[68])

Betreffend nun das erste unter den drei gleich eingangs erwähnten Desideraten der Geometrie, nämlich die Theorie der Parallelen: so mag es mir gegenwärtig wohl schon erlaubt seyn mit einiger Zuversicht zu sagen: die hier obwaltende Schwierigkeit hätte ich in meiner ersten im J. 1804 erschienenen Schrift: Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*) (in der ersten Abth.) behoben. Denn daß das 11. Axiom Euklids erwiesen ist, sobald sich die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke auf eine von jenem Axiom ganz unabhängige Art erweisen läßt, wird kein Mathematiker in Abrede stellen. Wer ferner den Unterschied zwischen Beweisen, die eine bloße Gewißmachung sind, und zwischen solchen, die eine objective Begründung, nicht nur das *ὅτι*, sondern auch das *διότι* liefern sollen, nur einigermaßen verstehet, wird anerkennen, daß wir eines Beweises der ersteren Art für jenes Axiom gar nicht bedürfen, weil ja doch kein Vernünftiger die Wahrheit des hier in Rede stehenden Satzes bezweifelte und bezweifelt, daß es sich also hier bloß um eine objective Begründung desselben handle. Ein solcher wird auch einsehen, daß wenn irgend eine Ableitung jenes Axioms den Namen einer objectiven Begründung desselben verdient, so sey es die von mir angegebene, die das Zusammengesetztere stets aus dem Einfacheren folgert. Daß endlich in Absicht auf die Lehre von der Aehnlichkeit die allgemeine Wahrheit fest steht, daß alle Dinge, deren bestimmende Stücke einander ähnlich sind, selbst ähnlich seyn müssen; woraus sich dann nicht nur die zur Begründung der Parallelentheorie nöthigen Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Dreiecke, sondern noch tausend andere Lehrsätze von der Aehnlichkeit geometrischer Objecte mit der größten Leichtigkeit und

*) In Commission bei Kronberger und Rziwnac in Prag.

wie die Folge aus ihrem Grunde ergeben: liegt mir zu deutlich vor, als daß ich daran noch ferner zweifeln könnte.

Was gegen meine Beweisart von Andern vorgebracht worden ist, wie: „In der Mathematik soll man nicht aus Begriffen, sondern aus Grundanschauungen schließen: dergleichen Dreiecke, wie der Vf. sie annimmt (die nur aus drei mit geraden Linien verbundenen Puncten bestehen), wollen wir nicht"; u. d. gl. — war viel zu seicht, um mich in meinen Uiberzeugungen zu erschüttern.

Einen Versuch, die Lehre von den drei Dimensionen des Raumes auf eine objective Art zu begründen, worin das zweite oben erwähnte Desideratum der Geometrie bestehet, — diesen gleichfalls nicht erst vor Kurzem, sondern vor neun und zwanzig Jahren bereits erdachten und seitdem oft geprüften Versuch habe ich der verehrten Gesellschaft vor einigen Monaten vorgelegt, und um ihr Gutachten ersucht, welches nicht ungünstig ausfiel. Der hier geführte Beweis ist von der Art, daß mittelst der darin erwiesenen Vordersätze noch viele andere Lehren der Geometrie, deren fehlerhaften Beweis man bisher weniger beachtet hat, oder die auch noch gar nicht aufgestellt worden sind, ihre objective Begründung finden.

Mit meinem Versuche über das dritte der oben bezeichneten geometrischen Desiderata habe ich in der Schrift: Die drei Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahme des Archimedes und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst; zugleich als Probe einer gänzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt (Leipzig, b. P. G. Kummer) — bereits im J. 1817 hervorzutreten gewagt. Auch hier ist mir noch von Niemand ein Fehlschluß nachgewiesen, ja auch nur vorgerückt worden*); sondern man

*) Ein Fehlschluß, ja eine völlige „Erschleichung" des Zuerweisenden wird mir — (ich rede hier bloß von meinen mathematischen Schriften; bei andern ist es freilich ein anderes gewesen!) — in meinem Leben zum erstenmale vorgeworfen von einem „Berliner Recensenten" und zwar soll diese Erschleichung sich befinden in der Schrift „Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte" (Prag 1842, in Com. b. Kronberger u. Rziwnac), wo ich (§ 52) drei in einerlei Geraden liegende und einander das Gleichgewicht haltende Kräfte x, y, z, oder (was eben so viel ist) drei sie vorstellende Gerade oder auch nur Größen überhaupt betrachte, und nachdem ich § 50 bewiesen, daß unter solchen Umständen: erstens jede der drei Größen x, y, z durch die beiden andern bestimmt sei, so zwar, daß das Verhältniß $\frac{z}{x}$ schon durch das Verhältniß $\frac{y}{x}$ bestimmt ist, daß zweitens die Ordnung, in der man

hat sich begnüget bloß zu sagen, daß die hier aufgestellten Erklärungen von Linie, Fläche, Körper, Länge u. s. w. entbehrlich, ja lächerlich wären, aus dem merkwürdigen Grunde, weil ja ein Jeder schon wisse, was für Begriffe man mit diesen Worten verbinde! Man hat sich ferner geärgert, daß ich die archimedischen und andere ähnliche Voraussetzungen nicht als echte Grundsätze will gelten lassen, da sie ja doch so einleuchtend wären. Man hat also nur zu erkennen gegeben, daß man nicht wisse, um was es sich bei einer streng wissenschaftlichen Darstellung (die freilich nicht etwa für den Schulunterricht ist) handle.**)

Wenn ich nun heute der Gesellschaft meinen Versuch über das vierte große Desideratum in der Raumwissenschaft, über die Lehren von der Haltung, Krümmung und Schnörkelung der Linien und Flächen vorzulegen wage, muß ich gleich anfangs bekennen, daß ich hier keineswegs im Stande sey, die ganze auf diesen Lehren lastende Schwierigkeit zu beheben, und daß die gegenwärtige Arbeit mehr als die sämmtlichen früheren nur als ein unvollständiger Versuch betrachtet und beurtheilet seyn wolle. Auch muß ich anmerken, daß ich die Rechnungen, welche zur vollständigen Lösung der hier besprochenen Probleme nothwendig sind, keineswegs ausgeführt habe, und dieß zwar nicht bloß darum, weil es hierorts weitläufig gewesen wäre, sondern auch, weil ich mir zur Ausführung mehrerer derselben die nöthigen Kräfte gar nicht mehr zutrauen kann. Ich muß mich also begnügen, hier

---

diese Größen betrachte, d. h. welche derselben man als erste, welche als zweite ansehe, willkürlich ist: aus dem Ersten schließe, daß man die Gleichung $\frac{z}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ habe, und aus dem Zweiten sodann, daß man durch Vertauschung von x und y auch $\frac{z}{y} = f\left(\frac{x}{y}\right)$ ansetzen könne. Gegen die Richtigkeit der beiden hier gebrauchten Prämissen nun hat der Recensent in der Berliner literarischen Zeitung 1843, No. 5, art. 152 nichts einzuwenden; auch die erste Gleichung gibt er mir unbedenklich zu: aber in der Ableitung der zweiten soll „die Erschleichung" liegen; denn diese soll aus der zweiten Prämisse — nicht folgen. Obgleich es also erlaubt ist, x mit y und y mit x zu vertauschen, so soll es doch nicht erlaubt seyn, aus $\frac{z}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ zu folgern $\frac{z}{y} = f\left(\frac{x}{y}\right)$?!

**) Nur ein Recensent brachte die etwas scheinbarere Einwendung vor, daß ich mir eine unzulässige Rechnung mit Nullen erlaube, wenn ich aus dem Umstande, weil eine stetige Größe $Fx + \Omega$ bestimmt wird bloß durch die Werthe der unendlich vielen Größen $fx + \omega^1, fx + \omega^2, fx + \omega^3, fx + \omega^4, \ldots$ (wo $\Omega, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \ldots$ Größen sind, die gleichzeitig bis auf Null abnehmen), den Schluß ziehe, daß sich der Werth von Fx durch den alleinigen Werth von fx bestimmen lassen müsse. Hiernächst wäre es schon eine Nullrechnung, wenn wir sagen, daß der Werth von $\frac{a + nx}{b + mx}$ für $x = 0$ in den Werth $\frac{a}{b}$ übergehe.

nur die allgemeinsten Begriffe angedeutet zu haben; und hoffen, daß wenn nur diese sich bewähren, dann wohl auch einst sich Jemand finden werde, der die zu ihrer Anwendung nöthigen Rechnungen vollendet.

§ 1.[69])

Wenn wir in der Raumwissenschaft von einem Raumdinge oder räumlichen Gegenstande sprechen: so verstehen wir darunter keineswegs das, was diese Ausdrücke ihrer Zusammensetzung nach freilich bedeuten könnten, ein eigenes Ding, das sich im Raume befindet, von diesem selbst also noch zu unterscheiden wäre, somit wohl etwas Wirkliches, irgendeine einzelne endliche Substanz oder ein Inbegriff mehrerer seyn müßte; sondern wir denken uns dabei nur einen Ort, den solche Substanzen möglicher Weise ausfüllen könnten; also entweder nur einen einzigen Punct (als den möglichen Ort einer einzigen Substanz) oder einen Inbegriff mehrerer, allenfalls selbst unendlich vieler Puncte. Dieß gilt sogar noch dann, wenn wir uns — etwa zur Abkürzung der Rede oder zu mehrerer Versinnlichung — erlauben, von gewissen Veränderungen zu sprechen, welche ein Raumding erfahre, indem es statt dieser oder jener Theile einige andre erhalte; u. ds. Auch hier noch bleiben es die bloßen Orte, die wir betrachtet wissen wollen.

§ 2.

Alle Puncte, aus deren Inbegriffe ein zusammengesetztes Raumding bestehet, nenne ich unter einander Nachbarn[70]); ganz abgesehen davon, wie weit je zwei derselben von einander abstehen mögen und ob es noch einige andre demselben Raumdinge zugehörige Puncte, die zwischen ihnen liegen, gebe oder nicht.

§ 3.

Bei einem Raumdinge, welches aus mehreren Puncten bestehet, können wir hinsichtlich eines jeden einzelnen derselben m die Frage aufwerfen, ob dieser Punct auch einen oder etliche Nachbarn, die eine gegebene Entfernung ε von ihm haben, besitze? Wenn der Punct i in einem Raumdinge so liegt, daß keine auch noch so kleine Entfernung angeblich ist, von der behauptet werden könnte, für diese und für alle kleineren Entfernungen, die es nur überhaupt gibt, besitze i einen oder etliche Nachbarn: so sage ich, i stehe isolirt oder vereinzelt in diesem Raumdinge. Ein solcher vereinzelt stehender Punct ist in dem Raumdinge, welches die Gleichung

$$y = 1 + \sqrt{(1-x)(2+x)} + \sqrt{(1-x)(2-x)}$$

vorstellt,[71]) wenn x und y rechtwinklige Coordinaten sind, für die Abszisse $x = 1$; und in dem Raumdinge, das wir erhalten, wenn wir erst einen Punct a beliebig annehmen, dann in einer aus ihm ausgehenden Richtung in jeder Entfernung, die der Form

$$x = \frac{m}{2^n}$$

unterstehet (m und n ganze Zahlen) einen Punct annehmen, sonst aber keine andern setzen, stehet jeder Punct isolirt.

§ 4.

Ein Raumding, das keinen einzigen isolirt stehenden Punct hat, in welchem sonach jeder Punct für jede, wenn auch nicht beliebig große, doch hinlänglich kleine Entfernung gewisse Nachbarn besitzt, nenne ich ein ausgedehntes, continuirliches Raumding, auch eine Ausdehnung. Ein Raumding dagegen, dessen jeder Punct vereinzelt stehet, nenne ich ein discontinuirliches Raumding.

§ 5.

Alle Raumdinge, die aus einer bloß endlichen Menge von Puncten bestehen, sind eben darum schon discontinuirlich; umgekehrt aber folgt bloß daraus, daß die Menge der Puncte in einem Raumdinge unendlich ist, noch gar nicht, daß es ein continuirliches sey, wie gleich das zweite Beispiel in § 3 beweiset.

§ 6.

Um bei einem Begriffe, auf den wir in der Folge sehr oft zu sprechen kommen, das ewige Einerlei im Ausdruck zu vermeiden, erinnern wir, daß wir von einem Verhältnisse, welches wenn nicht für jede beliebig große, doch für jede beliebig kleine Entfernung von einem Puncte, und für jede, die kleiner als eine gewisse ist, gilt, zur Abwechslung auch sagen, daß es für jede hinlänglich kleine Entfernung von diesem Puncte, oder für die kleinsten Entfernungen, oder auch in der nächsten Umgebung von ihm gelte.

§ 7.

Ein Ausgedehntes, dessen jeder Punct für jede hinlänglich kleine Entfernung der Nachbarn nur so viele hat, daß ihr Inbegriff, für eine jede dieser Entfernungen für sich allein betrachtet, noch kein Ausgedehntes darstellt, nenne ich ein Raumding von einer einzigen oder einfachen Ausdehnung, auch eine Linie. Ein Raumding, dessen jeder Punct für jede hinlänglich kleine Entfernung der Nachbarn so viele hat, daß ihr Inbegriff für eine jede dieser Entfernungen für sich allein betrachtet selbst noch ein Raumding von einfacher Ausdehnung darstellt, nenne ich ein *Raumding von zweifacher oder doppelter Ausdehnung*, auch eine *Fläche*. Ein Raumding endlich, dessen jeder Punct für jede hinlänglich kleine Entfernung der Nachbarn so viele hat, daß ihr Inbegriff für eine jede dieser Entfernungen für sich allein betrachtet schon ein Raumding von doppelter Ausdehnung darstellt, nenne ich ein *Raumding von dreifacher Ausdehnung* oder einen *Körper*.

§ 8.

Wenn wir von dem in einer Ausdehnung liegenden Puncte i eine Beschaffenheit betrachten, die obgleich vielleicht noch mehreren, doch nicht so vielen Nachbarn des i zukommen kann, daß ihr Inbegriff für sich allein schon ein Raumding von derselben Art der Ausdehnung, wie das gegebene, darstellt: so nenne ich i hinsichtlich dieser Beschaffenheit einen *außerordentlichen* oder *besonderen, singulären Punct*, und in dem Falle, wenn der Inbegriff aller diese Beschaffenheit theilender Puncte ein *discontinuirliches Raumding* darbeut, nenne ich ihn wohl auch einen bezugsweise auf diese Beschaffenheit *isolirt* stehenden Punct. Im Gegensatze von solchen außerordentlichen Puncten nenne ich die übrigen *ordentliche, gewöhnliche* oder *gemeine*. So nenne ich die Puncte im Umfange eines Würfels hinsichtlich dieser Eigenschaft außerordentliche, weil ihr Inbegriff für sich allein nicht einen Körper, sondern nur eine Fläche, also eine Ausdehnung anderer Art, als der Würfel ist, bildet; dagegen die Puncte, deren Entfernung vom Mittelpuncte des Würfels kleiner als seine halbe Seite ist, sind Puncte, die wir hinsichtlich dieser Eigenschaft *gemeine* Puncte heißen, weil ihrer so viele sind, daß ihr Inbegriff abermal einen Körper darstellt. Die Puncte an den sechs Ecken des Würfels nenne ich sogar hinsichtlich dieser Eigenschaft *isolirt* stehende Puncte, weil ihr Inbegriff für sich allein gar keine Ausdehnung, sondern ein discontinuirliches Raumding vorstellt.

§ 9.

Die hier gelieferten Erklärungen, besonders des § 7, sind, wie ich glaube, wesentlich besser als diejenigen, die ich vor mehr als 27 Jahren in den „*Drei Problemen u. s. w.*" geliefert.[72]) Von selbst versteht es sich aber, daß man in einem Systeme der Raumwissenschaft noch vor der Aufstellung derselben die Möglichkeit der hier beschriebenen Raumdinge nachweisen muß; und begreiflich machen, wie die Einführung dieser drei Klassen derselben sogar nichts Willkürliches sey, sondern durch die Natur der Sache selbst geboten werde. In einem vollständigen Lehrbegriffe muß auch (was eben nicht schwer ist, ja in der genannten Abhandlung in den §§ 17, 43 und 53 schon angedeutet wurde) erwiesen werden, daß diese Raumdinge, sofern sie überhaupt etwas bestimmbares seyn sollen, in allen ihren (unendlich vielen) Theilen und Einrichtungen bestimmbar seyn müssen durch die bloße Angabe einiger reiner Begriffsregeln, sobald erst so viele lediglich durch ihre Beziehung auf gehabte Anschauungen bestimmbare Stücke gegeben sind als zur Bestimmung eines jeden Punctes im Raume vermittelst bloßer Begriffe hinreichen. Dergleichen sind, wenn 1. irgend ein einzelner Punct, 2. drei aus demselben senkrecht auf einander ausgehende Richtungen und 3. eine Entfernung gegeben wird. Um eine Linie zu bestimmen, bedarf es dann nur der Angabe eines oder mehrerer Paare von Gleichungen von der Form

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0,$$

worin x, y, z die sogenannten Coordinaten der Linie bedeuten, die Zeichen f und φ aber Functionen vorstellen, deren Veränderliche sich — höchstens mit Ausnahme einer (endlichen oder unendlichen) Menge isolirt stehender Werthe — nur nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern und ihre Abgeleiteten haben; wobei endlich noch angezeigt werden muß, innerhalb welcher Werthe der x, y, z ein jedes dieser Paare von Gleichungen gelte.*) Auf eine ähnliche Art verhält es sich bei Flächen und Körpern.

§ 10.

Man sagt, daß ein Paar Linien am, an (Fig. 1) oder Flächen mam, nan (Fig. 2) um einen gemeinschaftlichen Punct a herum einander näher kommen als ein Paar andrer Linien $a'm'$, $a'n'$ oder Flächen $m'a'm'$, $n'a'n'$ um ihren gemeinschaftlichen Punct a', wenn die Nachbarn, die jener Punct für jede hinlänglich kleine Entfernung in dem einen und in dem andern Raumdinge findet, in dem einen Paare stets näher als in dem anderen beisammen stehen. Wenn ein Paar Linien oder Flächen in einem gegebenen Puncte einander so nahe kommen, als

*) Wie nothwendig dergleichen mehrere Paare von Gleichungen und die Bestimmung der Grenzen ihrer Gültigkeit oft sey, kann man noch ungleich deutlicher als aus dem Wenigen, daß ich a. a. O. darüber gesagt, aus den erst kürzlich erschienenen zwei Schriften des Hrn. Prof. Doppler: „Versuch einer analytischen Behandlung beliebig begrenzter u. zusammengesetzter Linien, Flächen u. Körper" (Prag, 1839) und „Versuch einer Erweiterung der analytischen Geometrie auf Grundlage eines neu einzuführenden Algorithmus" (Prag, 1842) ersehen.[73]

ein Paar Linien oder Flächen, die mit den vorliegenden congruibel*) sind, einander nur kommen können: so sagt man, daß sie in diesem Puncte sich an einander schmiegen, oder sich osculiren, oder auch schlechtweg nur, daß sie einander berühren, einen Contact mit einander haben. Das Anschmiegen oder Berühren in diesem Sinne gekommen, ist ein Verhältniß von der Art derer, die ich (in der Wissenschaftslehre Bd. I, § 80) gegenseitige nenne, d. h. an welchen beide das Verhältniß bildende Glieder in gleicher Weise Theil nehmen.[76])

§ 11.

In einem etwas veränderten, enger gewordenem Sinne nimmt man das Anschmiegen oder den Contact, wenn man die Linie oder Fläche, die sich an eine gegebene in einem gegebenen Puncte derselben anschmiegen soll, als eine nach ihrer Gestalt oder Größe u. ds. noch nicht völlig bestimmte Linie oder Fläche betrachtet, und eben diejenigen nähern Bestimmungen sucht, dadurch sie der gegebenen in dem bezeichneten Puncte so nahe komme, daß sie bei keiner andern Bestimmung dieser Stücke näher zu kommen vermögte. Hierbei kann der Umstand, in welchem ihrer eigenen Puncte das Anschmiegen stattfinden soll, unsrer beliebigen Bestimmung anheim gestellt seyn, oder es ist auch in Betreff seiner schon etwas, z. B. daß er der Scheitelpunct der anschmiegenden Linie oder Fläche seyn soll u. ds., festgesetzt. In jedem Falle bleibt das Anschmiegen in dieser zweiten Bedeutung ein bloß einseitiges Verhältniß: nur Eines der beiden Raumdinge betrachten wir als gegeben, und nur das Andere als mehr oder weniger veränderlich in seiner Gestalt, Größe u. dgl. Daß aber diese zweite Bedeutung eine engere sey, sieht man schon daraus, weil ein Raumding, das sich an ein gegebenes anschmiegen soll in diesem zweiten Sinne, ihm eben darum auch so nahe kommen muß, daß kein anderes demselben congruibles näher zu treten vermögte; während doch umgekehrt das Letztere nicht sofort zum Ersteren genüget.

*) Congruibel nennen wir ein Paar Raumdinge, wenn sie von einer solchen Beschaffenheit sind, daß ein und derselbe materielle Gegenstand wie den Ort des einen, so auch den Ort des andern auszufüllen vermag, ohne irgend eine Veränderung in der Verbindung seiner Theile zu erleiden.[74]) Diese Verständigung über den Begriff der Congruibilität enthält zwar den Begriff der Bewegung, und wäre darum zur Aufnahme in ein streng wissenschaftliches System der Raumlehre nicht geeignet, sondern dort gebe ich ein ganz anderes Merkmal an, dadurch sich congruible und incongruible Raumdinge unterscheiden. Da aber die Mittheilung dieses anderen Merkmals hierorts zu weitläufig wäre; so mag das nur eben Gesagte für den Zweck einer bloßen Verständigung genügen. (Uiber den Unterschied zwischen einer Verständigung und Erklärung s. die Wissenschaftslehre Bd. IV, § 668).[75])

§ 12.

Meistentheils läßt sich ein seiner Beschaffenheit nach noch nicht völlig bestimmtes Raumding an ein gegebenes andres um so genauer (oder inniger) anschmiegen (oder, wie Andere sagen, es läßt sich ein Contact von um so höherer Ordnung erreichen), je mehrere Beschaffenheiten an jenem Raumdinge noch unserer freien Bestimmung anheim gestellt sind. Meistentheils, sage ich; denn freilich kann es auch solche Beschaffenheiten geben, die — wir mögen sie so oder anders bestimmen — für den Zweck der Anschmiegung gleichgültig sind. So mag es z. B. festgesetzt seyn oder nicht, wie viele Grade ein Kreisbogen von beliebigem Halbmesser, der sich an eine gegebene Ellipse anschmiegen soll, betrage: für das Anschmiegen ist dieser Umstand gleichgültig, weil es sich hier bloß um die Annäherung handelt, die in der nächsten Umgebung des gemeinsamen Punctes statt hat. Dagegen werden wir eine Parabel von beliebigem Parameter einer gegebenen Curve, z. B. einer Ellipse in einem gegebenen Puncte der letztern allerdings genauer anschmiegen können, wenn uns die Wahl des Punctes in der Parabel, den sie mit der Ellipse gemein haben soll, freigestellt ist, als im Gegentheil. Bekannt ist es ferner, daß das Anschmiegen eines Raumdinges an ein andres in der weitern, ja selbst der engern Bedeutung nicht hindert, daß beide Raumdinge sich in demselben Puncte auch schneiden. Denn ohne die genaue Erklärung des letztern Begriffes (die nicht die leichteste ist) hier schon vorauszusetzen, berufe ich mich nur auf das bekannte Beispiel, daß der Kreis eine Curve von einfacher Krümmung, welche er osculirt, in eben diesem Puncte auch schneide und schneiden müsse, so oft ihre Krümmung nur eben im Wachsen oder im Abnehmen ist. Endlich ist vielleicht auch noch das nicht überflüssig zu erwähnen, daß es nicht immer möglich sey, eine Linie oder Fläche, bei der gewisse Beschaffenheiten unsrer Bestimmung freigestellt sind, in der Art zu bestimmen, daß ein wirkliches Anschmiegen derselben an eine gegebene andere Linie oder Fläche in dem zweiten engeren Sinne erfolge; sondern daß hier zuweilen, wie es auch anderwärts geschieht, Aufgaben vorkommen, die etwas Unmögliches fordern. Von der Art währe z. B. die Forderung, eine gegebene Gerade durch einen Kreis zu osculiren; denn so groß wir auch den Halbmesser desselben annähmen, gäbe es immer einen von noch größerem Halbmesser, der der Geraden noch näher käme. Da es hier nicht meine Absicht ist zu untersuchen, auf welche Weise die allgemeine Aufgabe, von der wir jetzt gesprochen, dort, wo es möglich ist, gelöset werden könne: so sey es genug zu erinnern, daß schon Cauchy gegründete Einwendungen gegen dasjenige Verfahren vorgebracht hat, das von Lagrange angegeben, noch bis jetzt allgemein gelehrt wird. Die von Cauchy selbst vorgeschlagene Methode läßt man bei Seite liegen, vermuthlich nur wegen des Anstoßes, den die hier vorkommende Rechnung mit unendlich kleinen Größen verschiedener Ordnungen, davon die höheren im Vergleiche mit einer niederen immer verschwinden sollen, verursacht. Doch ich bekenne offen, daß ich in dieser Rechnungsart in dem Geiste, wie sie Cauchy aufgefaßt hat, nichts Irriges oder Unzuverläßiges finde; und ich meine, daß dieser scharfsinnige Gelehrte, der zur Erweiterung unseres mathematischen Wissens schon so Vielfältiges geleistet hat, durch diese von ihm erdachte Behandlungsweise des Unendlichen sich auch ein eigenes bisher noch nicht genug gewürdigtes Verdienst um die Begründung dieser Wissenschaft beigelegt hat.[77])

§ 13.

In einem Raumdinge von dreifacher Ausdehnung (Körper) hat jeder Punct, der nur nicht eben an seiner Oberfläche liegt, für eine jede hinlänglich kleine Entfernung der Nachbarn so viele, daß ihr Inbegriff für sich selbst eine ganze Kugelfläche bildet, d. h. er besitzt eigentlich alle Puncte, die es für diese Entfernung nur überhaupt gibt, zu seinen Nachbarn. Nicht so ist es bei den zwei übrigen Arten der räumlichen Ausdehnung, in welchen jeder Punct für eine jede Entfernung, die kleiner als eine gewisse ist, nur einen Theil der Puncte, die es für diese Entfernung überhaupt gibt, zu seinen Nachbarn hat. In einer Fläche namentlich bildet der Inbegriff dieser Nachbarn für jede hinlänglich kleine Entfernung eine bald so, bald anders gestaltete (jedesmal auf einer Kugelfläche liegende) Linie. So stellt der Inbegriff aller Nachbarn, die es zu jedem Puncte einer unbegrenzten Ebene gibt für jede beliebige Entfernung, eine ganze Kreislinie dar; bei einer unbegrenzten Cylinderfläche dagegen bilden die Nachbarn jedes Punctes für jede hinlänglich kleine Entfernung eine gewisse in sich zurückkehrende Linie von doppelter Krümmung, die einer Kreislinie um so näher kommt, je kleiner wir die Entfernung nehmen, u. s. w. In einer Linie hat jeder Punct anzufangen von einer gewissen Entfernung für jede kleinere der Nachbarn insgemein nur zwei, zuweilen aber auch nur einen oder mehr als zwei, jedesmal doch nur so viele, daß ihr Inbegriff (wie wir schon wissen) ein discontinuirliches Raumding darstellt. So gibt es in der geraden Linie zu jedem inneren Puncte derselben zwei in entgegengesetzten Richtungen liegende Nachbarn; an ihrem Grenzpuncte hat sie nur einen einzigen Nachbar; in ihrem Winkelpuncte hat jede gebrochene Gerade zwei Nachbarn, liegend in Richtungen, die einen Winkel bilden; dasselbe ist der Fall bei jeder

Kreislinie, bei der wir überdieß bemerken, daß die erwähnten Richtungen bei gleicher Entfernung einen um desto stumpferen Winkel bilden, je größer der Halbmesser des Kreises ist; u. s. w.

§ 14.

Wohl dürfen wir also einem jeden Ausgedehnten, das keine körperliche Ausdehnung hat, in jedem seiner Puncte eine Beschaffenheit beilegen, welche wir uns als den nächsten Grund davon denken, warum dieß Raumding in jedem seiner Puncte für eine jede hinlänglich kleine Entfernung aus dem ganzen Vorrathe von Puncten, die es für diese Entfernung überhaupt gibt, nur eben jene und sonst keine anderen sich als Nachbarn aneignet. Es werde mir verstattet, diese Beschaffenheit eines Raumdinges in jedem seiner Puncte seine Haltung in diesem Puncte zu nennen.

§ 15.

Wie ungern ich mir auch herausnehme, in irgend einer Wissenschaft ein neues Kunstwort in Vorschlag zu bringen, oder an der Bedeutung eines schon eingeführten eine Abänderung zu verlangen: so hab' ich doch beides schon mehr als einmal gewagt, wenn es mir hinlänglich klar wurde, daß es der Vortheil der Wissenschaft selbst, die Verdeutlichung ihrer Begriffe schlechterdings so erheische. Nur eine solche Rücksicht ist es, die mich auch hier bestimmt, der Aufmerksamkeit der Mathematiker einen bisher fast noch gar nicht beachteten Begriff unter dem, wie ich glaube, nicht unpassenden Namen der Haltung zu empfehlen. Denn was ich so nenne, ist ein gewisses an allen Linien und Flächen in jedem Puncte derselben befindliches Etwas, welches man sich bisher noch nie mit vollendeter Deutlichkeit vorgestellt haben dürfte; wobei ich doch sehr gerne eingestehe, daß es der Begriffe mehrere gibt, die eine nahe Verwandschaft mit dem der Haltung, und allen Geometern, ja überhaupt allen nur etwas gebildeten Menschen bekannt sind. So oft man nämlich von der „Natur" eines Raumdinges, oder von der „Gestalt" desselben spricht, besonders aber so oft man bei einer Linie von den in einem ihrer Puncte vorhandenen Richtungen oder endlich von der in einem gegebenen Puncte einer Linie oder Fläche befindlichen Krümmung redet, denkt man an etwas, das mit der Haltung dieser Raumdinge verwandt ist. Denn die „Natur eines Raumdings" ist freilich etwas, das auch die Haltung desselben in jedem seiner Puncte, wie überhaupt alle seine Beschaffenheiten, so ferne sie ihm wesentlich sind, in sich schließt: aber gerade darum, weil Natur viel Mehreres noch als die bloße Haltung umfaßt, dürften wir diese beiden Begriffe nicht verwechseln; wie denn auch jedes Raumding, vom discontinuirlichen anzufangen bis zu dem von drei Ausdehnungen, seine ihm eigethümliche Natur besitzt, während sich Haltung bloß bei Raumdingen von einfacher oder doppelter Ausdehnung findet. Dieser letztere Umstand zeigt uns auch schon, daß Haltung und Gestalt nicht einerlei sind; wozu noch kömmt, daß die bloße Gestalt, die eine Linie oder Fläche selbst in ihrem ganzen Umfange hat, geschweige denn diejenige, welche sie nur in der nächsten Umgebung eines einzigen Punctes hat, noch gar nicht hinreicht, uns ihre Haltung zu bestimmen. Denn offenbar besitzen zwei in einem Puncte einander durchschneidende Geraden dieselbe Gestalt, und haben doch weit eine verschiedene Richtung, auch eine verschiedene Haltung. Was endlich den Unterschied zwischen dem Begriffe der Haltung und den Begriffen der Richtung und Krümmung betrifft: so wird allerdigs durch die gegebene Haltung beides, die Richtung sowohl als auch die Krümmung, ja noch mehreres Andre bestimmt; allein nicht umgekehrt ist schon die ganze Haltung einer Linie auch nur in einem einzigen ihrer Puncte bestimmt, wenn wir nur die in diesem Puncte herrschende Richtung und Krümmung, ja selbst noch Schnörkelung angeben; oder wer wüßte nicht, daß ein Paar Linien in einem gegebenen Puncte dieselbe Richtung, dieselbe Krümmung, sogar dieselbe Zu- oder Abnahme in dieser Krümmung besitzen können, und gleichwohl kein auch noch so kleines Bogenstück mit einander gemein haben dürfen? Der Begriff der Haltung, wie ich ihn hier bestimme, ist also wohl ein neuer; doch um so unabweislicher ist die Frage, ob seine Einführung auch etwas nützen werde? Ich sage nun, schon das sey als ein wichtiger Vortheil in einer jeden reinen Begriffswissenschaft, dergleichen die reine Raumlehre ist, zu erachten, wenn es uns hier gelingt, dasjenige, was uns bei gewissen Untersuchungen und Lehren in dieser Wissenschaft dunkel vorschwebt, zu einem deutlichen Bewußtseyn zu erheben. Und dieß wird, meine ich, geschehen, wenn wir den vorgeschlagenen Begriff der Haltung in die Raumwissenschaft einführen. Denn nur die Haltung ist es, wornach wir eigentlich, ohne es uns deutlich bewußt zu werden, forschen, wenn wir bei einer jeden Linie zuerst nach den Richtungen, die sie in jedem ihrer Puncte hat, fragen, sodann die Aenderung, die sie in diesen Richtungen erfährt, d. h. ihre Krümmung, endlich wohl auch noch die Aenderung in dieser Krümmung selbst, d. h. die Schnörkelung untersuchen. Oder erreichen wir mit allen diesen Untersuchungen wohl etwas Anderes als daß wir bestimmen und immer genauer bestimmen, wo sich die Nachbarn, die der in Rede stehende Punct für die kleinsten Entfernungen hat, befinden? Erheben wir also diesen uns wenigstens dunkel vorschwebenden

Zweck uns selbst zu einem deutlichen Bewußtseyn, so bilden wir den Begriff der Haltung; und daß dieß auf eine sehr ungezwungene Weise geschehen könne, zeigt, wie mir däucht, § 13. Ist aber dieser Begriff erst aufgestellt, dann sind wir (wie das Folgende thatsächlich nachweisen wird) im Stande, vermittelst eines sich immer gleichbleibenden und durch die Natur der Sache selbst uns vorgezeichneten Verfahrens erst den Begriff der Richtung, aus diesem sodann jenen der Krümmung, und aus diesem wieder jenen der Schnörkelung so abzuleiten, daß es sich zeigt, wie auch dieser noch nicht der letzte sey, bei dem wir nothwendig stehen bleiben müßten, sondern daß hier ein Fortschreiten in das Unendliche Platz habe.

§ 16.

Da, wie die gemeinsten Beispiele zeigen, der Inbegriff der Puncte, die ein gegebener für eine gewisse Entfernung zu seinen Nachbarn hat, auch in demselben Raumdinge nach der Verschiedenheit des gewählten Punctes eine sehr verschiedene Beschaffenheit darbieten kann: so müssen wir die Haltung eines Raumdinges als etwas solches ansehen, was in jedem Puncte desselben ein anderes seyn kann. Um also diese Haltung eines gegebenen Raumdinges vollständig zu bestimmen, werden wir angeben müssen, wie sie in jeglichem Puncte desselben sey.

§ 17.

Ist nur die nächste Umgebung eines in zwei Raumdingen von einfacher oder doppelter Ausdehnung gelegenen Punctes beiderseits dieselbe, d. h. eine auch noch so kleine Entfernung angeblich, für welche u. alle kleineren die Nachbarn des Punctes in beiden Raumdingen die nämlichen sind; so mögen die übrigen Theile der beiden Raumdinge verschieden seyn, wie man nur will: es ist doch die Haltung beider in jenem erst erwähnten Puncte die nämliche zu nennen. Ist aber umgekehrt keine auch noch so kleine Entfernung angeblich, für welche u. alle kleinern der Punct dieselben Nachbarn wie in dem einen so in dem andern Raumdinge hätte: so müssen wir auch die Haltung beider Raumdinge in diesem Puncte verschieden nennen. Denn nach der gegebenen Erklärung (§ 14) haben wir ja die Haltung eines Raumdinges in einem gegebenen Puncte nur aus der Beschaffenheit seiner nächsten Umgebung zu beurtheilen; und dürfen sonach offenbar von keiner Aenderung derselben (nämlich in Hinsicht auf den vorliegenden Punct) sprechen, wenn nur die nächste Umgebung desselben ungeändert bleibt. Ist aber auch die nächste Umgebung des Punctes in dem andern Raumdinge schon eine andre: dann können wir den Grund davon nirgend anders als darin suchen, daß die Haltung des anderen Raumdings in diesem Punct eine andere sey.

§ 18.

Die Haltung, welche ein Raumding auch nur in einem einzigen seiner Puncte beobachtet, läßt sich durch bloße Begriffe nie vollständig bestimmen, sondern es werden hinzu immer gewisse durch ihre Beziehung auf eine Anschauung zu gebende Stücke erfordert. Denn um eine Haltung auch nur in einem einzigen gegebenen Puncte vollständig zu bestimmen, müßte auch das, was durch die Haltung selbst bestimmt wird, d. h. die Orte der Nachbarn, die dieser Punct in seiner nächsten Umgebung hat, müßten bestimmt seyn. Allein aus einem gegebenen Puncte läßt sich bekanntlich auch nicht ein einziger anderer durch bloße Begriffe, ohne irgend eine Anschauung (wie etwà von der Richtung oder Ebene, darin er gelegen seyn soll) bestimmen. Da nun nie alle Puncte, die es zu einer gewissen Entfernung überhaupt gibt, sondern nur einige derselben einem gegebenen in einer Linie oder Fläche liegenden Puncte zugehören; so wird es nie möglich seyn, ohne eine Anschauung zu bestimmen, welche die zugehörigen sind oder nicht sind.

§ 19.

Wenn ein Paar Raumdinge oder auch nur ein Paar in denselben gelegene Puncte mit ihrer nächsten Umgebung ein Paar einander ähnliche Raumdinge darbieten, d. h. wenn die zwei Punctinbegriffe, die jene zwei Puncte darstellen, indem wir zu jedem nur alle diejenigen Nachbarn, welche er anzufangen von einer gewissen Entfernung für alle kleineren hat, hinzuthun, Dinge von einer solchen Beschaffenheit sind, daran sich kein durch einen reinen Begriff erfaßbarer Unterschied auffinden läßt: so müssen wir auch die Haltungen in besagten zwei Puncten für ähnlich erklären. Sind die erwähnten zwei Raumdinge überdieß geometrisch gleich, d. h. bieten sie auch durch Vergleichung mit einer gegebenen Entfernung keinen Unterschied dar: dann dürfen wir auch die Haltungen in den besagten Puncten geometrisch-gleich nennen. Sind die erwähnten Raumdinge ferner noch congruibel (§ 10): so dürfen wir auch die Haltungen in den besprochenen Puncten für congruibel erklären in einer nur etwas erweiterten Bedeutung, darnach wir auch ein Paar bloße Beschaffenheiten zweier Raumdinge congruibel nennen, sofern nur die durch bloße Anschauung gegebenen Stücke (Puncte, Entfernungen, Richtungen u. s. w.), welche zu ihrer Bestimmung nothwendig sind, ein Paar congruible Raumdinge in der § 10 erwähnten Bedeutung darbieten. Sind endlich jene

Raumdinge von einer solchen Art, daß aus den nämlichen durch bloße Anschauung gegebenen Stücken vermittelst der nämlichen reinen Begriffsregel sowohl das eine als auch das andere sich aus den gegebenen zwei Puncten bestimmen läßt: so dürfen wir sagen, daß die Haltungen in diesen zwei Puncten vollkommen gleich oder dieselben, die nämlichen oder einerlei sind. Denn so oft wir aussagen, daß ein Paar Gegenstände die nämliche Beschaffenheit haben (und Haltung ist doch nur eine Beschaffenheit), so verstehen wir darunter nichts Anderes, als daß dieselbe Vorstellung, die wir von dieser Beschaffenheit uns an dem einen dieser Gegenstände bilden, auch auf die Beschaffenheit des andern passe. Und dieß ist unter den ebenbeschriebenen Umständen der Fall mit der Haltung an dem einen und an dem andern Puncte in den zwei Raumdingen. Sollten wir endlich irgendwo Puncte antreffen, deren nächste Umgebung aus denselben durch Anschauung gegebenen Stücken auf eine völlig entgegengesetzte Weise bestimmt wird, so dürften wir auch ihre Haltungen selbst für entgegengesetzt betrachten.*) Alle diese fünf Sätze gelten auch umgekehrt; d. h. wenn ein Paar Haltungen einander ähnlich oder geometrischgleich oder congruibel oder gar die nämlichen oder im Gegentheil einander entgegengesetzt seyn sollen: so müssen die Puncte, an denen sich diese Haltungen befinden, eine nächste Umgebung haben, welche beziehungsweise ähnlich oder geometrischgleich oder congruibel oder gar die nämliche oder im Gegentheil ganz entgegengesetzt ist. Ein Paar Raumdinge also, die einen Punct u. die in demselben herrschende Haltung gemein haben, haben auch die nächste Umgebung um diesen Punct gemein.

*) Ergibt sich aus dem Begriffe des Gegensatzes, wie er in der Wissenschaftslehre Bd. I, § 107 erklärt ist.[78])