I.

VERSUCH DIE ERSTEN LEHRSÄTZE VON DREYECKEN UND PARALLELLINIEN MIT VORAUSSETZUNG DER LEHRE 1
VON DER GERADEN LINIE ZU BEWEISEN[8])

§ 1.

Erklärung. Winkel ist dasjenige Prädicat zweyer gerader Linien ca, cb (Fig. 1), die einen ihrer äußersten Puncte c gemein haben: welches Prädicat jedem andern Systeme der zwey Linien $c\alpha$, $c\beta$, die bey demselben Anfangspuncte c Theile jener sind, gemeinschaftlich zukömmt. — c heißt des Winkels Scheitel, und die Linien ca, cb, insofern von ihrer Länge dergestalt abgesehen wird, daß man auch die Linien $c\alpha$, $c\beta$ für sie nehmen kann, seine Schenkel.[9])

§ 2.

Anmerkung. Die Umschreibung, die diese Definition verlängert, verursacht der Sprachgebrauch, welcher den Winkel acb gleich $\alpha c\beta$ nennt, dem zufolge der Winkel eigentlich eine Eigenschaft zweyer Richtungen (wie ich das Wort in der | II. Abtheilung erkläre) nicht 2
aber zweyer Linien ist. Andere sagen: „der Winkel ist von der Größe der Schenkel unabhängig"; welches jedoch nur mit der Einschränkung verstanden werden müßte, daß man die Größe eines Schenkels nie negativ nimmt. — Daß übrigens der von mir gewählte Ausdruck vollständig sey, erhellet von selbst bey mäßigem Nachdenken. Um z. B. zu beweisen, daß der Winkel $acb = \alpha c\beta$ (Fig. 2) sey, schließt man unmittelbar ex definitione $acb = ac\beta$, $ac\beta = \alpha c\beta$, also $acb = \alpha c\beta$.[10])

§ 3.

Lehrsatz. Jeder Winkel bestimmt seinen Nebenwinkel.

Beweis. Aus der Erklärung (1) ergibt sich, ein Winkel sey bestimmt, wenn es seine Schenkel sind. Nun bestimmen die Schenkel des gegebenen Winkels zugleich die seines Nebenwinkels. Denn diese sind: der Eine ein Schenkel des gegebenen Winkels selbst, der Andre eine Verlängerung vom andern Schenkel des gegebenen Winkels über seinen Scheitel. Aus der Lehre von der geraden Linie weiß man nun, daß diese Verlängerung [abgesehn von ihrer Länge, im obigen Sinne (1)] gegeben sey.

§ 4.

Zusatz. Sind also zwey Winkel gleich, so sind auch ihre Neben-
3 winkel gleich. Denn | Dinge, die auf gleiche Art bestimmt werden, sind gleich.

§ 5.

Lehrsatz. Scheitelwinkel sind gleich, $ac\beta = bc\alpha$ (Fig. 3).

Beweis. Ihre bestimmenden Stücke sind gleich. Der Winkel $ac\beta$ ist ein Nebenwinkel des acb, der Winkel $bc\alpha$ in eben der Ordnung ein Nebenwinkel des bca. Ist also $acb = bca$, so ist auch $ac\beta = bc\alpha$ (3, 4).

§ 6.

Anmerkung. Der ordentliche Weg die Gleichheit zweyer Dinge darzuthun, ist kein andrer: als daß man ex datis die Gleichheit ihrer bestimmenden Stücke schließe (§ 4).[11] Diesen Weg beobachtet der Euklidische Beweis des gegenwärtigen Satzes nicht. Er hat aber in meinen Augen noch nebst dem zwey Mängel. Erstlich menget er schon hier die fremdartige Betrachtung einer Ebne mit ein; denn er addirt Winkel, welches immer nur unter der (obwohl verschwiegenen) Bedingung vorgenommen wird, daß sich die Winkel in derselben Ebene befinden. Zweytens setzt er voraus, daß Winkel Größen seyen, in welcher Voraussetzung er sie addirt und subtrahirt, und dem bloß arithmetischen Grundsatze: „Gleiches von Gleichem abgezogen, gibt gleiche Reste" unterwirft. — Größe heißt ein Ding, insofern es angesehen wird als bestehend aus einer Anzahl (Vielheit) von Dingen, die |
4 der Einheit (oder dem Maße) gleich sind. Sollte ich mir also einen Winkel als eine Größe denken, so müßte ich mir ihn, dem zufolge, vorstellen als zusammengesetzt aus mehreren einzelnen gleichen Winkeln in Einer Ebene; welches — man mög' es ausdrücklich oder nicht ausdrücklich sagen — eigentlich nichts als die Vorstellung des innerhalb der Schenkeln begriffenen Flächenraums ist; so daß also Hr. Schultz Recht hätte, wenn er diesen unendlichen Flächenraum als eine wesentliche Eigenschaft des Winkels betrachtet. Der Verfasser der Bemerkungen über die Theorien der Parallelen des H. Hofpr. Schultz u. s. w. (Libau 1796),[12] der diese Voraussetzung des H. Schultz weitläufig widerlegt, thut doch nichts Bessers, weil er die Winkel noch immer als Größen betrachtet, und nur noch den Begriff der Bewegung mit einmengt, indem er (S. 55) den Winkel als den Begriff des Verhältnisses der gleichförmigen Bewegung einer geraden Linie um Einen ihrer Punkte zu einer ganzen Umdrehung definirt. Dadurch entdeckt er uns

aber deutlich den wahren Ursprung aller Vorstellungen der Winkel als Größen, welcher meiner Meynung nach kein anderer als der empirische Begriff der Bewegung war. — Es ist nun offenbar, daß ich mir zwey Linien mit einem gemeinsamen Endpuncte, also einen Winkel (§ 1) denken kann, ohne auf eine Fläche, oder auf andre dazwischen gezogene Linien (Theilwinkel) oder auf eine Bewegung, durch welche | die Eine 5
dieser Linien aus der Lage der Andern in die ihrige gekommen, gedenken zu müssen. Folglich ist der Winkel seinem Wesen nach keine Größe. Dieß sah schon der gründliche Tacquet[13]) wohl ein (Elementa Geometriae I, 3. Prop. 16. Schol.). Nur wundert mich, daß er die gewöhnliche entgegengesetzte Vorstellungsart bloß für eine abgekürzte, obgleich unschickliche doch unschädliche Redensart erklärte, die man also immerhin beybehalten dürfte. Ist der Winkel eine bloße Qualität, so kann man zuförderst bloß von Gleichheit oder Ungleichheit (oder wie Tacquet will: Ähnlichkeit oder Unähnlichkeit) der Winkel reden; aber nicht von Größer- oder Kleinerseyn; als welches zwey besondre Arten des Ungleichseyns bedeutet, die eigentlich nur von Größen gelten, oder über deren Sinn man doch wenigstens erst übereingekommen seyn muß. — Ich werde also die Winkel nirgends als Größen behandeln, und verwerfe alle Beweise im Euklid als unbrauchbar, wo sie so betrachtet werden. Demohngeachtet wird dieß in dem ganzen algebraischen Theile der Geometrie keine Änderung nach sich ziehn, weil man hie (bekanntlich) Kreisbögen und nicht Winkel vor sich hat.

§ 7.

Erklärung. Werden in den Schenkeln *ca*, *cb* eines Winkels (Fig. 4) zwey Puncte *a*, *b* außer dem Scheitel *c*, und durch sie eine gerade Linie *ab* angenommen, so heißt das System der geraden Linien *ca*, *cb*, *ab* ein Dreyeck. |

§ 8. 6

Anmerkung. Also ist von keinem Flächenraum die Rede.

§ 9.

Zusatz. In jedem Dreyeck kommen drey Winkel vor. Jeder derselben wird von zwey Seiten eingeschlossen (d. h. hat sie zu Schenkeln), und steht der dritten gegenüber (d. h. hat sie zu keinem Schenkel). Jeder Seite liegen zwey Winkel an (d. h. sie gibt einen Schenkel von zweyen ab). — Dieß sind zwar eigentliche Lehrsätze; aber so leicht zu erweisen, daß ich damit den Raum spare.

§ 10.

Lehrsatz. In zwey gleichen Dreyecken sind I. die Seiten gleich, die zwey gleichen Seiten entgegenstehn, oder einem gleichen Winkel gegenüberstehn, oder denen zwey gleiche Winkel anliegen; II. die Winkel gleich, die zwey gleichen Winkeln entgegenstehn, oder von zwey gleichen Seiten eingeschlossen werden, oder einer gleichen Seite gegenüber stehen.

Beweis. Diese Seiten (I) und Winkel (II) werden durch die erwähnten Angaben in ihren Dreyecken bestimmt; denn es gibt zufolge (9) nur Eine Seite, nur Einen Winkel, dem diese Angaben zukommen. Da nun die Dreyecke selbst, und diese Angaben in ihnen gleich sind, so sind die bestimmenden Stücke dieser Seiten und Winkel gleich. |

7 ## § 11.

Anmerkung. Ich nenne Dreyecke nur schlechtweg gleich, die man sonst gleich und ähnlich nennt. Das Wort gleich sagt dem Sprachgebrauche gemäß mehr als das Wort ähnlich, so daß, wenn man zwey Dinge gleich nennt, sie darum auch schon ähnlich seyn müssen. Aber Eine Eigenschaft dieser Dinge, (welche sie nicht bestimmt), z. B. die Größe zweyer Flächenräume kann gleich seyn, ohne daß die Dinge, die Flächenräume, darum selbst gleich sind. Diese Eine Eigenschaft sollte man auch nicht mit dem Nahmen des Dinges selbst belegen; also nicht sagen: „zwey Dreyecke sind gleich", wenn man eigentlich nur sagen will: daß die Größen ihrer Flächenräume gleich sind. Enthält man sich dieser ziemlich unmathematischen Metonymie, so wird auch der sprachwidrige Beysatz ähnlich zu dem Worte gleich überflüssig bleiben. Wenn aber Einige das Wort gleich nicht anders gebraucht wissen wollten, als nur von der Eigenschaft der Größe: so bitte ich sie um ein andres Wort, welches man zur Bezeichnung dieses Begriffes allgemein brauchen könne? — Einerley ist dieß Wort nicht; denn so heißt nur ein und dasselbe Ding, insofern es mit sich selbst verglichen wird.[14])

§ 12.

Lehrsatz. Zwey Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bestimmen das Dreyeck, dem sie zugehören. |

8 Beweis. Aus der Erklärung (1) folgt unmittelbar, daß der Winkel und die bestimmte Länge der Stücke *ca*, *cb* seiner Schenkel zusammen alle Prädicate des Systems der zwey Linien *ca*, *cb* enthalte. Denn der Winkel allein enthält dasjenige, was von der bestimmten Länge der Linien *ca*, *cb* unabhängig ist; kömmt also diese auch noch hinzu, so ist

alles an diesem Systeme bestimmt. Nun versteht man unter Seiten (eines Dreyecks) — zum Gegensatz von Schenkeln — bestimmte Linien. Also ist alles an dem Systeme der 2 Linien *ca*, *cb* bestimmt; folglich auch die Puncte *a*, *b*; also auch die gerade Linie *ab*, die durch sie gezogen wird (§ 7); folglich auch die Winkel, die sie mit den beyden andern Seiten bildet.

§ 13.

Anmerkung. Aus diesem Satze wird man nun zwey correspondirende Lehrsätze, den Einen von der Gleichheit, den Andern von der Ähnlichkeit der Dreyecke folgern.

§ 14.

Lehrsatz. Zwey Dreyecke, in denen zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich sind, sind selbst gleich.

Beweis. Denn ihre bestimmenden Stücke sind gleich (§ 12).

§ 15.

Zusatz. Hieraus ergeben sich durch bloße Verneinung des Nach-
satzes (conclusio hypothetica in modo tollente) | etwelche Sätze. Z. B. 9
Wenn 2 Seiten gleich, die dritte aber ungleich, so muß auch der ein-
geschlossene Winkel ungleich seyn. U. s. w.

§ 16.

Erklärung. Zwey räumliche Dinge heißen ähnlich, wenn alle Merkmale, die aus der Vergleichung der Theile eines jeden unter sich hervorgehen, in beyden gleich sind; oder wenn sich durch jede mögliche Vergleichung der Theile eines jeden unter sich kein ungleiches Merkmal wahrnehmen läßt.

§ 17.

Lehrsatz. Dinge, deren bestimmende Stücke ähnlich sind, sind selbst ähnlich.

Beweis. Sollten sie unähnlich seyn, so müßte sich aus der Vergleichung der Theile eines einzelnen unter sich ein ungleiches (d. h. in dem andern nicht so vorhandnes) Merkmal wahrnehmen lassen. Diese Ungleichheit forderte einen Erkenntnißgrund in den Dingen selbst, also in ihren bestimmenden Stücken (denn aus diesen muß alles zu ersehen seyn, was in den Dingen selbst liegt). Also müßte in den bestimmenden Stücken eine aus ihrer Vergleichung unter sich erkennbare Verschiedenheit vorhanden seyn; folglich wären sie nicht ähnlich (§ 16).

§ 18.

Anmerkung. Dieser Satz liegt den Lehrsätzen von der Ähnlichkeit
10 eben so zum Grunde, wie der | Satz: „Dinge, deren bestimmende Stücke gleich sind, sind selbst gleich“ (§ 4) den Lehrsätzen von der Gleichheit (§ 6).

§ 19.

Grundsatz. Es ist uns keine besondere Vorstellung von irgend einer bestimmten Entfernung (oder absoluten Länge einer Linie), d. h. von einer bestimmten Art des Auseinanderseyns zweyer Puncte a priori gegeben.

§ 20.

Lehrsatz. Alle geraden Linien sind ähnlich.

Beweis. Gerade Linien werden durch ihre beyden Endpuncte bestimmt. Nun haben wir (§ 19) keine besondre Vorstellung von irgend einem bestimmten Auseinanderseyn zweyer Puncte. Also ist jegliches Auseinanderseyn zweyer Puncte dem andern ähnlich. Also auch alle geraden Linien selbst (§ 17).

§ 21.

Lehrsatz. Zwey Dreyecke, in denen zwey Seiten um einen gleichen eingeschlossenen Winkel proportionirt sind, sind selbst ähnlich.

Beweis. Die bestimmenden Stücke dieser Dreyecke sind ähnlich. Diese sind (§ 12) ein Winkel mit den Seiten, die ihn einschließen, oder (weil das Verhältniß einer Linie zu einer andern jene aus dieser bestimmt) ein Winkel, eine Seite und das Verhältniß der andern zu der
11 ersten. Nun ist der Winkel und das Ver- | hältniß in beyden Dreyecken gleich (folglich auch ähnlich), die Eine Seite aber ähnlich; folglich sind die bestimmenden Stücke ähnlich.

§ 22.

Lehrsatz. Ähnliche Winkel sind gleich.

Beweis. Das Wort Winkel bezeichnet (1) den Bestimmungsgrund alles an dem Systeme zweyer Richtungen *am*, *an* (Fig. 5) Bemerkbaren. Dieses ist: die Entfernung *mn*, welche jegliche zwey Puncte *m*, *n*, die man in beyden Richtungen durch willkührliche Entfernungen *am*, *an* bestimmt, von einander haben; die Entfernung *pr*, welche jeglicher Punct *p* in der Einen Richtung *am* von einem Puncte *r* in der *mn* hat, u. s. w. — Sind also in zwey vorgegebenen Winkeln alle diese bemerkbaren Stücke gleich; so heißt dieß nichts anders, als die Winkel

selbst sind gleich. — Nun seyn a und α (Fig. 6) ähnliche Winkel; so muß wenn $am : an = \alpha\mu : \alpha\nu$, sich auch (§ 16) $am : mn = \alpha\mu : \mu\nu$ finden, sonst würde die Vergleichung der Theile des Winkels α unter sich nicht eben die Vorstellung hervorbringen, wie die der Theile des Winkels a. — Man gedenke nun αo (in der Richtung $\alpha\mu$) $= am$ und αu (in der Richtung $\alpha\nu$) $= an$; folglich $\alpha\mu : \alpha\nu = \alpha o : \alpha u$. Mithin (wenn man ou zieht) (§ 21) $\triangle\, o\alpha u \sim \triangle\, \mu\alpha\nu$; woraus (16) $ou = \frac{\mu\nu \,.\, \alpha o}{\alpha\mu} = \frac{mn \,.\, \alpha o}{am} = mn$. Auf gleiche Art wird gezeigt, daß auch, wenn | $o\pi = mp$, $o\varrho = mr$ 12
genommen werden, $\pi\varrho = pr$ wird. U. s. w. So daß also bey Winkeln a, α die oben erwähnte Bedingung der Gleichheit aller Merkmale eintritt; demnach sind diese Winkel gleich.

§ 23.

Zusatz. In ähnlichen Dreyecken sind also die Winkel, die proportionirten Seiten entgegenstehn, gleich (§ 16. 10, 22).

§ 24.

Anmerkung. Diese Lehre von der Ähnlichkeit, als auch ihre folgende Anwendung ist für mich ein Resultat meines selbsteignen Nachdenkens; obgleich schon Wolf[15]) dieselbe Lehre in seiner Philosophia prima seu Ontologia, Sect. III. Cap. I. de Identitate et similitudine, wie auch in den Elementis Matheseos universae ausführlich vorträgt; und sie mithin der gelehrten Welt vorlängst bekannt ist. Ich selbst habe das erstere Werk erst unlängst, das andere zwar schon vor vielen Jahren, nicht um die Elemente daraus zu erlernen, sondern nur in der Absicht etwa ein unbekanntes Problem darinn zu finden, cursorisch durchgelesen, wobey ich denn die Arithmetica und Geometria so unvorsichtig überschlug, daß ich diese wichtige Änderung, die gleich nach den Definitionen, und dann in kleinen Scholien angeführt wird, nicht gewahr ward. — Die erste Form, die ich meinem Beweise des Satzes § 21 gab, bevor ich Wolfs Ontologie gelesen hatte, | ist kürzlich folgende: Wir haben keine 13
apriorische Vorstellung von irgend einem bestimmten Auseinanderseyn zweyer Puncte, überhaupt von irgend einem bestimmten räumlichen Dinge. Soll also eine apriorische Erkenntniß von räumlichen Dingen möglich seyn, so muß diese für jedes angenommene Maß gelten. Wenn daher z. B. (Fig. 7) in dem $\triangle\, acb$, $cb = n \,.\, ca$, $ab = m \,.\, ca$. Und im $\triangle\, \alpha c\beta$ bey gleichem Winkel eben so $c\beta = n \,.\, c\alpha$ ist: so muß auch $\alpha\beta = m \,.\, c\alpha$ seyn; weil wir widrigenfalls eine apriorische Vorstellung von der bestimmten Linie ca haben müßten, bey welcher allein die Zahl m gilt. — Meine Absicht bey der Erfindung dieses Beweises war: um

mittelst der Lehre von der Ähnlichkeit der Dreyecke die bekannte Lücke in der Theorie der Parallelen zu ergänzen.[16]) — In der That, sollte man auch mit Wolfens (oder meinem) Beweise der Lehre von der Ähnlichkeit der △ △ nicht ganz zufrieden seyn: so schiene mir doch noch das Bemühen, diese Lehre — (aus einem von Parallellinien und Betrachtungen der Ebene unabhängigem Grunde) — zu erweisen, eine nähere Beherzigung der Geometer zu verdienen. — Kant hat angemerkt (Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume, 1768 — zu finden in der Sammlung einiger seiner Schriften von Rink), und diesen Gedanken noch sonst (Prolegomena S. 57 f.) wiederholt: daß es Unterschiede (also auch Eigenschaften, worauf
14 sie sich gründen) in räum- | lichen Dingen gebe, die aus keiner Vergleichung der Theile eines jeden untereinander erkannt werden. Denn es gibt räumliche Dinge, die einander völlig gleich und ähnlich sind, und sich doch nicht in denselben Raum bringen lassen; also doch einen Unterschied besitzen müssen. Dergleichen sind z. B. zwey gleiche sphärische Triangel auf entgegengesetzten Hemisphären. Kant nennt den Grund dieses Unterschieds die Gegend, nach welcher zu die Theile des einen und des andern räumlichen Dinges liegen. — Diese Kantische Bemerkung ist zwar ganz richtig: indessen ist nicht bloß die Gegend, es ist auch zweytens die bestimmte Art des Auseinanderseyns (die Entfernung) eine Eigenschaft, die sich aus keiner Vergleichung der Theile eines Dinges untereinander erkennen läßt. So zwar, daß wenn in zwey Dingen alle Eigenschaften, die aus der Vergleichung der Theile eines jeden unter sich bemerket werden können, gleich sind: so folgt erst nur soviel, daß beyde Dinge ähnlich sind; ungleich können sie noch immer seyn. Sollen zwey Dinge auch als gleich erkannt werden, so muß man das Eine mit einem Theile des Andern, oder allgemein: man muß beyde mit Einerley drittem Dinge (einem gemeinschaftlichen Maße)
15 vergleichen.*) — Der Grund hievon | liegt darinn, daß wir a priori keine Vorstellung von irgend einem bestimmten Auseinanderseyn zweyer Puncte (Entfernung) haben; daher uns nichts übrig bleibt, als das Bemerken der Verhältnisse verschiedener Entfernungen gegeneinander. Diese Wahrheit ist es, die ich § 19 als einen Grundsatz aufgestellt. — Als einen Beweggrund entweder zur Annahme der vorhandenen, oder zur Aussinnung irgend einer andern Beweisart der Lehre von der Ähnlichkeit, erlaube ich mir noch folgende Erinnerung. Muß nach einer richtigen

*) So hätte also Kant in seiner Abhandlung nicht nur den Begriff der Gegend, sondern auch den | des Auseinanderseyns als eine Instanz gegen jene Philosophen anführen können, welche den Raum für ein bloßes Verhältniß der coexistirenden Dinge halten.

Methodik von jedem systematischen Beweise gefordert werden, daß er die Verbindung des Subjectes mit dem Prädicate darthue ohne Einmischung zufälliger Mittelbegriffe: so können unsere bisherigen Beweise von allen Lehrsätzen der Ähnlichkeit vor keiner Kritik bestehen. Ein Blick vom Sachverständigen auf unsre Lehrbücher (auf den Euklid) in dieser Rücksicht geworfen: und ich hoffe gerechtfertigt zu seyn von dem Verdachte der Verläumdung. Man hat also noch die Verbindlichkeit einen fehlerfreyen Beweis für diese Lehrsätze zu suchen. Dieser Beweis müßte — unter andern Erfordernissen hier nur erwähnt — dasjenige, was von dem genus gilt, nicht nur durch eine Induction, von den einzelnen speciebus darthun. „Ähnlicher Körper Inhalte | verhalten sich 16
wie die Würfel ähnlicher Seiten, oder allgemeiner, wie was immer für andre aus ihnen auf ähnliche Art bestimmte Körper. Flächen, wie Flächen; Linien (krumme) wie Linien." — Wo vermag die Euklidische Geometrie diese Sätze in dieser ihrer Allgemeinheit darzuthun, ohne auf die Betrachtung von einzelnen Arten (Dreyecken dgl.) herabzusteigen? — Aus § 17 aber folgen diese Sätze in völliger Allgemeinheit, und ganz unmittelbar. Denn es seyen A, a zwey ähnliche Körper, und der Körper B aus A auf dieselbe Art bestimmt, wie b aus a; folglich auch B, b ähnlich; und man soll beweisen $A : B = a : b$. Das System der Körper A und B hat die bestimmenden Stücke: den Körper A und die Art, wie B aus A folgt. Diese bestimmenden Stücke sind nun ex hypothesi ähnlich den bestimmenden Stücken in dem Systeme a und b. Also sind (§ 17) beyde Systeme ähnlich. Folglich alles, was sich in dem einen Systeme durch Vergleichung seiner Theile bemerken läßt, auch in dem andern gleich. Wenn man daher die körperlichen Inhalte der Körper A, B; a, b vergleicht; so muß $A : B = a : b$. — Denselben Beweis wird man von selbst auf Flächen und Linien anwenden können. — Schließlich bemerke ich noch, daß ich eben diesen Grundsatz (§ 19) auch in der Mechanik zum Beweise ihrer ersten unentbehrlichsten Sätze gebrauche; und daß er überhaupt in allen Theilen der Mathematik (die Arithmetik und Algebra ausgenommen, — | weil sie kein besonderes Ding, sondern die abstracte 17
Vielheit selbst zum Gegenstande hat —) mit Nutzen anzuwenden glaube.[17])

§ 25.

Lehrsatz. Im gleichschenklichten Dreyeck sind die Winkel an der Grundlinie gleich: $a = b$ (Fig. 8).

Beweis. Sie werden auf gleiche Art bestimmt. Aus § 14 folgt $\triangle\, acb = \triangle\, bca$ (in der Ordnung der Buchstaben). Denn ca in $\triangle\, acb =$ $= cb$ in $\triangle\, bca$; cb in $\triangle\, acb = ca$ in $\triangle\, bca$; $\sphericalangle\, acb$ in $\triangle\, acb = \sphericalangle\, bca$ in

$\triangle\, bca$. Folglich nach (§ 10) $\sphericalangle\, b$ entgegeng. der ac im $\triangle\, acb = \sphericalangle\, a$ entgegeng. der bc im $\triangle\, bca$.

§ 26.

Lehrsatz. Es ist möglich aus einem Puncte einer geraden Linie eine andere so aufzurichten, daß die beyden Nebenwinkel, die sie mit den Segmenten jener bildet, gleich sind.

Beweis. Es ist möglich zwey gleiche gerade Linien $ca = cb$ (Fig. 9) unter irgend einem Winkel c verbunden zu gedenken. Zieht man nun ab und gedenkt in o die Mitte von ab (ein in der Lehre von der geraden Linie zu erklärender Begriff), und zieht endlich co: so ist (§ 25) $a = b$, und per constructionem $ac = bc$, $ao = bo$. Also (§ 14) $\triangle\, cao = \triangle\, cbo$. Mithin (§ 10) $\sphericalangle\, coa = \sphericalangle\, cob$. |

18 § 27.

Anmerkung. Euklid trägt diesen Satz in der Form einer Aufgabe vor. Da nun die theoretische Geometrie (z. B. des Euklids) durch ihre Aufgaben bekanntlich nur die Absicht hat, die Möglichkeit dieses oder jenes räumlichen Dinges zu zeigen; im Gegentheil die Absicht, Anweisung zu geben, wie sich durch einige einfache Instrumente (z. B. Lineal und Zirkel) allerley räumliche Dinge empirisch construiren lassen, eine praktische ist: so sind die Aufgaben der theoretischen Geometrie mehr eigentliche Lehrsätze, welche Form ihnen also auch schicklicher gebührt. Dagegen könnte der praktische Theil der Geometrie die Aufgaben abgesondert enthalten; und dieser Meynung war auch der Jesuit P. I. Gaston Par dies.[18]) — Aus dem angeführten Grunde muß es aber auch (was wichtiger ist) dem Theoretiker erlaubt seyn, gewisse räumliche Dinge anzunehmen, ohne die Art ihrer wirklichen Construction zu lehren, wenn er nur ihre Möglichkeit erwiesen hat. Aus dieser Absicht nahm ich bey gegenwärtigem Satze die Mitte von ab an, ohne zu zeigen, wie sie gefunden werde; und bald in der Folge werde ich zu drey gegebenen die vierte proportionale Linie annehmen, ohne zu zeigen, wie sie zu construiren wäre; genug daß aus (§ 20) unmittelbar die Möglichkeit erhellet, zu der Linie c eine gewisse d zu denken, die eben das Verhältniß zu ihr habe, welches die Linie b zu a hat. |

19 § 28.

Lehrsatz. Es ist möglich, aus einem Puncte einer geraden Linie eine andere so aufzustellen, daß die gebildeten Nebenwinkel ungleich sind.

Beweis. Wie in § 26; nur seyen ca, cb ungleich, und statt § 14 werde § 15 angewendet.

§ 29.

Zusatz. Aus § 26, 28 folgt nun die Möglichkeit aus jedem Puncte jeder geraden Linie eine andere so zu ziehen, daß die gebildeten Nebenwinkel bald gleich (§ 26) bald ungleich (§ 28) werden: weil jede gerade Linie durch Verkürzung oder Verlängerung der *ab* (§ 26, 28) gleich, und der in ihr gegebene Punct ihr Mittelpunct *o* werden kann; da denn von ihr möglich seyn muß, was von *ab* in (§ 26, 28) möglich ist.

§ 30.

Lehrsatz. Jedes System einer zu beyden Seiten ins Unbestimmte verlängerten geraden Linie und eines außerhalb ihrer befindlichen Punctes ist jedem andern solchen Systeme gleich:[19]) (Fig. 10) $o, xy \sim \omega, \xi\eta$.

Beweis. Denn es läßt sich in beyden Systemen aus der Vergleichung ihrer Theile kein Unterschied bemerken (§ 16). Da die geraden Linien xy, $\xi\eta$ zu beyden Seiten ins Unbestimmte verlängert sind, so läßt sich kein Punct in denselben durch die Lage, die er in ihnen hat, bestimmen. | Da nun die Puncte o, ω außerhalb dieser geraden Linien liegen, **20**
so ist das wesentlich, daß jede aus o, ω in einen Punct der unendlichen Linien a, α gezogene Linie mit letztern Nebenwinkel bildet. Diese in beyden Systemen so entstandenen Winkel können nun entweder ungleich oder gleich seyn. Sie seyen ungleich, so kann ich daraus doch auf keinen Unterschied in beyden Systemen schließen, weil die Puncte a, α, von denen diese Winkel abhangen, unbestimmt sind. Sind aber diese Winkel gleich $oax = \omega\alpha\xi$, $oay = \omega\alpha\eta$, so findet, weil die Schenkel ax, ay; $\alpha\xi$, $\alpha\eta$ unbestimmt sind, keine Vergleichung derselben mit der Linie oa, $\omega\alpha$ statt. Für sich sind aber diese Linien ähnlich; also sind o, xy; ω, $\xi\eta$ ähnliche Systeme, in denen oa, $\omega\alpha$ ähnlich liegende Linien sind.

§ 31.

Lehrsatz. Es ist möglich, aus jedem Puncte o (Fig. 10) außerhalb einer zu beyden Seiten ins Unbestimmte verlängerten geraden Linie xy eine andre zu ihr so zu ziehen, daß sie einen Winkel an derselben bilde gleich irgend einem gegebenen $\omega\alpha\xi$.

Beweis. Man gedenke einen Punct ω in Einem der Schenkel des gegebenen Winkels $\omega\alpha\xi$, so ist dieser ein Punct außerhalb des andern Schenkels $\alpha\xi$; verlängert man nun diesen zu beyden Seiten ins Unendliche, so hat man ein System ω, $\xi\eta$ eines Puncts und einer außerhalb | desselben **21**
befindlichen unbestimmten geraden Linie, welches also dem gegebenen Systeme o, xy ähnlich ist (§ 30). Folglich, weil sich in jenem eine Linie aus ω so auf $\xi\eta$ ziehen läßt, daß sie den Winkel $\omega\alpha\xi$ bildet, so muß auch

in dem gegebenen Systeme aus o eine Linie auf xy möglich seyn, welche einen Winkel $oax = \omega\varkappa\xi$ bilde.

§ 32.

Lehrsatz. Aus jedem Puncte o (Fig. 11) außerhalb einer geraden Linie xy läßt sich Eine und nur Eine Linie auf die letztre so ziehn, daß sie gleiche Nebenwinkel an ihr bilde.

Beweis. Daß sich doch Eine ziehen lasse, folgt aus § 26 vergl. mit § 31. Es sey also $oax = oay$. — Gleichermaßen folgt aus § 28 vgl. mit § 31, daß sich aus o auf xy eine Linie om ziehen lasse, welche ungleiche Nebenwinkel bilde, omx nicht $= omy$. — Sollte es nun noch eine Linie ob geben, welche $obx = oby$ machte; so nehme man (der ab entgegengesetzt) $\alpha\beta = ab$ und ziehe $o\beta$. Also (§ 14) $\triangle\, oab = \triangle\, oa\beta$. Und (§ 10) $ob = o\beta$; $\sphericalangle\, oba = \sphericalangle\, o\beta a$; folglich (§ 4) $\sphericalangle\, obx = \sphericalangle\, o\beta y$. Aber ex hypothesi $\sphericalangle\, obx = \sphericalangle\, oba$; also $\sphericalangle\, oba = \sphericalangle\, o\beta y$. Nimmt man nun $\beta\mu = bm$ an, und zieht $o\mu$, so folgt (§ 14) $\triangle\, obm = \triangle\, o\beta\mu$. Also (§ 10) $om = o\mu$, $\sphericalangle\, omb = \sphericalangle\, o\mu\beta$. Im $\triangle\, mo\mu$ (§ 25) $\sphericalangle\, om\mu = \sphericalangle\, o\mu m = \sphericalangle\, o\mu\beta$. Folglich $\sphericalangle\, omb = \sphericalangle\, om\mu$. D. h. $\sphericalangle\, omx = \sphericalangle\, omy$ contra hypothesim. |

22 § 33.

Zusatz. Also bestimmt der Punct o die Linie oa, so die Eigenschaft haben soll, mit xy gleiche Nebenwinkel zu bilden. Folglich auch die Beschaffenheit der Winkel oax, oay selbst.

§ 34.

Lehrsatz. Alle Winkel, die ihren Nebenwinkeln gleich sind, sind auch unter einander gleich.

Beweis. Sey (Fig. 12) $\sphericalangle\, oax = \sphericalangle\, oay$, $\sphericalangle\, \omega\varkappa\xi = \sphericalangle\, \omega\varkappa\eta$; und wäre doch $\sphericalangle\, oax$ nicht $= \sphericalangle\, \omega\varkappa\xi$: so ließe sich aus o eine Linie ziehen, die mit xy einen Winkel $= \omega\varkappa\xi$ bildete (§ 31). Diese bildete gleiche Nebenwinkel (§ 4); kann also von oa nicht verschieden seyn (§ 32).

§ 35.

Anmerkung. Solche Winkel, weil sie einander alle gleich sind, bezeichnet man also mit dem gemeinschaftlichen Nahmen der rechten Winkel.

§ 36.

Lehrsatz. Wenn aus dem Puncte o (Fig. 13) oa lothrecht[20]) auf xy, und a die Mitte von mn ist; so sind I. die Linien $om = on$, II. die Winkel $aom = aon$, III. die Winkel $amo = ano$.

Beweis. Folgt unmittelbar aus § 14 und § 10. |

§ 37. 23

Lehrsatz. Umgekehrt, wenn bey dem Lothe oa entweder I. die Linien $om = on$, oder II. die Winkel $aom = aon$, oder III. die Winkel $amo = ano$; so ist a die Mitte von mn.

Beweis. I. Ist (Fig. 14) $om = on$, und man nimmt die Mitte von mn, p; so folgt, wie im § 26, daß op lothrecht auf mn; also muß (§ 32) p mit a einerley seyn. II. Ist (Fig. 15) $\sphericalangle\, aom = \sphericalangle\, aon$, und man gedenkt $om : oa = on : o\alpha$ (dieß auf oa aus o aufgetragen); so wird (§ 21) $\triangle\, moa \sim$ $\sim \triangle\, no\alpha$; folglich (§ 23) $\sphericalangle\, mao = \sphericalangle\, n\alpha o$, also $= R$. Also α mit a einerley (§ 32). Mithin $oa = o\alpha$, also wegen der Proportion auch $om = on$, und (§ 10) $am = an$. III. Ist (Fig. 16) $\sphericalangle\, amo = \sphericalangle\, ano$, und man gedenkt $mo : ma = no : n\alpha$ (dieß auf na aus n aufgetragen); so wird (§ 21) $\triangle\, oma \sim \triangle\, on\alpha$; folglich (§ 23) $\sphericalangle\, oam = \sphericalangle\, o\alpha n$, also $= R$. Also α mit a einerley (§ 32). Mithin, da (§ 21) $ma : ao = n\alpha : \alpha o$, und $ao = \alpha o$; auch $ma = n\alpha = na$.

§ 38.

Zusatz. Es gibt also nicht mehr als zwey Linien om, on aus o (Fig. 13) auf xy, bey denen entweder I. $om = on$, oder II. $\sphericalangle\, aom =$ $= \sphericalangle\, aon$, oder III. $\sphericalangle\, amo = \sphericalangle\, ano$ seyn soll. Denn welches von diesen statt fände, so wäre immer noch (§ 37) $am = an$; nun gibt es nur | zwey Puncte in der geraden Linie xy, die von demselben Puncte a gleiche 24
Entfernung haben.

§ 39.

Lehrsatz. Aus demselben Puncte o (Fig. 17) läßt sich nur Eine Linie oa auf die Unbegränzte xy so ziehen, daß sie mit demselben ins Unbestimmte verlängertem Theile ax dieser Linie einen gegebenen Winkel oax bilde.

Beweis. Daß sich doch Eine solche Linie ziehen lasse, folgt aus § 31. Daß sich nur Eine ziehen lasse, erhellet so. Man setze $\sphericalangle\, o\alpha x =$ $= \sphericalangle\, oax$. Nun gedenke man aus o das Loth op auf xy; fiele p in a oder α, so wären $\sphericalangle\, o\alpha x = \sphericalangle\, oax = R$, also a, α einerley Punct (§ 32). Fällt p nicht in a oder α, so gedenke man $ao : ap = \alpha o : \alpha\pi$ (dieß in demjenigen Schenkel der beyden Nebenwinkel bey α angenommen, der $= oap$ ist [§ 4]). Sodann wird (§ 21) $\triangle\, oap \sim \triangle\, o\alpha\pi$. Also (§ 23) $\sphericalangle\, opa = \sphericalangle\, o\pi\alpha =$ $= R$. Folglich (§ 32) π mit p einerley; also $op = o\pi$, und wegen des Verhältnißes $op : pa = o\pi : \pi\alpha$, auch $pa = \pi\alpha = p\alpha$. Also (aus der Lehre von der geraden Linie) entweder p die Mitte von $a\alpha$, oder a mit α einerley. Das erstre kann nicht seyn, weil dann ap, αp nicht einerley ins Unendliche verlängerten Schenkel *ax* enthalten würden. (Aus der Lehre von der geraden Linie.) — Also ist das zweyte.

§ 40.

Zusatz. Conclusio in modo tollente: Wenn also zwey Linien (Fig.
18) *ac*, *bd* mit Schenkeln, die denselben ins Unbestimmte verlängerten |
25 Theil der *xy* enthalten, gleiche Winkel bilden $cax = dbx$; so können diese
Linien bey *c*, *d* nirgends zusammenstoßen. Deßgleichen auch ihre Verlängerungen über *a*, *b* miteinander, $a\gamma$ mit $b\delta$. (Wohl aber könnte *ac* mit $b\delta$ zusammenstoßen, wie in Fig. 18*). Wenn die Winkel $cax = dbx = R$ (Fig. 18**): so können $c\gamma$, $d\delta$ schlechterdings nicht zusammenstoßen; auch *ac* nicht mit $b\delta$ gegen *c*, δ, weil ebenfalls $\sphericalangle\, cax = \sphericalangle\, \delta bx$ (§ 39).

§ 41.

Lehrsatz. Eine Seite und die zwey ihr anliegenden Winkel bestimmen das Dreyeck, dem sie zugehören.

Beweis. Sollten sie es nicht bestimmen, so müßte es noch anders seyn können. Es seyen also (Fig. 19) *bac*, *bam* zwey verschiedne Dreyecke, über demselben Winkel *bac*, und bey derselben Seite *ab*, bey denen noch der zweyte Winkel $abc = abm$ ist. Gedenkt man $ac : ab = am : an$ (dieß in *ab* aus *a* aufgetragen); so wird (§ 21) $\triangle\, cab \sim \triangle\, man$; folglich (§ 23) $\sphericalangle\, mna = \sphericalangle\, cba =$ (ex. hyp.) $\sphericalangle\, mba$. Da nun *an* in *ab* liegt, so enthalten *na*, *ba* über *a* verlängert einerley unendlichen Theil der geraden Linie *ab*. (Aus der Lehre von der geraden Linie.) Mithin (§ 39) muß *n* mit *b* einerley seyn, folglich wegen $ac : ab = am : an$, $ac = am$; also (§ 14) $\triangle\, mab = \triangle\, cab$.

§ 42.

26 Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken eine Seite | mit den zwey
anliegenden Winkeln gleich ist, so sind die Dreyecke selbst gleich.

Beweis. Ihre bestimmenden Stücke sind gleich (§ 41).

§ 43.

Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken zwey Winkel gleich sind, so sind die Dreyecke selbst ähnlich.

Beweis. Ihre bestimmenden Stücke (§ 41): die Seite, der jene Winkel anliegen (§ 20), und diese selbst sind ähnlich (§ 17).

§ 44.

Lehrsatz. In jedem Dreyeck ist die Summe zweyer Seiten nie der dritten gleich.

Beweis. Man verzeichne diese Summe, indem man (Fig. 20) ac über c verlängert, daß $c\beta = cb$. Wäre nun $a\beta = ab$, so folgte (§ 25) im $\triangle\, \beta ab$, $\sphericalangle\, \beta = \sphericalangle\, ab\beta$, und im $\triangle\, \beta cb$, $\sphericalangle\, \beta = \sphericalangle\, cb\beta$. Also (§ 42) $\triangle\, c\beta b = \triangle\, a\beta b$. Folglich (§ 10) $a\beta = c\beta$, welches widersprechend.

§ 45.

Lehrsatz. In einem rechtwinklichten Dreyeck, und nur in diesem ist (in arithmetischer Bedeutung) das Quadrat der Hypothenuse gleich der Summe der Quadrate der beyden Katheten: (Fig. 21) $ab^2 = ac^2 + bc^2$.

Beweis. I. Weil zu beweisen, daß (in Linien $ab = ac \cdot \frac{ac}{ab} + bc \cdot \frac{bc}{ab}$,
so construire | man Linien von der Größe $ac \cdot \frac{ac}{ab}$, $bc \cdot \frac{bc}{ab}$, so daß man 27
$ab : ac = ac : ao$ (dieß in ab aus a) und $ba : bc = bc : bu$ (dieß in ba aus b) annehme, um (§ 21) ähnliche Dreyecke zu erhalten, nähmlich $\triangle\, bac \sim \triangle\, cao$, $\triangle\, abc \sim \triangle\, cbu$ (in der Ordnung der Buchstaben). Folglich (§ 23) $\sphericalangle\, acb = \sphericalangle\, aoc$, $\sphericalangle\, bca = \sphericalangle\, buc$. Folglich da $\sphericalangle\, c = R$, müssen o, u einerley Punct seyn. Da nun ex constructione ao im Schenkel ab aus a, $bu = bo$ im Schenkel ba aus b liegt, so ist o innerhalb a und b (Aus der Lehre von der geraden Linie) und $ab = ao + ob = ac \cdot \frac{ac}{ab} + bc \cdot \frac{bc}{ab}$. — II. Ist acb kein rechter Winkel, so kann o mit u nicht einerley seyn, sonst wären aoc, buc gleiche Nebenwinkel; folglich kann auch nicht $ab = ao + bu = \frac{ac^2}{ab} + \frac{bc^2}{ab}$ seyn.[21])

§ 46.

Lehrsatz. Drey Seiten bestimmen das Dreyeck, dem sie zugehören.

Beweis. Beweise ich nur, daß drey Seiten einen Winkel bestimmen; so folgt (nach § 12), daß sie auch das Dreyeck selbst bestimmen. Die Bestimmung eines (nicht gegebenen) Winkels in einem Dreyeck kann ich nach dem bisherigen (§ 12, 41) nur dann folgern, wenn entweder
(§ 12) 2 Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, oder (§ 41) | 1 Seite 28
mit den 2 anliegenden Winkeln gegeben sind. Allemal ist also Ein gegebener Winkel erforderlich. Ich bilde also (Fig. 22) im $\triangle\, acb$, dessen Seiten mir gegeben, selbst einen Winkel; da ich nun in rechtwinklichten Dreyecken die Seiten berechnen kann (§ 45); so werde ich mir einen rechten Winkel bilden; und weil er in einem Dreyeck seyn muß, ihn dadurch bilden, daß ich ein Loth aus einer Spitze c des Dreyecks auf

die entgegenstehende Seite *ab* fälle; denn dadurch allein entstehen zwey rechtwinklichte $\triangle\triangle$ *adc, bdc,* welche (§ 45) die Gleichungen geben $b^2 = x^2 + y^2$, $a^2 = x^2 + (\pm c \mp y)^2 = x^2 + (c - y)^2$ (je nachdem *d* inner- oder außerhalb *ab* liegt). Aus diesen Gleichungen werden *x, y* ohne Zweydeutigkeit bestimmt. Diese sind aber 2 Seiten des $\triangle$ *cda*, deren eingeschlossener Winkel $cda = R$ gegeben ist. Mithin ist (§ 12) auch der Winkel *a*, und eben dadurch ferner das $\triangle$ *abc* bestimmt.

§ 47.

Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken die drey Seiten gleich sind, so sind die Dreyecke selbst gleich.

Beweis. Denn ihre bestimmenden Stücke sind gleich (§ 46).

§ 48.

Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken die drey Seiten proportionirt sind, so sind die Dreyecke selbst ähnlich. |

29 Beweis. Denn ihre bestimmenden Stücke sind ähnlich (§ 46, 17).

§ 49.

Anmerkung. Warum ich die gewöhnlichen Beweise der drey Sätze von der Gleichheit der Dreyecke verlassen habe? — Den Beweis des ersten Lehrsatzes (§ 14) habe ich, den Vortrag ausgenommen — nicht wesentlich geändert. Was diesen Vortrag anbelangt, ließ ich freylich den Begriff des Dekens weg, dessen man sich hier und bey einigen andern Lehrsätzen gebraucht. Ich will hier nicht die unzweckmäßige Wahl des deutschen Wortes: Deken tadeln, welches den Anfänger leicht irreführt, an ein Übereinanderliegen, und nicht an die Einerleyheit der Gränze zu denken; statt welchem schicklicher: Ineinanderfallen, Congruiren (συμπιπτειν) gebraucht würde. Aber der Begriff des Congruirens selbst ist beydes: empirisch und überflüssig. Empirisch: denn wenn ich sage: *A* congruirt mit *B*, so stelle ich mir *A* als ein Object vor, das ich von dem Raume, den es einnimmt (als welcher *B* ist) unterscheide. Überflüssig: Man gebraucht sich des Begriffs vom Deken, um nach dem Grundsatze: „Räumliche Dinge, die sich deken, sind einander gleich" auf die Gleichheit zweyer Dinge zu schließen, wenn man gezeigt, daß sie sich in einer gewissen Lage deken. (Eigentlich beweist man so die Einerleyheit, da man doch nur die Gleichheit zu |
30 erweisen hatte). Nun konnte man nie schließen, daß 2 Dinge congruiren, d. h. daß ihre Gränzen einerley sind, als bis man gezeigt hatte, daß alle bestimmenden Stücke einerley sind. Beweist man aber dieses, so kann man auch ohne Deken schließen, daß die bestimmenden Dinge selbst

einerley sind. — Daher hat schon Herr Hofpr. Schultz den Begriff des Dekens in seinen Anfangsgründen durchaus weggelassen, ohne daß er gerade deßwegen viel umzuändern brauchte. — Anlangend die Beweise des zweyten und dritten Lehrsatzes, so sind diese (auch wie sie neuere Geometrie umgeändert haben) auf Lehrsätze von der Ebene ganz gegründet. Dieses wird jeder Kenner von selbst einsehen. Nach den (Vorrede) geäußerten Grundsätzen konnte ich mich also bey ihnen nicht beruhigen. — Aber sollten wohl meine eignen Beweise der (Vorrede) gemachten Forderung entsprechen, sich aller zufälliger Mittelbegriffe zuenthalten? — Ich glaube es. Allein, da ich zu Vermeidung der Weitläufigkeit in diesem kleinen Versuche nicht von jedem eingeführten Mittelbegriffe die umständliche Deduction seiner Nothwendigkeit angeben konnte: so bitte ich deßfalls den gelehrten Leser dieses durch einiges eigne Nachdenken zu ersetzen.[22])

§ 50.

Lehrsatz. Wenn im Winkel (Fig. 23) xcy, $ca : cb = cd : ce$, so stoßen die wie immer verlängerten ab, de nie zusammen. |

Beweis. (§ 21) $\triangle\, acb \sim \triangle\, dce$; daher $ab = de \,.\, \frac{ac}{dc}$. Man gedenke 31
cp lothrecht auf de, und $cd : cp = ca : co$ (in cp aus c genommen); also (§ 21) $ao = dp \,.\, \frac{ca}{cd}$; $bo = ep \,.\, \frac{cb}{ce} = ep \,.\, \frac{ca}{cd}$. Mithin $ao \pm ob = (dp \pm pe) \,.\, \frac{ca}{cd} = de \frac{ca}{cd}$, also $= ab$. Woraus (nach § 44 in modo tollente) sich schließen läßt, daß o in der geraden ab. Auch ist (§ 23) $\sphericalangle\, aoc = \sphericalangle\, dpc = R$. Folglich stoßen ab, de nie zusammen (§ 40).

§ 51.

Lehrsatz. Auch sind (Fig. 23) die Lothe aus a und b auf de, $a\alpha = b\beta$, wie auch ihre Abstände $ab = \alpha\beta$. Und die Winkel bey a, b auch recht.

Beweis. I. Nach (§ 43) $\triangle\, ad\alpha \sim \triangle\, cdp$; $\triangle\, be\beta \sim \triangle\, cep$. Folglich $a\alpha = cp \,.\, \frac{da}{dc}$; $b\beta = cp \,.\, \frac{eb}{ec} = cp \,.\, \frac{da}{dc}$. Also $a\alpha = b\beta$. II. Ferner $d\alpha = dp \,.\, \frac{da}{dc}$, $e\beta = ep \,.\, \frac{eb}{ec} = ep \,.\, \frac{da}{dc}$. Also $\alpha\beta = de - d\alpha - e\beta = de - (dp + pe) \,.\, \frac{da}{dc} = de \left(1 - \frac{da}{dc}\right) = de \,.\, \frac{ac}{dc} =$ (wie | § 50 erwiesen) ab. III. Zieht man 32
$b\alpha$, so wird (§ 47) $\triangle\, ba\alpha = \triangle\, \alpha\beta b$, also (§ 30) $\sphericalangle\, ba\alpha = \sphericalangle\, \alpha\beta b = R$. Eben so $\sphericalangle\, ab\beta = R$.

§ 52.

Lehrsatz. Wenn bey vier Puncten a, b, c, d (Fig. 24) vier Winkel $abc = bcd = cda = dab = R$, so ist die Linie zwischen jeglichen zwey dieser vier Puncte gleich der Linie zwischen den beyden andern: $ab = cd$, $ac = bd$, $ad = bc$.

Beweis. Heiße $ab = x$, $cd = \xi$, $ac = y$, $bd = \eta$, $ad = z$, $bc = \zeta$, so wird (§ 45)

$$y^2 = z^2 + \xi^2 = x^2 + \zeta^2$$
$$\eta^2 = z^2 + x^2 = \xi^2 + \zeta^2$$

Daher $\xi^2 - x^2 = x^2 - \xi^2$, $\xi^2 = x^2$, oder (der Länge nach) $\xi = x$. Also auch $y = \eta$, $z = \zeta$.

§ 53.

Lehrsatz. Wenn (Fig. 25) $\sphericalangle a = \sphericalangle b = \sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta = R$: so hat von den drey Bedingungen: I. $\sphericalangle m$ oder $\sphericalangle \mu = R$; II. $am = \alpha\mu$ und $bm = \beta\mu$; III. $m\mu = a\alpha$, jede die übrigen zur Folge.

Beweis. I. Sey $m = R$. Heiße $a\alpha = b\beta = a$, $ab = \alpha\beta = b$, $bm = x$, $\beta\mu = y$, $m\mu = z$. Nun ist (§ 45) $a\mu^2 = a^2 + b^2 + 2by + y^2 = b^2 + 2bx + x^2 + z^2$ und $b\mu^2 = a^2 + y^2 = x^2 + z^2$. Woraus $2by = 2bx$, $y = x$; und
33 $am = b + x \mid = b + y = \alpha\mu$ folgt. Dann aus dem rechtwinklichten $\triangle\, bm\mu$, $z^2 = a^2 + x^2 - x^2 = a^2$, also $z = a$. Endlich (aus § 47) $\triangle\, \beta bm = \triangle\, m\mu\beta$, also $\sphericalangle\, m\mu\beta = R$. II. Sey $am = \alpha\mu$ und $bm = \beta\mu$. Wäre nun m kein rechter Winkel, so gäbe es doch ein Loth aus μ auf ab, und für dieses wären (ex dem. I.) $am = \alpha\mu$, $bm = \beta\mu$; nun gibt es nur einen Punct m in der ab, der diese beyden bestimmten Entfernungen von a und b hat. Also ist m ein rechter Winkel. III. Sey $m\mu = a\alpha$. Wäre nun m kein rechter Winkel, so gäbe es doch ein Loth aus μ auf ab, und dessen Länge wäre (ex dem. I.) $= a\alpha$. Nun kann die Hypothenuse μm diesem Kathet nicht gleich seyn (§ 45); folglich ist μm selbst dieses Loth.

§ 54.

Anmerkung. Weil also alle Lothe aus Puncten Einer der beyden Linien ab, $\alpha\beta$ auf die andre gleich sind, so heißt man sie Parallellinien.[23]) Daß Wolf diese Eigenschaft zur Definition der Parallelen annahm, ohne der Pflicht zu gedenken, die Möglichkeit dieser Eigenschaft zu beweisen, das war ein sehr unphilosophischer Fehler dieses Weltweisen.

§ 55.

Zusatz. Die Abstände zwischen jeglichen zwey Lothen $m\mu$, $n\nu$ sind gleich $mn = \mu\nu$. Folgt aus der Lehre von der geraden Linie, weil

(§ 53) zugleich $am = \alpha\mu$, $bm = \beta\mu$ seyn | müssen; welche doppelte Entfernungen von a, b die Puncte m, n bestimmen. 34

§ 56.

Lehrsatz. Jede Linie mv, welche beyde Parallelen ab, $\alpha\beta$ durchschneidet (Fig. 25), bildet an denselben gleiche Nebenwinkel.

Beweis. Man ziehe die Lothe $m\mu$, vn aus m, v auf die entgegengesetzte Parallele; so sind (§ 47) $\triangle\, m\mu v = \triangle\, vnm$. Also (§ 10) die Winkel $nmv = \mu vm$.

§ 57.

Zusatz. Die gleichen Winkel $mv\mu$, vmn heißen Wechselswinkel. Die unendlichen Theile mx, $v\eta$ (Fig. 25*) der Parallelen, welche die Schenkel zweyer zusammengehöriger Wechselswinkel abgeben, und ich die Wechselschenkel nennen möchte, werden daran erkannt, daß das Loth aus dem Anfangspunkte m des Einen mx, oder aus jedem Puncte r außerhalb desselben, den andern Wechselschenkel $v\eta$ trifft. Vom Lothe aus m ist dieß aus § 56 offenbar; vom Lothe aus r zeig ich dieß so: Weil r außerhalb mx, also (ex demonstratione) außerhalb mn liegt; so ist (vermöge den Eigenschaften der geraden Linie) $nr > nm$, und $> mr$. Also auch (nach § 55) $v\varrho\,(= nr) > v\mu\,(= nm)$ und $> \mu\varrho\,(= mr)$. Folglich (nach der Lehre von der geraden Linie) liegen μ, ϱ in einerley Richtung zu v, oder $v\mu$, $v\varrho$ sind einerley Schenkel. |

§ 58. 35

Lehrsatz. Die Diagonalen (Fig. 26) $a\beta$, $b\alpha$ im Rechteck schneiden sich in ihrer Mitte.

Beweis. Man nehme in o, u die Mitten von $a\beta$, ab; so ist $\triangle\, oau \sim \sim \triangle\, \beta ab$, und $ou = \frac{1}{2}\beta b = \frac{1}{2}a\alpha$, und $\sphericalangle\, auo = \sphericalangle\, ab\beta = R = buo$. Daher (§ 21) $\triangle\, buo \sim \triangle\, ba\alpha$, also $bo = \frac{1}{2}b\alpha$. Gleicherweise $\alpha o = \frac{1}{2}\alpha b$. Folglich (§ 44 in modo tollente) o in αb, also halbiren sich $a\beta$, $b\alpha$.

§ 59.

Lehrsatz. Durch denselben Punct o (Fig. 27) außerhalb der Geraden xy geht nur eine Gerade parallel zu xy.

Beweis. Es seyen om, on zwey Parallelen zu xy. Man nehme (der Kürze wegen) $om = on$, und fälle aus m, n Lothe auf xy, so ist (§ 55) $om = a\mu$, $on = av$. Zieht man am, $o\mu$, so müssen sich diese gleiche Linien in ihrer Mitte x durchschneiden (§ 58); eben so an, ov in y. Zieht man nun die geraden Linien xy, mn; so ist (§ 21) $\triangle\, \mu ov \sim \triangle\, xoy$, woraus $yx = \frac{1}{2}v\mu$. Ferner (§ 47) $\triangle\, xoy = \triangle\, xay$. Auch $\triangle\, man \sim \triangle\, xay$, woraus

$mn = 2xy = \nu\mu$ folgt. Da nun ν, a, μ in einerley Geraden, und $a\mu = a\nu$; so sind entweder ν, μ einerley Punct, und also auch m, n; mithin om,
36 on einerley Linie: oder es liegen ν, μ auf entgegengesetzten Sei- | ten von a, und also auch n, m auf entgegengesetzten Seiten von o, folglich om, on abermals in einerley geraden Linie.

§ 60.

Lehrsatz. Wenn in jeder der Parallelen ab, $\alpha\beta$ (Fig. 28) zwey Puncte von gleichen Entfernungen $mn = \mu\nu$ gegeben sind: so sind die Linien $m\mu$, $n\nu$, durch die man diese Puncte auf bestimmte Art verbindet, parallel und gleich.

Beweis. Man ziehe die Lothe mp, nq, so ist (§ 55) $pq = mn$. Aber $mn = \mu\nu$. Also $\mu\nu = pq$. Nun folgt aus der Lehre von der geraden Linie, daß es noch Eine Combination der 4 Puncte μ, ν, p, q, die sich in der geraden Linie $\alpha\beta$ befinden, gebe, wobey 2 Entfernungen einander gleich werden. Ist dieß $\mu p = \nu q$, so sind m, μ; n, ν die Puncte, die man verbinden muß, um die Parallelen zu erhalten. Denn nun ist, weil auch $mp = nq$ (§ 53), nach (§ 14) $\triangle\, mp\mu = \triangle\, nq\nu$. Folglich $m\mu = n\nu$. Man ziehe aus n, ν Lothe auf μm, so folget leicht (aus § 21), daß, weil Einer der Nebenwinkel nms, $nm\mu$, $= \nu\mu r$ seyn muß (§ 56), dieses der Winkel nms sey, in dessen Schenkel das Loth ns einfällt. Daher (§ 44) $\triangle\, nms \sim \triangle\, \nu\mu r$. Und da $nm = \nu\mu$, so sind $ns = \nu r$, $ms = \mu r$; folglich $\mu m = rs$; und da $\mu m = \nu n$, $rs = \nu n$. Daher (§ 47) $\triangle\, rsn = \triangle\, n\nu r$; also $\sphericalangle\, n\nu r = \sphericalangle\, s = R$. Mithin $m\mu$, $n\nu$ Parallelen (§ 53). |

37 § 61.

Lehrsatz. Wenn (Fig. 28*) ab par. cd, ac par. bd, so sind auch $ab = cd$, $ac = bd$.

Beweis. Wäre ab nicht $= cd$, und man nähme in dem Theile der unbegränzten cd, der kein Wechselschenkel von ab ist, $c\delta = ab$, so wäre $b\delta$ par. ac (§ 60). Also (§ 59) d mit δ einerley. (Weil bd mit cd nur Einen Punct gemein haben kann.)

§ 62.

Lehrsatz. Wenn (Fig. 28*) ab par. cd und $\sphericalangle\, acx = \sphericalangle\, bdx$; so ist auch ac par. bd.

Beweis. Denn man gedenke $b\delta$ (aus b gezogen) par. ac; so sind $\sphericalangle\, acx = \sphericalangle\, b\delta x$ (§ 60). Also $\sphericalangle\, bdx = \sphericalangle\, b\delta x$; mithin (§ 39) d mit δ einerley.

§ 63.

Lehrsatz. Wenn die Linien (Fig. 29) *ab*, *de* die Schenkel des Winkels *xcy* so durchschneiden, daß entweder $ca : cb$ nicht $= cd : ce$, oder die Winkel *cab* nicht $= cde$ (wobey wir *a*, *d* in Einem; *b*, *e* im andern Schenkel annehmen): so stoßen *ab*, *de* irgendwo zusammen.

Beweis. Von diesen zwey Bedingungen hat Eine die Andre zur Folge, wie aus § 23, 24 modo tollente erhellet. Es sey nun $\frac{ca}{cb} < \frac{cd}{ce}$, und $ca < cd$ (der Allgemeinheit unbeschadet). — Man gedenke $cd : ce =$ $= ca : cf$. (Dieß in *ce* aus *c* angenommen.) Also $cf < ce$ auch $< cb$.
Folglich *f* so- | wohl in *cb*, als *ce;* mithin $\sphericalangle afe = \sphericalangle afb$. Nun ist (§ 23) 38
$\sphericalangle cfa = \sphericalangle ced$, also auch (§ 4) $\sphericalangle afe$ $(= \sphericalangle afb) = \sphericalangle beo$. Man gedenke $fb : fa = eb : eo$ (dieß in dem Schenkel des letztgenannten Winkels *beo*, der nähmlich $= \sphericalangle afb$ ist, aus *e* genommen). Also (§ 21) $\triangle afb \sim \triangle oeb$. Und $bo = ab \cdot \frac{eb}{fb}$. — Man gedenke $dc : de = da : d\alpha$ (dieß in *de* aufgetragen); so ist subtrahendo $dc : de = ac : \alpha e$. Aber $dc : de = ac : af$, also $\alpha e = af$. Eben so zeigt sich $fe = a\alpha$. Wegen $\triangle ad\alpha \sim \triangle caf$ (§ 23), $\sphericalangle a\alpha d = \sphericalangle cfa;$ also (§ 4) $\sphericalangle a\alpha o = \sphericalangle afb$. Ferner ist $\alpha a : \alpha o = ef :$ $: (\alpha e \pm eo) = ef : \left(af \pm af \cdot \frac{eb}{fb}\right) = ef : af \cdot \frac{fb \pm eb}{fb} = ef : \frac{af \cdot fe}{fb} = fb : af$. Also (§ 21) $\triangle a\alpha o \sim \triangle bfa$. Mithin $ao = ab \cdot \frac{a\alpha}{fb} = ab \cdot \frac{ef}{fb}$. Daher (in Fig. 29) $ab + bo = ab + \frac{ab \cdot eb}{fb} = ab \cdot \frac{ef}{fb} = ao$. Mithin *o* in der geraden Linie *ab* (§ 44). Oder (in Fig. 29*) $ao + ob = ab \cdot \frac{ef}{fb} + \frac{ab \cdot eb}{fb} = ab \cdot$ $\cdot \frac{be + ef}{fb} = ab$. Folglich abermals *o* in der geraden Linie *ab*. |

§ 64. 39

Lehrsatz. Wenn (Fig. 30) *ab*, *cd* parallel, und die Stücke *ab*, *cd*, oder die Winkel *cax*, *dbx* ungleich sind; so stoßen *ac*, *bd* zusammen.

Beweis. Die erstre Bedingung hat die andre zur Folge. Denn wenn man $b\alpha = dc$ in dem Schenkel *bx* annimmt, der mit *dc* kein Wechselschenkel ist, so sind $c\alpha$, *db* Parallelen (§ 60), und $\sphericalangle dbx = \sphericalangle c\alpha x$. Nun können (§ 39) $c\alpha x$, *cax* nicht gleiche Winkel seyn. Also $\sphericalangle cax$ nicht $= \sphericalangle dbx$. — Man gedenke nun $a\alpha : ac = ab : ao$ (dieß in jenem Theile der *ac* aufgetragen, der mit *ab* einen dem αac gleichen Winkel bildet). Ziehe *bo*, *do*. Nun ist allemal $\sphericalangle dco = \sphericalangle \alpha ac$. Denn ist z. B. in Einem Falle die Richtung $a\alpha$ mit *ab* einerley, so hat auch (per constructionem) *ac* mit *ao* einerley Richtung. Da nun (ex hypothesi) *bx*, *dc* keine Wechsel-

schenkel, so sinds auch *ab*, *cd* nicht; mithin da diese Parallelen von *ac* geschnitten werden, $\sphericalangle\, bao\ (= \sphericalangle\, \alpha ac) = \sphericalangle\, dco$. Eben so im andern Falle. — Ferner war $a\alpha : ac = ab : ao = \alpha b : co$ (add. v. subt.) $= cd : co$. Daher (§ 21) $\triangle\, dco \sim \triangle\, \alpha ac$. Woraus $do = c\alpha \,.\, \frac{cd}{a\alpha} = bd \,.\, \frac{\alpha b}{a\alpha}$. Aus $\triangle\, bao \sim \triangle\, \alpha ac$ folgt aber $bo = c\alpha \,.\, \frac{ab}{a\alpha} = bd \,.\, \frac{ab}{a\alpha}$. Aus welchen Glei-
40 chungen sich, durch Vergleich | mit *bd* ergibt, daß *bd*, *bo* einerley Gerade sind.

§ 65.

Lehrsatz. Wenn die zwey Linien (Fig. 31) *ab*, *de* zwey andre *ad*, *be*, welche entweder parallel sind oder zusammenstoßen, schneiden: so sind die erstern entweder parallel, oder sie stoßen zusammen; je nachdem die fünfte Linie *mn*, von der sie geschnitten werden, gleiche oder ungleiche Wechselswinkel bildet.

Beweis. I. Sind diese Winkel gleich, so können *ab*, *de* nicht zusammenstoßen. Denn geschähe dieß in *o*, und das Loth aus *n* auf *mo* fiele innerhalb *om*, so fiele das Loth aus *m* auf *no* außerhalb *on*, weil die Winkel $nm\nu = mn\mu$ Wechselswinkel seyn sollen (§ 57). Daher $\sphericalangle\, omx = \sphericalangle\, mn\mu =$ (§ 5) $\sphericalangle\, onx$, (wenn *nx* eine Verlängerung von *mn* über *n* ist), gegen (§ 39). — Wenn aber $\sphericalangle\, bac$, $\sphericalangle\, edc$ ungleich wären, so müßten *ab*, *de* zusammenstoßen (§ 63, 64). Also sind diese Winkel gleich, daher (§ 50—54) *ab*, *de* parallel. II. Sind die Wechselswinkel ungleich, so müßen auch $\sphericalangle\, bac$, $\sphericalangle\, edc$ ungleich seyn, weil diese Wechselswinkel sonst gleich würden (§ 50, 57, 62). Sind aber $\sphericalangle\, bac$, $\sphericalangle\, edc$ ungleich, so stoßen *ab*, *de* zusammen (§ 63, 64).

§ 66.

Lehrsatz. Wenn zwey Linien (Fig. 32) *ab*, *cd* entweder parallel
41 sind, oder zusammenstoßen; | eine dritte *ac* schneidet beyde, und die vierte *bo*, welche mit der dritten entweder parallel ist, oder zusammenstößt, schneidet die Eine *ab:* so schneidet sie auch die andre *cd*, oder ist mit ihr parallel.

Beweis. I. Wenn *ab* par. *cd*, und *bo* par. *ac*, so muß *bo*, welche die Eine *ab* schneidet, nothwendig auch *cd* schneiden. Denn nimmt man $c\beta = ab$, so wird $b\beta$ par. *ac* seyn, also *bo* mit $b\beta$ (§ 59) einerley. II. Stoßen *ab*, *cd* (Fig. 32*) zusammen in *x*, aber *ac* par. *bo*, so nehme man $xa : xb = xc : x\beta$; folglich (§ 50, 54) $b\beta$ par. *ac*. Also (§ 59) $b\beta$ mit *bo* einerley. III. Stoßen sowohl *ab*, *cd*, als auch *ac*, *bo* zusammen; so müssen *bo*, *cd* sich nicht nothwendig schneiden. Aber Eins von beyden: entweder *bo* par. *cd* oder sie stoßen zusammen. Denn hier ist der Fall, daß im Winkel *bac* zwey Linien *cy*, *bx* beyde Schenkel schneiden, wo sich § 62 leicht anwenden läßt.

§ 67.

Anmerkung. Dieß sind etwa die vornehmsten Sätze der Lehre
von den Parallelen, die hier ohne den Begriff der Ebene (dem die
Bedingung: daß zwey Linien sich entweder schneiden oder
parallel sind, gleich geltet) ausgedrückt sind; woraus sich nun mehrere
andre, insbesonders trigonometrische Sätze, auf die gewöhnliche Art
herleiten lassen. — Man wird hie und da bemerkt haben, daß ich gewisse
Sätze aus der | Theorie der geraden Linie vorausgesetzt habe, die in den 42
gewöhnlichen Lehrbüchern der Geometrie nicht ausdrücklich erwähnt
werden. Dennoch sind sie zur Bestimmtheit der geometrischen Sprache
unentbehrlich; und ich hätte gewunschen, mich ihrer stärker bedienen
zu dürfen, als ich jetzt aus Furcht, daß man mir dieß für prahlerische
Genauigkeit auslegte, nicht thun konnte. — Daß die Bemühungen der
Geometer in der Lehre von den Parallelen, bis auf jene neuesten der
Herrn Schultz, Gensich,[24]) Bendavid,[25]) Langsdorf[26]) — noch
alle unzulänglich waren, ist allgemein anerkannt. Nun haben bereits
Andre gegen den Beweis des Hrn. Hofpr. Schultz — (und mit diesem
kömmt dem Wesen nach auch der des Franzosen Bertrand[27]) überein) —
die Einwendung gemacht: daß er (nebst den noch nicht überall geneh-
migten Grundsätzen vom Unendlichen) auf eine heterogene Betrachtung
von der unendlichen Fläche des Winkels gegründet sey. Hr.
Gensich beabsichtigt mit Anwendung vieles Scharfsinns nur die
Schwierigkeiten vom Unendlichen zu heben; ändert übrigens in dem
zweyten Umstand nichts. — Daß mich also dieser Beweis der Lehre
von den Parallelen nicht beruhigen könne, geht aus den geäußerten
Grundsätzen (Vorr., und § 6) hervor. Hrn. Bendavids Beweis enthält
eine (für den Verfasser der Auseinandersetzung des mathem.
Unendlichen etwas unerwartete) Übereilung, die ihn ganz ungültig
macht. — Der | Beweis, den Hr. Langsdorf (Anfangsgründe der 43
reinen Elementar- und höheren Mathematik, Erlangen 1802) liefert,
kann mich und alle jene nicht befriedigen, die sich etwa noch nicht
überzeugt hätten von der Möglichkeit und Nothwendigkeit seiner
Raumpuncte (die ein Einfaches im Raume seyn sollen, aus dessen
Aneinanderhäufung in endlicher Anzahl Linien, Flächen und Körper
entstehen). Im Gegentheile aber: auch wenn dieser wahrheitsforschende
Gelehrte seine Überzeugung von den Raumpuncten nocht nicht ge-
ändert hat: so würde Ihn dieß (weil auch Er die geometrischen Puncte
und Linien annimmt) doch nicht hindern müssen, meinen in gegenwärtiger

Schrift enthaltenen Beweisarten (wenn ihnen sonst nichts abgeht) einigen Beyfall zu ertheilen. — Andere neuere Versuche über die Parallelen sind mir nicht bekannt geworden. Da ich mich nun auch selbst an einen so oft schon mißlungenen Gegenstand gewagt: so wäre es gegen alle Bescheidenheit, wenn ich das der Erfahrung nach so oft zu voreilig hervorgekommene εὕρηκα mir selbstmächtig zuriefe: was ich vielmehr billig dem Urtheile des Lesers, und der Zukunft überlasse.[28])