BOLZANOVA FUNCTIONENLEHRE

Ve spisech Bernarda Bolzana, vydávaných Královskou českou společností nauk, vyšel dosud svazek první, obsahující dosud netištěné (a před nedávnem dosud vůbec neznámé) dílo Bolzanovo „Functionenlehre“[1]). Je to dílo tak svérázné, že musíme vskutku velmi litovati, že nemohlo – zůstavši v rukopise – působit ve své době na další rozvoj matematiky. V době Bolzanově (narozen 1781, zemřel 1848) byla nauka o funkcích již značně rozvinuta, její základní pojmy však postrádaly ostrých obrysů a základní věty nebyly podepřeny přesnými důkazy. A právě v těchto základech nauky o funkcích znamená Bolzanova „Functionenlehre“ skutečný mezník – bohužel mezník zarostlý mechem neznámosti. Ze současníků Bolzanových snad jedině Gauss, Abel a Cauchy projevili obdobný smysl pro řádné vybudování základů nauky o funkcích. Z nich Gauss a Abel podali sice mistrovské ukázky přesných matematických metod, nezabývali se však oněmi základními otázkami soustavně. Zbývá Cauchy, který ve svých dílech „Cours d'Analyse“ (1821), „Résumé des leçons ... sur le Calcul Infinitésimal“ (1823), „Leçons sur le Calcul différentiel“ (1829) postavil základní obory nauky o funkcích (algebraickou analýzu, diferenciální a integrální počet) systematicky na pevné základy (nebo řekněme opatrněji: na pevnější základy).[2]) Bolzano jde však v této snaze ještě dále než Cauchy.[3]) Cauchy se většinou spokojil tím, že vybudoval základy potud, pokud to k dalším vývodům potřeboval; naopak Bolzano byl duch spíše filozofický, kterého v matematice právě základní otázky nejvíce zajímaly.[4]) Uvidíme v dalším, jak ostře vyslovuje

---

[1]) „Functionenlehre“, vydáno 1930 nákladem Král. č. spol. nauk, tiskem Jednoty čs. matematiků a fyziků v Praze, str. XX + 183 + 24 + IV. Vydání je opatřeno výraznou předmluvou prof. Petra a pečlivými poznámkami prof. Rychlíka.

[2]) Bolzano znal alespoň některé z těchto spisů: vznik (nebo aspoň ukončení) Bolzanova rukopisů je třeba datovat nejméně 1831 (v 2. oddílu, § 90, cituje knihu Youngovu z r. 1831).

[3]) Ostatně i Cauchy se dopustil některých omylů; budeme se některými z nich blíže zabývat.

[4]) Viz např. v Petrově předmluvě (str. IX) výmluvný citát z Bolzanových „Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik, 1. Lieferung“ (1810): Seit etwa 15 Jahren ... ist diese Wissenschaft (Mathematik) immer eines von meinen Lieblingsstudien gewesen; doch vornähmlich nur nach ihrem speculativen Teile, als Zweig der Philosophie und Uibungsmittel im richtigen Denken. (Asi 15 let ... je tato věda (matematika) stále jedním z mých oblíbených předmětů; především však její spekulativní části, jakožto odvětví filozofie a cvičení ve správném myšlení – pozn. red.)

Bolzano své definice, jak kriticky pitvá své pojmy, s jakým zájmem a s jakou úplností diskutuje všechny logicky možné případy, bez ohledu na to, mají-li pro konkrétní matematické problémy větší či menší význam.

Právě tento filozofický zájem předurčoval Bolzana k vykonání vynikajícího díla v otázce základů matematické analýzy. A opravdu, jeho „Functionenlehre" je dílo vskutku průkopnické, dílo tak moderní, že musíme jít o několik desítiletí dále, abychom se setkali s díly analogickými. Na druhé straně ovšem jak ono filozofické založení Bolzanovo tak průkopnický ráz jeho díla působily na jeho knihu též několika nepříznivými vlivy. Především Bolzano nebyl matematický rutinér; proto partie, jež vyžadují jen „ryzího myšlení", jsou u něho většinou dokonaleji provedeny než ony partie, jež vyžadují větší „řemeslné" zručnosti. Za druhé novost projednávaných problémů působila, že Bolzano neměl vůbec k dispozici vhodné názvosloví[5]); každou maličkost musel obšírně vypisovat a není divu, že někdy, brodě se v záplavě slov, uklouzl a dopustil se nesprávného úsudku. A ještě jedna okolnost jistě těžce doléhala na Bolzanovu práci. Jeho průkopnické dílo bylo by v jeho době nalezlo pochopení nejvýše u největších duchů matematických; jaké porozumění mohl Bolzano očekávat v tehdejším rakouském prostředí, v němž prostřednost, bezbarvost a zpátečnictví byly vládou podporovány jako nejvyšší občanské ctnosti? Sám, za dokonalého nezájmu a nepochopení svého okolí pracoval Bolzano na svém díle; jistě leckterá nedokonalost jeho díla byla by zmizela, kdyby si byl mohl o svých problémech pohovořit s nějakou spřízněnou duší.

V tomto článku chci čtenáře upozornit na problémy a metody tohoto Bolzanova díla; čtenář uvidí, jak mnohé pojmy, problémy a metody, jež dnes patří k nejdůležitějším částem matematické analýzy, jsou v definitivním tvaru podány již u Bolzana. Jde mi ovšem spíše o upozornění nežli o definitivní ocenění Bolzanova díla; to musí být přenecháno historikovi matematiky.

Bolzanova „Functionenlehre" – jež byla zamýšlena jako část většího díla o matematice[6]) – se skládá z úvodu (Einleitung: Verhältnisse zwischen veränderlichen Zahlen, str. 1–12) a z dvou hlavních oddílů (Erster Abschnitt: Stetige und unstetige Functionen, str. 13–79; Zweiter Abschnitt: Abgeleitete Functionen, str. 80–183). Úvod obsahuje několik spíše formálních úvah a nebudu se jím obšírněji zabývat; zato o obou hlavních oddílech chci pojednat podrobněji.[7])

---

[5]) Četba Bolzanovy knihy vzbuzuje ostatně (u *dnešního* matematika) dojem, že Bolzano nebyl příliš obratným (vědeckým) stylistou; ovšem k správnému posouzení této okolnosti bylo by třeba historika.

[6]) Úvod k „Functionenlehre" má v rukopise nadpis „Fünftes Hauptstück"; také rukopisy některých jiných částí jsou zachovány.

[7]) Abych čtenáře zbytečně neunavoval rozvláčnou a často nezvyklou slovní formulací Bolzanovou, budu jeho výroky většinou „překládat" do moderní mluvy. Např. v 1. oddílu, § 20 Bolzano praví: „Wenn die unendlich vielen Werthe, die eine Function $F(x)$

1. oddíl
Spojité a nespojité funkce

Hned na začátku referátu narážím na jednu potíž. Bolzano si dává velmi záležet na definicích; ale definice pojmu funkce u něho schází – hned na začátku úvodu užívá slova „Function" jako běžného pojmu, bez jakékoliv definice. Při Bolzanově pečlivosti v zavádění pojmů soudil bych, že Bolzano snad v některé jiné – snad neznámé – části rukopisu pojem funkce definoval; prof. Rychlík nemohl mi však poskytnout žádnou informaci v této věci. Bolzano užívá též často výrazu „einförmige Function"; Rychlík interpretuje slovo „einförmig" jakožto „jednoznačný" a z mnoha míst Bolzanova díla zdá se vysvítat, že Bolzano slovy „einförmige Function" rozuměl to (nebo skoro to), co dnes označujeme slovem „funkce". Budu tedy výraz „einförmige Function" překládat slovem „funkce" a budu přitom funkci (např. funkci jedné proměnné) brát ve smyslu dnes obvyklém: Proměnná y je funkcí proměnné x, definovanou v oboru M, jestliže každé hodnotě x z množiny M je přiřazena určitá (jediná) hodnota proměnné y[8]). Někdy (hlavně v 2. oddílu při definici derivace) Bolzano přívlastek „einförmig" vynechává; nezdá se však, že by tím chtěl něco zvláštního říci; pouze v §§ 47–48 (1. oddíl) je věc pochybná a působí jakési potíže (viz k tomu dále mé poznámky k těmto odstavcům).

Po úvodním § 1 definuje Bolzano v § 2 spojitost funkce jedné proměnné tak, jak to činíme dnes: funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ lze nalézt číslo $\eta > 0$ tak, že pro všechna x, splňující nerovnosti $|x - a| < \eta$, platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.[9]) Bolzanovo pojetí spojitosti je tedy zcela moderní; před ním snad jen Cauchy definoval spojitost funkce podobným způsobem; Cauchy však nedospívá k pojmu funkce spojité v *bodě*, nýbrž zůstává při pojmu spojitosti v *intervalu* (jeho pojem „funkce spojitá v okolí bodu a" znamená funkci,

---

annimt, indem ihre Veränderliche x alle von $x = a$ bis $x = b$ einschliesslich vorkommenden Werthe erhält, von solcher Beschaffenheit sind, dass sich zu jeder messbaren Zahl irgend einer aus ihnen ausfinden lässt, der diese Zahl übertrifft, so ist diese Function gewiss nicht für alle Werthe von $x = a$ bis $x = b$ einschliesslich stetig." Tuto větu vyslovím stručně takto: „funkce neohraničená v intervalu $[a, b]$ nemůže být spojitá v $[a, b]$" nebo ještě lépe v ekvivalentním tvaru: „každá funkce spojitá v $[a, b]$ je ohraničená v $[a, b]$". (Z důkazu je mimo to patrno, že Bolzano místo „die eine Function $F(x)$ annimt" chtěl říci „die der absolute Betrag einer Function $F(x)$ annimmt"; takováto zřejmá přeřeknutí v dalším často opravuji, aniž bych se o tom zvláště zmiňoval.)

[8]) V celém díle jde o reálné funkce reálných proměnných. Nechci ovšem nikterak tvrdit, že by Bolzano byl býval schopen onu definici vyslovit tak dokonale, jak to dnes činíme.

[9]) Bolzano mluví tedy o spojitosti jen tehdy, je-li funkce $f(x)$ definována v bodě a a v jeho okolí.

spojitou v nějakém intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$).[10]) Bolzanovo pojetí, jež vychází ze spojitosti v bodě, znamená podstatný pokrok. Avšak Bolzano jde ještě dále a zavádí ihned též (způsobem dnes obvyklým) spojitost zprava a zleva.[11])

Vzbuzuje-li již tato definice náš obdiv, tím většího obdivu zaslouží si další odstavce 3–33, které obsahují znamenitě vybudovanou teorii spojitých funkcí jedné proměnné. Po § 3, jenž obsahuje zajímavou kritiku starších definicí spojitosti, následuje v §§ 4–8 důkaz spojitosti nejjednodušších funkcí (až k funkcím racionálním). Následující §§ 9–11 ukazují, jak důkladně Bolzano promyslil možnosti, jež při spojitosti a nespojitosti funkcí mohou nastat; tak v § 10 sestrojuje funkci, definovanou pro všechna x a spojitou právě v jednom jediném bodě. Zajímavý je § 12, jenž ukazuje kritickou bystrost Bolzanovu:

Budiž funkce $f(x)$ spojitá zprava pro všechna x. Zvolme nějaké číslo a; potom je[12])

$$(1) \quad \lim_{h \to 0+} (f(a + h) - f(a)) = 0 .$$

Rovněž je pro libovolné k:

$$(2) \quad \lim_{h \to 0+} (f(a - k + h) - f(a - k)) = 0 .$$

Kdybychom směli v poslední rovnici položit $k = h$, dostali bychom

$$\lim_{h \to 0+} (f(a) - f(a - h)) = 0 ,$$

tj. dostali bychom výsledek, že funkce $f(x)$ je v bodě a spojitá zleva. Bolzano výslovně varuje před touto nesprávnou úvahou; jako důvod nepřípustnosti takové úvahy uvádí zcela správně okolnost, že v (2) je třeba si myslit k jako pevné číslo; chceme-li při kladném ε dosáhnout nerovnosti $|f(a - k + h) - f(a - k)| < \varepsilon$, stačí zvolit $0 < h < \eta$, kde však kladné číslo η může záviset nejenom na ε, *nýbrž i na k*. Moderně řečeno: nesprávnost té úvahy spočívá v tom, že spojitost zprava nemusí být „stejnoměrná". Bolzano konstruuje též příklad ($f(x) = x^2$ pro $x < 2$, $f(x) = x^3$ pro $x \geqq 2$), z něhož je nesprávnost oné úvahy i jejího výsledku zřejmá.

Následující § 13 se týká opět pojmu stejnoměrnosti; Bolzano v něm ukazuje na příkladě

---

[10]) Cauchy, „Cours d'Analyse" (1821), I^ère partie, chap. II, § 2. K tomu je třeba poznamenat, že Bolzano již v r. 1817 v pojednání „Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren,wenigstens eine Wurzel der Gleichung liege" zavádí pojem spojitosti podobně jako Cauchy (tedy spojitost v intervalu).

[11]) Na tomto místě je také vidět, s jakými potížemi vyjadřovacími musil Bolzano zápasit: k definici spojitosti spotřeboval 23 řádek!

[12]) $\lim_{x \to a+} g(x)$ značí limitu funkce $g(x)$ v bodě a zprava, a obdobně pomocí znaku $a-$ označuji limitu zleva.

toto: Funkce $(1 - x)^{-1}$ je spojitá v otevřeném intervalu $(0, 1)$[13]). Přesto však, zvolíme-li kladné číslo ε, je možno ke každému kladnému δ nalézt číslo x_0 $(0 < x_0 < 1)$ tak, že k dosažení nerovnosti

$$\left|\frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - x_0}\right| < \varepsilon \quad (0 < x < 1)$$

je *nutné* zvolit $|x - x_0| < \delta$. K tomu bych poznamenal toto: Vlastnost, kterou zde Bolzano formuluje (jednak v obecné větě, jednak v citovaném příkladě) není logickým záporem stejnoměrné spojitosti (v dnešním smyslu); věta z § 13 není proto ekvivalentní s větou „funkce spojitá v (a, b) nemusí být stejnoměrně spojitá v (a, b)“, má však k ní úzký vztah (dokonce ji obsahuje). Je vidět, že Bolzano si uvědomil důležitost pojmu asi toho rázu, jako je dnešní „stejnoměrnost“ (stejnoměrná spojitost, stejnoměrná konvergence); nedospěl však k tomu, aby poznal, jak by měl vhodně tento pojem formulovat. Následkem toho – jak v dalším uvidíme – často na stejnoměrnost vůbec zapomíná, často pak operuje s jakýmsi pojmem tohoto rázu, ne však vhodně zavedeným; tím vznikají v díle Bolzanově některé omyly a nedokonalosti, jimiž se ještě budeme podrobněji zabývat.

§§ 14–16 pojednávají o tzv. „neurčitých výrazech“ na základě věty: Je-li $f(x)$ spojitá v (a, b) a mají-li dvě čísla m, M $(a < m < b)$ tu vlastnost, že ke každému páru čísel $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ existuje číslo x tak, že $|x - m| < \eta$, $|f(x) - M| < \varepsilon$, je $f(m) = M$. § 17 obsahuje důkaz věty: Je-li $f(x)$ spojitá v (a, b) a leží-li pro nějakou hodnotu M kořeny rovnice $f(x) = M$ všude hustě v intervalu (a, b), je $f(x) = M$ identicky v (a, b). § 18 obsahuje obrácení věty z § 17; zde však se dopouští Bolzano *prvního závažného omylu*. Bolzano totiž praví: „Jestliže tedy naopak je $f(x)$ spojitá v (a, b) a jestliže $f(x)$ závisí na x (tím chce patrně Bolzano říci, že $f(x)$ není konstantní) a je-li M nějaké číslo, potom rovnice $f(x) = M$ může mít sice nekonečně mnoho kořenů v (a, b), lze však nalézt částečný interval v (a, b), v němž tato rovnice nemá žádný kořen. Jinými slovy: *ke každému kořenu rovnice $f(x) = M$ lze nalézt kořen jemu nejbližší.*“ Poslední věta je zřejmě nesprávná, i když učiníme předpoklad (který Bolzano asi polovědomě učinil), že $f(x)$ není konstatní v žádném částečném intervalu. Za tohoto předpokladu lze totiž v každém částečném intervalu nalézt bod α tak, že $f(\alpha) \neq M$; jestliže rovnice $f(x) = M$ má aspoň jeden kořen nalevo od α a rovněž napravo od α, lze nalézt interval (y_1, y_2), obsahující bod α, tak, že $f(x) \neq M$ pro $y_1 < x < y_2$, ale $f(y_1) = M$, $f(y_2) = M$; y_1, y_2 tvoří pak vskutku dva „sousední“ kořeny rovnice $f(x) = M$; jenomže – a v tom spočívá nesprávnost Bolzanova tvrzení – nemusíme tímto způsobem (i když měníme číslo α) obdržet všechny kořeny rovnice $f(x) = M$. Tato chyba zaráží tím více, že Bolzano v dalším sestrojuje funkci (v § 70), která po malé úpravě by mu poskytla příklad, ukazující nesprávnost jeho tvrzení (a dokonce i tato úprava je provedena v 2. oddíle, § 26).

---

[13]) Zavádím tyto značky a názvy: (a, b) značí množinu všech čísel x, pro něž $a < x < b$ (název: otevřený interval); $[a, b]$ značí množinu všech čísel x, pro něž $a \leqq x \leqq b$ (název: uzavřený interval).

Ale tento omyl nám na druhé straně ukazuje, jak veliký, obtížný a průkopnický úkol Bolzano na sebe vzal. Jen nesmírnou obtížností a úplnou novostí a nezvyklostí předmětu je možno si vysvětlit, že Bolzano, který v následujících odstavcích (§§ 19—30) ukázal naprostou přesnost a dokonalost v místech nejchoulostivějších, mohl se dopustit v § 18 tak hrubé chyby. Bohužel nezůstal § 18 bez vlivu na následující úvahy; zvláště některé části nauky o extrémech trpí používáním nesprávné věty z § 18.

Následující §§ 19—30 vynucují si zato bezvýhradný obdiv a úctu. Zde Bolzano dokazuje podrobně a bez nejmenšího omylu základní věty o spojitých funkcích. Důkazy jsou úplně „aritmetizovány", postupují (jako ostatně celá tato kniha) ryze deduktivně z definice spojitosti, bez jakéhokoliv odvolávání se na názor. Bolzano dokazuje tyto věty:

I. Je-li $\limsup_{x \to c} |f(x)| = \infty$, není funkce $f(x)$ v bodě c spojitá.

II. Funkce spojitá v uzavřeném intervalu $[a, b]$ je v něm ohraničená.

III. Je-li funkce $f(x)$ spojitá v $[a, b]$ a existuje-li posloupnost $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $(a \leqq x_n \leqq b)$ taková, že $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = C$, potom funkce $f(x)$ nabývá v intervalu $[a, b]$ hodnoty C.

IV. Je-li funkce $f(x)$ spojitá v $[a, b]$, nabývá tato funkce v $[a, b]$ někde své největší (a rovněž nejmenší) hodnoty.

V. Budiž $f(x)$ spojitá v (a, b); budiž $a < x_1 < x_2 < b$, $f(x_1) \neq f(x_2)$; potom funkce $f(x)$ nabývá v intervalu (x_1, x_2) všech hodnot, které leží mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$.[14])

Bolzano nejenom dokazuje tyto věty, nýbrž i zkoumá kriticky význam učiněných předpokladů; tak ukazuje, že věty III a IV neplatí, nahradíme-li v nich uzavřený interval $[a, b]$ otevřeným intervalem (a, b). Důkazy těchto vět jsou provedeny tak bezvadně, že by mohly být (nehledíme-li k některým neobratnostem slovního vyjádření) beze změny převzaty do kterékoliv moderní učebnice diferenciálního počtu. Jen jednu poznámku nutno učinit: spojitost v uzavřeném intervalu $[a, b]$ znamená — podle dnešní terminologie — spojitost v každém vnitřním bodě, dále spojitost zprava v bodě a a spojitost zleva v bodě b. Bolzano vyjadřuje ji slovy „von $x = a$ bis $x = b$ einschliesslich stetig". Zdá se tedy, že Bolzano požaduje v koncových bodech intervalu oboustrannou spojitost, ač stačí jednostranná. Je ovšem také myslitelné, že Bolzano byl si této okolnosti vědom a že jenom vyjadřovací potíže zavinily, že tuto okolnost jasně nevytkl[15]).

Důkazy spočívají hlavně na dvou větách, jejichž formulace je rovněž dílem Bolzanovým.

---

[14]) Poslední větu dokázal Bolzano již v „Rein analytischer Beweis..." (1817). Také Cauchy ji dokazuje v „Cours d'Analyse" (1821), Note III$^{\text{ème}}$.

[15]) Tomu by se zdály nasvědčovat některé pozdější úvahy: např. v § 70 sestrojuje Bolzano funkci, definovanou pouze v intervalu $[0, 1]$ (u níž tedy v koncových bodech lze mluvit nejvýše o *jednostranné* spojitosti) a přesto o ní říká, že je „von $x = 0$ bis $x = 1$ einschliesslich stetig". Totéž říká v § 75 o tzv. „Bolzanově funkci"; a podobně i na některých jiných místech.

První z nich, tzv. *věta o horní hranici,* zní ve formulaci Bolzanově takto: víme-li o nějaké vlastnosti B, že nenáleží všem reálným číslům, že však náleží všem číslům menším než jisté číslo U, potom existuje číslo A, jež je největší ze všech čísel x, jež mají následující vlastnost: všechna čísla menší než x mají vlastnost B.[16])

Druhá věta je tzv. *věta Bolzanova-Weierstrassova*: každá ohraničená posloupnost má aspoň jeden hromadný bod.[17])

V následujících odstavcích pojednává Bolzano o složených funkcích; v § 31 podává větu o spojitosti složených funkcí $f(\varphi(x))$; formuluje tuto větu též pro jednostrannou spojitost. Při funkcích jen jednostranně spojitých ovšem mohou nastat velmi složité případy; není jasné, byl-li si Bolzano všech těchto možností vědom; věta i důkaz jsou však správné, posoudíme-li jen trochu shovívavě poněkud spletitou slovní formulaci.

V §§ 34—46 probírá Bolzano nejjednodušší věty o spojitosti funkcí několika proměnných; tato část jeho díla je však založena na nesprávné větě. Bolzano totiž definuje v § 38 spojitost funkce $f(x, y)$[18]) takto: $f(x, y)$ je spojitá v bodě (x_0, y_0), existuje-li kladné číslo δ tak, že 1. $f(x, y_0 + k)$ je spojitou funkcí proměnné x v bodě x_0, je-li $|k| < \delta$, 2. $f(x_0 + h, y)$ je spojitou funkcí proměnné y v bodě y_0, je-li $|h| < \delta$. V § 39 snaží se pak dokázat: Je-li $f(x, y)$ spojitá v bodě (x_0, y_0), je

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)\,. \tag{3}$$

Tato věta je ovšem nesprávná; existují funkce $f(x, y)$, jež jsou spojité v x a též spojité v y a jež přesto nesplňují rovnici (3). Omyl Bolzanův je prostě tento: platí

$$\begin{aligned} &f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \\ &= (f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)) + (f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0))\,. \end{aligned}$$

První závorka konverguje za našich předpokladů k nule, když $h \to 0$; rovněž druhá závorka

---

[16]) Tuto větu vyslovil Bolzano již v rukopisné „Zahlenlehre" a v tištěném pojednání „Rein analytischer Beweis ..." (1817). V tomto pojednání dokazuje Bolzano tuto větu tím, že ji převádí na jistou podmínku (tzv. Bolzanovu-Cauchyovu) pro konvergenci posloupnosti; ovšem Bolzanův pokus o důkaz Bolzanovy-Cauchyovy podmínky (v témže pojednání) ztroskotal, ježto by vyžadoval teorii reálných čísel, jež byla vytvořena až o několik desítiletí později. Dnes ovšem postupujeme raději obráceně: napřed dokazujeme větu o horní hranici a potom teprve podmínku Bolzanovu-Cauchyovu.

[17]) Při použití této věty odkazuje Bolzano na svou rukopisnou „Lehre von der Messbarkeit der Zahlen"; ani Jašek ani Rychlík tam však tuto větu nenašli. Je zajímavé, jak poznamenává Rychlík, že ani v tištěných spisech Bolzanových tuto větu nelze nalézt, ač je známa pod jménem „věta Bolzanova-Weierstrassova".

[18]) Bolzano to provádí pro funkce n proměnných a přihlíží také k jednostranné spojitosti.

konverguje k nule, když $k \to 0$ *při pevném h*. Bolzano však přehlédl, že není nijak zaručeno, že druhá závorka konverguje k nule, když h, k *současně* konvergují k nule. To spočívá v tom, že spojitost funkce $f(x, y)$ v proměnné y nemusí být stejnoměrná vzhledem k proměnné x. Je dost podivuhodné, že Bolzano zde dělá touž chybu, před kterou v § 12 tak důrazně varoval. To je tedy *druhý závažný omyl* Bolzanův; táž chybná úvaha vyskytuje se též u Cauchyho[19]) a je zcela dobře možné, že Bolzano ji odtamtud bez hlubšího rozboru převzal.

Velmi zajímavé jsou §§ 47–48. Již v § 29 Bolzano dokázal, že každá funkce $f(x)$, která je spojitá v (a, b), má tuto vlastnost:

Vlastnost (A). Je-li $a < x_1 < x_2 < b, f(x_1) \neq f(x_2)$, potom funkce $f(x)$ nabývá v intervalu (x_1, x_2) všech hodnot, jež leží mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$.

Bolzano klade si nyní otázku: je vlastnost (A) snad charakteristická pro spojité funkce? a odpovídá zcela správně: nikoliv; existují dokonce funkce, jež mají vlastnost (A), nejsou však v žádném bodě spojité. Věta jistě podivuhodná na svou dobu, uvědomíme-li si, že ještě Lebesgue[20]) si stěžuje, že se v některých francouzských školách zavádí spojitost pomocí vlastnosti (A). Bolzano pokouší se také svůj výrok dokázat; k tomuto pokusu je však obtížné zaujmout stanovisko, dokud neznáme přesně Bolzanovu definici funkce.[21])

V §§ 49–59 podává Bolzano velmi zajímavou teorii monotonních funkcí. Abych čtenáři na příkladě ukázal preciznost Bolzanova postupu, dovolím si zde stručně naznačit obsah těchto odstavců.

§ 49. Existují funkce $f(x)$, které buď pro všechna x (nebo aspoň pro všechna x z jistého otevřeného intervalu) mají tuto vlastnost: je-li $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$. Důkaz: funkce cx ($c > 0$) má tuto vlastnost, neboť z $x_1 < x_2$ plyne $cx_1 < cx_2$. Obdobně pro $c < 0$ dostáváme funkci, pro kterou platí: je-li $x_1 < x_2$, je $f(x_1) > f(x_2)$.

§ 50. Takovéto funkce budeme nazývat rostoucími (buď stále rostoucími nebo rostoucími v intervalu (a, b)) resp. klesajícími.

§ 51. Není-li $f(x)$ rostoucí v (a, b), musí existovat čísla μ, ϱ tak, že $a \leqq \mu < \varrho \leqq b$, $f(\mu) \geqq f(\varrho)$; a několik podobných poznámek.

---

[19]) „Cours d'Analyse", I$^{\text{ère}}$ partie, chap. II, § 2. Dnešní definice spojitosti funkcí několika proměnných pochází asi až z doby Weierstrassovy, okolo r. 1870.

[20]) Lebesgue, „Leçons sur l'intégration" (1904), str. 89.

[21]) Bereme-li totiž pojem funkce ve smyslu dnes obvyklém (každé hodnotě x z jistého oboru odpovídá jedna *jediná* hodnota y), musíme na Bolzanův důkaz pohlížet jako na zcela nezdařený. Bolzano však v těchto §§ 47–48 *neklade* k slovu „Function" adjektivum „einförmig"; je tedy zcela dobře možné, že Bolzano myslí též na jakési funkce „mnohoznačné" (viz mé poznámky k Bolzanovu pojmu funkce); potom by se snad mohl (při dostatečném rozšíření pojmu funkce) důkaz Bolzanův pokládat za správný (zcela nebo částečně); ale věta sama by ovšem potom ztrácela mnoho na zajímavosti. Buď tedy obsahují §§ 47–48 velmi zajímavou větu s nesprávným důkazem nebo méně zajímavou větu se správným (aspoň zčásti) důkazem.

§ 52. U funkce rostoucí má $f(x + h) - f(x)$ totéž znamení jako h; naopak u klesající.

§ 53. Funkce rostoucí (klesající) nabývá každé hodnoty nejvýše jednou (s podrobným důkazem).

§ 54. U rostoucí funkce plyne z nerovnosti $f(\varrho) > f(\mu)$ nerovnost $\varrho > \mu$; naopak u klesající funkce (s důkazem).

§ 55. Jestliže funkce $f(x)$ má v intervalu (a, b) vlastnost (A) a existují-li tři čísla ε, μ, ϱ $(a < \varepsilon < \mu < \varrho < b)$ tak, že není ani $f(\varepsilon) < f(\mu) < f(\varrho)$ ani $f(\varepsilon) > f(\mu) > f(\varrho)$, potom nabývá $f(x)$ některé ze svých hodnot aspoň dvakrát.

Důkaz: Kdyby dvě z čísel $f(\varepsilon)$, $f(\mu)$, $f(\varrho)$ byla stejná, bylo by tvrzení jasné. Zbývá tedy vyšetřit případy 1. $f(\varepsilon) < f(\mu) > f(\varrho)$, 2. $f(\varepsilon) > f(\mu) < f(\varrho)$. Ad 1.: buď je α) $f(\varepsilon) < f(\varrho) < f(\mu)$ nebo β) $f(\varrho) < f(\varepsilon) < f(\mu)$. V případě 1α) je $f(\varrho)$ mezi $f(\varepsilon)$ a $f(\mu)$, existuje tedy (podle vlastnosti (A)) číslo $\lambda (\varepsilon < \lambda < \mu)$ tak, že $f(\lambda) = f(\varrho)$; ježto $\lambda \neq \varrho$, je tím tvrzení dokázáno. Obdobně se diskutují ostatní případy.

§ 56. Jestliže tedy funkce $f(x)$ má v intervalu (a, b) vlastnost (A) a nabývá tam každé hodnoty nejvýše jednou, potom pro $a < \varepsilon < \mu < \varrho < b$ musí platit buď $f(\varepsilon) < f(\mu) < f(\varrho)$ nebo $f(\varepsilon) > f(\mu) > f(\varrho)$.[22])

§ 57. Obdobně pro více čísel $\varepsilon < \mu < \varrho < \lambda < \nu < \ldots$

§ 58. Jestliže funkce $f(x)$ má v intervalu (a, b) vlastnost (A) a nabývá tam každé hodnoty nejvýše jednou, je buď rostoucí nebo klesající v (a, b).

Důkaz: Zvolme dvě čísla μ, ϱ $(a < \mu < \varrho < b)$; platí jistě $f(\mu) \neq f(\varrho)$. Diskutujme třeba případ $f(\mu) < f(\varrho)$; tvrdím, že v tomto případě je $f(x)$ rostoucí v (a, b). To znamená: budiž $a < x_1 < x_2 < b$; mám dokázat $f(x_1) < f(x_2)$. Diskuse závisí na vzájemné poloze bodů x_1, x_2, μ, ϱ; Bolzano tuto diskusi úplně provádí.[23]) Např. je-li $\mu < x_1 < \varrho < x_2$, musí být podle § 57 buď $f(\mu) < f(x_1) < f(\varrho) < f(x_2)$ nebo $f(\mu) > f(x_1) > f(\varrho) > f(x_2)$; druhý případ je však vyloučen, ježto $f(\mu) < f(\varrho)$; tedy platí první série nerovností, a tedy $f(x_1) < f(x_2)$.

§ 59. Jestliže $f(x)$, rostoucí (nebo klesající) v (a, b), má v tomto intervalu vlastnost (A), je $f(x)$ spojitá v (a, b). Podivuhodný (na svou dobu) doplněk k §§ 47–48!

Důkaz: Budiž třeba $f(x)$ rostoucí a dokazujme spojitost zprava v bodě x_0 $(a < x_0 < b)$. Zvolme h_0 tak, že $x_0 < x_0 + h_0 < b$; pak je $f(x_0 + h_0) - f(x_0) = D > 0$. Budiž dáno $\varepsilon > 0$ a zvolme μ $(0 < \mu < 1)$ tak, že $\mu D < \varepsilon$. Potom je $f(x_0) < f(x_0) + \mu D < f(x_0 + h_0)$ a tedy podle vlastnosti (A) existuje h_1 $(0 < h_1 < h_0)$ tak, že $f(x_0 + h_1) = f(x_0) + \mu D$;

---

[22]) Pozor! Dokázali jsme dosud jen, že pro každou takovou trojici čísel ε, μ, ϱ platí *jeden* ze vztahů $f(\varepsilon) < f(\mu) < f(\varrho)$, $f(\varepsilon) > f(\mu) > f(\varrho)$; dosud jsme však nedokázali, že pro *všechny* takové trojice platí *tentýž* z obou vztahů; kdybychom už to měli dokázáno, byla by $f(x)$ zřejmě buď rostoucí nebo klesající v (a, b). To je skutečně pravda, ale bude to dokázáno až v § 58.

[23]) V diskusi jsou malá náhodná přehlédnutí.

tedy $0 < f(x_0 + h_1) - f(x_0) < \varepsilon$ a (ježto $f(x)$ roste) tím spíše $0 < f(x_0 + h) - f(x_0) < \varepsilon$ pro $0 < h < h_1$. Obdivuhodná partie! Bolzanův postup v §§ 49–59 je vskutku bez nejmenšího kazu.

Od funkcí monotonních přechází Bolzano k teorii relativních extrémů. Přechod tvoří tato věta (§ 61): Je-li $a < b < c$ a je-li funkce $f(x)$ 1. rostoucí v (a, b), 2. klesající v (b, c), 3. spojitá v bodě b[24]), potom existuje $\delta > 0$ tak, že $f(b) > f(b + h)$ pro $0 < |h| < \delta$. Následuje definice relativních extrémů (§ 62): $f(x)$ má relativní maximum v bodě b, existuje-li číslo $\delta > 0$ tak, že $f(x) < f(b)$ pro $0 < |x - b| < \delta$; obdobně pro relativní minimum. Bolzano definuje také jednostranné extrémy. Např. relativní maximum zprava v bodě b nastává podle jeho definice tehdy, jestliže předně $f(b + h) < f(b)$ pro dost malá kladná h a jestliže za druhé $f(b - h)$ buď neexistuje nebo je rovno $f(b)$ pro dost malá kladná h. K této ne dost vhodné definici jednostranných extrémů byl Bolzano veden svou nesprávnou představou o rozdělení kořenů rovnice $f(x) = M$, spočívající na nesprávném § 18. Vliv tohoto § 18 jeví se pak v dalším vybudování teorie maxim a minim několika nesprávnými větami a důkazy. Přesto však odstavce těmto otázkám věnované obsahují mnoho zajímavých jednotlivostí; o některých se blíže zmíním. Především se Bolzano zabývá dost obšírně funkcemi, jež vykazují „nekonečně mnoho oscilací“ (§§ 65–75). Tak ukazuje v § 65 (konstruováním vhodného příkladu), že lze sestrojit funkci $f(x)$, spojitou v (a, b), jež má tuto vlastnost: existují dvě čísla m, M a posloupnost $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $(a < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < b)$ tak, že

(4) $m < M$[25]), $\quad f(x_{2n-1}) \geqq M\,, \quad f(x_{2n}) \leqq m\,.$

V § 69 ukazuje Bolzano, že funkce $f(x)$, mající tyto vlastnosti, nemůže být spojitá v uzavřeném intervalu $[a, b]$. Příklad v § 65 poskytuje zároveň příklad funkce spojité v (a, b), jež má tuto vlastnost: existuje číslo μ (třeba $\mu = (m + M)/2$) a posloupnost $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $(a < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < b)$ tak, že

(5) $f(x_{2n-1}) > \mu\,, \quad f(x_{2n}) < \mu\,.$

Vlastnost (5) říká ovšem *méně* než vlastnost (4) a Bolzano ukazuje v § 70 (na rozdíl od vlastnosti (A)), že i funkce spojitá v uzavřeném intervalu $[a, b]$ může mít vlastnost (5). Tento rozdíl mezi vlastností (4) a (5) spočívá, jak Bolzano správně podotýká, v tom, že – zhruba řečeno – nerovnosti (5) nevylučují ještě existenci limity $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$, kdežto nerovnosti (4) ji vylučují. Bolzano uvádí ještě několik věcí podobného rázu; bylo by snad zbytečné, abych jimi čtenáře rozptyloval. Musím však poznamenat, že jsem se nezmínil dosud o § 63, § 64, § 68. Z nich §§ 63 a 68 obsahují nesprávné výsledky, spočívající na nesprávném § 18. V § 64

---

[24]) Bolzano praví „um den Wert b herum stetig“; používá však při důkazu jenom spojitosti v bodě b, nikoliv v *okolí* bodu b. Důkaz, v jádře správný, není zcela dokonale proveden.

[25]) Tuto podmínku zapomněl Bolzano vyslovit, ač ji měl zřejmě na mysli.

dokazuje Bolzano, že pro funkci spojitou v $[a, b]$ a rostoucí v (a, b) platí $f(a) < f(c) < f(b)$ pro $a < c < b$. Důkaz provádí Bolzano takto: zvolme h tak, že $a < a + h < c$; potom je $f(a + h) < f(c)$, $\lim_{h \to 0+} f(a + h) = f(a)$; z toho prý plyne $f(a) < f(c)$. Při obecné funkci ovšem bychom směli usuzovat pouze $f(a) \leqq f(c)$; při rostoucí funkci je úsudek správný, Bolzano však při tomto limitním přechodu monotonii funkce $f(x)$ nezdůrazňuje – zdá se tedy, že se zde dopustil omylu. Ještě musím poznamenat, že slovní formulace není v §§ 64–74 všude zcela dokonalá; zřejmě jde však jen o jazykové obtíže, nikoliv o omyly či skutečná přehlédnutí.

Již v těchto odstavcích (§§ 65, 70, 73) sestrojil Bolzano několik pozoruhodných příkladů funkcí, jejichž (ohraničený) definiční obor nelze rozdělit na konečný počet intervalů monotonie; nejvelkolepější příklad toho druhu podává však Bolzano v § 75; sestrojuje totiž funkci $f(x)$, spojitou v $[a, b]$, jež není monotonní v žádném částečném intervalu. (Později (2.oddíl, § 19) ukazuje Bolzano, že body, v nichž $f(x)$ nemá derivaci, leží všude hustě v intervalu $[a, b]$[26]). Již to, že Bolzana vůbec napadlo, že by taková funkce mohla existovat, zasluhuje obdiv; tím větší obdiv zasluhuje, že se mu podařilo takovou funkci skutečně sestrojit. Tato funkce je slavná tzv. „funkce Bolzanova". Je dostatečně známá z literatury, takže mohu postupovat stručně.

Bolzano definuje v intervalu $[a, b]$ posloupnost spojitých funkcí

$$(6) \quad f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots ;$$

přitom čára $y = f_n(x)$ je lomená čára, složená z konečného počtu úseček (tento počet roste současně s n do nekonečna). Body, v nichž se střídá stoupání funkce $f_n(x)$ s klesáním (to může zřejmě nastat jen v rozích té lomené čáry), vyplňují, je-li n dost velké, interval $[a, b]$ tak hustě, jak si přejeme (to znamená: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že funkce $f_n(x)$ není monotonní v žádném intervalu délky ε, je-li $n > n_0$). Mimo to všechny rohy čáry $y = f_n(x)$ leží také na všech čarách následujících $y = f_m(x)$ $(m > n)$. Je jasné, že existuje-li limita

$$(7) \quad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x),$$

potom není $f(x)$ monotonní v žádném částečném intervalu z $[a, b]$; neboť ve všech rozích

[26]) Víme dnes, že tato funkce nemá derivaci vůbec v žádném bodě; viz M. Jašek, O funkci Bolzanově, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky 51 (1922), str. 69–76; M. Jašek, Aus dem handschriftlichen Nachlass B. Bolzanos, Věstník Král. č. spol. nauk 1920–21, sv. I, str. 1–32; K. Rychlík, Über eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichem Nachlasse, Věstník Král. č. spol. nauk 1921–22, sv. IV, str. 1–20; V. Jarník, O funkci Bolzanově, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky 51 (1922), str. 248–264. (Viz též v této publikaci str. 60–73 – pozn. red.)

čáry $y = f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ je zřejmě $f(x) = f_n(x)$[27]) a ony rohy čáry $y = f_n(x)$, v nichž se stoupání střídá s klesáním, leží při dost velkém n tak hustě v intervalu $[a, b]$, jak si přejeme. Až sem je Bolzanův postup (jejž jsem úmyslně trochu přeházel) správný. Zbývá jen ještě dokázat, že limita (7) existuje a že je spojitou funkcí x v intervalu $[a, b]$. Existenci této limity dokazuje Bolzano vcelku správně, totiž v podstatě na základě Bolzanovy-Cauchyovy podmínky[28]). Zato při důkazu *spojitosti* funkce $f(x)$ dopouští se Bolzano podstatné chyby. Usuzuje totiž prostě takto: funkce $f(x)$ je limitou funkcí spojitých; a *konvergentní posloupnost spojitých funkcí má vždy za limitu funkci spojitou.* Poslední věta je ovšem nesprávná; je však správná, požadujeme-li např. *stejnoměrnou* konvergenci. Bolzano zde učinil obdobnou chybu jako v § 39; přehlédl totiž nutnost požadavku stejnoměrnosti (nebo něčeho podobného).[29]) Opět je to v podstatě onen omyl, před nímž varoval v § 12. To je tedy *třetí závažný omyl* Bolzanův; táž chyba vyskytuje se ostatně i u Cauchyho.[30])

§§ 76—78 obsahují několik vět o střídání maxim a minim, jsou však vydatně zatíženy nesprávným § 18.

Ve zbytku 1. oddílu zabývá se Bolzano nespojitými funkcemi; toto téma vyžadovalo by však k dokonalému zpracování hlubších znalostí z teorie množin a není tedy divu, podává-li zde Bolzano úvahy málo uspokojivé. V § 79 vyslovuje Bolzano nesprávnou větu, že existují funkce rostoucí, jež v žádném bodě nejsou spojité. V §§ 80—81 vyslovuje Bolzano opět nesprávnou větu, týkající se existence limit zprava a zleva u jistého typu nespojitých funkcí. Důkazy v §§ 79—80 jsou nejen nesprávné, nýbrž i formálně tak nedokonalé, že působí dojmem pouhého náčrtku. V posledním § 82 vyslovuje Bolzano věty celkem správné: existuje funkce rostoucí v $[a, b]$[31]), jež je nespojitá pouze v izolovaných bodech intervalu (a, b), jichž je nekonečně mnoho. Součet „skoků" u takové funkce musí tvořit řadu konvergentní;

---

[27]) Neboť pro tyto body je $f_m(x) = f_n(x)$ pro $m > n$ a tedy též $f(x) = \lim f_m(x) = f_n(x)$.

[28]) O této podmínce viz poznámku [16]) pod čarou.

[29]) Při důkazu konvergence posloupnosti (4) odvodil Bolzano pro rozdíl $|f(x) - f_n(x)|$ odhad *nezávislý na x*, takže stejnoměrnost té konvergence vlastně implicite dokázal; na základě tohoto odhadu byl by mohl spojitost funkce $f(x)$ dokázat přímo na několika řádcích. Považuji však za jisté, že si Bolzano tuto okolnost neuvědomil; jednak by byl jinak na věc tak důležitou jistě upozornil, jednak dopustil se téže chyby už v § 39.

[30]) „Cours d'Analyse", I$^{\text{ère}}$ partie, chap. VI, § 1. První, kdo upozornil na nesprávnost této věty a ve speciálním případě správnou úvahu provedl, byl asi Abel (1826 ve slavném pojednání o binomické řadě). Obecná věta „stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí spojitých má za limitu funkci spojitou" pochází asi z let 1847—48. Též Cauchy dodatečně poznal svůj omyl a dokázal tuto větu (1853). Srovnej článek Pringsheimův, Grundlagen der allgemeinen Functionenlehre, Enzyklop. der math. Wissenschaften, II A1.

[31]) Předpoklady v koncových bodech nejsou dost jasně vysloveny.

tato podmínka odpadá, jestliže *nepožadujeme* monotonii. Důkaz je v jádru správný, v jednotlivostech místy ne zcela dokonalý.

Zde končí 1. oddíl; ohlédněme se ještě jednou po něm! Co především upoutá naši pozornost v díle Bolzanově, je jeho ryze moderní aritmetizující stanovisko. Bolzano zcela plně poznal nepřípustnost tzv. „názoru" v matematických důkazech a také jej ze svých úvah s obdivuhodnou důsledností a zdarem (uvažme, že šlo vlastně o první systematický pokus toho druhu) vymýtil.[32]) Již jeho definice spojitosti v § 2 zasluhuje uznání tím, že místo dosavadní spojitosti v *intervalu* (Cauchy) zavádí spojitost v *bodě;* jak plně si byl vědom významu této změny, je zřejmé z toho, že konstruuje v § 10 funkci, spojitou v *jediném* bodě. Další vybudování teorie spojitosti funkcí jedné proměnné obsahuje široké partie, v nichž není jediného kazu; vzpomeňme jen na §§ 19—30 (kde jsou bezvadně dokázány základní věty o spojitých funkcích); nebo vzpomeňme na neobyčejně krásnou teorii monotonních funkcí (§§ 49—59); nebo zastavme se u §§ 65—75, v nichž Bolzano tak důkladně rozebírá možnosti, jež mohou nastat u funkcí s nekonečně mnoha oscilacemi. Již jediný příklad z § 75 (Bolzanova funkce) stačí, abychom si vytvořili vysoké mínění o Bolzanově nadání pro základní otázky matematické analýzy; nevím však, nemáme-li si ještě výše nad tuto oslňující jednotlivost cenit dokonalé výstavby celku, např. v §§ 19—30, 49—59.[33])

Stejně jako ve velkých obrysech, jeví se i v podrobnostech obdivuhodný smysl Bolzanův pro čistotu metody; zvláště zřetelně jeví se to v příkladech, na nichž ukazuje různé možnosti, jež se mohou vyskytovat u spojitých funkcí. Vezměme např. § 65, v němž Bolzano konstruuje funkci spojitou v intervalu $0 \leqq x < 1$[34]), jež nabývá nekonečně mnohokrát „střídavě" hodnot 0 a 1/2. Bolzano sestrojuje tu funkci takto:

$$f(0) = 0\,,\quad f(1/2) = 1/2\,,\quad f(3/4) = 0\,,\quad f(7/8) = 1/2\,,\quad f(15/16) = 0\,,$$
$$f(31/32) = 1/2\,, \ldots\,;$$

pro $1 - 2^{-n} \leqq x \leqq 1 - 2^{-n-1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ budiž $f(x)$ lineární.
V § 66 poznamenává Bolzano: také např. funkce $g(x) = \sin\log(1 - x)$ má obdobné vlastnosti. Bolzano byl si jistě dobře vědom toho, že funkce $\sin\log(1 - x)$ by neměla žádoucí průkaznost, ježto v této knize nebyly funkce $\sin x$, $\log x$ nikde řádně definovány; proto napřed konstruuje (způsobem tehdy jistě dost neobvyklým) funkci $f(x)$ a jen mimochodem uvádí funkci $g(x)$; obdobné příklady najdeme v §§ 70 a 71.

O Bolzanově pečlivosti při definicích a o tom, jak jasně si uvědomuje dosah jednotlivých

---

[32]) Toto Bolzanovo stanovisko souvisí jistě úzce s jeho filozofickými názory o podstatě a metodách matematiky; viz např. výrazný citát, uvedený v Petrově předmluvě na str. XI—XII.

[33]) Všimněme si v těchto partiích např. toho, jak plně si Bolzano uvědomuje vliv otevřenosti a uzavřenosti intervalu!

[34]) Bod $x = 0$ jsem přidal pro zjednodušení.

předpokladů, jsme se zmínili na příslušných místech. Viděli jsme též, jak pečlivě zkoumá Bolzano všechny možnosti, jež se při spojitosti a nespojitosti funkcí mohou vyskytovat; s tím souvisí řada existenčních vět, doložených příklady (hlavně např. v §§ 65–75). Také při definicích vyskytují se u Bolzana takové existenční věty; např. dříve než definuje funkci rostoucí, ukáže na příkladě, že existují funkce, jež vlastnost v definici vytčenou vskutku mají.

Vedle těchto kladných hodnot Bolzanova díla setkali jsme se však i s několika omyly; vylučme ze svých úvah nejasné §§ 47–48, málo závažný § 64 a poslední odstavce (hlavně §§ 79–81), v nichž se Bolzano pustil do problémů, pro něž doba ještě naprosto nebyla zralá; potom zbývají nám v podstatě jen tři závažné omyly: v §§ 18, 39, 75.

Chyba v § 18 působí dojmem náhodného ochabnutí Bolzanova důvtipu; je ovšem s podivem, že Bolzano si dodatečně nesprávnost tohoto odstavce neuvědomil, zvláště když sestrojil funkci (§ 70 a 2. oddíl, § 26), která tuto nesprávnost zřejmě ukazuje.

Druhý a třetí omyl (§§ 39 a 75) mají společný základ: totiž nevytčení požadavku *stejnoměrnosti*; v § 39 postrádáme v předpokladech stejnoměrnost spojitosti, v § 75 schází v důkazu stejnoměrnost konvergence. Viděli jsme také, že chyby v §§ 39 a 75 jsou podobného rázu jako chybná úvaha, před níž Bolzano v § 12 sám tak důrazně varuje (viz též § 13); uvidíme ještě dále (2. oddíl, § 27), jak si ještě v jiném problému význam stejnoměrnosti (nebo nějakého podobného pojmu) uvědomil. Bolzano si tedy místy potřebnost nějakého pojmu toho druhu uvědomil, nepodařilo se mu však tento pojem vhodně formulovat; proto na těch místech, kde vytýká nesprávnost některých úvah, jež bez zdůvodnění postupují tak, jakoby uvažovaná spojitost byla stejnoměrná, vyjadřuje se Bolzano celkem správně (viz zvláště § 12); naopak na místech, kde by měl stejnoměrnosti buď využít nebo ji předpokládat (§ 39, § 75, 2. oddíl § 27 a jinde), buď se nezhostil svého úkolu s plným zdarem nebo na význam stejnoměrnosti vůbec zapomněl. Je myslitelné, že kdyby si byl Bolzano mohl porozprávět o svých pracích s interesovaným kolegou nebo s chápavým žákem, byl by tyto omyly buď sám nebo s jejich pomocí poznal. Je ovšem otázka, zda by byl za své nesprávné úvahy našel vhodné náhrady (hlavně u § 39 – spojitost funkcí několika proměnných – je to pochybné; důkaz Bolzanovy funkce v § 75 byl by mohl snadno provést přímo, bez okliky přes obecné věty o stejnoměrné konvergenci).

Považujeme-li tedy § 18 za náhodný omyl (jenž bohužel zkazil i několik pozdějších odstavců), vidíme, že jediným podstatným nedostatkem tohoto oddílu jsou omyly, vztahující se k pojmu stejnoměrnosti. Tyto omyly jednak způsobily jistou nedokonalost v diskusi Bolzanovy funkce (§ 75), především však znemožnily Bolzanovi správné vybudování teorie spojitých funkcí několika proměnných (vlivem § 39). Zato teorie spojitosti funkcí jedné proměnné – i když vynecháme všechny nesprávné odstavce – je vybudována u Bolzana s úplností vskutku obdivuhodnou.[35])

---

[35]) Zmínil jsem se hned na počátku o tom, že Bolzano nebyl matematický rutinér. Na méně závažných místech objevují se proto u něho někdy přehlédnutí až nepochopitelně naivní. Nemluvil jsem o nich, protože pro celek nemají význam; uvádím však aspoň dva takové

Bolzano byl si jistě vědom revoluční novosti svého díla; zajímavé je v tomto ohledu jedno místo z Úvodu (§ 2); odstavec je věcně málo zajímavý, tím zajímavější je psychologicky. Bolzano praví v něm asi toto: Funkce, jež lze vyjádřit jediným předpisem, platným pro všechna x, budeme nazývat funkcemi 1. druhu (např. $f(x) = 30x + 5$ nebo $f(x) = \sin x$ atd.); funkce, u nichž to není možné, budeme nazývat funkcemi 2. druhu (např. $f(x) = x$ pro $x < 1$, $f(x) = 2$ pro $1 \leqq x \leqq 2$, $f(x) = x^3$ pro $x > 2$). Je pochopitelně velmi důležité rozeznávat, zda funkce, o kterou jde, je prvního či druhého druhu. A na konci § 2 praví Bolzano: budeme se zabývat ne sice výhradně, ale přesto většinou jen funkcemi prvního druhu. K tomu bych poznamenal: 1. Z celého 1. oddílu je vidět, že rozdíl mezi funkcemi 1. a 2. druhu nemá pro Bolzanovy úvahy vůbec důležitost. 2. Zmiňuje-li se Bolzano někde v dalším o funkcích 1. a 2. druhu, činí to jen proto, aby zdůraznil, že jeho úvahy platí jak pro funkce 1. druhu tak pro funkce 2. druhu. 3. Zdá se mi pochybné, že by se Bolzano, tak náročný ve svých definicích, byl mohl spokojit s pojmy tak špatně vymezenými, jako jsou „funkce 1. a 2. druhu". Spíše se mi zdá[36]), že celý tento odstavec je známkou rozpaků, jež Bolzano pociťoval vida novost svých problémů a metod; na štěstí však Bolzano, jak se zdá, brzo na tyto rozpaky zapomněl a vytvořil tak dílo skutečně nové, originální, průkopnické a v mnohých částech bezvadné.

2. oddíl
Derivace

Tento oddíl, jak je již z nadpisu zřejmé, pojednává o základech diferenciálního počtu. Základní stanovisko Bolzanovo je stejné jako v 1. oddílu; podstatný je však rozdíl v provedení. Kdežto v 1. oddílu, jak jsme viděli, zhostil se Bolzano svého úkolu většinou s obdivuhodným zdarem, nalézáme v 2. oddílu pestrou směsici správných úvah i závažných omylů. Je to zcela pochopitelné, neboť důkazy, o něž se Bolzano zde pokouší, jsou většinou podstatně složitější, než v 1. oddílu; jejich dokonalé provedení bylo by vyžadovalo — vedle

---

příklady na ukázku: v § 35 tvrdí Bolzano, že funkce
$x^2 + \dfrac{1}{1-y} + \dfrac{1}{2-y} + \dfrac{1}{3-y} + \dfrac{1}{4-y} + \ldots$ je spojitou funkcí x pro každé y, vyjma pro $y = 1, 2, 3, 4, \ldots$; v 2. oddílu, § 12 praví: že ze spojitosti funkce neplyne existence derivace, vidíme na funkci $\dfrac{1}{1-x}$ pro $x=1$.

[36]) Je to ovšem jen můj osobní dojem; bylo by třeba historika, kdyby se měl nalézt pravý význam tohoto odstavce v díle Bolzanově.

hlubokého a kritického ducha — též značné „řemeslné“ zručnosti a poznamenali jsme již, že Bolzano velký rutinér nebyl; ostatně je těžko požadovat od někoho rutinu v oboru, jejž musil sám namáhavě od prvních počátků stavět.[37]) Těmito poznámkami nechci se nikterak nešetrně dotýkat obdivuhodného Bolzanova díla: stejně jako 1. oddíl je i 2. oddíl dílem průkopnickým a svrchovaně významným; Bolzano v něm ukazuje, na jakých základech je nutno vybudovat diferenciální počet a jakými metodami má se toto vybudování provést. Základní hledisko, definice, stanovisko při důkazech jsou vhodné a bez kazu; pouze provedení — místy příliš obtížné — se na četných místech nezdařilo. Z tohoto důvodu nebudu zde tento oddíl probírat odstavec za odstavcem; dostali bychom tak pouze nepřehlednou směs posudků kladných a záporných, propletených sledováním vzájemného vlivu jednotlivých omylů a nejasností. Také se necítím k tomuto složitému úkolu kompetentním: důkazy, v nichž je zdravá myšlenka, jež však obsahují kazy, nejsou proto ještě bezcenné; jejich cenu je však možno odhadnout pouze relativně, vzhledem k době a poměrům, v nichž vznikly — k tomuto úkolu je však povolán pouze historik matematiky. Omezím se proto na některá místa, jež se mi zdají být zvlášť zajímavá. Čtenář ostatně si mohl učinit úplnější představu o postupu Bolzanovy práce z referátu o 1. oddílu.

2. oddíl je opět rozdělen na odstavce (§§ 1—99). Definice derivace je obsažena v § 2, kde Bolzano opět definuje (podobně jako při spojitosti) nejenom oboustrannou derivaci, nýbrž i derivaci zprava a zleva. Diskutuje dále obšírně důsledky této definice; tak v § 12 ukazuje: má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 např. derivaci zprava, je $f(x)$ v bodě x_0 spojitá zprava[38]). Tuto větu nelze však obrátit: funkce spojitá v bodě x_0 nemusí mít v bodě x_0 derivaci. V § 19 ukazuje dokonce Bolzano, že body, v nichž spojitá „Bolzanova funkce“ (sestrojená v 1. oddílu, § 75) nemá derivaci (oboustrannou), tvoří množinu všude hustou v intervalu $[a, b]$. Další výklady o diferenciálním počtu obsahují mnoho zajímavých jednotlivostí; jak jsem již řekl, nebudu se jimi podrobně zabývat. Uvádím pouze — jako příklad — následující drobnost z teorie relativních extrémů (§§ 76—77): Pro funkci $f(x)$ mohou v bodě x_0 nastat tyto případy: 1. $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci zprava i zleva, 2. $f(x)$ nemá v bodě x_0 buď derivaci zprava nebo zleva (nebo obě). V případě 1. jsou možné tyto případy: 1a) obě derivace (zprava i zleva) mají totéž znamení, 1b) mají opačná znamení, 1c) aspoň jedna z nich se rovná nule. A Bolzano ukazuje: v případě 1a) nemůže nastat extrém, v případě 1b) musí nastat extrém, v případě 1c) a v případě 2. může, ale nemusí nastat extrém.

Nás bude hlavně zajímat, jak se Bolzano staví k základním větám diferenciálního počtu: k větě o střední hodnotě a k větě Taylorově.

Větu o střední hodnotě dokazujeme a vyslovujeme dnes takto: napřed se dokáže věta Rolleova a z ní se jednoduchou transformací obdrží věta o střední hodnotě, která zní takto:

---

[37]) Ve složitějších úvahách jistě Bolzanovi velmi vadil nedostatek vhodné symboliky a terminologie (např. ani pro absolutní hodnotu nezavádí Bolzano zvláštní značku, nýbrž vždy v textu zvlášť poznamenává, že jde o absolutní hodnotu).

[38]) Bolzano mluví (téměř vždy) jen o vlastní (tj. konečné) derivaci.

$f(x)$ nechť je spojitá v $[a, b]$ a nechť má derivaci v (a, b)[39]; potom existuje číslo c $(a < c < b)$ tak, že

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$[40]

Bolzanův důkaz probíhá podstatně jinak; je podobný důkazu Cauchyovu[41], liší se však od něho v jednom důležitém bodě. Důkaz Cauchyův probíhá asi takto: předpokládejme, že $f(x)$ je spojitá a má spojitou derivaci v $[a, b]$. *Ježto*

$$(1)\quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

lze k libovolnému kladnému číslu ε *zvolit kladné číslo* δ *tak, že*

$$\left|\frac{f(x + h) - f(x)}{h} - f'(x)\right| < \varepsilon$$

pro všechna x *intervalu* $[a, b]$ *a pro všechna* h, *pro něž* $0 < |h| \leqq \delta$. Úsudek, obsažený v této větě, je ovšem nesprávný; Cauchy v něm totiž vlastně tvrdí, že konvergence výrazu $h^{-1}(f(x + h) - f(x))$ k funkci $f'(x)$ je *stejnoměrná;* to je sice pravda (když $f'(x)$ je spojitá), ale není to samozřejmé, je třeba tuto stejnoměrnost dokázat.[42] Další postup důkazu je celkem správný a probíhá asi takto: K číslu $\varepsilon > 0$ najděme číslo $\delta > 0$ tak, jak bylo vytčeno, a rozdělme interval $[a, b]$ dělicími body $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b)$ tak, že $x_i - x_{i-1} < \delta$. Budiž A nejmenší a B největší hodnota funkce $f'(x)$ v intervalu $[a, b]$; potom je

$$A - \varepsilon \leqq f'(x_{i-1}) - \varepsilon < \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} < f'(x_{i-1}) + \varepsilon \leqq B + \varepsilon,$$

a tedy

$$(A - \varepsilon)(x_i - x_{i-1}) < f(x_i) - f(x_{i-1}) < (B + \varepsilon)(x_i - x_{i-1});$$

sečtu tyto nerovnosti pro $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ a dostanu

$$(A - \varepsilon)(b - a) < f(b) - f(a) < (B + \varepsilon)(b - a),$$

a tedy – ježto $\varepsilon > 0$ je libovolné –

---

[39]) Tato derivace smí být i nevlastní.

[40]) Dnešní forma důkazu připisuje se Bonnetovi.

[41]) Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal, 7ème leçon.

[42]) Cauchy zavádí předpoklad o spojitosti derivace až o něco později, takže vlastně i jeho tvrzení je nesprávné; podobně nemá vlastně později právo mluvit o největší a nejmenší hodnotě funkce $f'(x)$.

$$A(b - a) \leqq f(b) - f(a) \leqq B(b - a),$$
$$f(b) - f(a) = M(b - a), \quad \text{kde} \quad A \leqq M \leqq B.$$

Ježto A a B jsou hodnoty spojité funkce $f'(x)$ a ježto $A \leqq M \leqq B$, musí existovat c takové, že $f'(c) = M$ a tedy

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c) \quad (a \leqq c \leqq b).$$

Bolzano přejímá (§§ 28, 29) v podstatě tento Cauchyův důkaz; uvědomil si však Cauchyův omyl a snaží se jej v § 27 odstranit. Úkolem tohoto § 27 byl tedy vlastně důkaz oné stejnoměrné konvergence, tj. důkaz této věty:

Věta A. Jsou-li $f(x)$ a $f'(x)$ spojité v $[a, b]$[43]), potom lze ke každému $\varepsilon > 0$ nalézt $\delta > 0$ tak, že platí

$$(2) \quad \left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

jakmile je $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq x + h \leqq b$, $0 < |h| \leqq \delta$.

Této věty Bolzano skutečně dále v § 28 užívá; v § 27 vyslovuje však Bolzano místo toho větu, jejíž slovní znění je velmi složité a poněkud nejasné; je možno Bolzanově formulaci rozumět tak, že chtěl vyslovit větu A; též však je možno větu z § 27 interpretovat takto:

Věta B. Jsou-li $f(x)$ a $f'(x)$ spojité v $[a, b]$[43]), potom lze ke každému $\varepsilon > 0$ nalézt $\delta > 0$ tak, že ke každému x $(a \leqq x \leqq b)$ existuje aspoň jedno číslo h – při čemž $|h| \geqq \delta$ – tak, že

$$\left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon \quad (a \leqq x + h \leqq b).$$

Věta B praví zřejmě méně než věta A; neboť věta A zaručuje nerovnost (2) pro *všechna* $|h| \leqq \delta$[44]), kdežto věta B zaručuje nerovnost (2) popřípadě pouze pro *jediné* $|h| \geqq \delta$, při čemž toto h může být dokonce ještě závislé na x. Bolzanův důkaz v § 27 (interpretujeme-li některé drobné nejasnosti v Bolzanův prospěch) dokazuje celkem správně větu B, nikoliv však větu A. Rozhodně není tedy Bolzanův důkaz věty o střední hodnotě zcela správný: interpretujeme-li větu z § 27 jako větu A, není správný důkaz v § 27; interpretujeme-li ji jako větu B, není správný § 28, ježto Bolzano v něm pak užívá věty A. Přesto vzbuzuje Bolzanův pokus v § 27 úctu; opět zde máme případ, kdy Bolzano narazil na „stejnoměrnost" a kdy poznal, že nějakého pojmu toho druhu by bylo třeba; měli jsme ovšem též příležitost seznat (1. oddíl, § 39 a § 75), že v jiných případech Bolzano potřebnost takovýchto úvah prostě přehlédl. Bolzanův důkaz v § 27 je nepřímý; dovolím si jej zde (formálně upravený) pro jeho

---

[43]) V bodech a, b předpokládá Bolzano pouze jednostrannou derivaci.

[44]) Tedy i pro $|h| = \delta$.

zajímavost reprodukovat. Nechť pro funkci $f(x)$ platí předpoklady věty B, nikoliv však její tvrzení. Potom tedy existuje číslo $\varepsilon > 0$ a posloupnost $x_1, x_2, x_3, \ldots$ tak, že

$$(3) \quad \left|\frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h} - f'(x_n)\right| \geqq \varepsilon$$

pro všechna $|h| \geqq n^{-1}$.[45]) Budiž ξ hromadný bod posloupnosti $x_1, x_2, \ldots$ Zvolme $\delta \neq 0$ tak, že

$$\left|\frac{f(\xi + \delta) - f(\xi)}{\delta} - f'(\xi)\right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Z předpokladu spojitosti plyne existence čísla $\eta > 0$ takového, že

$$\left|\frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta} - f'(x)\right| < \varepsilon$$

pro $|\xi - x| < \eta$. Zvolme n tak, že $n^{-1} \leqq |\delta|$ a že $|\xi - x_n| < \eta$; potom platí

$$\left|\frac{f(x_n + \delta) - f(x_n)}{\delta} - f'(x_n)\right| < \varepsilon$$

ačkoliv $|\delta| \geqq n^{-1}$, což dává spor s (3).[46])

Přes obdivuhodné úsilí Bolzanovo není jeho důkaz věty o střední hodnotě – jak jsme již podotkli – zcela bezvadný; ale ani znění této věty není zcela uspokojivé. Věta o střední hodnotě je vyjádřena rovnicí

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c),$$

při čemž $f(x)$ je spojitá v $[a, b]$ a $f'(x)$ existuje v (a, b); c je vhodné číslo z intervalu (a, b). Proti tomuto modernímu znění předpokládá Bolzano navíc *spojitost* derivace a existenci derivace v koncových bodech (tento předpoklad snaží se Bolzano odstranit v § 31, ale důkaz je nesprávný); největší závadou však je, že místo nerovnosti $a < c < b$ dostává pouze $a \leqq c \leqq b$. To se jeví rušivě např. v § 80 (relativní extrémy). Budiž např. $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > > 0$ a budiž $f''(x)$ spojitá v okolí bodu x_0. Potom nastává v bodě x_0 relativní minimum, což můžeme (na základě *dnešního* znění věty o střední hodnotě) dokázat takto: Je-li $|h|$ dost malé, $h \neq 0$, platí

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h f'(x_0 + \vartheta h) \quad (0 < \vartheta < 1);$$
$$h f'(x_0 + \vartheta h) = h[f'(x_0 + \vartheta h) - f'(x_0)] = \vartheta h^2 f''(x_0 + \vartheta\vartheta' h) > 0 \quad (0 < \vartheta' < 1).$$

---

[45]) Pro stručnost nevypisuji nerovnosti, jež praví, že nesmím opustit interval $[a, b]$ – čtenář je snadno doplní.

[46]) Tento důkaz – a to ještě ve formě méně uspokojivé – zaujímá u Bolzana přes dvě tiskové strany; nový příklad pro to, s jakými potížemi musil Bolzano zápasit.

Stejně usuzuje Bolzano, nemá však k tomu práva, ježto z *jeho* znění věty o střední hodnotě plyne pouze $0 \leqq \vartheta \leqq 1$, a pro $\vartheta = 0$ by mu vyšlo $f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$.

Taylorovu větu vyslovuje Bolzano takto: Jestliže funkce $f(x)$ a všechny její derivace až do n-té jsou spojité v intervalu $[a, a + h]$, platí

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \Theta h),$$

kde $0 \leqq \Theta \leqq 1$. Důkaz provádí Bolzano indukcí (§ 82): pro $n = 1$ je to prostě věta o střední hodnotě; předpokládejme tedy, že věta platí pro $n = k - 1$ a dokažme ji pro $n = k$ (pro jednoduchost budiž $h > 0$). Na základě učiněných předpokladů je pro $0 \leqq y \leqq h$

$$f'(a + y) = f'(a) + \sum_{i=1}^{k-2} \frac{y^i}{i!} f^{(i+1)}(a) + \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(a + \Theta' y)$$

$(0 \leqq \Theta' \leqq 1)$; jestliže tedy $f^{(k)}(p)$ resp. $f^{(k)}(q)$ je nejmenší resp. největší hodnota $f^{(k)}(x)$ pro $a \leqq x \leqq a + h$, je

$$f'(a + y) - \sum_{i=0}^{k-2} \frac{y^i}{i!} f^{(i+1)}(a) - \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(p) \geqq 0,$$

$$f'(a + y) - \sum_{i=0}^{k-2} \frac{y^i}{i!} f^{(i+1)}(a) - \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(q) \leqq 0.$$

Primitivní funkce k levé straně první nerovnosti je tedy neklesající; tato primitivní funkce je však – volíme-li vhodně integrační konstantu –

$$f(a + y) - f(a) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{y^i}{i!} f^{(i)}(a) - \frac{y^k}{k!} f^{(k)}(p);$$

pro $y = 0$ je tato funkce rovna nule, pro $y = h$ je tedy nezáporná:

$$f(a + h) - f(a) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(a) - \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(p) \geqq 0$$

a obdobně obdržíme

$$f(a + h) - f(a) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(a) - \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(q) \leqq 0;$$

vzhledem ke spojitosti funkce $f^{(k)}(x)$ je tedy pro vhodné Θ $(0 \leqq \Theta \leqq 1)$

$$f(a + h) - f(a) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(a) - \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a + \Theta h) = 0.$$

Bolzano se pokouší také omezit podmínky v koncových bodech; příslušná úvaha není však správná[47]). Podmínky pro rozvinutelnost funkce v *nekonečnou* Taylorovu řadu uvádí Bolzano celkem správně, ne však ve formě zvlášť vhodné.

Bolzano mluví v 2. oddílu hojně též o funkcích několika proměnných; nebudu se však těmito úvahami zabývat, ježto většinou nejsou správné. Téměř stále opakuje se v nich chyba, které se Bolzano dopustil již při studiu spojitosti funkcí několika proměnných (1. oddíl, § 39), totiž nedbání požadavku stejnoměrnosti. Je zajímavé sledovat, jak si Bolzano místy nutnost takového požadavku uvědomuje, po několika řádcích však jej klidně opomine. Např. v § 33 snaží se dokázat větu (nesprávnou): Jestliže pro $a < x < b$ je $\lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = 0$ a existuje-li $\partial f(x, y)/\partial x$, je též $\lim\limits_{y \to 0} \partial f/\partial x = 0$ (není zcela určitě vysloveno, v kterých oborech se ty předpoklady činí). Zde praví Bolzano: Platí

$$\frac{f(x + \omega, y) - f(x, y)}{\omega} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \Omega,$$

kde $\lim\limits_{\omega \to 0} \Omega = 0$ při *pevném* x, y; levá strana konverguje současně s y k nule při *pevném* x, ω; z toho však nelze soudit, že $\lim\limits_{y \to 0} \partial f/\partial x = 0$; zcela správně! Ale dále hned nahrazuje tuto úvahu úvahou stejně nesprávnou: Platí

$$\frac{f(x + \omega, y) - f(x, y)}{\omega} = \frac{\partial f(x + \mu\omega, y)}{\partial x} \quad (0 \leqq \mu \leqq 1);$$

tedy (dodejme: při pevném x a ω) je

$$(4) \quad \lim_{y \to 0} \frac{\partial f(x + \mu\omega, y)}{\partial x} = 0;$$

ale rovněž platí (ježto $\partial f/\partial x$ je spojitou funkcí proměnné x)[48])

$$(5) \quad \lim_{\omega \to 0} \frac{\partial f(x + \mu\omega, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

(dodejme: při pevném y); z (4) a (5) pak prý plyne $\lim\limits_{y \to 0} \partial f(x, y)/\partial x = 0$ — tedy v podstatě stejná chyba jako předtím!

Doufám, že si čtenář z těchto poznámek učinil jakousi představu i o druhém oddílu Bolzanovy knihy; podrobné studium a definitivní ocenění tohoto díla je vděčným, ale jistě ne lehkým úkolem pro historika matematiky.

[47]) Podobně jako u věty o střední hodnotě v § 31.

[48]) Jak Bolzano k tomuto podivnému tvrzení přišel, není mi jasné (viz v Bolzanovi str. 119, ř. 1—3 zdola); přijměme je však za správné — třeba jako předpoklad.

V Praze, 18. března 1931.