Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössendienen

[Der binomische Lehrsatz] §1 - §75

In: Bernard Bolzano (author): Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössendienen. (German). Prag: Enders, 1816. pp. [1]--144.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400157

§. 1.

Vorerinnerung. Nach den bekannten Regeln der Multiplication läßt sich die zweyte, dritte, vierte... Potenz jeder zwey- oder mehr-theiligen Größe, wie $a + b$, oder $a + b + c + d + \ldots$ in eine Reihe auflösen, deren einzelne Glieder nichts als Potenzen der einzelnen Theile a, b, c, d, .., oder Producte aus solchen Potenzen, multiplicirt etwa noch mit einer bestimmten Zahl enthalten. Durch bloßes Multipliciren findet sich nähmlich:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^3b + 3ab^2 + b^3$,

u. s. w.

Und eben so:

$$(a+b+c+d+\ldots)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2 + \ldots,$$

$$(a+b+c+d+\ldots)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 + \ldots,$$

u. s. w.

Diese Beobachtung veranlaßt den Gedanken, ob sich nicht vielleicht allgemein jede zwey- oder auch mehrtheilige Function von der Form $(a+b)^n$, $(a+b+c+d+..)^n$, n mag was immer für eine ganze Zahl, ja wohl auch eine gebrochene, irrationale, oder negative Größe bezeichnen, in eine Reihe auflösen ließe, die wie die obigen nichts anders enthielte, als Potenzen der einzelnen Theile a, b, c, d, ..., oder Producte aus solchen Potenzen, multiplicirt allenfalls noch mit einer bloß von n abhängigen Größe. Dieß ist die Frage, mit der wir uns jetzt beschäftigen wollen. Ihre bejahende Antwort heißt in Beziehung auf eine zweytheilige Größe von der Form $(a+b)^n$ der binomische, und in Beziehung auf eine mehrtheilige von der Form $(a+b+c+d+..)^n$ der polynomische Lehrsatz.

§. 2.

Erklärung. Eine Summe von Gliedern, welche, wie die §. 1. beschriebenen, nichts als Potenzen der einzelnen Größen a, b, c, d, .., oder Producte aus solchen Potenzen, multiplicirt etwa noch mit einer von a, b, c, d, .. unabhängigen Größe enthalten, heißt eine entwickelte Function der Größen a, b, c, d, .. Dagegen Functionen, welche, wie $(a+b)^n$, Potenzen von einer Summe aus zwey oder mehrern der Größen a, b, c, d, ... und allenfalls noch einer andern Größe enthalten, heißen complexe Functionen von a, b, c, d, .. Eine Summe von Gliedern, die nach einem bestimmten Gesetze gebildet werden, wird eine Reihe genannt; besonders, wenn ihre Anzahl willkürlich vermehret werden darf.

§. 3.

Erklärung. Die Reihe

$$1+\frac{n}{1}.x+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.x^2+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.x^3+\ldots$$
$$+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-(r-1)}{r}.x^r,$$

deren erstes Glied $=1=x^0$ ist, und deren folgende — von einer willkürlich zu vermehrenden Anzahl — jedes aus dem vorhergehenden dadurch gebildet werden, daß man den Exponenten der Größe x um 1 vermehrt, den Coefficienten aber mit $\frac{n-(r-1)}{r}$ multiplicirt, wo r der schon gefundene Exponent ist, heißt man die zu der nten Potenz von $(1+x)$ gehörige Binomialreihe, oder die Binomialformel für $(1+x)^n$. Sollte erwiesen werden können, daß der Werth dieser Reihe dem Werthe der ihr entsprechenden Potenz von $(1+x)$ unter gewissen Umständen gleich kömmt: so würden wir den Ausdruck dieser Gleichheit kurz die Binomialgleichung nennen.

§. 4.

Zus. Wenn n eine ganze (positive) Zahl, und x gleichfalls positiv ist, so sind alle Glieder in dieser Reihe bis zu dem $(n+1)$ten, welches $n.\frac{n-1}{1}..\frac{n-(n-1)}{n}x^n$ $=x^n$ ist, positiv; die folgenden aber jedes für sich gleich Null.

§. 5.

Lehrsatz. Die Binomialgleichung gilt für den Werth des Exponenten $n=0, =1, =2, =3, \ldots,$

was immer x bedeute, wenn man die Reihe nur nicht abbricht, so lange r noch $<$ n ist.

Beweis. Denn unter dieser Bedingung ist der Werth der Binomialreihe, so weit man auch ihre Glieder fortsetzen mag, für $n = 0$, offenbar nur $= 1 + 0 + 0 + .. = 1$; und eben dieses ist der Werth der ihr zugehörigen Potenz von $(1 + x)$, nähmlich der Werth von $(1 + x)^0$, was immer x bedeute. Für $n = 1$ ist der Werth der Binomialreihe $= 1 + x + 0 + 0 + .. = 1 + x$, und eben dieses ist der Werth der zugehörigen, nähmlich der ersten Potenz von $(1 + x)$. Für $n = 2$ erhält die Binomialreihe den Werth $1 + 2x + x^2 + 0 + ..$, welches genau der Werth der ihr entsprechenden, d. i. der zweyten Potenz von $(1 + x)$ ist. Für $n = 3$ wird die Binomialreihe $= 1 + 3x + 3x^2 + x^3 + 0 + ..$, und dieses ist auch der Werth, den die ihr zugehörige, d. i. die dritte Potenz von $(1 + x)$ hat. U. s. w.

§. 6.

Anm. Sollte Jemand fragen, wie man auf die Form dieser so sonderbaren Reihe verfallen sey, oder doch habe verfallen können: so würden wir ihm folgenden Aufschluß geben. Aus der besondern Art, wie man beym Multipliciren verfährt, wurde bald einleuchtend, daß ein Product aus n Factoren von der Form $(1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d) \ldots$ folgender Summe gleich sey: $1 + (a + b + c + d + \ldots) + (ab + ac + ad + bc + bd + cd + ..) + (abc + abd + acd + bcd + ..)$

$+ (abcd + ..) + ...$, d. h. daß es aus folgenden Theilen bestehe: 1) aus der Einheit; 2) aus der Summe aller der Größen a, b, c, d, .. einzeln genommen; 3) aus der Summe aller Producte, die aus Vereinigung je zweyer dieser Größen gebildet werden können; 4) aus der Summe aller Producte, die durch Vereinigung je dreyer dieser Größen entstehen; u. s. w. $(n + 1)$tens endlich aus dem Producte, welches die Vereinigung sämmtlicher Größen erzeugt. Forschte man nun nach der Anzahl der Glieder, aus welchen jede der eben beschriebenen Summen gebildet ist: so war zuförderst klar, daß diese Anzahl bey der ersten, d. h. bey der Summe der einzeln genommenen Größen a, b, c, d, ... = n sey. Wie groß die Gliederzahl in jeder folgenden Summe sey, lag nicht so offen da. So viel war aber einleuchtend, daß jede so groß sey, als die Menge der Verbindungen, die unter den n Größen a, b, c, d, ... erst zu je zweyen, dann zu je dreyen, u. s. w. möglich ist, wenn jede derselben in jeder Verbindung nur einmal erscheint, und keine dieser Verbindungen einer andern in ihren Bestandtheilen gleich ist. Nannte man nun die Anzahl der Verbindungen zu je r Gliedern (wobey r eine Zahl $< n$ bedeuten mußte) $= R$; so ließ sich bald einsehen, daß die Anzahl der Verbindungen zu je $(r + 1)$ Gliedern $S = \frac{n-r}{r+1} . R$ seyn müsse. In jeder Verbindung der Größen a, b, c, d, .. zur Menge r erscheinen nähmlich nur r dieser Größen, $(n-r)$ derselben fehlen. Fügt man daher zu jeder dieser Verbindungen von den $(n-r)$ ihr fehlenden Größen eine nach der andern abwechselnd hinzu, so bildet man aus jeder vorigen Verbindung, $(n-r)$ neue zu $(r+1)$ Gliedern. Man erhält ihrer also in Allem $(n-r)$ R. Unter diesen Verbindungen zur Menge $(r+1)$ sind aber mehrere in Ansehung ihrer Bestandtheile einander völlig gleich. Ja, ein geringes Nachdenken zeigt, daß es von jeder Art $(r+1)$ gleiche gebe. Denn es ist offenbar, daß bey der befolgten Bildungsregel jede der neuen Verbindungen auf $(r+1)$ verschiedene Arten habe zu Stande kommen müssen; indem jede von den $(r+1)$ Größen, aus denen sie besteht, einmal die fehlende war, die man hinzugefügt hat. Mithin ist die Anzahl der Verbindungen, die sich in Ansehung ihrer Bestandtheile unterscheiden, d. i. $S = \frac{n-r}{r+1}$. R. War einmal dieß erkannt, so brauchte man nur die Größen a, b, c, d, .. in dem Producte $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$.. alle einander gleich, z. B. $= x$ zu setzen; so stellte dasselbe die nte Potenz von $(1+x)$ vor. Das erste Glied dieses Productes blieb bey dieser Annahme noch immer $= 1$; das zweyte aber wurde nun eine Summe eben so vieler x, als vorhin Größen a, b, c, d, .. vorhanden waren; d. h. es wurde $= n.x$. Das dritte Glied wurde eine Summe eben so vieler x^2, als man vorhin Verbindungen der Größen a, b, c, d, .. zu zweyen hatte. Nach der Formel $S = \frac{n-r}{r+1}$. R findet sich aber diese Menge, wenn man $R = n$, und $r = 1$ setzt, $= \frac{n.n-1}{2}$. Also ist das dritte Glied des Productes $= \frac{n.n-1}{1.2}.x^2$. u. s. w. Man sieht, wie man auf diese Art stets weiter schließen, und so die Reihe des §. 3. erhalten konnte. — Hieraus erhellet zugleich, daß diese Reihe den Werth von $(1+x)^n$ nicht nur für die §. 4. angeführten Werthe von n, sondern für jede ganze Zahl richtig angeben müsse. Nichts desto weniger wollen wir diese Wahrheit in den folgenden §§. noch eigends darthun; und dieß zwar darum, weil die gegenwärtige Betrachtung uns kein echt wissenschaftlicher Beweis zu seyn scheint, indem sie die zu erweisende Wahrheit aus einem fremdartigen Begriffe herleitet.

§. 7.

Lehrsatz. Wenn die Binomialgleichung bey was immer für einem bestimmten Werthe von x und n gilt: so gilt sie auch für x und n + 1, wenn man nur r groß genug nimmt.

Beweis. Zufolge der Voraussetzung soll für einen gewissen bestimmten Werth von x und n die Gleichung

$$(1+x)^n = 1 + nx + n.\frac{n-1}{2}x^2 + \ldots\ldots$$
$$+ n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\ldots\ldots\frac{n-(r-1)}{r}.x^r \ldots\ldots \odot$$

gelten, so groß man auch r annehmen mag, wenn man es nur nicht kleiner als eine gewisse Größe annimmt. Mithin wird auch, wenn man beyde Glieder dieser Gleichung durch $(1+x)$ multiplicirt,

$$(1+x)^{n+1} = 1 + nx + \ldots + n\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-(r-1)}{r}.x^r.(A)$$
$$+ x + \ldots + n\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-(r-1)}{r}.x^{r+1}\ldots(B)$$

seyn. Vereiniget man in den zwey Reihen (A) und (B), welche addirt werden sollen, die gleichen Potenzen von x:

so erscheint eine Reihe, deren erstes, zweytes, drittes, .. Glied offenbar so beschaffen ist, wie die ersten Glieder der Binomialformel für $(1+x)^{n+1}$ seyn sollen. Nähmlich $1+(n+1)x+(n+1).\frac{(n)}{2}.x^2+$ .. Um aber einzusehen, daß dieses auch bey jedem folgenden Gliede der Fall sey; bezeichne p eine ganze Zahl, die nicht $>$ r ist. Es ist dann jedes Glied in der Reihe (A), welche einerley mit der in ⊙ ist, von der Form $n.\frac{n-1}{2}..\frac{n-(p-1)}{p}.x^p$ und jedes in der Reihe (B) von der Form $n.\frac{n-1}{2}..\frac{n-(p-2)}{p-1}.x^p$: so daß man alle Glieder dieser beyden Reihen erhalten kann, wenn man in diesen zwey Formen für p nach und nach 0, 1, 2, ... r setzt. Bey einerley Werthe von p stellen diese zwey Formen diejenigen zwey Glieder vor, die in den Reihen (A) und (B) einerley Potenz von x enthalten, deren Addirung wir uns also vorgenommen haben. Sie gibt die Größe

$$n.\frac{n-1}{2}..\frac{n-(p-2)}{p-1}\left(1+\frac{n-(p-1)}{p}\right)x^p=$$

$$n.\frac{(n-1)}{2}..\frac{n-(p-2)}{p-1}.\frac{(n+1)}{p}.x^p=$$

$$(n+1)\frac{(n)}{2}\frac{(n-1)}{3}...\frac{n-(p-2)}{p}.x^p=$$

$$(n+1)\frac{n}{2}.\frac{n-1}{3}...\frac{n+1-(p-1)}{p}.x^p$$

Dieses ist nun genau die Form, die jedes Glied in der zu $(1+x)^{n+1}$ gehörigen Binomialreihe besitzen soll. Woraus wir ersehen, daß die Summe in allen ihren Gliedern, bis auf das letzte $n.\frac{n-1}{2}...\frac{n-(r-1)}{r}.x^{r+1}$ die Form der Binomialreihe für $(1+x)^{n+1}$ habe. Wenn aber, wie vorausgesetzt wird, die Reihe in ⊙, also auch die in (A) über das Glied x^r hinaus nach Belieben fortgesetzt werden darf, ohne daß man die Gleichung stört: so kann man in (A) hinter x^r noch das Glied $n.\frac{n-1}{2}\dots\frac{n-r}{r+1}.x^{r+1}$ zusetzen. Dadurch wird aber das letzte Glied in der zufindenden Summe =

$$n.\frac{n-1}{2}\dots\frac{n-(r-1)}{r}\left(1+\frac{n-r}{r+1}\right)x^{r+1}$$

$$=(n+1).\frac{n}{2}.\frac{n-1}{3}\dots\frac{n+1-r}{r+1}.x^{r+1},$$

also ebenfalls von der Form, wie es in einer Binomialreihe für $(1+x)^{n+1}$ seyn soll. Da endlich r in der Gleichung ⊙ so groß genommen werden darf, als man will, wenn man es nur nicht unterhalb einer gewissen Grenze nimmt; so wird auch in der jetzt gefundenen Reihe, welche den Werth von $(1+x)^{n+1}$ ausdrückt, $(r+1)$ so groß genommen werden können, als man nur will. Und sonach hat die gefundene Reihe durchgängig alle Eigenschaften, die man von einer Binomialreihe für $(1+x)^{n+1}$ fordert.

§. 8.

Lehrsatz. Die Binomialgleichung gilt für jeden ganzzähligen positiven Werth von n, was immer x sey, wenn man nur r nicht kleiner nimmt als n.

Beweis. Zufolge §. 5 gilt diese Gleichung, was immer x sey, für $n=1$, $n=2$, u. s. w. Also gilt eben diese Gleichung zufolge §. 6 auch für $n=2+1=3$. Und daher zufolge eben dieses §. auch für $n=3+1=4$.

u. s. w. Diese Art zu schließen kann man stets weiter fortsetzen, und durch die wiederholte Vermehrung einer ganzen Zahl um 1 kann man zu jeder höhern gelangen. Also gilt die Binomialgleichung für jede ganze Zahl, wenn man nur r gehörig annimmt. Daß es nun hinlänglich sey, wenn man nur r nicht $<$ n seyn läßt, erhellet so. Jeder Werth von r, der nicht $<$ n seyn soll, muß entweder $=$ n, oder $>$ n seyn. Nun ist, wenn man $r = n$ nimmt, das letzte Glied der Reihe $= n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \ldots \frac{n-(n-1)}{n} \cdot x^n = x^n$. Das nächstfolgende aber, wenn man sie fortsetzte, wäre $= n \cdot \frac{n-1}{2} \ldots \frac{n-n}{n+1} \cdot x^{n+1} = 0$; und folglich wäre auch jedes später folgende $= 0$, weil es durch bloße Multiplication aus dem vorhergehenden entsteht. (§ 3) Da also alle spätern Glieder $= 0$ sind, so kann die Gleichung, man mag sie setzen oder weglassen, nicht gestört werden.

§. 9.

Anm. Hier ist erwiesen, daß die Binomialgleichung gelte, wenn man r nur nicht $<$ n nimmt. Daraus folgt aber noch nicht der umgekehrte Satz, daß sie, wenn man r $<$ n nimmt, nicht gelte. Dieß kann auch nicht bloß aus dem Umstande gefolgert werden, weil die Glieder, die man da wegläßt, nicht jedes für sich $= 0$ sind; denn darum könnten es doch etliche zusammen seyn. Und in der That läßt sich für jedes bestimmte n ein Werth von x angeben, bey dem die Summe etlicher Glieder von der Form

$$n \cdot \frac{n-1}{2} \ldots \frac{n-p+1}{p} \cdot x^p + n \cdot \frac{n-1}{2} \ldots \frac{n-p}{p+1} \cdot x^{p+1} + \ldots + x^n = 0$$

ist. Hieraus ersieht man also, daß es sogar ein **falscher Satz** wäre, wenn man behaupten wollte, daß die Binomialreihe jederzeit bis zu dem Gliede x^n fortgesetzt werden müsse.

§. 10.

Lehrsatz. Der binomische Lehrsatz gilt für jede **ganze positive Zahl** des Exponenten.

Beweis. Setzt man in die Gleichung des §. 7. $x = \frac{b}{a}$, so können a, b was immer für Größen bedeuten, und es ist allemahl

$$(1 + x)^n = \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{b}{a} + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \ldots$$

$$+ n \cdot \frac{n-1}{2} \ldots \frac{n-(r-1)}{r} \cdot \frac{b^r}{a^r},$$ wenn nur n eine ganze positive Zahl ist. Mithin ist auch

$$a^n\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = (a + b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} b +$$

$$n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot a^{n-2} b^2 + \ldots + n \cdot \frac{n-1}{2} \ldots \frac{n-(r-1)}{r} \cdot a^{n-r} b^r.$$

Auf diese Art also läßt sich die zweytheilige Größe $(a + b)^n$, wenn n eine ganze positive Zahl ist, in eine Reihe von lauter Potenzen der einzelnen Theile, und von Producten aus solchen Potenzen, multiplicirt zuweilen noch mit einer bloß von n abhängigen Größe auflösen. Dieses ist nun der binomische Lehrsatz für eine ganze positive Zahl des Exponenten. (§. 1.)

§. 11.

Zusatz. Wenn man, um zu versuchen, ob die Binomialgleichung nicht etwa **allgemein**, d. h. auch für jeden negativen, gebrochenen und irrationalen Exponenten gelte, in der Reihe des §. 3, $n = -1$ nimmt; so erhält man folgende: $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \pm x^r$, wo bey dem letzten Gliede das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem r gerade oder ungerade ist. Diese Reihe nun müßte, wenn die Binomialgleichung auch für den Werth $n = -1$ gälte, $= (1+x)^{-1}$ seyn. Allein $(1+x)^{-1}$ ist nach den Regeln der Division $= \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \pm \frac{x^r}{1+x}$; ein Ausdruck, der dem vorigen am Werthe offenbar nur in dem einzigen Falle gleich ist, wenn $x = 0$; indem $\frac{x^r}{1+x}$ nie $= x^r$ seyn kann, es sey denn $x = 0$. Aus diesem Beyspiele ersehen wir daher, daß die Binomialgleichung keineswegs für jeden Werth von n und x gelte.

§. 12.

2. Zusatz. Ist aber x ein echter Bruch, so tritt der merkwürdige Umstand ein, daß die Binomialreihe $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \pm x^r$ bloß durch hinlängliche Vermehrung ihrer Glieder dem Werthe von $(1+x)^{-1}$ so nahe gebracht werden kann, als man nur will. Denn der Unterschied zwischen beyden ist $x^r - \frac{x^r}{1+x} = \frac{x^{r+1}}{1+x}$, welches, wenn x ein echter Bruch ist, kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden kann, wenn man r groß genug nimmt. Denn ist $x < +1$, so wird $\frac{1}{x} = (1+u)$ seyn, wo u eine positive Größe bezeichnet. Soll nun $\frac{x^{r+1}}{1+x} <$ als z. B. D werden; so nehme man nur einen

Werth für $r > \frac{\frac{1}{D(1+x)} - 1}{u} - 1$, so ist $r + 1 > \frac{\frac{1}{D(1+x)} - 1}{u}$ und $(r+1)u > \frac{1}{D(1+x)} - 1$ oder $1 + (r+1)u > \frac{1}{D(1+x)}$ Aber nach §. 7 ist $(1+u)^{r+1} = 1 + (r+1)u + (r+1)\frac{r}{2}u^2 + .. > 1 + (r+1)u$. Also um so mehr $(1+u)^{r+1} > \frac{1}{D(1+x)}$ Also $\frac{1}{(1+u)^{r+1}} = x^{r+1} < D(1+x)$. Also $\frac{x^{r+1}}{1+x} < D$. Fast eben so wird der Beweis geführt, wenn x negativ ist. So oft also x eine Größe bezeichnet, die $< \pm 1$ ist; so gilt die Binomialgleichung auch für den Werth $n = -1$, zwar nicht genau, aber der Unterschied kann doch kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden, wenn man r, d. h. die Menge der Glieder groß genug nimmt.

§. 13.

Uibergang. Da es nun zum Behufe **praktischer Berechnungen** gleichgiltig ist, ob ein gefundener Ausdruck den Werth einer gesuchten Größe **vollkommen genau**, oder nur so nahe ausdrücke, daß man den Unterschied nach Belieben verringern kann; da ferner solche Gleichungen, die zwar nicht völlig genau, aber doch dann gelten, wenn man auf einer Seite sich noch eine Größe hinzugesetzt denkt, die kleiner als jede gegebne werden kann, auch **in der Wissenschaft** als Hilfsmittel zur Erfindung wichtiger Wahrheiten benützt werden können: so müssen wir ihnen auch hier eine genauere Aufmerksamkeit schenken. Da wir im vorigen §. ein Beyspiel gehabt, daß die Binomialgleichung auch in einem Falle, in dem sie nicht genau gilt, dennoch auf die Art gelte, daß man sich zu dem einen Gliede der Gleichung eine Größe hinzugesetzt denkt, die kleiner als jede gegebne werden kann: so entspringt hieraus die Vermuthung, daß es dergleichen Fälle wohl mehrere gebe. Wir setzen uns daher die Untersuchung vor: „Welches sind die sämmtli„chen Werthe, die n und x annehmen können, damit die „Binomialgleichung entweder völlig genau, oder doch dann „bestehe, wenn zu dem einen Gliede noch eine Größe hin„zugesetzt wird, die kleiner als jede gegebene werden „kann?" Da aber Jemand vermeinen könnte, daß unsre obige Binomialformel (§. 3.) vielleicht gar nicht der Ausdruck sey, der sich zu unserm gegenwärtigen Vorhaben am besten schickt, d. h. daß sich vielleicht eine andere nach den Potenzen von x entwickelte Function erfinden ließe, welche den Werth von $(1+x)^n$ für mehrerley Werthe von n und x angeben würde: so wollen wir erst nachfolgende Frage erörtern: „Welches ist die allgemeinste Form „einer nach den Potenzen von x entwickelten Reihe, wel„che dem Werthe der complexen Function $(1+x)^n$ für „möglichst vielerley Werthe von n und x entweder völlig „gleich, oder doch so nahe kömmt, als man verlangt?" Unter den möglichst vielerley Werthen von x wollen wir aber für jetzt nur solche verstehen, die zwischen Null und einer andern möglichst großen positiven oder negativen Grenze liegen, so daß die Gleichung allemahl, anzufangen von einem gewissen Werthe von x für alle kleinern abwärts gelte. Denn eben die kleiner und immer kleiner werdenden Werthe von x sind es vornehmlich, auf welchen die Brauchbarkeit einer Gleichung dieser Art beruhet. — Zuförderst müssen wir jedoch einige Lehnsätze voraus schicken.

§. 14.

Willkürlicher Satz. Eine Größe zu bezeichnen, die kleiner als jede gegebene werden kann, wählen wir das Zeichen ω, Ω, oder sonst ein ähnliches.

§. 15.

Lehnsatz. Wenn jede der Größen ω, $\overset{(1)}{\omega}$, $\overset{(2)}{\omega}$, $\ldots \overset{(m)}{\omega}$, so klein werden kann, als man nur immer will, während ihre (endliche) Menge sich nicht ändert: so ist auch ihre algebraische *Summe* oder *Differenz* eine Größe, die so klein werden kann, als man nur immer will; d. h. $\omega \pm \overset{(1)}{\omega} \pm \overset{(2)}{\omega} \pm \ldots \pm \overset{(m)}{\omega} = \Omega$.

Beweis. Denn soll die *Summe* dieser Größen $< D$ werden, wo D irgend eine endliche Größe bezeichnet; so nehme man, wenn ihre unveränderliche Anzahl n ist, jede derselben nur $< \frac{D}{n}$, welches der Voraussetzung zufolge möglich seyn soll. Dann wird gewiß $\omega \pm \overset{(1)}{\omega} \pm \overset{(2)}{\omega} \pm \ldots \pm \overset{(m)}{\omega} < D$ seyn; selbst wenn die Glieder dieser Summe alle positiv seyn sollten; um desto mehr in jedem andern Falle.

§. 16.

Zusatz. Also ist auch $(A+\omega)\pm(B+\overset{(1)}{\omega})\pm(C+\overset{(2)}{\omega})$ $\pm\ldots\pm(R+\overset{(r)}{\omega})=A\pm B\pm C\ldots\pm R+\Omega$, wenn die Menge dieser Glieder sich nicht ändert, während $\omega, \overset{(1)}{\omega}, \ldots \overset{(r)}{\omega}$ so klein werden können, als man nur immer will. Denn es ist eigentlich $(A+\omega)\pm(B+\overset{(1)}{\omega})\pm(C+\overset{(2)}{\omega})+\ldots\pm(R\pm\overset{(r)}{\omega})$

$$=A\pm B\pm C\pm\ldots\pm R+(\omega\pm\overset{(1)}{\omega}\pm\overset{(2)}{\omega}\pm\ldots\pm\overset{(r)}{\omega})=A\pm B$$
$$\pm C\pm\ldots\pm R+\Omega$$ (§. 15.)

§. 17.

Lehnsatz. Jedes Product aus einer Größe, die unverändert bleibt, in eine andere, die kleiner als jede gegeben werden kann, kann auch selbst kleiner als jede gegebene Größe werden. D. h. $A.\omega=\Omega$.

Beweis. Denn soll $A.\omega<D$ werden, so nehme man nur $\omega<\frac{D}{A}$.

§. 18.

Lehnsatz. Es ist $(A+\omega)(B+\overset{(1)}{\omega})=A.B+\Omega$.

Beweis. Denn $(A+\omega)(B+\overset{(1)}{\omega})=A.B$ $+\omega.B+\overset{(1)}{\omega}A+\omega.\overset{(1)}{\omega}=AB+\Omega$. (§. 17. 15.)

§. 19.

Lehnsatz. Es ist $\frac{A+\omega}{B+\overset{(1)}{\omega}}=\frac{A}{B}+\Omega$.

Beweis. Denn nach den Regeln der Division ist $\frac{A+\omega}{B+\overset{1}{\omega}} = \frac{A}{B} + \frac{B\omega - A\overset{1}{\omega}}{B^2+B.\overset{1}{\omega}}$ Aber $\frac{B\omega - A\overset{1}{\omega}}{B^2+B.\overset{1}{\omega}}$ ist, wenn $B.\overset{1}{\omega}$ positiv ist, offenbar $< \frac{B\omega - A\overset{1}{\omega}}{B^2}$, welches nach §. 17 und 15 so klein werden kann, als man nur will; um so gewisser also kann es $\frac{B\omega - A\overset{1}{\omega}}{B^2 + B\overset{1}{\omega}}$ werden. Ist aber $B.\overset{1}{\omega}$ negativ, so nehme man, um $\frac{B\omega - A\overset{1}{\omega}}{B^2 + B.\overset{1}{\omega}} < D$ zu machen, erst einen Werth für $\omega < \frac{D\,(B^2 + B.\overset{1}{\omega})}{2\,B} = \frac{D\,(B+\overset{1}{\omega})}{2}$; so wird auch $\frac{B\omega}{B^2+B.\overset{1}{\omega}} < \frac{D}{2}$ seyn. Wird nun $\overset{1}{\omega}$ noch immer kleiner; so wächst $B^2 + B.\overset{1}{\omega}$, also nimmt $\frac{B\omega}{B^2+B.\overset{1}{\omega}}$ ab, und bleibt daher um so gewisser $< \frac{D}{2}$. Nun nehme man ferner $\overset{2}{\omega} < \overset{1}{\omega}$ und zugleich $< \frac{B^2\,D}{2\,A - BD}$; so wird, wenn anders D so klein, daß $B\,D < 2\,A$ auch $\frac{A\overset{2}{\omega}}{B^2+B\overset{2}{\omega}} < \frac{D}{2}$; folglich $\frac{B\omega - A\overset{2}{\omega}}{B^2+B\overset{2}{\omega}}$ gewiß $< D$.

§. 20.

Lehnsatz. Jede positive (ganze oder gebrochene) Potenz einer Größe, die so klein werden kann, als man nur will, kann selbst so klein werden, als man nur will.

Beweis. Es seyen p und q was immer für ganze positive Zahlen (die Einheit selbst nicht ausgeschlossen); so stellt $\omega^{\frac{p}{q}}$ was immer für eine positive (ganze oder gebrochene) Potenz der ω vor. Soll nun $\omega^{\frac{p}{q}} < D$ werden, so nehme man nur ω kleiner als die Zahl $D^{\frac{q}{p}}$; so wird gewiß auch (wenn man Kleineres mit Kleinerem multipliciret) $\omega^2 < D^{\frac{2q}{p}}$; folglich (aus eben dem Grunde auch wieder $\omega^3 < D^{\frac{3q}{p}}$; u. s. w. Hieraus ersieht man nun, daß (weil p eine ganze positive Zahl ist) $\omega^p < D^q$ seyn müsse. Daraus folgt aber weiter, daß auch $\omega^{\frac{p}{q}} < D$ sey. Denn $\omega^{\frac{p}{q}}$ kann einmahl nicht $= D$ seyn, weil sonst auch $\omega^p = D^q$ befunden würde. Noch weniger kann $\omega^{\frac{p}{q}} > D$ seyn; weil man sonst (durch wiederholtes Multipliciren, wie vorhin) $\omega^p > D^q$ erhielte. Also muß $\omega^{\frac{p}{q}} < D$ seyn.

§. 21.

Zusatz. Also kann auch $\overset{(1)}{A}\,\omega^{\alpha} + \overset{(2)}{B}\,\omega^{\beta} + \ldots + \overset{(r)}{R}\,\omega^{\varrho}$ kleiner als jede gegebene Größe werden, wenn

$\overset{(1)}{\alpha}, \overset{(2)}{\alpha}, \ldots \overset{(r)}{\alpha}$ jede für sich so klein werden können, als man nur will, wenn ferner die Exponenten $\alpha, \beta, \ldots \varrho$ alle positiv, und sowohl sie, als auch die Coefficienten A, B, .. R, und die Anzahl der Glieder selbst sich nicht verändert. (§. 20. 17. 15.)

§. 22.

Lehnsatz. Jedes Product aus einer beliebig zu vermehrenden Anzahl echter Brüche, die alle kleiner als ein gegebener bleiben, läßt sich durch die Vermehrung seiner Factoren kleiner als jede gegebene Größe machen.

Beweis. Denn sind alle diese Brüche, deren Anzahl r heißen mag, kleiner als der gegebene x; so ist auch ihr Product kleiner, als was herauskömmt, wenn man statt jedes den Bruch x setzt, d. h. $< x^r$. Da aber x ein echter Bruch ist, so muß $x = \frac{1}{1+u}$ seyn, wo u eine positive Größe vorstellt. Es ist also $x^r = \left(\frac{1}{1+u}\right)^r$; und dieß wird $< D$, sobald man $r > \frac{\frac{1}{D}-1}{u}$ nimmt. Denn dann ist $r.u > \frac{1}{D} - 1$; $1 + ru > \frac{1}{D}$. Allein $(1+u)^r = 1 + r.u + r.\frac{r-1}{2}.u^2 + \ldots + u^r$ (§. 8.) ist gewiß $> 1 + ru$ (§. 4). Also um so gewisser $(1+u) > \frac{1}{D}$ folglich $\frac{1}{(1+u)^r} = x^r < D$. Um so gewisser also jenes Product aus den r Brüchen $> D$.

§. 23.

Lehnsatz. Die Größe $\frac{(x+\omega)^n - x^n}{\omega}$ kann dem Werthe $n x^{n-1}$ so nahe gebracht werden, als man nur immer will, wenn man ω klein genug nimmt; n und x mögen bedeuten, was sie wollen, wenn nur x nicht $= 0$ ist: D. h. $\frac{(x+\omega)^n - x^n}{\omega} = n x^{n-1} + \Omega$.

Beweis. Wir setzen der Kürze wegen voraus, daß ω positiv sey, weil der Beweis für den entgegengesetzten Fall fast auf ganz gleiche Art geführet wird, und wir den Satz hier nur für den einen Fall brauchen. 1. Für $n = 0$, ist er für sich klar. 2. Es sey denn also zweytens n positiv, und zwar $= \frac{p}{q}$, wo p und q zwey ganze Zahlen vorstellen (die Einheit selbst nicht ausgeschlossen). Nun ist

$$(x+\omega)^n = (x+\omega)^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{p}{q}}\left(1+\frac{\omega}{x}\right)^{\frac{p}{q}}$$

wenn x nicht $= 0$ ist. Die Größe $\left(1+\frac{\omega}{x}\right)^{\frac{p}{q}}$ muß nothwendig > 1 seyn. Denn sie kann erstlich nicht $= 1$ seyn, weil sonst auch $\left(1+\frac{\omega}{x}\right)^p = 1 + p\frac{\omega}{x} + .. = 1^q = 1$ seyn müßte, gegen §. 4. Noch weniger kann $\left(1+\frac{\omega}{x}\right)^{\frac{p}{q}} < 1$ z. B. $= \frac{1}{1+u}$ seyn, wann u eine positive Größe vorstellt. Denn es müßte da

$\left(1+\frac{\omega}{x}\right)^p = \left(\frac{1}{1+u}\right)^q = \frac{1}{(1+u)^q}$ seyn. Allein

$\left(1+\frac{\omega}{x}\right)^p$ ist, nach §. 4, >1; $\frac{1}{(1+u)^q}$ aber aus eben dem Grunde <1. Es ist daher gewiß $\left(1+\frac{\omega}{x}\right)^{\frac{p}{q}}=1+v$, wo v eine positive Größe vorstellt. Ich behaupte nun, diese kann so klein werden, als man nur immer will, wenn man ω klein genug nimmt. Denn soll z. B. $v=\left(1+\frac{\omega}{x}\right)^{\frac{p}{q}}-1<D$ werden; so ist nur nöthig, daß $\left(1+\frac{\omega}{x}\right)^{\frac{p}{q}}<1+D$, oder $\left(1+\frac{\omega}{x}\right)^p<(1+D)^q$ d. i. (nach §. 8.)

$$1+p\frac{\omega}{x}+p\frac{p-1}{2}\left(\frac{\omega}{x}\right)^2+\ldots$$

$$+\left(\frac{\omega}{x}\right)^p<(1+D)^q, \text{ oder}$$

$$\frac{\omega}{x}\left(p+p\frac{p-1}{2}\left(\frac{\omega}{x}\right)+\ldots+\left(\frac{\omega}{x}\right)^{p-1}\right)<(1+D)^q-1$$

werde. Findet nun dieses Verhältniß für einen gewissen Werth von ω noch nicht Statt; so nehme man nur einen neuen Werth $\overset{1}{\omega}$, der $<\omega$, und

$$<\frac{(1+D)^q-1}{\frac{1}{x}\left(p+p\frac{p-1}{2}\left(\frac{\omega}{x}\right)+\ldots+\left(\frac{\omega}{x}\right)^{p-1}\right)}$$

ist. So wird

$$\frac{\overset{1}{\omega}}{x}\left(p+p\frac{p-1}{2}\frac{\omega}{x}+\ldots+\left(\frac{\omega}{x}\right)^{p-1}\right)<(1+D)^q-1;$$

um so gewisser also, wenn man statt ω das kleinere $\overset{1}{\omega}$ setzt:

$$\frac{\overset{1}{\omega}}{x}\left(p+p\frac{p-1}{2}\frac{\overset{1}{\omega}}{x}+\ldots+\left(\frac{\overset{1}{\omega}}{x}\right)^{p-1}\right)<(1+D)^q-1$$

und also $\left(1+\frac{\omega}{x}\right)^{\frac{p}{q}} - 1 < D$ seyn. Folglich stellt in der Gleichung $\left(1+\frac{\omega}{x}\right)^{\frac{p}{q}} = 1+v$, v eine Größe vor, die kleiner als jede gegebene werden kann. Nun ist

$$\left(1+\frac{\omega}{x}\right)^{p} = (1+v)^{q}, \text{ oder}$$

$$1+p\frac{\omega}{x}+p\frac{p-1}{2}\left(\frac{\omega}{x}\right)^{2}+\dots$$

$$+\left(\frac{\omega}{x}\right)^{p} = 1+qv+q\frac{q-1}{2}v^{2}+\dots+v^{q}.$$ Also

$$\frac{\omega}{x}\left(p+p\frac{p-1}{2}\frac{\omega}{x}+\dots+\left(\frac{\omega}{x}\right)^{p-1}\right)$$

$$= v\left(q+q\frac{q-1}{2}v+\dots+v^{q-1}\right)$$

Da aber $(x+\omega)^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{p}{q}}(1+v-1) = x^{\frac{p}{q}}\,v$;

so erhält man $\frac{(x+\omega)^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{\omega} = x^{\frac{p}{q}}\cdot\frac{v}{\omega} =$

$$x^{\frac{p}{q}-1}\left(\frac{p+p\frac{p-1}{2}\frac{\omega}{x}+\dots+\left(\frac{\omega}{x}\right)^{p-1}}{q+q\frac{q-1}{2}v+\dots+v^{q-1}}\right).$$ Die Größe

innerhalb der Klammern kann nach §. 21 und 19 dem Werthe $\frac{p}{q}$ so nahe kommen, als man nur will, wenn man ω, und mithin auch v klein genug nimmt. Also kömmt nach §. 17 auch der Werth des ganzen Ausdruckes dem Werthe $\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$ so nahe als man will.

3. Wenn drittens n eine negative Größe bedeutet, so ist bey einerley Bezeichnungen wie vorhin,

$$(x+\omega)^{n} = (x+\omega)^{\frac{-p}{q}} = x^{\frac{-p}{q}}(1+\frac{\omega}{x})^{\frac{-p}{q}}$$

$$= x^{\frac{-p}{q}}(1+v)^{-1}.$$ Es findet sich daher

$$\frac{(x+\omega)^{\frac{-p}{q}} - x^{\frac{-p}{q}}}{\omega} =$$

$$= -x^{\frac{-p}{q}-1}\left(\frac{\left(p+p\frac{p-1}{2}\frac{\omega}{x}+\ldots+\left(\frac{\omega}{x}\right)^{p-1}\right)}{\left(q+q\frac{q-1}{2}v+\ldots+v^{q-1}\right)}\right)\frac{1}{1+v},$$

welches nach §. 19, 21 dem Werthe $-\frac{p}{q}x^{\frac{-p}{q}-1}$ so nahe kömmt, als man nur will.

4. Ist endlich n irrational, so gibt es allemahl einen (positiven oder negativen) Bruch $\frac{p}{q}$, der n so nahe kömmt, als man verlangt. Dann aber folgt aus der Erklärung des Begriffes einer irrationalen Potenz daß die Größe $a^{\frac{p}{q}}$ den Werth der a^{n} so nahe angebe, als man nur will, wenn $\frac{p}{q}$ dem Werthe n so nahe tritt, als man will. Es muß daher $(x+\omega)^{n} = (x+\omega)^{\frac{p}{q}} + \Omega$, und $x^{n} = x^{\frac{p}{q}} + \overset{1}{\Omega}$ seyn, wo Ω, $\overset{1}{\Omega}$ bey einerley x und ω (bloß durch Veränderung von $\frac{p}{q}$) so klein werden können, als man nur will. Also wird auch in

$\frac{(x+\omega)^n - x^n}{\omega} = \frac{(x+\omega)^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{\omega} + \frac{\Omega - \overset{1}{\Omega}}{\omega}$ das Glied $\frac{\Omega - \overset{1}{\Omega}}{\omega}$ nach §. 15 und 17 so klein werden können, als man nur will. Aber $\frac{(x+\omega)^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{\omega}$ kömmt nach dem eben Erwiesenen dem Werthe $\frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$ so nahe, als man will; also nach §. 18 auch dem Werthe $n x^{\frac{p}{q}-1}$, oder nx^{n-1}. Folglich ist (§. 15) $\frac{(x+\omega)^n - x^n}{\omega} = nx^{n-1} + \overset{2}{\Omega}$.

§. 24.

Zusatz. Die Differenz $(x+\omega)^n - x^n$ also kann, wenn x nicht $= 0$ ist, und ω so klein werden kann, als man nur will, gleichfalls so klein werden, als man nur will. Denn sie ist $= n x^{n-1} \omega + \omega \Omega$. (§. 17. 15.)

§. 25.

Lehnsatz. Wenn in der Reihe $Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + .. + Rx^{\varrho} + S$, in der sich nur x ändert, der Exponent α der größte positive ist; so gibt es allemahl einen Werth von x, für den und alle größeren das Glied Ax^{α} größer als die Summe aller übrigen ($Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + .. + Rx^{\varrho} + S$) ist.

Beweis. Da α der größte positive Exponent seyn soll, so enthält die Reihe $\frac{B}{A}x^{\beta-\alpha} + \frac{C}{A}x^{\gamma-\alpha} + .. + \frac{R}{A}x^{\varrho-\alpha}$

$+ \frac{S}{A} x^{-\alpha}$, welche durch Division der $(Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots + Rx^{\varrho} + S)$ mit Ax^{α} entsteht, nur lauter negative Exponenten. Ist nun der kleinste aus ihren $= -\mu$, so ist für jeden Werth von x, der > 1 ist, $x^{-\mu} = \frac{1}{x^{\mu}}$ gleich oder größer als jede der Größen $x^{\beta-\alpha}$, $x^{\gamma-\alpha}, \ldots x^{\varrho-\alpha}, x^{-\alpha}$; gleich, wenn ihr Exponent derselbe ist mit μ, und größer, wenn er größer ist. Sey nähmlich einer dieser größeren $= -\mu - \pi$, und $x = 1 + u$, wo u eine positive Größe vorstellt: so erhellet, wie im §. 24 n.°2, daß so wohl $(1+u)^{\mu}$, als auch $(1+u)^{\pi} > 1$; daher $(1+u)^{\mu+\pi}$ sicher $> (1+u)^{\mu}$; also $\frac{1}{(1+u)^{\mu+\pi}} = x^{-\mu-\pi} < \frac{1}{(1+u)^{\mu}} = x^{-\mu}$. Wenn ferner der größte unter den Coefficienten $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \ldots \frac{R}{A}, \frac{S}{A}$, $= M$ ist; so drückt $M \cdot x^{-\mu}$ eine Größe aus, die gleich oder größer als jede der $\frac{B}{A} x^{\beta-\alpha}$, $\frac{C}{A} x^{\gamma-\alpha}, \ldots \frac{R}{A} x^{\varrho-\alpha}$, $\frac{S}{A} x^{-\alpha}$ ist; und wenn die Menge dieser Größen n, so ist gewiß $n M x^{-\mu} > \left(\frac{B}{A} x^{\beta-\alpha} + \frac{C}{A} x^{\gamma-\alpha} + \ldots + \frac{R}{A} x^{\varrho-\alpha} + \frac{S}{A} x^{-\alpha}\right)$. Daher bedarf es nur, daß man ein $x > 1$, und $=$ oder $> \sqrt[\mu]{n M}$ wähle; so ist $x^{\mu} =$ oder $> n M$; also $1 =$ oder $> n M x^{-\mu}$; folglich

$$1 > \left(\frac{B}{A}x^{\beta-\alpha} + \frac{C}{A}x^{\gamma-\alpha} + \ldots + \frac{R}{A}x^{\varrho-\alpha} + \frac{S}{A}x^{-\alpha}\right),$$

und $A\,x^{\alpha} > (B\,x^{\beta} + C\,x^{\gamma} + \ldots + R\,x^{\varrho} + S)$.

§. 26.

Lehnsatz. Wenn eine Function $F(r)$, deren veränderliche Größe r nur eines ganzzähligen (positiven oder negativen) Werthes fähig ist, für jeden dieser Werthe nur eine endliche Menge von Werthen, darunter aber nie den der Null annimmt; und es soll gleich wohl möglich seyn, daß diese Function kleiner als jede gegebene Größe werde: so kann sie dieses nur dadurch, daß man den Werth von r über jede gegebene Grenze hinaus vergrößert.

Beweis. Weil die Werthe von r immer nur eine ganze Zahl seyn sollen: so gibt es innerhalb je zwey gegebener Grenzen nur eine endliche Menge derselben, und also auch, weil $F(r)$ für jeden Werth von r nur eine bestimmte Menge von Werthen annimmt, nur eine endliche Menge der Werthe von $F(r)$. Also muß einer aus ihnen der kleinste, oder doch so klein seyn, daß es unter ihnen schon keinen kleineren gibt. Da aber dieser Werth gleichwohl nicht Null seyn soll; so ist er auch nicht kleiner als jede gegebene Größe, nähmlich nicht kleiner, als er selbst. Sollen daher die Werthe von $(F)r$ kleiner als jede gegebene Größe werden können, so muß es noch kleinere geben, als es diejenigen sind, die diese Function innerhalb der festgesetzten Grenzen von r annimmt; d. h. man muß r außerhalb dieser Grenzen nehmen.

§. 27.

L e h n s a t z. Wenn in der Gleichung $A + \omega = B + \overset{1}{\omega}$, die Größen ω, $\overset{1}{\omega}$ so klein werden können, als man nur immer will, während A und B unverändert bleiben: so muß genau $A = B$ seyn.

B e w e i s. Denn wären A und B ungleich, so müßte eine derselben, z. B. A, die größere seyn. Man hätte also $A = B + D$, wo D eine unveränderliche Größe wäre, weil A, B selbst unveränderlich sind. Es wäre also auch $B + D + \omega = B + \overset{1}{\omega}$; woraus $D = \overset{1}{\omega} - \omega$. Und sonach könnte $\overset{1}{\omega} - \omega$ nicht kleiner als jede gegebene Größe, (nähmlich nicht kleiner als D) werden, gegen §. 15.

§. 28.

L e h n s a t z. Wenn eine Gleichung von der Form $A + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots + Rx^{\rho} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x^{\mathfrak{b}} + \mathfrak{C}x^{\mathfrak{c}} + \ldots \mathfrak{R}x^{\mathfrak{r}}$ in welcher nirgends eine c o m p l e x e Function von x erscheint, unter den Exponenten aber keiner einem auf eben derselben Seite gleich ist, entweder für alle Werthe von x, oder doch für alle, die kleiner, als ein gewisser sind, bestehen soll: so muß es zu jedem Gliede auf der einen Seite ein v ö l l i g g l e i c h e s (d. i. eines, das einen gleichen Exponenten und Coefficienten hat) auch auf der andern geben; d. h. die Gleichung muß i d e n t i s c h seyn.

B e w e i s. 1. Man setze zuförderst, es sey auf keiner Seite ein n e g a t i v e r Exponent, wohl aber mag auf der einen sich ein constantes Glied $\mathfrak{A}$ befinden: so nähert sich nach §. 21 die Größe rechter Hand des Gleichheitszeichens dem Werthe $\mathfrak{A}$ so sehr, als man nur immer will, wenn man x klein genug nimmt. Die Größe linker Hand aber würde wenn sich hier kein constantes Glied befände, kleiner als jede gegebene Größe werden. Die Gleichung könnte also nach §. 27 keineswegs bestehen. Wir müssen daher annehmen, daß wenn sich auf der einen Seite ein constantes Glied $\mathfrak{A}$ befindet, auch auf der andern eines, und zwar ein gleiches sey. Also ist $\mathfrak{A} = A$. Zieht man nun diese zwey einander gleich befundenen Glieder zu beyden Seiten der gegebenen Gleichung ab, und dividirt sodann mit derjenigen Potenz von x, welche jetzt in dem niedrigsten der Glieder rechts oder links vorkömmt (und daß es ein solches gebe, folgt, weil alle Exponenten auf einer Seite von einander verschieden sind): so erhält man eine neue Gleichung, in welcher abermahl kein negativer Exponent vorhanden seyn kann, auf einer Seite aber eine constante Größe vorkömmt. (Dasselbe hätte mau auch mit demselben Erfolge thun können, wenn in der Gleichung schon anfangs keine constante Größe vorhanden gewesen wäre.) Gesetzt nun $\mathfrak{b}$ sey jener niedrigste Exponent, so ist die neue Gleichung:

$$B x^{\beta-\mathfrak{b}} + C x^{\gamma-\mathfrak{b}} + \ldots + R x^{\varrho-\mathfrak{b}} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C} x^{\mathfrak{c}-\mathfrak{b}} + \ldots + \mathfrak{R} x^{\mathfrak{r}-\mathfrak{b}}$$

in welcher das Glied $\mathfrak{B}$ nothwendig ein beständiges ist. Wir schließen also, wie vorhin, daß es auch auf der andern Seite ein diesem gleiches constantes Glied geben müsse. Mithin ist einer der Exponenten $\beta-\mathfrak{b}$, $\gamma-\mathfrak{b}$, .. $\varrho-\mathfrak{b}$, $= 0$, und dann der ihm entsprechende Coefficient $= \mathfrak{B}$. Es sey z. B. $\beta-\mathfrak{b} = 0$; so gibt dieß $\beta = \mathfrak{b}$ und $B = \mathfrak{B}$. Also hat auch das Glied

$B\,x^b$ ein ihm völlig gleiches $B\,x^\beta$ auf der andern Seite. Da diese Schlüsse stets fortgesetzt werden können, so lange noch ein Glied auf irgend einer Seite dasteht: so sieht man die Richtigkeit der Behauptung ein.

2. Wenn aber einige Glieder der Gleichung negative Exponenten haben; so gibt es doch einen unter denselben, der keinen größeren über sich hat, weil sonst die Menge der Glieder nicht endlich seyn könnte. Multiplicirt man nun beyde Glieder der Gleichung mit einer positiven Potenz von x, deren Exponent so groß, als dieser negative ist: so erhält man eine neue Gleichung, in der kein negativer Exponent mehr vorkommt: Von dieser gilt also nach n° 1 daß jedem Gliede auf der einen Seite ein völlig gleiches auch auf der andern entspricht. Da aber durch die verrichtete Multiplication die Coefficienten der einzelnen Theile gar nicht geändert, ihre Exponenten bloß um einerley Größe vermehret worden sind; so folgt, daß auch vor ihr die Glieder gleich waren, die es jetzt sind.

§. 29.

Lehrsatz. Wenn eine Function von x, von beliebig vielen, aber nur nach bestimmtem Gesetze zu bildenden Gliedern, $\overset{r}{F}x$, die Eigenschaft hat, daß sie entweder für alle x, oder doch für alle, die innerhalb gewisser Grenzen a und b liegen, bloß durch die Vermehrung ihrer Gliederzahl r so klein werden kann, als man nur immer will; wenn ferner $\overset{r}{f}x$ eine zweyte Function von eben so beliebiger Gliederzahl bedeutet, die von der ersteren auf eine solche Art abhängt, daß zwischen beyden für jeden innerhalb a und b liegenden Werth von x die Gleichung Statt findet: $\frac{\overset{r}{F}(x+\omega)-\overset{r}{F}x}{\omega} = \overset{r}{f}x + \Omega$, worin Ω so klein werden kann, als man nur immer will, wenn es ω werden kann: so behaupte ich, auch die Function $\overset{r}{f}x$ besitze die Eigenschaft, daß sie für eben dieselben Werthe von x, wie $\overset{r}{F}x$, so klein werden kann, als man nur immer will, menn man ihre Gliedermenge r groß genug annimmt.

Beweis. Daß der hier aufgestellte Begriff einer Function von beliebig zu vermehrender Anzahl der Glieder, die hiedurch eben so klein werden kann, als man nur immer will, kein Unding sey; lehrt uns z. B. schon folgende Function: $(1+x)^{-1} - 1 + x - x^2 + x^3 - \ldots \pm x^r$; denn, wie aus §. 12 erhellet, kann diese für jedes x, das zwischen + 1 und — 1 liegt, bloß durch Anhäufung ihrer Gliederzahl kleiner als jede gegebene Größe werden. Daß aber ferner auch die Annahme eines solchen Verhältnisses zwischen zwey Functionen, wie es die Gleichung: $\frac{\overset{r}{F}(x+\omega)-\overset{r}{F}x}{\omega} = \overset{r}{f}x + \Omega$ erheischt, nicht überhaupt unmöglich sey: beweiset uns §. 23; denn gleich die dortigen x^n und nx^{n-1} sind ein Paar solcher Functionen, indem $\frac{(x+\omega)^n - x^n}{\omega} = nx^{n-1} + \Omega$ ist. — Man setze nunmehr, daß unter allen Werthen, welche die Function $\overset{r}{f}x$ bey einerley r bloß dadurch annimmt, daß man der x alle zwischen a und b liegenden Werthe beylegt, der positiv größte — (oder, falls keine positiven da sind, der negativ kleinste) $= \overset{r}{f}p$; der positiv kleinste aber — (oder falls keine positiven da sind, der negativ größte) $= \overset{r}{f}q$ sey. Hiernächst werden die beyden Ausdrücke $\overset{r}{f}x - \overset{r}{f}p$ und $\overset{r}{f}q - \overset{r}{f}x$, für jeden Werth von x, mit Ausnahme der beyden p und q, zwey positive Größen bezeichnen. Nach der Voraussetzung soll aber wenn nur x innerhalb a und und b angenommen wird, die Gleichung bestehen

$$\frac{\overset{r}{F}(x+\omega)-\overset{r}{F}x}{\omega}=\overset{r}{f}x+\Omega;$$

mithin bestehen gewiß auch folgende zwey:

$$\frac{\overset{r}{F}(x+\omega)-\overset{r}{F}x}{\omega}-\overset{r}{f}p=\overset{r}{f}x-\overset{r}{f}p+\Omega,$$ und

$$\overset{r}{f}q-\frac{\overset{r}{F}(x+\omega)-\overset{r}{F}x}{\omega}=\overset{r}{f}q-\overset{r}{f}x-\Omega.$$

Da nun, mit den zwey schon erwähnten Ausnahmen für $x = p$ oder q, die Größen $\overset{r}{f}x - \overset{r}{f}p$ und $\overset{r}{f}q - \overset{r}{f}x$ nicht Null sind; so so läßt sich allemahl ein ω klein genug annehmen daß (ohne Rücksicht auf sein Zeichen) der Werth von $\Omega < \overset{r}{f}x - \overset{r}{f}p$ und zugleich auch $< \overset{r}{f}q - \overset{r}{f}x$ sey; indem bey einerley r und x, die Größen $\overset{r}{f}x$, $\overset{r}{f}p$, $\overset{r}{f}q$ gegebene sind. Bey diesem Werthe von ω sind also beyde Größen: $\overset{r}{f}x - \overset{r}{f}p + \Omega$ und $\overset{r}{f}q - \overset{r}{f}x - \Omega$, mithin auch die ihnen gleichen: $\frac{\overset{r}{F}(x+\omega)-\overset{r}{F}x}{\omega}-\overset{r}{f}p$ und $\overset{r}{f}q-\frac{\overset{r}{F}(x+\omega)-\overset{r}{F}x}{\omega}$ positiv.

Nach der getroffenen Bestimmung sind $\overset{r}{f}p$, $\overset{r}{f}q$ nothwendig entweder beyde positiv, oder beyde negativ. Im ersten Falle muß, dem bloßen Werthe nach, $\overset{r}{f}p < \frac{\overset{r}{F}(x+\omega)-\overset{r}{F}x}{\omega}$, und $\overset{r}{f}q > \frac{\overset{r}{F}(p+\omega)-\overset{r}{F}x}{\omega}$; im zweyten Falle aber gerade umgekehrt $\overset{r}{f}p > \frac{\overset{r}{F}(x+\omega)-\overset{r}{F}x}{\omega}$ und $\overset{r}{f}q < \frac{\overset{r}{F}(x+\omega)-\overset{r}{F}x}{\omega}$ seyn. Also ist in jedem Falle $\overset{r}{f}x$ eine Function von solcher Beschaffenheit, daß ihrer Werthe einer $>$, ein anderer $< \frac{\overset{r}{F}(x+\omega)-\overset{r}{F}x}{\omega}$ ist; woraus nach einem bekannten Lehrsatze folgt *), daß auch ein Werth von x, und zwar ein zwischen p und q — (mithin auch a und b) — liegender Werth $= \xi$ vorhanden seyn müsse, für welchen $\overset{r}{f}\xi = \frac{\overset{r}{F}(x+\omega)-\overset{r}{F}x}{\omega}$ ist.

2. Wenn man bey einerley x und ω, r immer größer nimmt; so soll es der Voraussetzung nach möglich seyn, den Werth von $\overset{r}{F}x$, wie auch von $\overset{r}{F}(x+\omega)$ so klein zu machen, als man nur immer will. Daraus ergibt sich,

*) Zwar ist meiner eigenen Meinung nach dieser in die Theorie der Gleichungen gehörige Lehrsatz bisher noch nie recht dargethan worden; allein ich glaube so glücklich zu seyn, einen vollkommen bündigen Beweis desselben gefunden zu haben. Er ist bereits in einer eigenen Abhandlung entworfen, und dürfte ehestens gedruckt werden.

daß auch die Function $\overset{r}{f}\xi$ durch diese Vermehrung von r so klein gemacht werden könne, als man nur immer will. Denn soll sie z. B. $< D$ gemacht werden; so nehme man nur r so groß, bis (ohne Rücksicht auf das Zeichen) $\overset{r}{F}x$ sowohl, als auch $\overset{r}{F}(x+\omega) < \frac{\omega D}{2}$ geworden sind; dann) muß gewiß $\overset{r}{f}\xi = \frac{\overset{r}{F}(x+\omega) - \overset{r}{F}x}{\omega} < D$ ausfallen.

3. Also vermag die Function $\overset{r}{f}x$ wenigstens für den Werth $x = \xi$ bloß durch Vermehrung von r kleiner als jede gegebene Größe zu werden. Daß sie es aber auch für jeden anderen vermöge, wenn er nur zwischen a und b liegt; ist nun sehr leicht zu beweisen. Denn sey z. B. α ein solcher zwischen a und b gelegener Werth von x; so nehme man noch einen zweyten β an, der gleichfalls zwischen a und b gelegen, dem α so nahe kömmt, als man nur immer will. Da die Eigenschaft der Function $\overset{r}{F}x$, bloß durch Vermehrung von r kleiner als jede gegebene Größe zu werden, derselben für alle zwischen a und b gelegene Werthe zukömmt; so muß sie ihr auch für alle zwischen α und β gelegene Werthe zukommen; indem, was zwischen α und β liegt, auch zwischen a und b liegen muß. Wie also n° 1 u. 2 bloß aus dem Umstande, daß die Function $\overset{r}{F}x$ für alle zwischen a und b liegende Werthe von x kleiner als jede gegebene Größe zu werden vermag, gefolgert ward, daß es auch einen zwischen a und b liegenden Werth ξ geben müsse, für den $\overset{r}{f}\xi$ kleiner als jede ge-

gebene Größe zu werden vermag: so muß aus gleichem Grunde auch zwischen α und β ein Werth von $x = \mathfrak{x}$ vorhanden seyn, für den $\overset{r}{f}\mathfrak{x}$ kleiner als jede gegebene Größe wird, wenn man r hinlänglich vermehrt. Kann aber $\overset{r}{f}x$ kleiner als jede gegebene Größe werden; so muß es auch $\overset{r}{f}\alpha$ werden können. Denn da der Unterschied zwischen α und $\mathfrak{x}$ so klein werden kann, als man nur immer will (weil er stets kleiner als der zwischen α und β seyn muß): so müssen auch die Werthe von $\overset{r}{f}\mathfrak{x}$ und $\overset{r}{f}\alpha$ einander so nahe treten können, als man nur immer will; indem die Function $\overset{r}{f}x$ stetig ist. Stetig heißt nähmlich eine Function, wenn die Veränderung, die sie bey einer gewissen Veränderung ihrer Wurzel erfährt, kleiner als jede gegebene Größe zu werden vermag, wenn man nur jene klein genug nimmt. Nun zeigt die Gleichung $\frac{\overset{r}{F}(x+\omega)\ \overset{r}{F}x}{\omega} = \overset{r}{f}x + \Omega$ zuförderst an, daß $\overset{r}{F}x$ stetig sey; weil $\overset{r}{F}(x+\omega) - \overset{r}{F}x = \omega(\overset{r}{f}x + \Omega)$ kleiner als jede gegebene Größe zu werden vermag, wenn man (bey einerley r und x) ω klein genug nimmt. Daraus folgt aber weiter, daß sich auch $\overset{r}{f}x$ stetig verändern müsse. Denn es verändere sich x in $x+i$; so wird, wenn $x+i+\omega$ immer noch innerhalb a und b liegt,

$$\frac{\overset{r}{F}(x+i+\omega) - \overset{r}{F}(x+i)}{\omega} = \overset{r}{f}(x\,r\,i) + \overset{1}{\Omega}.$$ Daher

$$\overset{r}{f}(x+i) - \overset{r}{f}x = \frac{\overset{r}{F}(x+i+\omega) - \overset{r}{F}x}{\omega} - \Omega + \overset{1}{\Omega},$$ welches bey einerley x und r bloß durch Verminderung von ω und i so klein werden kann, als man nur immer will.

Bloß durch Verminderung von ω nähmlich können Ω und $\overset{1}{\Omega}$ so klein gemacht werden, als man nur will; dann wieder kann bey einerley ω, i so genommen werden, daß $i + \omega$, und folglich auch $\overset{r}{F}(x + i + \omega) - \overset{r}{F}x$ so klein werden, als man nur immer will; mithin auch $\frac{\overset{r}{F}(x + i + \omega) - \overset{r}{F}x}{\omega}$; also auch die ganze Größe $\frac{\overset{r}{F}(x + i + \omega) - \overset{r}{F}x}{\omega} - \Omega + \overset{1}{\Omega}$.

§. 30.

Aufgabe. Eine nach den Potenzen der x entwickelte Reihe soll dem Werthe der complexen Function $(1+x)^n$ für möglichst vielerley Werthe von n, und für alle von x, die zwischen Null und einer möglichst entfernten (positiven oder negativen) Grenze liegen, entweder völlig gleich, oder doch so nahe kommen, als man nur immer will, wenn man die Anzahl ihrer Glieder groß genug nimmt. Es ist die Aufgabe, gewisse Bedingungen, welchen die Reihe nothwendig entsprechen muß, zu finden.

Auflösung. Die Annahme, daß eine nach den Potenzen der x entwickelte Reihe, d. h. eine Reihe von der Form $Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots + Rx^{\rho}$ dem Werthe der Function $(1+x)^n$ entweder völlig gleich, oder doch so nahe komme, als man nur immer will, ist nach Ausweis der §§. 8 und 12 wenigstens in gewissen Fällen möglich; denn auch die dortigen Reihen sind unter der Form der gegenwärtigen begriffen, wenn man hier $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, u. s. w.; $A = 1$, $B = n$, $C = n.\frac{n-1}{2}$, u. s. w. setzt.

Immerhin muß es uns also erlaubt seyn, von der Voraussetzung auszugehen, daß eine Gleichung von der Form:

$$(1+x)^n = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots + Rx^\varrho + \Omega \ldots\ldots \odot$$

in unbestimmt welchen Fällen bestehe, und daher eben jetzt zu untersuchen, welche Bedingungen, so oft diese Gleichung gilt, die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varrho$; A, B, C..R erfüllen müssen.

1. Soll nun entweder für jeden Werth von x, oder doch für jeden, der kleiner als ein gewisser b ist, die Gleichung $\odot$ gelten; so muß, wenn man statt x, $x+\omega$ setzt, und ω so annimmt, daß auch noch $x+\omega < b$ ist, auch nachstehende Gleichung gelten:

$$(1+x+\omega)^n = A(x+\omega)^\alpha + B(x+\omega)^\beta + C(x+\omega)^\gamma + \ldots + R(x+\omega)^\varrho + \overset{1}{\Omega}.$$

Aus beyden ergibt sich durch Abzug und Division mit ω die dritte:

$$\frac{(1+x+\omega)^n - (1+x)^n}{\omega} = A\frac{(x+\omega)^\alpha - x^\alpha}{\omega} + B\frac{(x+\omega)^\beta - x^\beta}{\omega}$$

$$+ C\frac{(x+\omega)^\gamma - x^\gamma}{\omega} + \ldots + R\frac{(x+\omega)^\varrho - x^\varrho}{\omega} + \frac{\overset{1}{\Omega} - \Omega}{\omega}.$$

Bedeutet nun, was sich mit der vorigen Bedingung ganz wohl verträgt, ω eine Größe, welche so klein werden kann, als man nur immer will: so folgt aus §. 23, wenn man statt x daselbst $1+x$ substituiret, daß die Größe $\frac{(1+x+\omega)^n - (1+x)^n}{\omega}$ bey jedem Werthe von x, der nur nicht -1, und bey jedem von n, der Größe $n(1+x)^{n-1}$ so nahe treten könne, als man nur immer will, wenn man ω klein genug nimmt. Unter derselben

Bedingung treten aber auch, was immer α, β γ, ... ϱ bedeuten mögen, wenn nur nicht $x = o$ ist, die Größen $\frac{(x+\omega)^\alpha - x^\alpha}{\omega}$, $\frac{(x+\omega)^\beta - x^\beta}{\omega}$, ... $\frac{(x+\omega)^\varrho - x^\varrho}{\omega}$ folgenden $\alpha x^{\alpha-1}$, $\beta x^{\beta-1}$, ... $\varrho x^{\varrho-1}$ so nahe als man will. Schreiben wir also

$$\frac{(1+x+\omega)^n - (1+x)^n}{\omega} = n(1+x)^{n-1} + \overset{(n)}{\omega};$$

$$\frac{(x+\omega)^\alpha - x^\alpha}{\omega} = \alpha x^{\alpha-1} + \overset{(\alpha)}{\omega};$$

$$\frac{(x+\omega)^\beta - x^\beta}{\omega} = \beta x^{\beta-1} + \overset{(\beta)}{\omega};$$

— — — — — — — — — —

$$\frac{(x+\omega)^\varrho - x^\varrho}{\omega} = \varrho x^{\varrho-1} + \overset{(\varrho)}{\omega}:$$

so bedeuten $\overset{(n)}{\omega}$; $\overset{(\alpha)}{\omega}$, $\overset{(\beta)}{\omega}$, ... $\overset{(\varrho)}{\omega}$ Werthe, die alle so klein werden können, als man nur immer will, wenn man ω klein genug nimmt; und wir erhalten durch Substitution die Gleichung:

$$\frac{\overset{1}{\Omega} - \Omega}{\omega} = n(1+x)^{n-1} - \alpha A x^{\alpha-1} - \beta B x^{\beta-1} - \ldots - \varrho R x^{\varrho-1}$$

$$+ \overset{(n)}{\omega} - A\overset{(\alpha)}{\omega} - B\overset{(\beta)}{\omega} - \ldots - R\overset{(\varrho)}{\omega}.$$

Nun ist $\Omega = (1+x)^n - Ax^\alpha - Bx^\beta - \ldots - Rx$ zufolge der Voraussetzung eine Function von x, welche bey allen Werthen der, die innerhalb o und b liegen, bloß durch Vermehrung ihrer Gliederzahl so klein werden kann, als man nur immer will; also mit der $\overset{r}{F}x$ des

§. 23 vergleichbar. Die Größe $\overset{1}{\Omega}$ ist $= (1+x+\omega)^n - A(x+\omega)^\alpha - B(x+\omega)^\beta - \ldots - R(x+\omega)^\varrho$; also $= \overset{r}{F}(x+\omega)$ zu setzen, wenn man $\Omega = \overset{r}{F}x$ gesetzt hat. $\frac{\overset{1}{\Omega} - \Omega}{\omega}$ ist folglich $= \frac{\overset{r}{F}(x+\omega) - \overset{r}{F}x}{\omega}$. Die Größe $\overset{(n)}{\omega} - A\overset{(\alpha)}{\omega} - B\overset{(\beta)}{\omega} - \ldots - R\overset{(\varrho)}{\alpha}$ bestehet aus einer Menge von Gliedern, die $= r + 1$ ist, kann aber bey einerley r bloß durch Verminderung von ω kleiner als jede gegebene Größe werden. Denn soll sie z. B. $< D$ werden; so nehme man nur β so klein, daß

$$\overset{(n)}{\omega} < \frac{D}{r+1}, \overset{(\alpha)}{\omega} < \frac{D}{(r+1)A}, \overset{(\beta)}{\omega} < \frac{D}{(r+1)B}, \ldots \overset{(\varrho)}{\omega} < \frac{D}{(r+1)R},$$

welches nach §. 23 allerdings möglich seyn muß; und dann ist sicher $\overset{(n)}{\omega} - A\overset{(\alpha)}{\omega} - B\overset{(\beta)}{\omega} - \ldots - R\overset{(\varrho)}{\omega} < D$. Also läßt diese Größe sich mit dem Ω des §. 29 vergleichen; und folglich die Größe:

$$n(1+x)^{n-1} - \alpha A x^{\alpha-1} - \beta B x^{\beta-1} - \ldots - \varrho R x^{\varrho-1}$$

als eine bloße Function von x, mit dem $\overset{r}{f}x$ dieses §. Demnach gilt auch von ihr, daß sie bey jedem Werthe von x, der zwischen o und b liegt, so klein werden kann, als man nur immer will, wenn man nur ihre Gliederzahl hinlänglich groß annimmt. Es läßt sich also schreiben:

$$n(1+x)^{n-1} - \alpha A x^{\alpha-1} - \beta B x^{\beta-1} - \ldots - \varrho R x^{\varrho-1} = \overset{2}{\Omega}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung noch durch $(1 + x)$, und setzt für $(1+x)^n$ die Reihe, die dieser Function nach $\odot$ gleichen soll: so kömmt, nach Reduction derjenigen Glieder, die sichtbar einerley Potenz von x enthalten, und nach der Bemerkung, daß $n\,\Omega-(1+x)\overset{(2)}{\Omega}=\overset{3}{\Omega}$ sey, folgende Gleichung zum Vorschein, die als Bedingung zur Gültigkeit der Gleichung ⊙ bestehen muß:

$$(n-\alpha)\,Ax^{\alpha}+(n-\beta)\,Bx^{\beta}+\ldots+(n-\varrho)\,Rx^{\varrho}=$$
$$x\ldots\alpha Ax^{\alpha-1}+\beta Bx^{\beta-1}+\ldots+\varrho\,Rx^{\varrho-1}+\overset{3}{\Omega}.$$

§. 31.

Zusatz. Die vorletzte Gleichung des vorigen §. war: $n(1+x)^{n-1}=\alpha Ax^{\alpha-1}+\beta Bx^{\beta-1}+\ldots\ldots+\varrho Rx^{\varrho-1}+\overset{(1)}{\Omega}$. Wenn man die nähmlichen Schlüsse, durch die man dieselbe aus der Gleichung ⊙ hergeleitet, auch auf sie selbst anwendet: so bekömmt man die Gleichung:

$$n(n-1)(1+x)^{n-2}=\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}+\beta(\beta-1)Bx^{\beta-2}$$
$$+\ldots+\varrho(\varrho-1)Rx^{\varrho-2}+\overset{(2)}{\Omega}.$$

Diese auf gleiche Art behandelt, gibt:

$$n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)Ax^{\alpha-3}$$
$$+\beta(\beta-1)(\beta-2)Bx^{\beta-3}+\ldots$$
$$+\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)Rx^{\varrho-3}+\overset{(3)}{\Omega}.$$

U. s. w. Daraus ersieht man, daß die Möglichkeit der Gleichung ⊙ überhaupt die Möglichkeit nachstehender erfordere:

$$n(n-1)(n-2)\,..\,(n-p)(1+x)^{n-p}$$
$$=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\,..\,(\alpha-p)Ax^{\alpha-p}$$
$$+\beta(\beta-1)(\beta-2)\,..\,(\beta-p)Bx^{\beta-p}+\ldots$$
$$+\varrho(\varrho-1)(\varrho-3)\,..\,(\varrho-p)Rx^{\varrho-p}+\overset{(s)}{\Omega},$$

wo p was immer für eine ganze und positive Zahl bedeuten kann. Multiplicirt man nun mit $(1-x)^p$, und setzt für $(1+x)^p$ die gleichgeltende Reihe; so erhält man nach Benützung von §. 15. 17 diese allgemein giltige Bedingungsgleichung:

$$n(n-1)(n-2)..(n-p)\,(Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+\ldots+Rx^{\varrho})=$$
$$(1+x)^p\left\{\begin{array}{l}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..(\alpha-p)Ax^{\alpha-p}\\ +\beta(\beta-1)(\beta-2)..(\beta-p)Bx^{\beta-p}\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)..(\varrho-p)Rx^{\varrho-p}\end{array}\right\}+\overset{(p)}{\Omega}\ldots ♂$$

§. 32.

Aufgabe. Aus der §. 30 angegebenen Bedingungsgleichung ♂ die Form der Reihe $Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+\ldots+Rx^{\varrho}$, welche für möglichst vielerley n und x, $=(1+x)^n-\Omega$ seyn soll, so weit, als es sich bloß aus ihr thun läßt, zu bestimmen.

Auflösung. Die Gleichung ♂, deren Giltigkeit eine Bedingung zur Giltigkeit der ⊙ ist, reicht schon allein zu, die Beschaffenheit der Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varrho$ sowohl, als auch jenes Verhältniß zu bestimmen, das zwischen den Coefficienten A, B, C, .. R Statt finden muß, damit die Gleichung ⊙ für möglichst vielerley n und x bestehe.

1. Stellt man sich nämlich in der Gleichung

$$(n-\alpha)Ax^{\alpha} + (n-\beta)Bx^{\beta} + \ldots + (n-\varrho)Rx^{\varrho} =$$

$$\alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \ldots + \varrho Rx^{\varrho-1} + \overset{3}{\Omega}$$

vor, daß die Exponenten $\alpha, \beta, \ldots \varrho$ alle verschieden sind — (was darum möglich ist, weil in der Reihe $Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + \ldots + Rx^{\varrho}$ Glieder, welche in einerley Potenz von x multiplicirt wären, in eines verknüpft werden könnten, das darunter immer noch von der Form Ax^{α} oder Bx^{β} bliebe); und nimmt man ferner an, daß diese Glieder alle nach der Größe ihrer Exponenten, anzufangen vom größten negativen (falls es auch solche gibt) geordnet sind — (auch dieß muß thunlich seyn, indem die Menge der Glieder nur eine endliche ist): so hat dann diese Gleichung die Form der §. 28 beschriebenen; und also muß wofern sie für alle Werthe von x, die kleiner als ein gewisser sind, gelten soll, jeder Potenz von x auf der einen Seite des Gleichheitszeichens eine ganz gleiche auch auf der andern entsprechen, höchstens mit Ausnahme eines oder einiger Theile, die so klein werden können, als man nur immer will. Hieraus ergibt sich zuförderst, daß die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varrho$ der Reihe nach $= 0, 1, 2, 3, \ldots r$ seyn, d. h. nach der Ordnung der natürlichen Zahlen von Null an fortgehen müssen. Denn weil die Exponenten der Glieder rechter Hand des Gleichheitszeichens sämmtlich um 1 niedriger stehen, als die der gleichvielsten Glieder an der linken Hand: so könnte die Gleichung unmöglich bestehen, wenn nicht das niedrigste Glied unter jenen, d. h. $\alpha A x^{\alpha-1}$ verschwände; indem sich zu diesem kein Gleiches auf der andern Seite findet. Der Coefficient A selbst kann aber nicht $= 0$ seyn. Denn wenn man dieses annähme, so wäre das Glied Ax^{α} in der Reihe ⊙ eigentlich gar nicht vorhanden. Nun aber verstehen wir unter Ax^{α} das niedrigste Glied in dieser Reihe; ein solches muß sie, da die Menge ihrer Glieder nur endlich angenommen ist, nothwendig haben: also kann A nicht Null seyn. Mithin kann $\alpha A x^{\alpha-1}$ nur dadurch verschwinden, daß $\alpha = 0$ ist. Hieraus folgt aber, daß das Glied $(n-\alpha)Ax^{\alpha}$ auf der linken Seite $= nA$ ein beständiges sey. Daher muß es auch auf der rechten Seite ein beständiges Glied geben, welches nur das niedrigste, also $\beta B x^{\beta-1}$ seyn kann. Folglich ist $\beta - 1 = 0$, $\beta = 1$. Hieraus ergibt sich weiter, daß wenn nicht $n = 1$ ist, auf der linken Seite das Glied $(n-1)Bx$ bestehe. Soll diesem ein gleiches auf der rechten entsprechen, so kann es nur das Glied $\gamma C x^{\gamma-1}$ seyn, weil alle folgenden noch höher sind. Also muß $\gamma - 1 = 1$, d. h. $\gamma = 2$ seyn. — Man sieht, wie diese Schlüsse sich stets weiter fortsetzen lassen. Doch um noch deutlicher einzusehen, daß keiner der Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varrho$ gebrochen oder negativ seyn könne; erwäge man folgendes. Sollte es gebrochen oder negative Exponenten in der Reihe ⊙ geben; so mußte doch einer aus ihnen der erste, nach der oben festgesetzten Anordnung derselben, d. h. der positiv kleinste oder negativ größte seyn. Heißen wir nun diesen μ; so würde, wenn μ gebrochen ist, auch $\mu-1$ einen gebrochenen Exponenten vorstellen, der gleichwohl kleiner ist; und wenn μ negativ ist, $\mu-1$ einen noch größern negativen Exponenten bezeichnen. Da nun auf der rechten Seite ein Glied mit dem Exponenten $\mu-1$ wirklich erscheint; so müße es auch auf der linken Seite eines mit einem gebrochenen oder negativen Exponenten geben, der niedriger als μ ist. So widerspricht sich also diese Voraussetzung selbst, und man muß annehmen, daß alle Exponenten der Reihe (mit Ausnahme eines, der Null seyn kann) positiv und ganzzählig sind. Hieraus ergibt sich nun schon, daß man nicht fehlen könne, wenn man sie nach der Ordnung der natürlichen Zahlen annimmt. Denn so kann man gewiß keinen der wirklich vorkommen soll, überspringen; und nimmt man etwa einen zu viel an, so muß es sich dadurch, daß sein Coefficient $= 0$ gefunden wird, zeigen. Ein geringes Nachdenken lehrt aber auch, daß die Exponenten der Reihe zu keiner größeren Zahl anwachsen, bevor sie nicht erst alle kleineren hindurch gegangen sind. Denn ist z. B. μ irgend ein wirklich vorkommender Exponent; so kömmt auch ein Glied von der Form $\mu Lx^{\mu-1}$ d. h. wenn μ nicht Null ist, auch ein Glied mit einem um 1 kleinern Exponenten in der Reihe vor.

2. Setzt man nun diese so eben gefundenen Werthe für die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; und nennt den letzten derselben (weil man noch nicht weiß, der wievielte er ist) r: so erhält obige Gleichung jetzt folgende Gestalt:

$$nA + (n-1)Bx + (n-2)Cx^2 + \ldots + (n-r)Rx^r =$$

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots + rRx^{r-1} + \Omega$$

Woraus sich durch Anwendung des §. 28 sehr offenbar ergibt: $B = nA$, $2C = (n-1)B$; oder

$C = \frac{(n-1)}{2} B = n . \frac{n-1}{2} . A$; $3D = (n-2)C$—, oder

$D = \frac{(n-2)}{3} C = n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . A$. u. s. w.

$rR = (n-(r-1))Q$; oder

$R = \frac{n-(r-1)}{r} Q = n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} \ldots \frac{n-(r-1)}{r} . A.$

3. Bey dieser Werthbestimmung heben sich alle Glieder dr Gleichung zu beyden Seiten auf, mit Ausnahme des höchsten $(n-r)Rx^r$ welches

$= n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} \ldots \frac{n-(r-1)}{r} . (n-r) A . x^r$ ist. Wofern also di Gleichung möglich seyn soll, so muß es irgend einen Werth für die Zahl r geben, bey welchem dieß Glied entweder völlig Null, oder doch kleiner als jede gegebene Göße gemacht werden kann. Und sonach ist die Gestalt dr Reihe, welche für möglichst vielerley Werthe von n und x den Werth von $(1+x)^n$ ausdrücken soll, — so viel sich bloß aus der Bedingungsgleichung des §. 30 ergibt, — nachstehende:

$$A + A.n.x + A.n.\frac{n-1}{2}.x^2 + A.n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.x^3$$

$$+ \ldots + A.n.\frac{n-1}{2} \ldots \frac{n-(r-1)}{r} x^r.$$

§. 33.

Lehrsatz. Eine nach den Potenzen von x entwickelte Reihe, welche den Werth der complexen Function $(1+x)^n$ für möglichst vielerley Werthe von n, und für alle von x, die zwischen Null und einer möglichst großen (positiven oder negativen) Grenze liegen, entweder völlig genau, oder doch so nahe angeben soll, daß der Unterschied kleiner als jede gegebene Größe werden könne, kann keine andere Form, als die der zur Potenz $(1+x)^n$ gehörigen Binomialreihe haben, wenn die Beschaffenheit ihrer Glieder von ihrer Anzahl selbst unabhängig seyn soll; d. h. sie muß seyn:

$$1+nx+n.\frac{n-1}{2}.x^2+\ldots+n.\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-(r-1)}{r}x^r.$$

Beweis. Zufolge des vorigen §. muß nähmlich diese Reihe die Gestalt $A+A.nx+A.n.\frac{n-1}{2}.x^2+\ldots$ $+A.n.\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-(r-1)}{r}.x^r$ haben, um nur der Bedingungsgleichung des §. 30 zu entsprechen. Soll aber der Werth derselben für alle x, die zwischen Null und irgend einer positiven oder negativen Grenze liegen, dem Werthe von $(1+x)^n$ entweder völlig gleich, oder doch so nahe, als man will, kommen; so muß A nothwendig $=1$ seyn. Denn wenn man x so klein nimmt, als man will; so nähert sich der Werth der Function $(1+x)^n$, was immer n bedeute, der 1, so sehr man will (§. 17. 15). Der Werth obiger Reihe aber nähert bey dieser Voraussetzung sich, so sehr man will, dem Werthe A. Also muß $A = 1$ seyn. (§. 27.)

§. 34.

Anmerkung. Hieraus ersehen wir, daß die Gleichung des §. 30 noch nicht die sämmtlichen Bedingungen umfasse, die eine Reihe erfüllen muß, welche für möglichst vielerley Werthe von n und x, $= (1 + x)^n$ seyn soll. Denn ihr allein thut jede Reihe von der Form des §. 32 Genüge, was auch A sey. Um aber $= (1 + x)^n$ zu seyn, darf A nicht vielerley sondern nur den bestimmten Werth 1 haben. So können wir denn also überhaupt daraus, daß eine gewisse Substitution der Werthe x und n, die Gleichung ♁ befriedigt, nicht so fort schließen, daß auch die ⊙ hiebey bestehe; sondern nur umgekehrt, wofern bey einer gewisser Annahme der n und x nicht einmahl die Gleichung ♁, oder auch eine der §. 31. angezeigten bestehen kann; so wissen wir gewiß, daß auch die ⊙ nicht Statt finden könne. Da ferner in der Reihe $1 + nx + n\frac{n-1}{2}.x^2 + \ldots$, n und x überall nur in ganzzähliger Potenz erscheinen; so hat dieselbe offenbar für jedes bestimmte n und x nur einen einzigen Werth. Die Function $(1+x)^n$ dagegen besitzet der Werthe zuweilen mehrere; nähmlich — wenn n ein Bruch mit geradem Nenner, und das, was man durch $(1+x)^n$ ausdrücken will, eine des Gegensatzes fähige Größe ist — je zwey entgegengesetzte gleiche. Daher kann höchstens nur dann eine Gleichung zwischen $(1+x)^n$ und jener Reihe erwartet werden, wenn unter $(1+x)^n$ eine bloß abstracte Größe verstanden, oder nur einer ihrer Werthe allein verlangt wird. Endlich ist $(1+x)^{\frac{2p+1}{2q}}$ für $x > -1$ bekanntlich imaginär; für alle solche Werthe von x und n also kann die Binomialgleichung abermahls nicht gelten.

§. 35.

Aufgabe. Bloß aus Betrachtung der Bedingungsgleichungen §. 30. 31 zu bestimmen, in welchen Fällen es gewiß unmöglich ist, den Werth von $(1+x)^n$ durch die entsprechende Binomialreihe, es sey nun völlig genau, oder nur so auszudrücken, daß der Unterschied kleiner als jede gegebne Größe werden kann.

Auflösung. Bloß aus Betrachtung der Gleichungen ζ und ♂ (§. 30. 31) läßt sich entscheiden, daß die Binomialreihe den Werth von $(1+x)^n$ nie geben könne, wenn $x >$ oder auch nur $= \pm 1$, es sey denn zugleich n eine ganze positive Zahl oder Null.

1. Denn sey zuerst $x > +1$, so zeigt sich, daß die Gleichung ζ nicht bestehen könne. Denn zum Bestande derselben gehört, daß $n\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-(r-1)}{r}(n-r)Ax^r$ so klein werden könne, als man nur immer will. (§. 31. n.°4) Ist nun n nicht $= 0$, auch keine ganze positive Zahl, so leuchtet zuförderst ein, daß diese Größe nie ganz verschwinden könne, was man auch für r setzen mag; indem keiner der Factoren, aus denen sie besteht:

$n, \frac{n-1}{2}, .. \frac{n-(r-1)}{r}, n-r, A, x^r$ jemahls Null werden kann, da r immer nur eine ganze positive Zahl bedeutet. Also ist $n \frac{n-1}{2} .. \frac{n-(r-1)}{r} (n-r) Ax^r$ bey einerley A, n und x eine Function von r, die nie Null werden kann. So klein also auch ihr Werth für irgend ein bestimmtes r seyn mag, so ist er doch nicht kleiner, als jede gegebene Größe; und wenn es solche geben soll, so muß man sie nach §. 26 nur dadurch finden, daß man für r stets größere und größere Werthe annimmt. Allein versucht man dieß hier, so zeigt sich bald, daß die Werthe dieser Function, anzufangen von einem gewissen r, für alle größere, statt abzunehmen, wachsen. Denn
$n.\frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} .. \frac{n-(r-1)}{r} (n-r) Ax^r$ ist ein Product aus den zwey Factoren $n \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} ... \frac{n-(r-)}{r} Ax^r$, und $(n-r)$, deren jeder, anzufangen von einem gewissen r, nur immer größer wird, je größer man r nimmt. Von dem Factor $(n-r) = -(r-n)$ ist dieses offenbar; von dort an, wo $r > n$ geworden ist, wächst er mit r, selbst wenn n positiv ist, und, wenn n negativ ist, immer. Aber auch der Factor $n \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} ... \frac{n-(r-1)}{r} x^r A$ wächst mit r. Denn jeder spätere d. h. zu $(r+1)$ gehörige Werth desselben entspringt aus dem nächstvorhergehenden, d. i. aus dem zu r gehörigen, indem man diesen noch mit
$\frac{n-r}{r+1} x = -\frac{(r-n)}{r+1} x$ multiplicirt. Wenn nun α.) n positiv ist, so wird von dort an, wo $r > n$ und $>

die positive Größe $\frac{12x+1}{x-1}$ geworden ist, und für alle größeren Werthe $r(x-1) > nx+1$; oder $rx-r > nx+1$; also auch, weil $r > 1$ und $rx > nx$; $rx-nx > r+1$; und folglich $\frac{(r-n)x}{r+1} > 1$. Also wird jeder folgende Werth des Factors $n\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,\cdots\,\frac{n-(r-1)}{r}\,A\,.\,x^r$ größer, als der vorhergehende.

β. Wenn aber n negativ, und z. B. $= -m$ ist, wo nun m wieder eine positive Größe vorstellt; so ist es um so offenbarer, daß bey demselben Werthe von r wie vorhin, $\frac{(r+m)}{r+1}x > 1$ seyn müsse, wenn schon $\frac{(r-n)}{r+1}x$ es ist.

2. Es sey nun zweytens $x = +1$; so wird der Ausdruck $n\,\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-(r-1)}{r}\,(n-r)\,A\,x^r$ nun $=$ $n\,\frac{n-1}{}\,\cdots\,\frac{n-(r-1)}{r}\,(n-r)\,A$. Es sey auch ferner noch

α.) n negativ, und z. B. $= -m$, wo nun m eine positive Größe vorstellt; so wird der obige Ausdruck $=(-m)\,\frac{-m-1}{2}\,\frac{-m-2}{3}\cdots\frac{-m-(r-1)}{r}\,(-m-r)\,A$

Der Werth desselben für $r+1$ ist
$(-m)\frac{-m-1}{2}\,\frac{-m-2}{3}\cdots\frac{-m-(r-1)}{r}\,\frac{-m-r}{r+1}\,(-m-r-1)A.$

Also der Quotient des letztern durch den erstern, oder dasjenige, womit man jenen multipliciren muß, um diesen zu erhalten $= \frac{-m-r-1}{r+1} = -\frac{r+1+m}{r+1} > 1$. Also wird jeder folgende Werth größer als der vorhergehende; die Gleichung ♁ kann also nicht bestehen.

β. Um aber einzusehen, daß sie auch in dem Falle nicht bestehen könne, wen n positiv ist, bedarf es einer etwas weitläufigeren Untersuchung. Zu diesem Ende ist §. 31 bemerkt, daß die Möglichkeit der Gleichung ♁ auch die der ♂ erfordere. Denkt man sich die daselbst bloß angedeutete Multiplication wirklich verrichtet; so begreift man, daß die höchste Potenz von x auf der einen Seite des Gleichheitszeichens

$n(n-1)(n-2)\ldots(n-p)Rx^{\varrho}$, und auf der andern $\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)\ldots(\varrho-p)Rx^{\varrho}$ sey. Soll also die Gleichung bestehen, so muß

$$\Big(n(n-1)(n-2)\ldots(n-p)-\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)\ldots(\varrho-p)\Big)Rx^{\varrho}$$

entweder Null, oder doch so klein werden können, als man nur immer will. In diesem Ausdrucke ist aber, wie wir aus §. 31 wissen, $\varrho =$ irgend einer ganzen positiven Zahl r und $R = n\,\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-(r-1)}{r}A$; derselbe ist also

$$= \Big(n(n-1)(n-2)\ldots(n-p)-r(r-1)(r-2)\ldots(r-p)\Big)\times$$

$n.\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-(r-1)}{r}.Ax^{r}$; und sein nächstfolgender Werth für r + 1 ist

$$=\Big(n(n-1)(n-2)\ldots(n-p)-(r+1)r(r-1)\ldots(r+1-p)\Big)\times$$

$$n.\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-(r-1)}{r}\,\frac{n-r}{r+1}Ax^{r+1}.$$

Wenn nun n keine ganze positive Zahl, auch nicht

Null ist; so ist offenbar kein Factor dieser beyden Ausdrücke $= 0$; man kann daher den erstern in den letzteren dividiren, um so dasjenige zu finden, womit man jenen multipliciren muß, um diesen zu erhalten. Es ist

$$= \left(\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p)-(r+1)r(r-1)\ldots(r+1-p)}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p)-\quad r(r-1)\ldots(r-p)}\right)\frac{n-r}{r+1}.x$$

Für $x = 1$ ist also dieser Factor $=$

$$\left(\frac{(r+1)r(r-1)\ldots(r+1-p)-n(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}{r(r-1)\ldots(r-p)-n(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}\right)\frac{n-r}{r+1}.$$

Wenn man in dieses Bruches Zähler sowohl als Nenner die bloß angedeutete Multiplication mit den Factoren, die r enthalten, wirklich verrichten, und alles nach den Potenzen von r ordnen würde; so erhielte man einen Ausdruck von folgender Form:

$$\frac{r^{p+2} + \left(-n+1+0-1-2-\ldots-(p-1)\right)r^{p+1} + \ldots}{r^{p+2} + \left(\quad +1+0-1-2-\ldots-p \quad\right)r^{p+1} + \ldots}$$

Die Glieder, welche hier durch blosse Puncte angedeutet sind, enthalten lauter niedrigere Potenzen von r; die Coefficienten von r^{p+1} aber sind nach der bekannten Regel bestimmt, zufolge welcher der Coefficient des zweyten Gliedes in der Entwicklung eines Productes von der Form $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots, = (a+b+c+\ldots)$ seyn muß (§. 6). Es ist daher, wenn man den Nenner wirklich in den Zähler dividirt, der Quotient

$$=1+\frac{\left(-n+1-1-2-..-(p-1)-1+1+2+..+p\right)r^{p+1}+..}{r^{p+2}+\left(+1-1-2-..-p\right)r^{p+1}+..}$$

$$=1+\frac{(p-n)\,r^{p+1}+\ldots.}{r^{p+2}+\left(+1-1-2-..-p\right)r^{p+1}+..}.$$

In diesem Ausdrucke kann nun p was immer für eine ganze positive Zahl bedeuten, also auch eine, die größer als das positive n ist. Dann aber ist in dem letzten Bruche der Coefficient des ersten Gliedes in Zähler positiv, so wie das erste Glied im Nenner. Da aber r so groß genommen werden kann, als man nur immer will, und alle dem ersten folgende Glieder sowohl im Zähler als Nenner nur lauter niedrigere Potenzen von r enthalten: so wird sich allemahl r so groß annehmen lassen, daß das erste Glied im Zähler und im Nenner größer als alle folgenden zusammen ist (§. 25). Für ein solches, und für alle größeren r ist demnach der Werth jenes Bruches sicher positiv, und folglich $1+\frac{(p-n)r^{p+1}+..}{r^{p+2}+..}>1.$

Daher wird jeder nachfolgende Werth des Ausdruckes

$$\left(n(n-1)(n-2)..(n-p)-r(r-1)(r-2..(r-p)\right)Rx^{r}$$

größer, als der nächstvorhergehende; und also kann die Gleichung ♂, mithin auch die ♁ und ⊙ auf keine Art bestehen.

3. Wenn nun die Größen, die wir bisher betrachtet haben, nicht so klein werden können, als man nur immer

will, so oft $x >$ oder $= + 1$ ist; so können sie dieß auch nicht für die Werthe $x >$ oder $= - 1$ werden. Denn sie enthalten keine andere Function von x, als den Factor x^r, der höchstens nur sein Zeichen, nicht seine Größe ändert, wenn x sein Zeichen ändert. Also gilt die Binomialgleichung für keinen Werth von x, der $>$ oder auch nur $= \pm 1$ ist, wenn nicht zugleich n eine ganze positive Zahl oder Null ist.

§. 36.

Zusatz. So oft dagegen $x < \pm 1$ ist, so gilt die Gleichung 3 ohne Ausnahme, n mag bedeuten, was es will; weil sich das Glied

$$n . \frac{n-1}{2} \ldots \frac{n-(r-1)}{r} (n-r) A x^r$$

dann allemahl so klein machen läßt, als man nur immer will, wenn man r groß genug nimmt. Denn der zu $(r+1)$ gehörige, d. h. der nächstfolgende Werth dieser Größe ist $=$

$$n \frac{n-1}{2} \ldots \frac{n-(r-1)}{r} \frac{n-r}{r+1} (n-r-1) A x^{r+1}.$$

Also der Quotient des ersten in den letzten, oder dasjenige, womit man jenen multipliciren muß, um diesen zu erhalten, ist $= \frac{n-r-1}{r+1} x = - \frac{r+1-n}{r+1} x$. Wenn nun

α. zuförderst n positiv ist, so ist von dort an, wo $(r+1) > n$ ist, und für alle folgenden Werthe von r, $\frac{r+1-n}{r+1}$ offenbar ein echter Bruch, der sich zwar, wenn r wächst, vergrößert, aber doch immer < 1 bleibet; daher denn das Product $\frac{r+1-n}{r+1} \cdot x$ allezeit um etwas kleiner noch als der echte Bruch x ist. Also entsteht jeder folgende Werth der Größe $n \frac{n-1}{2} \ldots \frac{n-r+1}{r} (n-r) A x^r$ aus dem vorhergehenden durch Multiplication mit einem echten Bruche, der immer kleiner bleibt, als x. Also kann diese Größe als ein Product betrachtet werden, dessen ein Factor (nähmlich der Werth, den dieselbe für das größte r, das noch nicht $> (n-1)$ ist, hat) nnverändert bleibt, während der andere selbst ein Product aus einer beliebig zu vermehrenden Anzahl von Brüchen ist, die jeder $< x$ sind. Nach §. 22 nud 17 kann eine solche Größe kleiner als jede gegebene werden.

β. Ist aber zweytens n negativ z. B. $= -m$, so ist $\frac{r+1-n}{r+1} = \frac{r+1+m}{r+1}$ allerdings > 1. Es läßt sich aber doch immer ein Werth für r angeben, für den und alle größeren das Product aus diesem unechten Bruche in den echten x, < 1 ist. Denn hiezu nehme man nur $(r+1) > \frac{mx}{1-x}$; so ist auch $(r+1)(1-x) > mx$; folglich auch, da $1 > x$; $(r+1) > (r+1)x + mx$ $= (r+1+m)x$. Mithin $\frac{(r+1+m)}{r+1} \cdot x$ ein echter Bruch. Je größer man aber, von diesem Werthe an, r nimmt, um desto kleiner wird dieser echte Bruch, indem der eine Factor desselben, der unechte Bruch $\frac{r+1+m}{r+1}$ der Einheit immer näher tritt. Mithin gelten die obigen Schlüsse auch hier, oder die Größe $n \frac{n-1}{2} \ldots \frac{n-r+1}{r} (n-r) A x^r$

ist ein Product aus einer unveränderlichen Größe in eine beliebig zu vermehrende Anzahl echter Brüche, die alle kleiner sind, als $\frac{r+1+m}{r+1}x$.

§. 37.

Uibergang. Durch das Bisherige ist nun bereits entschieden, daß die Binomialgleichung für keinen Werth von $x > \pm 1$ gelte, wenn der Exponent nicht etwa Null oder eine ganze positive Zahl ist; und zwar ist dieses bloß aus der Bedingungsgleichung z entschieden. Daß aber die Binomialgleichung auch selbst für Werthe von x, die $< \pm 1$ sind, ungültig wäre, sagt diese Gleichung, wie wir so eben gesehen haben, nicht. Und hiemit nun hat sie uns schon alles, was sie zu lehren vermag, gelehret. Denn daß die Binomialgleichung für jene Werthe in der That gelte, eine dergleichen bejahende Entscheidung können wir von ihr auf keinen Fall erwarten. Wir müssen uns also jetzt zu ganz andern Gründen wenden, um zu entscheiden, ob die Binomialgleichung in allen, oder in welchen Fällen, wo $x < \pm 1$ ist, sie gelte.

§. 38.

Lehrsatz. Wenn man die zwey Binomialreihen

$$1 + px + p\frac{p-1}{2}x^2 + \ldots + p\frac{p-1}{2}\ldots\frac{p-(r-1)}{r}x^r$$

und $1 + qx + q\frac{q-1}{2}x^2 + \ldots + q\frac{q-1}{2}\ldots\frac{p-(s-1)}{s}x^s$,

in denen p und q was immer für Größen bezeichnen, mit einander multiplicirет, und das Product nach den Potenzen von x ordnet: so sind alle Glieder des Productes vom ersten anzufangen, bis zu dem Gliede x^r oder x^s, je nachdem r oder s die kleinere Zahl ist, mit den eben so vielten Glieder einer zu $(1+x)^{(p+q)}$ gehörigen Binomialreihe identisch.

Beweis. Die Glieder der zu $(1+x)^{(p+q)}$ gehörigen Binomialreihe vom ersten anzufangen, bis zu dem Gliede x^m sind nach §. 3:

$$1 + (p+q)x + (p+q)\frac{(p+q-1)}{2}x^2 + \ldots$$
$$+ (p+q)\frac{(p+q-1)}{2}\ldots\frac{(p+q-m+1)}{m}x^m.$$

Mit diesen also sollen die eben so vielten Glieder jenes Productes, wenn es gehörig entwickelt wird, identisch seyn. Daß nun das erste, das zweyte, das dritte,.. Glied in der That übereinstimme, erhellet aus der wirklichen Verrichtung der Multiplication sehr leicht. Daß aber eben dieß auch von den folgenden, bis zu dem Gliede mit der Potenz x^r oder x^s gelte, erhellet auf folgende Art:

1. Wenn p und q zwey ganze und positive Zahlen bedeuten; so ist nach §. 8:

$$1 + px + p\frac{p-1}{2}x^2 + \ldots$$
$$+ p\frac{p-1}{2}\ldots\frac{p-r+1}{r}x^r = (1+x)^p,$$

und $1 + qx + q\frac{q-1}{2}x^2 + \ldots$

$$+ q\frac{q-1}{2}\ldots\frac{q-s+1}{s}x^s = (1+x)^q,$$

wenn anders r und s nicht kleiner als p und q angenommen werden. Also das Product, aus diesen beyden Reihen, das wir M nennen wollen, seinem Werthe nach nothwendig $= (1+x)^p . (1+x)^q = (1+x)^{p+q} =$

$$= 1 + (p+q)x + (p+q)\frac{(p+q-1)}{2}x^2 + \ldots$$

$$+ (p+q)\frac{(p+q-1)}{2} \ldots \frac{(p+q-t+1)}{t}x^t,$$

weil auch $(p+q)$ eine ganze positive Zahl vorstellt.. Diese Gleichheit bestehet, für jeden Werth von x, also auch für jeden, der kleiner als eine gewisse Grenze ist; daher wenn M nach den Potenzen von x gehörig geordnet ist, der §. 28 eine Anwendung auf diese Gleichung leidet; d. h. es muß zu jedem Gliede derselben auf der einen Seite ein völlig gleiches auch auf der andern geben. Es stelle nun m irgend eine ganze positive Zahl, die nur nicht $>$ r oder $>$ s ist, vor, und der im Producte M zur Potenz x^m gehörige Coefficient werde (weil er bey einerley m doch nur eine Function von p und q seyn kann) durch $F(p,q)$ bezeichnet: so muß denn wenigstens dem Werthe nach

$$F(p,q) = (p+q)\frac{(p+q-1)}{2} \ldots \frac{(p+q-m+1)}{m} \text{ seyn.}$$

Wenn man nun m unverändert läßt, während man die Zahlen p und q beliebig vergrößert; so kann dieß offenbar die Gestalt der $F(p,q)$ (d. h. die in diesem Ausdrucke angedeutete Regel, wie der Werth von $F(p,q)$ aus p und q hergeleitet werden soll) gar nicht verändern. Denn die Vergrößerung der Zahlen p und q ändert in den Reihen $1 + px + \ldots$, und $1 + qx + \ldots$, welche die Factoren des Productes M ausmachen, nichts; es sey denn, daß die Anzahl ihrer Glieder über r und s hinaus vermehret werden muß. Da aber m weder $>$ r, noch $>$ s seyn soll, so hat keines der neuen Glieder, die durch Vermehrung von p und q zu den Factoren hinzukommen, einen Einfluß auf die Bildung des Coefficienten von x^m, auf den bekanntlich nur jene Glieder der zwey Factoren einen Einfluß haben, deren Exponenten gleich oder kleiner als m sind. Daher gibt es unzählig viele Werthe, die man für p und q setzen kann, ohne daß die Gleichung $F(p,q) = (p+q)\frac{(p+q-1)}{2} \ldots \frac{(p+q-m+1)}{m}$ gestöret wird; und hieraus folgt, daß sie in Ansehung der Größen p und q identisch seyn müsse. Um diese Folge recht deutlich einzusehen, laßt uns die Form der beyden Glieder dieser Gleichung noch etwas genauer betrachten. Der Binomialcoefficient

$$(p+q)\frac{(p+q-1)}{2} \ldots \frac{(p+q-m+1)}{m}$$

gibt, wenn er nach den Potenzen einer der beyden Größen p oder q, z. B. p entwickelt wird, einen Ausdruck, von der Form $Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2} + \ldots + Lp$, worin A, B, C, . . . L theils beständige Größen, theils Functionen von q allein vorstellen. Aber auch F(p,q) kann, wenn es nach den Potenzen von p geordnet wird, nur von der Form $\overset{1}{A}\,p^m + \overset{1}{B}\,p^{m-1} + \overset{1}{C}\,p^{m-2} + \ldots + \overset{1}{L}\,p$ seyn; indem diese Function offenbar keine höheren Potenzen von p enthalten kann, als die mte, weil keine höhere in denjenigen Gliedern der Factoren von M, aus deren Verbindung $F(p,q) \cdot x^m$ gebildet worden ist, erscheinet. Es gilt daher die Gleichung

$$Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2} + \ldots + Lp =$$
$$A^1p^m + B^1p^{m-1} + C^1p^{m-1} + \ldots + L^1p, \text{ oder}$$
$$(A-A^1)p^m + (B-B^1)p^{m-1} + (C-C^1)p^{m-2} + \ldots$$
$$+ (L-L^1)\,p = 0,$$

in der man unzählige Werthe für p muß setzen können. Hieraus ergibt sich nun klar, daß jeder Coefficient einer eigenen Potenz von p für sich = o seyn müsse; weil im entgegengesetzten Falle, wenn einige dieser Coefficienten reelle Größen wären, nach einer bekannten Eigenschaft der Gleichungen nur eine endliche Menge von Werthen für m (höchstens m) möglich wäre. So nach ist

$$A = A^1,\ B = B^1,\ C = C^1,\ \ldots\ L = L^1.$$

Diese Größen selbst, welche zum Theile noch Functionen von q sind, können einleuchtender Weise gleichfalls nur von der Form

$$aq^m + bq^{m-1} + \ldots + lp; \text{ und}$$
$$a^1q^m + b^1q^{m-1} + \ldots + C^1 \cdot q \text{ seyn, wo jetzo}$$

$a, b, \ldots l$; und $a^1, b^1, \ldots l^1$ nur lauter beständige Größen bezeichnen. Es stelle nun z. B. $aq^m + bq^{m-1} + \ldots + lq$ eine der gleichen Größen $A = A^1$, oder $B = B^1$, u. s. w. vor; und $a^1q^m\ b^1q^{m-1} + \ldots + l^1q$ die andere: so gilt abermahls die Gleichung $aq^m + bq^{m-1} + \ldots + lq = a^1q^m + b^1q^{m-1} + \ldots + l^1q$ für unzählig viele Werthe von q; woraus sich nothwendig ergibt, daß $a = a^1$, $b = b^1$, ... $1 = 1^1$ seyn müsse. Also ist die Function $F(p, q)$ aus p und q und gewissen beständigen Größen $a, b, \ldots l$, u. s. w. ganz auf dieselbe Art zusammen gesetzt, wie

$$(p+q)\frac{(p+q-1)}{2}\ldots\frac{(p+q-m+1)}{m};$$ also mit ihr identisch. — Da nun m jede ganze positive Zahl, die nur nicht $> r$ oder $> s$ ist, bedeuten kann; so erhellet, daß alle Glieder im Producte M, deren Potenz nur nicht $> r$ oder $> s$ ist, den eben so vielten in der zu $(1+x)^{p+q}$ gehörigen Binomialreihe identisch sind, wenn p und q ganze positive Zahlen bedeuten.

2. Aber dasselbe muß auch der Fall seyn, wenn p und q was immer für andere (gebrochene, negative, oder auch irrationale) Größen bezeichnen. Denn die Art, wie man bey Multiplicirung der beyden Reihen $1 + px + \ldots$, $1 + qx + \ldots$ verfährt, bleibt unverändert dieselbe, was immer die Buchstaben p und q bedeuten mögen. Wissen wir also (aus n° 1) daß man in dem Falle, in welchem p, q ganze positive Zahlen sind, die Coefficienten der zu $(1+x)^{p+q}$ gehörigen Binomialreihe erhält; so können wir hieraus mit Sicherheit schließen, daß diese auch in jedem andern Falle zum Vorschein kommen müssen.

§. 39.

Anmerkung. Eine völlige Gleichheit zwischen jenem Producte und der Binomialreihe folgt aus dem so eben Erwiesenen noch nicht; sondern nur, daß beyde Reihen bis zu dem Gliede hin gleichartig sind, das in die kleinere der zwey Potenzen x^r, x^s multiplicirt ist. Nun kann man zwar r und s so groß annehmen, als man nur immer will, und also die Gleichförmigkeit der beyden Reihen so weit hinausdehnen, als es beliebt: aber so weit man dieß auch getrieben, und so groß man diesem Behufe auch r und s angenommen habe; so gibt es immer noch hinter dem Gliede mit x^r (oder x^s), in dem Producte eine Menge anderer Glieder, deren Exponenten höher sind (nähmlich bis $(r+s)$ steigen); und diese sind keinesweges mit den gleichvielten Potenzen der zu $(1+x)^{p+q}$ gehörigen Binomialreihe identisch. Die Menge dieser Glieder wird um so größer, je größer man r und s annimmt, indem sie jederzeit, der Größeren aus diesen beyden Zahlen gleichet. So viele Glieder also in dem Producte M mit der Binomialreihe auch übereinstimmen mögen, so viele wenigstens, weichen auch von ihr ab. Und wenn $x > \underline{+}\ 1$, und n keine ganze positive Zahl ist; so sind die abweichenden Glieder ihrem Werthe nach immer viel größer als die übereinstimmigen. Also läßt sich in einem solchen Falle auch durchaus von keiner Gleichheit der beyden Reihen sprechen. Nur in dem Falle, wenn x ein echter Bruch ist, tritt der besondere Umstand ein, daß die ungleichen Glieder immer kleiner werden, und daß man den Werth ihrer Summe durch die Vermehrung von r und s wirklich so klein machen kann, als man nur immer will; wie dieß der folgende §. beweist.

§. 40.

Lehrsatz. Der Werth des Productes aus den zwey Reihen $1 + px + p\,\frac{p-1}{2}\,x^2 + \ldots + p\,\frac{p-1}{2} \ldots \frac{p-r+1}{r}\,x^r$

und $1 + qx + q\,\frac{q-1}{2}\,x^2 + \ldots + q\,\frac{q-1}{2} \ldots \frac{q-s+1}{s}\,x^s$

ist von dem Werthe der Reihe

$$1 + (p+q)x + (p+q)\,\frac{(p+q-1)}{2}\,x^2 + \ldots$$

$$+ (p+q)\,\frac{(p+q-1)}{2} \ldots \frac{(p+q-t+1)}{t}\,x^t$$

um eine Größe unterschieden, welche man kleiner als jede gegebene machen kann, wenn man r, s, t groß genug nimmt, und x ein echter Bruch ist.

Beweis. Nach §. 38 ist das Product jener zwey Reihen bis auf das Glied x^r (wenn r die kleinere der beyden Zahlen r und s anzeigt) mit der zuletzt erwähnten Binomialreihe identisch. Dann aber folgen in dem Producte noch mehr andre Glieder, welche man findet, wenn man mit einer der Reihen z. B. der ersten, Glied vor Glied nur diejenigen Glieder der zweyten multiplicirt, die mit dem Multiplicator vereinigt, eine höhere Potenz als x^r erzeugen. Zur Ersparung des Raumes wollen wir die Coefficienten der erstin Reihe der Ordnung nach durch $1, p, \overset{(2)}{p}, \overset{(3)}{p}, \ldots \overset{(r)}{p}$, jene der zweyten durch $1, q, \overset{(2)}{q}, \overset{(3)}{q}, \ldots \overset{(s)}{q}$ bezeichnen. Es sind demnach die Glieder, die im Producte noch ferner vorkommen, nachstehende:

$$\left(\overset{(r+1)}{q}\,x^{r+1} + \overset{(r+2)}{q}\,x^{r+2} + \ldots\ldots + \overset{(s)}{q}\,x^{s}\right)$$

$$+\left(\overset{(r)}{q}\,x^{r} + \overset{(r+1)}{q}\,x^{r+1} + \ldots\ldots + \overset{(s)}{q}\,x^{s}\right)p\,x$$

$$+\left(\overset{(r-1)}{q}\,x^{r-1} + \overset{(r)}{q}\,x^{r} + \ldots\ldots + \overset{(s)}{q}\,x^{s}\right)\overset{(2)}{p}.x^{2}$$

$$+ \ldots$$

$$+\left(q\,x + \overset{(2)}{q}\,x^{2} + \ldots\ldots\ldots + \overset{(s)}{q}\,x^{s}\right)\overset{(r)}{p}\,.\,x^{r}$$

Die Summe dieser Glieder ist der Unterschied des Productes M und der zu $(1+x)^{p+q}$ gehörigen Binomialreihe, wenn man in ihr $t = r$ annimmt. Kann also gezeigt werden, daß diese Summe durch die Vermehrung von r kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden könne, so ist der Lehrsatz erwiesen. Offenbar aber ist der Werth dieser Summe kleiner als derjenige, der dann zum Vorschein kömmt, wenn man alle Glieder derselben als gleichartig (d. h. z. B. als positiv) ansieht, und an die Stelle der verschiedenen Coefficienten $p, \overset{(2)}{p}, \overset{(3)}{p}, \ldots \overset{(r)}{p}$; $q, \overset{(2)}{q}, \overset{(3)}{p}, \ldots \overset{(s)}{q}$ immer den größten seiner Art, den wir durch P und Q andeuten wollen, setzet. Dieß gibt die Summe:

$$Q\,x^{r+1}\left(1 + x + x^{2} + \ldots + x^{s-r-1}\right)$$

$$+ PQ\,x^{r+1}\left(1 + x + x^{2} + \ldots + x^{s-r}\right)$$

$$+ PQ\,x^{r+1}\left(1 + x + x^{2} + \ldots + x^{s-r+1}\right)$$

$$+ \ldots$$

$$+ PQ\,x^{r+1}\left(1 + x + x^{2} + \ldots + x^{s-1}\right) =$$

$$Q\,x^{r+1}\,\frac{1-x^{s-r}}{1-x}$$

$$+PQx^{r+1}\left(\frac{1-x^{s-r+1}}{1-x}+\frac{1-x^{s-r+2}}{1-x}+\ldots+\frac{1-x^{s}}{1-x}\right)=$$

$$Q\,\frac{x^{r+1}-x^{s+1}}{1-x}$$

$$+\,PQ\,\frac{x^{r+1}}{1-x}\left(r-x^{s-r+1}\left(1+x+x^2+\ldots+x^{r-1}\right)\right)=$$

$$Q\,\frac{x^{r+1}-x^{s+1}}{1-x}\;+PQ\,\frac{x^{r+1}}{1-x}\left(r-x^{s-r+1}\,\frac{1-x^{s}}{1-x}\right)=$$

$$Q\,\frac{x^{r+1}-x^{s+1}}{1-x}\;+PQ\,\frac{r\,x^{r+1}}{1-x}\;-PQ.\frac{x^{s+2}-x^{s-r+2}}{(1-x)^2}$$

Wenn nun der Exponent n **positiv** ist, so werden die Binomialcoefficienten, anzufangen von einem gewissen Werthe von r, (nähmlich demjenigen, wo $r > \frac{1}{2}n$ ist) immer um desto kleiner je größer man r annimmt. Ist aber derselbe **negativ**, so wachsen sie stets. Können wir also beweisen, daß der Ausdruck selbst in dem letzteren Falle so klein werden kann, als man nur immer will; so ist es einleuchtend, daß er es in jedem andern um so gewisser werden könne. In diesem Falle nun ist der größte Coefficient allzeit der letzte; also

$$P=p\,\frac{p-1}{2}\ldots\frac{p-r+1}{r},\text{ und } Q=q\,\frac{q-1}{2}\ldots\frac{q-s+1}{s}.$$

Substituirt man diese Werthe, so zeigt sich, daß jedes der obigen drey Glieder durch Vergrößerung von r und s so klein werden könne, als man nur immer will, folglich nach §. 15 auch ihre Summe. Das Glied $Q\frac{x^{r+1}-x^{s+1}}{1-x}$ kann nähmlich so klein werden, als man nur immer will, wenn es die beyden Theile Qx^{r+1}, Qx^{s+1} seines Zählers werden können, indem der Nenner $1-x$ eine beständige Größe ist (§. 17). Nun ist

$Qx^{r+1} = q\,\frac{q-1}{2} \ldots \frac{q-s+1}{s}\,x^{s+1}$. Und wenn man r und s willkürlich vergrößert, z. B. jedes um eine Einheit; so entsteht der neue Werth, den dieses Glied annimmt, aus dem vorigen durch Multiplication mit

$\frac{q-s}{s+1}\,x = -\frac{s-q}{s+1}\,x$, eine Größe, die auch wenn q negativ ist, anzufangen von einem gewissen s und für alle größeren ein echter Bruch ist, der sich dem Werthe x stets nähert. Also wird das gedachte Glied durch die beliebige Vermehrung von r und s, mit einer beliebig zu vermehrenden Anzahl echter Brüche, die immer kleiner werden, multiplicirt, und kann daher kleiner als jede gegebene Größe werden (§. 22). Ein Gleiches läßt sich auf gleiche Art von dem Gliede

$Q\,x^{s+1} = q\,\frac{q-1}{2} \ldots \frac{q-s+1}{s}\,x^{s+1}$ zeigen; wie auch von den Gliedern PQx^{s+2}, PQx^{s+r+2}, welche den dritten Theil des zu berechnenden Ausdrucks bilden. Endlich kann auch der Theil $PQr\,\frac{x^{r+1}}{1-x}$ so klein werden, als man nur immer will, wenn man r, s groß genug nimmt. Denn er ist

$$= p.\frac{p-1}{2}\ldots\frac{p-r+1}{r}.q\frac{q-1}{2}\ldots\frac{q-s+1}{s}.\frac{r\,x^{r+1}}{1-x}.$$

Vergrößert man nun r und s willkürlich, z. B. jedes um 1; so entsteht der neue Werth, den diese Größe annimmt, aus dem vorherigen durch Multiplication mit $\frac{p-r}{r+1}\,\frac{q-s}{s+1}\,\frac{r+1}{r}\,x = \frac{r-p}{r}\,\frac{s-q}{s+1}\,x$. Da nun selbst wenn p und q negativ sind, d. h. wenn $\frac{r-p}{r}$, $\frac{s-q}{s+1}$ unechte Brüche sind, ihr Werth der Einheit so nahe kommen kann, als man nur will, wenn man r und s groß genug nimmt; so gibt es einen Werth für r, und s, von dem an, und für alle folgenden, das Product $\frac{r-p}{r}\,\frac{s-qx}{s+1}$ ein echter Bruch ist, der immer kleiner wird, und sich dem Werthe x immer mehr nähert. Also muß auch $P\,Q\,\frac{r\,x^{r+1}}{1-x}$ so klein werden können, als man nur will, wenn man r und s groß genug nimmt.

§. 41.

Lehrsatz. Gilt die Binomialgleichung für zwey bestimmte Werthe des Exponenten, p und q entweder ganz genau, oder doch so, daß der Unterschied kleiner als jede gegebene Größe werden kann: so gilt sie in eben dem Sinne auch für den Exponenten (p + q), wenn nur x immer einerley bleibt, und ein echter Bruch ist.

Beweis. Zufolge der Voraussetzung soll

$$(1+x)^p = 1 + px + p\,\frac{p-1}{2}\,x^2 + \ldots$$

$$+ p\,\frac{p-1}{2} \ldots \frac{p-r+1}{r}\,x^r + \overset{(p)}{\Omega}, \text{ und}$$

$$(1+x)^q = 1 + qx + q\,\frac{q-1}{2}\,x^2 + \ldots$$

$$+ q\,\frac{q-1}{2} \ldots \frac{q-s+1}{s}\,x^r + \overset{(q)}{\Omega} \text{ seyn,}$$

in welchen Gleichungen $\overset{(p)}{\Omega}$, und $\overset{(q)}{\Omega}$ entweder Null oder doch Größen bedeuten, die kleiner als jede gegebne werden können, wenn man r und s groß genug nimmt. Daher wird auch $(1+x)^p\,(1+x)^q = (1+x)^{p+q} =$

$$\left(1+px+\ldots+p\,\frac{p-1}{2}\ldots\frac{p-r+1}{r}\,x^r+\overset{(p)}{\Omega}\right)$$

$$\times\left(1+qx+\ldots+q\,\frac{q-1}{2}\ldots\frac{q-s+1}{s}\,x^s+\overset{(q)}{\Omega}\right) =$$

$$\left(1+px+\ldots+p\,\frac{p-1}{2}\ldots\frac{p-r+1}{r}\,x^r\right)\times$$

$$\times\left(1+qx+\ldots+q\,\frac{q-1}{2}\ldots\frac{q-s+1}{s}\,x^s\right)+$$

$$\left((1+x)^p - \overset{(p)}{\Omega}\right)\overset{(q)}{\Omega} + \left((1+x)^q - \overset{(q)}{\Omega}\right)\overset{(p)}{\Omega}$$

seyn. Die letzteren zwey Größen können nach §. 17 so klein werden, als man nur will, wenn man r, s groß genug nimmt. Das Product jener zwey Reihen aber kann, weil x ein echter Bruch seyn soll, nach §. 40 dem Werthe der Reihe

$$1 + (p+q)x + (p+q)\frac{(p+q-1)}{2}x^2 + \ldots$$

$$+ (p+q)\frac{(p+q-1)}{2}\ldots\frac{(p+q-r+1)}{r}x^r,$$

(wo r die kleinere der beyden Zahlen r und s anzeigt) so nahe gebracht werden, als man nur will, wenn man r und s groß genug nimmt. Es läßt sich also nach §. 15 schreiben

$$(1+x)^{p+q} = 1 + (p+q)x + (p+q)\frac{(p+q-1)}{2}x^2 + \ldots$$

$$+ (p+q)\frac{(p+q-1)}{2}\ldots\frac{(p+q-r+1)}{r}x^r + \overset{2}{\Omega}$$

wo $\overset{2}{\Omega}$ kleiner als jede gegebene Größe werden kann, wenn man r groß genug nimmt. Bey dieser Bedeutung des Buchstabens r ist aber letztere Reihe das, was man die zur Potenz $(1+x)^{p+q}$ gehörige Binomialreihe nennt. Also gilt die Binomialgleichung auf für die Exponenten $(p+q)$ in der Bedeutung, daß der Unterschied entweder Null oder kleiner als jede gegebene Größe werden kann, wenn man r groß genug nimmt.

§. 42.

Lehrsatz. Die Binomialgleichung gilt auch für jede ganze negative Zahl des Exponenten in dem Sinne, daß der Unterschied kleiner als jede gegebene Größe werden kann, wenn x ein echter Bruch ist, und man die Anzahl der Glieder groß genug nimmt.

Beweis. Diese Gleichung gilt, wie wir schon §. 12 gesehen, für den Werth $n = -1$ auf die Art, daß der Unterschied kleiner als jede gegebene werden kann, wenn man r groß genug nimmt, und x ein echter Bruch ist. Hieraus ergibt sich aber nach §. 41, wenn man dort $p = -1$, $q = -1$ setzt, daß die Binomialgleichung in eben dem Sinne auch für den Exponenten $= -2$ gelte. Und hieraus abermahls, wenn man nun $p = -2$, $q = -1$ setzt, daß sie auch für den Exponenten $= -3$ gelte. U. s. w. Da man auf diese Art stets weiter schließen kann, und durch wiederholte Addirung von -1 und -1 zu jeder ganzen negativen Zahl gelanget: so leuchtet die Wahrheit des Satzes ein.

§. 43.

Lehrsatz. Die Binomialgleichung gilt auch für jeden gebrochenen positiven Werth des Exponenten von der Form $\frac{1}{m}$, wo m eine ganze Zahl anzeigt, auf die Art, daß der Unterschied kleiner als jede gegebene Größe werden kann, wenn man die Menge der Glieder hinlänglich vermehrt, x einen echten Bruch bezeichnet, und ein für alle Mahl vorausgesetzt wird, daß man unter $(1+x)^{\frac{1}{m}}$ nur den reellen und positiven Werth, den dieser Ausdruck anzeigen kann, verstehe.

Beweis. Der Werth der Reihe

$$1 + \frac{1}{m}x + \frac{1}{m}\,\frac{\frac{1}{m}-1}{2}x^2 . + . . .$$

$$+ \frac{1}{m}\,\frac{\frac{1}{m}-1}{2} . . \frac{\frac{1}{m}-r+1}{r}\,x^r$$

welche die zur Potenz $(1+x)^{\frac{1}{m}}$ gehörige Binomialreihe ist, verbleibt so groß man auch r in ihr annehmen mag, doch immer kleiner als eine gewisse unveränderliche Größe, wenn nur $x = \pm 1$ ist. Denn die Coefficienten dieser Reihe

$$\frac{1}{m},\ \frac{1}{m}\cdot\frac{\frac{1}{m}-1}{2},\ \ldots\ \frac{1}{m}\cdot\frac{\frac{1}{m}-1}{\ldots}\ \ldots\ \frac{\frac{1}{m}-r+1}{r}$$

sind sämmtlich echte Brüche; indem es der erste ist, und jeder folgende aus dem vorhergehenden durch Multiplication mit einem echten Bruche von der Form

$$\frac{\frac{1}{m}-p+1}{p} = -\frac{p-1-\frac{1}{m}}{p}$$

entspringt. Gesetzt also, es wären auch alle Glieder der Reihe in Ansehung ihres Zeichens von einerley Art: so wäre ihre Summe doch gewiß immer kleiner, als

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^r = \frac{1-x^{r+1}}{1-x}.$$

Wenn nun $x < \pm 1$, so wird x^{r+1} um desto kleiner, je größer man r annimmt. Ist x zugleich positiv, so ist der Werth von $\frac{1-x^{r+1}}{1-x}$ offenbar immer $< \frac{1}{1-x}$. Ist aber x negativ, so ist $-x^{r+1}$ für jeden geraden Werth von r positiv, und also $\frac{1-x^{r+1}}{1-x}$ etwas größer als $\frac{1}{1-x}$ aber doch immer kleiner als der Werth derselben Größe für irgend ein kleineres gerades r, also stets kleiner, als (wenn man $r = 0$ setzt) $\frac{1-x}{1-x} = 1$. Also sind $\frac{1}{1-x}$ oder 1 die Grenzen, welche der Werth jener Reihe, so groß man auch r in ihr annehmen mag, niemahls erreicht. Nennen wir also den jedesmahligen Werth derselben U, so ist U eine Größe, die immer kleiner als $\frac{1}{1-x}$ oder 1 bleibt. Multiplicirt man die Reihe mit sich selbst, so ist der Werth dieses Productes nach §. 41, wenn man dort $p = \frac{1}{m}$, $q = \frac{1}{m}$ setzt, von dem Werthe der Reihe

$$1 + \frac{2}{m}x + \frac{2}{m}\cdot\frac{\frac{2}{m}-1}{2}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{2}{m}\cdot\frac{\frac{2}{m}-1}{2}\ldots\frac{\frac{2}{m}-r+1}{r}x^r$$

um eine Größe unterschieden, welche man kleiner als jede gegebene machen kann, wenn man r groß genug nimmt. Also kann man schreiben:

$$U^2 = 1 + \frac{2}{m}x + \frac{2}{m}\cdot\frac{\frac{2}{m}-1}{2}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{2}{m}\cdot\frac{\frac{2}{m}-1}{2}\ldots\frac{\frac{2}{m}-r+1}{r}x^r + \Omega.$$

Multiplicirt man diese Gleichung neuerdings durch

$$U = 1 + \frac{1}{m}x + \frac{1}{m}\cdot\frac{\frac{1}{m}-1}{2}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{m}\cdot\frac{\frac{1}{m}-1}{2}\ldots\frac{\frac{1}{m}-r+1}{r}x^r$$

so erhält man:

$$U^3 = \left(1 + \frac{2}{m}x + \ldots + \frac{2}{m}\,\frac{\frac{2}{m}-1}{2} \ldots \frac{\frac{2}{m}-r+1}{r}x^r\right) +$$

$$\left(1 + \frac{1}{m}x + \ldots + \frac{1}{m}\,\frac{\frac{1}{m}-1}{2} \ldots \frac{\frac{1}{m}-r+1}{r}x^r\right) + U\,\Omega.$$

Das letzte Glied kann nach §. 17 so klein werden, als man nur immer will, wenn man durch Vermehrung von r, Ω hinlänglich verkleinert. Unter denselben Umständen tritt aber auch jenes bloß angezeigte Product der zwey Reihen nach §. 41 dem Werthe der Reihe

$$1 + \frac{3}{m}x + \frac{3}{m}\,\frac{\frac{3}{m}-1}{2}x^2 + \ldots$$

$$+ \frac{3}{m}\,\frac{\frac{3}{m}-1}{2} \ldots \frac{\frac{3}{m}-r+1}{r}x^r$$

so nahe, als man will. Man hat daher nach §. 15

$$U^3 = 1 + \frac{3}{m}x + \frac{3}{m}\,\frac{\frac{3}{m}-1}{2}x^2 + \ldots$$

$$+ \frac{3}{m}\,\frac{\frac{3}{m}-1}{2} \ldots \frac{\frac{3}{m}-r+1}{r}x^r + \overset{r}{\Omega}.$$

Da diese Schlüsse stets wiederholt werden können; so muß man, weil m eine ganze positive Zahl ist, endlich auch zu folgender Gleichung durch sie gelangen können:

$$U^{m} = 1 + \frac{m}{m}x + \frac{m}{m}\cdot\frac{\frac{m}{m}-1}{2}x^2 + \ldots$$

$$+ \frac{m}{m}\cdot\frac{\frac{m}{m}-1}{2}\cdots\frac{\frac{m}{m}-r+1}{r}x^r + \overset{m}{\Omega}$$

$$= 1 + x + \overset{m}{\Omega}.$$

Also ist auch, wenn man aus beyden Gliedern dieser Gleichung die Wurzel der mten Potenz zieht, und das Resultat beyderseits bloß positiv nimmt:

$U = (1 + x + \overset{m}{\Omega})^{\frac{1}{m}}$. Allein $(1 + x + \overset{m}{\Omega})^{\frac{1}{m}}$ ist nach §. 24 $= (1+x)^{\frac{1}{m}} + \omega$. Also ist

$$(1+x)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}x + \frac{1}{m}\cdot\frac{\frac{1}{m}-1}{2}x^2 + \ldots$$

$$+ \frac{1}{m}\cdot\frac{\frac{1}{m}-1}{2}\cdots\frac{\frac{1}{m}-r+1}{r}x^r - \omega.$$

§. 44.

Lehrsatz. Die Binomialgleichung gilt bey was immer für gebrochenen, doch positiven Werthen des Exponenten auf die Art, daß der Unterschied kleiner als jede gegebene Größe zu werden vermag, wenn man die Menge der Glieder hinlänglich vermehret, x einen echten Bruch bezeichnet, und unter $(1+x)^{\frac{n}{m}}$ allemahl nur der reelle und positive Werth dieses Ausdruckes gemeint ist.

Beweis. Jeder gebrochene positive Werth ist unter der Form $\frac{n}{m}$ darstellbar, wenn n und m was immer für ganze positive Zahlen bedeuten. Nun bekömmt man auf eben die Art, wie in §. 43, wenn man die dortigen Schlüsse statt m mahl, n mahl wiederholt, die Gleichung:

$$U^n = 1 + \frac{n}{m}x + \frac{n}{m}\,\frac{\frac{n}{m}-1}{2}x^2 + \ldots$$

$$+ \frac{n}{m}\,\frac{\frac{n}{m}-1}{2} \ldots \frac{\frac{n}{m}-r+1}{r}x^r - \overset{n}{\Omega}.$$

Allein U ist, wie daselbst gezeigt, $=(1+x)^{\frac{1}{m}} + \omega$, wenn man unter $(1+x)^{\frac{1}{m}}$ nur den reellen und positiven Werth dieses Ausdruckes verstehet. Also ist

$$U^n = \left((1+x)^{\frac{1}{m}} + \omega\right)^n = \left(1+x\right)^{\frac{n}{m}} + \overset{1}{\omega} \quad (§.\ 24).$$

Daher nach §. 15:

$$(1+x)^{\frac{n}{m}} = 1 + \frac{n}{m}x + \frac{n}{m}\,\frac{\frac{n}{m}-1}{2}x^2 + \ldots$$

$$+ \frac{n}{m}\,\frac{\frac{n}{m}-1}{2} \ldots \frac{\frac{n}{m}-r+1}{r}x^r + \Omega.$$

§. 45.

Lehrsatz. Die Binomialgleichung gilt auch für alle gebrochene und dabey negative Werthe des Exponenten in dem Sinne, daß der Unterschied kleiner als jede gegebene Größe zu werden vermag, wenn man die Menge der Glieder hinlänglich vermehrt, x einen echten Bruch bezeichnet, und unter $(1+x)^{\frac{-n}{m}}$ nur der reelle und positive Werth, den dieser Ausdruck hat, verstanden wird.

Beweis. Jede gebrochene negative Größe läßt sich durch die algebraische Summe aus einer ganzen negativen und einer gebrochenen positiven erzeugen. Denn sey $-\frac{n}{m}$ was immer für eine gebrochene negative Größe, doch auf die Form gebracht, daß n, m ganz zählig sind; so gibt es gewiß auch eine ganz zählige positive Größe a von der Beschaffenheit, daß $am > n$, wo folglich $\frac{am-n}{m}$ einen positiven Bruch vorstellt. Dann aber ist die algebraische Summe aus der negativen ganz zähligen Größe $-a$, und diesem positiven Bruche, d. h. $-a+\frac{am-n}{m}=-\frac{n}{m}$. Nun gilt zufolge §. 42 die Binomialgleichung für jede negative ganze Zahl des Exponenten, also für $-a$; und zufolge §. 44 auch für jede gebrochene positive, also für $\frac{am-n}{m}$. Folglich nach §. 41 wenn man daselbst $p=-a$, $q=\frac{am-n}{m}$ setzt, auch für $-\frac{n}{m}$.

§. 46.

Lehrsatz. Die Binomialgleichung gilt auch für jeden irrationalen Werth des Exponenten $= i$ in dem Sinne, daß der Unterschied kleiner, als jede gegebene Größe zu werden vermag, wenn man die Menge der Glieder hinlänglich vermehrt, x einen echten Bruch bezeichnet, und unter $(1+x)^i$ nur der reelle und positive Werth dieses Ausdruckes allein verstanden wird.

Beweis. Es lassen sich allemahl zwey ganze (positive oder negative) Zahlen m und n angeben, von solcher Beschaffenheit, daß der Bruch $\frac{n}{m}$ dem Werthe der Irrationalgröße i so nahe kömmt, als man nur immer will. Dann aber tritt zufolge des Begriffes, welchen man mit der Bezeichnung $(1+x)^i$ verbindet, auch $(1+x)^{\frac{n}{m}}$ dem Werthe $(1+x)^i$ so nahe, als man will. Allein $(1+x)^{\frac{n}{m}}$ ist, wenn $x < \pm 1$, nach §. 44 oder 45, $=$

$$1 + \frac{n}{m}x + \frac{n}{m}\frac{\frac{n}{m}-1}{2}x^2 + \ldots$$

$$+ \frac{n}{m}\frac{\frac{n}{m}-1}{2}\cdots\frac{\frac{n}{m}-r+1}{r}x^r + \Omega.$$

Also auch (§. 15)

$$(1+x)^i = 1 + \frac{n}{m}x + \frac{n}{m}\frac{\frac{n}{m}-1}{2}x^2 + \ldots$$

$$+ \frac{n}{m}\frac{\frac{n}{m}-1}{2}\cdots\frac{\frac{n}{m}-r+1}{r}x^r + \Omega.$$

Setzt man in dieser Reihe, bey unverändertem r statt $\frac{n}{m}$ überall i; so wird der Werth eines jeden ihrer Glieder nach §. 17 um eine Größe geändert, die man bloß durch zweckmäßige Vermehrung von n und m so klein machen kann, als man nur immer will. Also kann auch die Summe dieser Aenderungen, deren Anzahl = r nach §. 15 so klein gemacht werden, als man nur immer will. Mithin ist auch:

$$(1+x)^{i} = 1 + i\,\frac{i-1}{2}\,x^2 + \ldots$$

$$+ i\,\frac{i-1}{2} \ldots \frac{i-r+1}{r}\,x^{r} + \Omega.^{2}$$

§. 47.

Lehrsatz. Wenn in der zweytheiligen Größe a+b, dem bloßen Werthe nach a > b, und a^n möglich ist; so gilt für jeden reellen Werth von n die Gleichung:

$$(a+b)^{n} = a^{n} + n\,a^{n-1}\,b + n\,\frac{n-1}{2}\,a^{n-2}\,b^2$$

$$+ \ldots + n\,\frac{n-1}{2} \ldots \frac{n-r+1}{r}\,a^{n-r}\,b^{r} + \Omega$$

wo Ω so klein werden kann, als man nur immer will, wenn man r groß genug nimmt, und unter $(a+b)^n$ bloß den reellen und positiven Werth dieses Ausdruckes verstehet.

Beweis. So oft n eine ganze positive Zahl ist, gilt die Behauptung dieses Lehrsatzes zufolge §. 10

selbst ohne die Einschränkung, daß $a > b$ seyn müsse, In jedem andern Falle aber ist diese Einschränkung allerdings nothwendig. Denn $(1+x)^n$ ist dann nur unter der Bedingung

$$= 1 + nx + n\frac{n-1}{2}x^2 + \ldots$$

$$+ n\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-r+1}{r}x^r + \Omega,$$

wenn $x < \underline{+}\,1$ ist, will man daher statt x, $\frac{b}{a}$ setzen, so muß $\frac{b}{a} < \underline{+}\,1$ also a dem Werthe nach $> b$ seyn. Dann aber erhält man

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = 1 + n\frac{b}{a} + n\frac{n-1}{2}\frac{b^2}{a^2} + \ldots$$

$$+ n\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-r+1}{r}\frac{b^r}{a^r} + \Omega,$$

wenn man unter $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$ bloß den reellen und positiven Werth dieses Ausdruckes verstehet. Ist nun auch a^n möglich (d. h. ist nicht zu gleicher Zeit a negativ und n von der Form $\frac{2p+1}{2q}$, wo p, q ganze Zahlen bedeuten); so gibt die Multiplication dieser Gleichung durch a^n nach §. 17 und 15:

$$a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n + na^{n-1}b + n\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots$$

$$+ n\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-r+1}{r}a^{n-r}b^r + \Omega,$$

worin man statt $a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$ auch $(a + b)^n$ schreiben kann, wenn man hierunter bloß den einen reellen und positiven Werth, den dieser Ausdruck hat, verstehet.

§. 48.

Zusatz. Die Gleichung

$$(1+x)^n = 1 + nx + n\frac{n-1}{2}x^2 + \ldots$$

$$+ n\frac{n-1}{2} \ldots \frac{n-r+1}{r}x^r + \Omega,$$

deren Giltigkeit wir nunmehr für jeden Werth von n, und für jedes $x < \pm 1$ erwiesen haben, nimmt für ein negatives x und n die Form an:

$$(1-x)^{-n} = 1 + nx + n\frac{n+1}{2}x^2 + n\frac{n+1}{2}\,\frac{n+2}{3}x^3 + \ldots$$

$$+ n\frac{n+1}{2}\,\frac{n+2}{3} \ldots \frac{n+r-1}{r}x^r + \Omega.$$

Mittelst dieser beyden Formeln läßt sich erweisen, daß der reelle Werth des Ausdruckes y^n, wofern er einen hat, jederzeit darstellbar sey durch eine Reihe, die nach steigenden Potenzen einer von y leicht abzuleitenden Größe, nähmlich entweder von $y-1$ oder von $\frac{y-1}{y}$ fortschreitet. Denn ist zuförderst y positiv, aber noch $< + 2$; so setze man nur $y^n = (1+(y-1))^n$, und es wird $(y-1) < \pm 1$ seyn, und also in der ersten von jenen beyden Formeln die Größe x vertreten können, woraus sich, wenn man y^n nur den einen reellen und positiden Werth dieses Ausdruckes versteht, die Gleichung ergibt:

$$y^n = 1 + n(y-1) + n\,\frac{n-1}{2}(y-1)^2$$
$$+ n\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}(y-1)^3 + \ldots$$
$$+ n\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\ldots\frac{n-r+1}{r}(y-1)^r + \Omega.$$

Besitzt y^n der Werthe mehrere, so ist doch nur noch einer, nähmlich ein gleich groß negativer reell. Er läßt sich also durch dieselbe Reihe ausdrücken, wenn man die Zeichen aller Glieder ändert; daher auch beyde Werthe, wenn man es wünscht, in einem Ausdrucke so dargestellt werden könenn:

$$y^n = \pm 1 \pm n(y-1) \pm n\,\frac{n-1}{2}(y-1)^2$$
$$\pm n\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}(y-1)^3 \pm \ldots$$
$$\pm n\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\ldots\frac{n-r+1}{r}(y-1)^r \pm \Omega.$$

Ist aber $y > +2$, ja ist es auch nur $> +\frac{1}{2}$; so ist $\frac{y-1}{y}$ ein echter Bruch, und $\left(1-\frac{y-1}{y}\right)^{-n} = y^n$; also wird, wenn man in der zweyten Formel $\frac{y-1}{y}$ statt x annimmt, folgende Gleichung erscheinen:

$$y^n = 1 + n\,n\frac{(y-1)}{y} + n\,\frac{n+1}{2}\left(\frac{y-1}{y}\right)^2$$
$$+ n\,\frac{n+1}{2}\,\frac{x+2}{3}\left(\frac{y-1}{y}\right)^3 \ldots$$
$$+ n\,\frac{n+1}{2}\,\frac{n+2}{3}\ldots\frac{n+r-1}{r}\left(\frac{y-1}{y}\right)^r + \Omega.$$

Hat etwa y^n einen doppelten reellen Werth, so wird sich derselbe auch hier, wie vorhin, darstellen lassen. — Ist aber zweytens y negativ, z. B. $= - z$, wo nun z wieder eine positive Größe anzeigt: so hat man $(-z)^n = (-1)^n z^n$, und z^n läßt sich nach dem so eben Gezeigten in eine Reihe nach steigenden Potenzen von $(z-1)$ oder $\frac{(z-1)}{z}$ auflösen, je nachdem $z < +2$, oder $> + \frac{1}{2}$ ist. Soll nun $(-z)^n$ etwas Reelles bedeuten; so muß auch $(-1)^n z^n$, und folglich $(-1)^n$ reell seyn. Multiplicirt man daher die für z^n gefundene Reihe in ihren sämmtlichen Gliedern durch den reellen Werth von $(-1)^n$ — (welcher bekanntlich entweder $+1$ oder -1 seyn wird) — so hat man auch den Werth von $(-z)^n$ in einer Reihe nach steigenden Potenzen von $(z-1)$ oder $\frac{(z-1)}{z}$ dargestellt.

§. 49.

Uibergang. Wir haben §. 33 gesehen, daß die allgemeinste Form einer nach den Poterzen von x entwickelten Reihe, die den Werth der Function $(1+x)^n$ für möglichstvielerley Werthe von n und x ausdrücken soll, keine andere als die Binomialreihe sey; wenn man unter den möglichst vielerley Werthen von x diejenigen verstehet, die zwischen Null und einer andern möglichst großen positiven oder negativen Grenze liegen.

Hiebey hat sich am Ende gezeigt, daß diese zweyte Grenze eben nicht größer als $\pm$ 1 sey. Wir haben auch bereits §. 13 erwähnt, aus welchem Grunde wir festgesetzt, daß dieser Grenzen eine die Null seyn solle. Indessen dürfte es doch auch Fälle geben, wo man den Werth der Function $(1+x)^n$ für größere Werthe von x zu berechnen wünschte. Wir wollen daher jetzt anhangsweise noch die Frage untersuchen: „von welcher Form eine nach den „Potenzen der x entwickelte Reihe dann seyn müßte, „wenn sie den Werth von $(1+x)^n$ für möglichst vielerley Werthe von n, und für alle von x angeben soll, „die innerhalb der gegebenen Grenze a, und einer andern, deren Unterschied von jener möglichst groß ist, „liegen?"

§. 50.

Aufgabe. Die Form einer nach den Potenzen der x entwickelten Reihe zu finden, welche den Werth von $(1+x)^n$ für möglichst einerley Werthe von n, und für alle von n, die innerhalb einer gegebenen Grenze a, und einer andern von jener möglichst verschiedenen liegen, entweder völlig genau, oder doch so nahe angibt, daß der Unterschied kleiner, als jede gegebene Größe werden kann, wenn man die Menge ihrer Glieder darnach annimmt.

Auflösung. 1. Die Reihe soll von der Form $Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots + Rx^\varrho$ seyn; wo man annehmen darf, daß die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varrho$ alle von einander verschieden, und nach ihrer Größe vom größten negativen (falls einer da ist) zum größten positiven hin geordnet sind. Setzt man nun $a+y$ statt x, so soll die Gleichung für y, die man auf diese Art erhält

$$(1+a+y)^n = A(a+y)^\alpha + B(a+y)^\beta$$

$$+C(a+y)^\gamma + \ldots + R(a+y)^\varrho + \Omega \ldots \odot$$

anzufangen von einem gewissen Werthe von y für alle kleineren abwärts gelten. Allein $(1+a+y)^n$ ist, wenn $y < (1+a)$, und dieses positiv ist, für jeden Werth von n, nach §. 47 in eine Reihe nach steigenden Potenzen der y auflöslich. Dasselbe gilt von den Functionen $(a+y)^\alpha$, $(a+y)^\beta$, ... $(a+y)^\varrho$, wenn α, β, .. ϱ ganze positive Zahlen sind, allgemein; in jedem andern Falle aber nur, wenn man $y < a$ setzt. Daher erhält man:

$$\text{☽} \ldots (1+a)^n + n(1+a)^{n-1}y + n\frac{n-1}{2}(1+a)^{n-2}y^2 + \ldots$$

$$+ n\,\frac{n-1}{2}\,\ldots\,\frac{n-r+1}{r}\,(1+a)^{n-r}\,y^r =$$

$$Aa^\alpha + A\alpha a^{\alpha-1}y + A\alpha\frac{\alpha-1}{2}a^{\alpha-2}y^2 + \ldots$$

$$+ A\alpha\,\frac{\alpha-1}{2}\,\ldots\,\frac{\alpha-r+1}{r}\,a^{\alpha-r}\,y^r$$

$$+ Ba^\beta + B\beta a^{\beta-1}y + B\beta\,\frac{\beta-1}{2}\,a^{\beta-2}\,y^2 + \ldots$$

$$+ B\beta\,\frac{\beta-1}{2}\,\ldots\,\frac{\beta-r+1}{r}\,a^{\beta-r}\,y^r$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

$$+ Ra^\varrho + R\varrho\,a^{\varrho-1}\,y + R\varrho\,\frac{\varrho-1}{2}a^{\varrho-2}\,y^2 + \ldots$$

wo Ω so klein werden kann, als man nur immer will, wenn man r groß genug nimmt. Woraus durch Anwendung des §. 28 nachstehende Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Größen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varrho$; A, B, C, .. R entspringen:

$$(1+a)^n \; A a^\alpha + B a^\beta + C a^\gamma + \ldots + R a^\varrho$$

$$n(1+a)^{n-1} = A\alpha a^{\alpha-1} + B\beta a^{\beta-1} + C\gamma a^{\gamma-1} + \ldots$$
$$+ R\varrho \; a^{\varrho-1}$$

$$n(n-1)(1+a)^{n-2} = A\alpha(\alpha-1)a^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1)a^{\beta-2}$$
$$+ C\gamma(\gamma-1)\,a^{\gamma-2} + \ldots + R\varrho(\varrho-1)a^{\varrho-2}$$

— — — — — —

$$n(n-1) \ldots (n-r+1)(1+a)^{n-r}$$
$$= A\alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha-r+1)\, a^{\alpha-r} + \ldots$$
$$+ R\varrho(\varrho-1) \ldots (\varrho-r+1)\, a^{\varrho-r}.$$

Dieser Gleichungen Anzahl ist $(r+1)$, und der zu bestimmenden Größen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varrho$; A, B, C, ... R gibt es $2(r+1)$. Die Hälfte derselben bleibt also noch unbestimmt; und es steht unsrer Willkür anheim, zu den bisherigen noch eine neue Bedingung hinzuzufügen, wodurch auch die noch übrigen Größen bestimmt würden.

2. Wollten wir in dieser Rücksicht z. B. die Bedingung aufstellen, daß die Form der zufindenden Reihe von der Größe a unabhängig sey: so würde gleich die erste jener Gleichungen die sämmtlichen Größen $\alpha, \beta, \ldots \varrho$; A, B, .. R bestimmen. Denn soll die Gleichung

$$(a+1)^n = a^n + n a^{n-1} + n \frac{n-1}{2} a^{n-2} + \ldots$$

$$+ n \frac{n-1}{2} \ldots \frac{n-r+1}{r} a^{n-r} =$$

$$A a^\alpha + B a^\beta + C a^\gamma + \ldots + R a^\varrho$$

für unbestimmt viele Werthe von a gelten; so muß (wie im §. 38, n°. 1) jeder Potenz von a auf der einen Seite eine gleiche mit gleichem Coefficienten auf der andern Seite entsprechen. Dieß gäbe denn, wenn ϱ der größte Exponent seyn soll, $\varrho = n$, $R = 1$; und wenn $Q\, a^q$ das vorletzte Glied ist, $q = n - 1$, $Q = n$; u. s. w. Man erhielte auf diese Art die zur Potenz $(1+x)^n$ gehörige Binomialreihe, nur auf n Glieder beschränkt; daher denn, wenn die Gleichung gelten soll, n eine ganze positive Zahl seyn müßte; so daß die gefundene Reihe nur für solche Fälle gälte, wo der Exponent eine ganze positive Zahl ist. Soll dieselbe allgemeiner gelten, so müssen wir also von der Forderung, daß ihre Form von a unabhängig sey, abgehn.

3. Versuchen wir also nun mehr die Aufstellung einer andern Bedingung, und zwar der, daß die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varrho$ sämmtlich nur ganze Zahlen seyen, weil bey gebrochenen Exponenten der Gebrauch der Reihe doch gar zu unbequem wäre. Weil aber auch diese Bedingung allein noch nicht hinreicht, $(r+1)$ Größen zu bestimmen; so setzen wir nur geradezu fest, daß $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ nach der Ordnung der natürlichen Zahlen, von 0 an, fortgehen sollen; indem auf diese Art

die Berechnung der Coefficienten A, B, C, . . R noch am einfachsten ausfällt. Die obigen Gleichungen nehmen dann folgende Gestalt an:

$$(1+a)^n = A + B a + C a^2 + \ldots + R a^r$$

$$n(1+a)^{n-1} = B + 2 C a + 3 D a^2 + \ldots + r R a^{r-1}$$

$$n(n-1)(1+a)^{n-2} = 1.2 C + 2.3 D + 3.4 E + \ldots + (r-1) r R a^{r-2}$$

$$n(n-1)(n-2)(1+a)^{n-3} = 1.2.3 D + 2.3.4 E + \ldots + (r-2)(r-1) r R a^{r-3}$$

— — — — — — — — —

$$n(n-1)(p-2) \ldots (n-r)(1+a)^{n-r} = 1.2.3 \ldots r R$$

Die letzte derselben gibt

$$R = \frac{n . n-1 . n-2 \ldots n-r (1+a)^{n-r}}{1 . 2 . 3 \ldots r}$$

Und dieser Werth in die vorletzte gesetzt, gibt Q. u. s. w.

4. Die Reihe, die man auf diese Art für den Werth von $(1+x)^n$ erhält, hat die große Unbequemlichkeit, daß die Gestalt ihrer Coefficienten jedes im Einzelnen von der Menge aller abhängt, so daß man die Anzahl der Glieder in ihr nicht um ein einziges vermehren (oder vermindern) darf, ohne gleich alle zu verändern.

5. Betreffend die Grenze, welche der Werth von y nicht überschreiten darf, so ist aus obigem Verfahren ($n^o 1$) offenbar, daß sie $= \pm (1+a)$ sey. Denn daß $y < \pm (1+a)$ sey, ist die einzige Bedingung, welche (nebst dem positiven Werthe von $(1+a)$) zur Möglichkeit der Auflösung von $(1+a+y)^n$ in die Reihe

$$(1+a)^n + n(1+a)^{n-1}.y + \ldots$$

für jeden Werth von n erfordert wird. Die Auflösung der Functionen $(a+y)^\alpha$, $(a+y)^\beta$, .. in entwickelte Reihen ist, nachdem man $\alpha, \beta, \gamma, .. = 0, 1, 2..$ gesetzt hat, ohne Einschränkung möglich. Gelten nun diese Auflösungen, so gilt auch die Gleichung ☽; und folglich auch die ☉, weil sie mit ihr identisch ist. Daraus ergibt sich aber, daß die Gleichung ☉ auch für keine größeren Werthe von y gelte. Denn wäre dieß, so müßte für eben diese Werthe auch ☽ gelten; indem wenn bey irgend einem Werthe von y

$$(1+a+y)^n = A + B(a+y) + C(a+y)^2 + \ldots$$
$$+ R(a+y)^r + \Omega$$

ist; so ist auch (durch Entwicklung der Werthe von $(a+y)^2$, u. s. w.) $(1+a+y)^n =$

$$A + Ba + Ca^2 + \ldots + Ra^r$$
$$+ (B + 2Ca + 3Da^2 + \ldots + rRa^{r-1})y$$
$$+ \frac{1}{2}(2C + 2.3Da + \ldots + (r-1)rRa^{r-2})y^2$$
$$+ \ldots$$
$$+ \frac{1.2.3..r}{1.2.3..r} R a^0 y^r$$

Da aber vermöge der Bestimmung der Coefficienten $A, B, C, .. R,$

$$A+Ba+Ca^2 + \ldots + Ra^r = (1+a)^n,$$
$$B + 2Ca + \ldots\ldots + rRa^{r-1} = n(1+a)^{n-1},$$

u. s. w. seyn soll: so erhält man durch Substitution:

$$(1+a+y)^n = (1+a)^n + n(1+a)^{n-1}y$$
$$+ \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}(1+a)^{n-2}y^2 + \ldots$$
$$+ \frac{n\,.\,n-1\,.\,.\,n-r+1}{1\,.\,2\,.\,.\,r}(1+a)^{n-r}y^r + \Omega$$

welches die Binomialgleichung wäre, die doch nicht gelten kann, wenn y nicht $< \pm (1+a)$ ist, es wäre denn zugleich n eine ganze positive Zahl. Also sind die Grenzen für $x = a + y$ die beyden Größen $a-(1+a) = -1$ und $a + 1 + a = 2a + 1$, d. h. x muß immer $> \pm 1$ und $< \pm (1+2a)$ seyn.

§. 51.

Beyspiel. Sey $a = 1$, und die Anzahl der Glieder, aus welchen die Reihe bestehen soll nur vier; so hat man zur Bestimmung ihrer vier Coefficienten die Gleichungen:

$$2^n = A + B + C + D$$
$$n2^{n-1} = B + 2C + 3D$$
$$n.n-1.2^{n-2} = 1.2C + 2.3D$$
$$n.n-1.n-2.2^{n-3} = 1\,.\,2\,.\,3\,D$$

Aus welchen $D = \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}2^{n-3}$;

$$C = \frac{n.n-1}{1.2}2^{n-3}(4-n);$$

$$B = n.2^{n-3}\left(4 + \frac{(n-1)(n-6)}{2}\right);$$

$$A = 2^{n-3}\left(8 - \frac{n^3 - 9n^2 + 32n}{6}\right).$$

Also soll $(1+x)^n = 2^{n-3}\left(8-\frac{n^3-9n^2+32n}{6}\right)$

$+ n \cdot 2^{n-3}\left(\frac{4+(n-1)(n-6)}{2}\right) x$

$+ \frac{n.n-1}{1.2} 2^{n-3} x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} 2^{n-3} x^3$

seyn. Diese Gleichung ist wirklich für die Werthe $n=0$, $=1$, $=2$, $=3$, was immer x bedeuten mag, genau. Für höhere Werthe kann sie es deßhalb nicht seyn, weil man der Glieder nur vier hat. — Bey $x = 1$ gilt sie für alle Werthe von n; dagegen bey andern Werthen von x, die zwischen ± 1 und $\pm (1+2a) = \pm 3$ liegen, gilt sie nur näherungsweise, und zwar, weil man sie nur auf vier Glieder eingeschränkt hat, nicht sehr genau. So gibt sie für $x = 2$, und $n = -1$, $(1+2)^{-1} = \frac{5}{16}$ an, welches dem wahren Werthe $= \frac{1}{3}$ noch ziemlich nahe kömmt; für $x = 2$, und $n = -2$, erhält man $(1+2)^{-2} = \frac{1}{16}$, was von dem wahren Werthe $= \frac{1}{9}$ schon bedeutender abweicht. U. s. w.

§. 52.

Uibergang. Nun hätten wir also den ersten Theil der §. 1 uns vorgenommenen Untersuchung, ob und auf welche Art eine zweytheilige Potenz in eine nach den Potenzen ihrer einfachen Theile entwickelte Reihe aufgelöst werden könne, beendiget. Es übriget uns noch die Untersuchung, ob und wie dieses auch bey jeder mehr-theiligen Größe geschehen könne. Dieß wird sich kürzer abhandeln lassen.

§. 53.

Lehrsatz. Jede vieltheilige Größe von der Form $(a+b+c+d+\ldots)^n$ läßt sich in eine nach den Potenzen ihrer einfachen Theile a, b, c, d, .. entwickelte Reihe im Falle, daß n eine *ganze positive* Zahl anzeigt, völlig genau auflösen; in jedem andern Falle aber nur auf die Art, daß der Unterschied zwischen der complexen Function $(a+b+c+d+\ldots)^n$ und der entwickelten Reihe kleiner als jede gegebne Größe werden kann, wenn man die Anzahl der Glieder hinlänglich vermehret, und eine der Größen a, b, c, d, ... z. B. a größer als die Summe der übrigen und zugleich a^n möglich ist.

Beweis. Denn ist n eine *ganze positive* Zahl, so läßt sich $(a+b+c+d+\ldots)^n$ nach §. 10 was immer a und $(b+c+d+\ldots)$ seyn mögen, in eine nach den Potenzen von a und $(b+c+d+\ldots)$ entwickelte Reihe, mit völliger Genauigkeit verwandeln. In dieser Reihe nun erscheinet die Größe $(b+c+d+\ldots)$ abermahls nur auf lauter ganzzähligen und positiven Potenzen; und es ist also allgemein möglich, statt dieser complexen Functionen abermahls gewisse nach den Potenzen von b und $(c+d+\ldots)$ entwickelte Reihen zu setzen. U. s. w. Da nun jede der Größen $(a+b+c+d+\ldots)$, $(b+c+d+\ldots)$, $(c+d+\ldots)$, .. um ein Glied weniger als die nächstvorhergehende enthält; so folgt, daß man durch Fortsetzung dieses Verfahrens zuletzt auf eine zweytheilige Größe komme, durch derrn Entwicklung durchgängig alle complexe Functionen in dem Ausdrucke verschwinden. Denn jede der entwickelten Reihen ist bloß mit einer oder einigen Potenzen von einfachen Theilen (nähmlich den vorhergehenden) zu multipliciren, wodurch sie nicht aufhört, eine entwickelte zu seyn. Ist aber der Exponent n keine ganze Zahl, so geht die erste der hier gemachten Entwicklungen nur in dem Falle an, wenn a^n möglich, und $a > (b+c+d+ \ldots)$; und auch selbst dann ist die entwickelte Reihe $a^n + na^{n-1}(b+c+d+.) + n\frac{n-1}{2}a^{n-2}(b+c+d+.)^2 + \ldots$ der Function $(a+b+c+d+ \ldots)^n$ nicht ganz genau, sondern nur in dem Sinne gleich, daß der Unterschied kleiner als jede gegebene Größe werden kann, wenn man die Menge der Glieder in der Reihe groß genug nimmt. Was nun die folgenden Entwicklungen aber, nähmlich die von $(b+c+d+ \ldots)^2$, $(b+c+d+ .)^3, \ldots$ betrifft, so sind dieselben, nach dem so eben Gesagten, weil sie nur ganzzählige und positive Potenzen betreffen, in jedem Falle möglich, was auch die einzelnen Größen b, c, d,.. seyn mögen. Der Werth aber, den die entwickelten Functionen haben, welche man an die Stelle der complexen $(b+c+d+ \ldots)^2$, $(b+c+d+ \ldots)^3, \ldots$ setzt, ist diesen vollkommen gleich; mithin verbleibt der Unterschied der Gleichung nach wie vor derselbe; d. h. er ist Ω.

§. 54.

Uibergang. Es handelt sich also nur noch darum, die allgemeine Form zu bestimmen, die eine aus solchen allmähligen Entwickelungen entspringende Reihe annimmt. Wir wollen sie in den gleich folgenden §§. suchen. Es wird der Allgemeinheit dieser nun vorzunehmenden Untersuchung nicht den geringsten Abbruch thun, vielmehr für solche Fälle, wo etwa die Glieder der gegebenen vieltheiligen Größe nach den Potenzen einer einzelnen aus ihnen fortschreiten, noch vortheilhaft seyn, wenn wir die Form derselben also annehmen:

$$1 + \overset{(1)}{a}x + \overset{(2)}{a}x^2 + \overset{(3)}{a}x^3 + .. + \overset{(m)}{a}x^m, \text{ wo } \overset{(1)}{a}, \overset{(2)}{a}, \overset{(3)}{a}, \ldots \overset{(m)}{a}$$

was immer für Größen bedeuten, die wir nur darum mit den Ordnungszahlen (1), (2), (3), . . (m) bezeichnen, um so bequem zu bemerken, zur wie vielten Potenz von x jede derselben als Coefficient gehöre. Hat die gegebne vieltheilige Größe keine dergleichen steigende Potenzen von x, so braucht man nur $x = 1$ zu setzen; und ist ihr erstes Glied nicht, wie in unserer Formel $= 1$, so kann man $(a + b + c + d + ..)^n = a^n\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} + ..\right)^n$ setzen, wenn nur a^n nicht unmöglich ist; und hat man dann $\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} + ..\right)^n$ nach der Form

$(1 + \overset{(1)}{a}x + \overset{(2)}{a}x^2 + .. + \overset{(m)}{a}x^m)^n$ entwickelt, so erhält man die Entwicklung von $(a + b + c + d + ..)^n$, wenn man alle Glieder der Reihe nur noch mit a^n multiplicirt.

§. 55.

Aufgabe. Eine nach den Potenzen der x entwickelte Reihe soll dem Werthe der complexen Function $(1+\overset{(1)}{a}x+\overset{(2)}{a}x^2+\ldots+\overset{(m)}{a}x^m)^n$ für möglichst vielerley Werthe von n, und für alle von x, die zwischen Null und einer möglichst entfernten (positiven oder negativen) Grenze liegen, entweder völlig gleich, oder doch so nahe kommen, daß der Unterschied kleiner als jede gegebene Größe wird, wenn man die Menge der Glieder in der Reihe hinlänglich vermehret. Es ist die Aufgabe, gewisse Bedingungen, welchen die Reihe entsprechen muß, zu finden.

Auflösung. Die Reihe sey:
$A+Bx^\beta+Cx^\gamma+\ldots+Rx^\varrho$; so muß für jeden Werth von n und x, für welchen die Gleichung

$$(1+\overset{(1)}{a}x+\overset{(2)}{a}x^2+\ldots+\overset{(m)}{a}x^m)^n =$$
$$A+Bx^\beta+Cx^\gamma+\ldots+Rx^\varrho+\Omega \ldots \odot$$

gilt, auch folgende bestehen:

$$(1+\overset{(1)}{a}(x+\omega)+\overset{(2)}{a}(x+\omega)^2+\ldots+\overset{(m)}{a}(x+\omega)^m)^n =$$
$$A+B(x+\omega)^\beta+C(x+\omega)^\gamma+\ldots+R(x+\omega)^\varrho+\overset{1}{\Omega}$$

wenn nur ω so klein ist, daß nicht nur x, sondern auch $x+\omega$ innerhalb der festgesetzten Grenze liegen. Schreibt man zur Abkürzung $1+\overset{(1)}{a}x+\overset{(2)}{a}x^2+\ldots+\overset{(m)}{a}x^m = Y$; so ist nach §. 10:

$$1+\overset{(1)}{a}(x+\omega)+\overset{(2)}{a}(x+\omega)^2+\ldots+\overset{(m)}{a}(x+\omega)^m = Y$$
$$+\omega(\overset{(1)}{a}+2\overset{(2)}{a}x+3\overset{(3)}{a}x^2+\ldots+m\overset{(m)}{a}x^{m-1})+\ldots,$$

wo die zuletzt noch fehlenden Glieder nur lauter höhere Potenzen von ω enthalten, die in gewisse beständige d. h.

nicht von ω abhängige Größen multipliciret sind, und dieser Glieder Menge ändert sich mit ω nicht. Es ist daher $\omega(\overset{(1)}{a} + 2\overset{(2)}{a}x + 3\overset{(3)}{a}x^2 + .. + m\overset{(m)}{a}x^{m-1}) + \ldots$ eine Größe, die nach §. 17. 15 bloß durch Verminderung von ω so klein werden kann, als man nur immer will. Bezeichnen wir sie durch $\overset{2}{\Omega}$, so ist $\frac{\overset{2}{\Omega}}{\omega} =$

$(\overset{(1)}{a} + 2\overset{(2)}{a}x + 3\overset{(3)}{a}x^2 + .. + m\overset{(m)}{a}x^{m-1}) + ..$ und die noch fehlenden Glieder können aus eben demselben Grunde, wie der vorhin erwähnte, so klein werden, als man nur immer will. Allein wenn man die ersten beyden Gleichungen von einander abzieht, und durch ω dividirt; so erhält man nach der so eben eingeführten Bezeichnung:

$$\frac{(Y+\overset{2}{\Omega})^n - Y^n}{\omega} = B\frac{((x+\omega)^\beta - x^\beta)}{\omega} + C\frac{((x+\omega)^\gamma - x^\gamma)}{\omega}$$

$$+ \ldots + R\frac{((x+\omega)^\varrho - x^\varrho)}{\omega} + \frac{\overset{1}{\Omega} - \Omega}{\omega}.$$

Nun ist nach §. 23 $\frac{(Y+\overset{2}{\Omega})^n - Y^n}{\overset{2}{\Omega}} = nY^{n-1} + \overset{1}{\omega}$; also

$\frac{(Y+\overset{2}{\Omega})^n - Y^n}{\omega} = nY^{n-1}\frac{\overset{2}{\Omega}}{\omega} + \frac{\overset{1}{\omega}\overset{2}{\Omega}}{\omega}$, welches nach §. 17 und 18 $= nY^{n-1}(\overset{(2)}{a} + 2\overset{(2)}{a}x + 3\overset{(3)}{a}x^2 + .. + m\overset{(m)}{a}x^{m-1}) + \overset{(n)}{\omega}$ ist; wird nur ω klein genug genommen. Unter derselben Bedingung aber sind die Größen

$$\frac{(x+\omega)^{\beta} - x^{\beta}}{\omega} = \beta x^{\beta-1} + \overset{(\beta)}{\omega};$$

$$\frac{(x+\omega)^{\gamma} - x^{\gamma}}{\omega} = \gamma x^{\gamma-1} + \overset{(\gamma)}{\omega};$$

— — — — — —

$$\frac{(x+\omega)^{\varrho} - x^{\varrho}}{\omega} = \varrho x^{\varrho-1} + \overset{(\varrho)}{\omega}.$$

Daher erhält man die Gleichung:

$$nY^{n-1}(\overset{(1)}{a} + 2\overset{(2)}{a}x + 3\overset{(3)}{a}x^2 + \ldots + m\overset{(m)}{a}x^{m-1}) = \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \ldots + \varrho Rx^{\varrho-1} + B\overset{(\beta)}{\omega} + C\overset{(\gamma)}{\omega} + \ldots + R\overset{(\varrho)}{\omega} + \frac{\overset{1}{\Omega} - \Omega}{\omega}.$$

Nun läßt sich von dem Ausdrucke $\frac{\overset{1}{\Omega} - \Omega}{\omega}$ ganz so, wie von dem ähnlichen in §. 30 gezeigt ward, darthun, daß derselbe bey jedem Werthe von ω bloß durch Vermehrung der Gliedermenge in $A + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots Rx^{\varrho}$ so klein gemacht werden könne, als man nur immer will. Bey einerley Menge der Glieder aber kann $B\overset{(\beta)}{\omega} + C\overset{(\gamma)}{\omega} + \ldots + R\overset{(\varrho)}{\omega}$ bloß durch Verminderung von ω kleiner als jede gegebene Größe werden. Also ist

$$nY^{n-1}(\overset{(1)}{a} + 2\overset{(2)}{a}x + 3\overset{(3)}{a}x^2 + \ldots + m\overset{(m)}{a}x^{m-1}) = \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \ldots + \varrho Rx^{\varrho-1} + \overset{3}{\Omega}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit Y, und setzt statt Y^{n} die Reihe, die gleichen Werthes seyn soll; so findet sich nach Anwendung von §. 17 15 folgende **Bedingungsgleichung** welcher die Größen $\beta, \gamma, \ldots \varrho$; $A, B, C, \ldots R$ entsprechen müssen, wenn ⊙ gelten soll:

$$\mathfrak{z}\quad n(\overset{(1)}{a} + 1\overset{(2)}{a}x + \ldots + m\overset{(m)}{a}x^{m-1}) \times (A + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots + Rx^{\varrho}) = (1 + \overset{(1)}{a}x + \overset{(2)}{a}x^{2} + \ldots + \overset{(m)}{a}x^{m}) \times (\beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \ldots + \varrho Rx^{\varrho-1}) + \Omega$$

§. 56.

Aufgabe. Die Form der Reihe $A + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots + Rx^{\varrho}$ aus der §. 55 angegebenen Bedingungsgleichung in so weit zu bestimmen, als man es bloß aus ihr vermag.

Auflösung. 1. Stellen wir uns, wie bey der ähnlichen Aufgabe §. 32, vor, daß alle Exponenten in $A + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots + Rx^{\varrho}$ von einander verschieden, und nach ihrer Größe geordnet sind: so erhält die Gleichung $\mathfrak{z}$, wenn man die angedeuteten Multiplicationen in ihr wirklich verrichtet, und alle Glieder dann nach den Potenzen von x ordnet, die Form der Gleichung des §. 28; so daß, wenn selbe für alle x, die kleiner als ein gewisses sind, gelten soll, jeglichem Gliede auf der einen Seite ein völlig gleiches auch auf der andern entsprechen muß, höchstens mit Ausnahme eines oder einiger Theile, die so klein werden können, als man nur immer will.

2. Hieraus erhellet, zuförderst daß A nicht Null seyn könne, die Exponenten $\beta, \gamma, \ldots, \varrho$ aber nach der Ordnung der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, . . fortrücken müssen. Denn auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens steht

offenbar kein niedrigeres Glied, als das $\beta B x^{\beta-1}$, welches nicht Null seyn kann, indem weder B noch β = Null seyn dürfen, weil in dem ersten Falle das Glied gar nicht vorhanden, im zweyten nicht von der Form $B x^{\beta}$ sondern A wäre. Diesem muß also ein gleiches auf der linken Seite entsprechen; welches nur $n \overset{(1)}{a} A$ seyn kann. Also darf A nicht Null seyn. Daß aber keiner der Exponenten $\beta, \gamma, \ldots \varrho$, gebrochen oder negativ seyn könne, erhellet ganz so, wie im §. 32.

3. Setzt man daher für $\beta, \gamma, \ldots \varrho$ die Zahlen 1, 2, 3, . . r, so erhält die Gleichung ♃ folgende Gestalt:

$$n(\overset{(1)}{a} + 2\overset{(2)}{a}x + 3\overset{(3)}{a}x^2 + \ldots + m\overset{(m)}{a}x^{m-1}) \times$$
$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Rx^r) =$$
$$(1 + \overset{(1)}{a}x + \overset{(2)}{a}x^2 + \overset{(3)}{a}x^3 + \ldots + \overset{(m)}{a}x^m) \times$$
$$(B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots + rRx^{r-1}) + \Omega,$$

aus welcher sich die Werthe der Coefficienten A, B, C, D, . . R durch $\overset{(1)}{a}, \overset{(2)}{a}, \ldots \overset{(m)}{a}$ und A bestimmen lassen. Um aber das allgemeine Gesetz, nach welchem jeder aus den vorhergehenden gebildet wird, recht deutlich aufzufassen; lasset uns die Rangordnung derselben auf eben die Art, wie die der Größen $\overset{(1)}{a}, \overset{(2)}{a}, \ldots \overset{(m)}{a}$, d. h. schon durch ihr Zeichen selbst ausdrücken. Es werde also der Coefficient von x^0, oder A durch $\overset{(0)}{A}$, der von x^1 oder B durch $\overset{(1)}{A}$, der von x^2 oder C durch $\overset{(2)}{A}$, . . der von x^r durch $\overset{(r)}{A}$ bezeichnet; so daß die obige Gleichung nun aussieht:

$$n(\overset{(1)}{a} + 2\overset{(2)}{a}x + 3\overset{(3)}{a}x^2 + \,.\,.\, + m\overset{(m)}{a}x^{m-1}) \times$$
$$(\overset{(0)}{A} + \overset{(1)}{A}x + \overset{(2)}{A}x^2 + \overset{(3)}{A}x^3 + \,.\,.\, + \overset{(r)}{A}x^r)$$
$$= (1 + \overset{(1)}{a}x + \overset{(2)}{a}x^2 + \overset{(3)}{a}x^3 + \ldots + \overset{(m)}{a}x^m) \times$$
$$(\overset{(1)}{A} + 2\overset{(2)}{A}x + 3\overset{(3)}{A}x^2 + \ldots + r\overset{(r)}{A}x^{r-1}) + \Omega.$$

Um nun den Coefficienten irgend eines Gliedes, z. B. desjenigen, das zu x^{p+1} gehört, zu bestimmen, berechne man alle Glieder zu beyden Seiten des Gleichheitszeichens, welche die Potenz x^p geben. Auf der linken Seite sind es nachstehende:

$$n\overset{(1)}{a}\overset{(p)}{A}.x^p + 2n\overset{(2)}{a}.\overset{(p-1)}{A}.x^p + 3n\overset{(3)}{a}.\overset{(p-2)}{A}.x^p + \ldots$$
$$+ (p+1)n\overset{(p+1)}{a}.\overset{(0)}{A}.x^p;$$

auf der rechten aber:

$$(p+1)\overset{(p+1)}{A}.x^p + p.\overset{(1)}{a}.\overset{(p)}{A}.x^p +$$
$$(p-1)\overset{(2)}{a}.\overset{(p-1)}{A}.x^p + \ldots + \overset{(p)}{a}.\overset{(1)}{A}.x^p$$

Nach §. 28 muß also jene Summe dieser vollkommen gleich seyn; woraus sich

$$(p+1)\overset{(p+1)}{A} = n\overset{(1)}{a}\overset{(p)}{A} + 2n\overset{(2)}{a}\overset{(p-1)}{A} + 3n\overset{(3)}{a}\overset{(p-2)}{A} + \,.\,.$$
$$+ (p+1)n\overset{(p+1)}{a}\overset{(0)}{A} - p\overset{(1)}{a}\overset{(p)}{A} - (p-1)\overset{(2)}{a}\overset{(p-1)}{A}\,.\,. - \overset{(p)}{a}\overset{(1)}{A}$$

oder

$$(p+1)\overset{(p+1)}{A} = (n-p)\overset{(1)}{a}.\overset{(p)}{A} + (2n-p+1)\overset{(2)}{a}.\overset{(p-1)}{A}$$
$$+ (3n-p+2)\overset{(3)}{a}.\overset{(p-2)}{A} + \,.\,.\, + (pn-1)\overset{(p)}{a}.\overset{(1)}{A}$$
$$+ (p+1)n\overset{(p+1)}{a}.\overset{(0)}{A}$$

ergibt; eine Gleichung, deren Bildungsgesetz deutlich genug in die Augen leuchtet, und mittelst deren man jeden folgenden Coefficienten aus allen vorhergehenden zu berechnen vermag. Der erste $\overset{(0)}{A}$ bleibt aber unbestimmt.

§. 57.

Anmerkung. Hindenburg, Schultz, und A., haben Methoden angezeigt, durch die man jeden dieser Coefficienten unmittelbar, d. h. ohne erst die vorhergehenden gefunden zu haben, berechnen kann. Diese Methoden hier zu wiederholen, liegt außerhalb des Zwecks, den wir uns vorgesetzt haben.

§. 58.

Lehrsatz. Wenn die §. 56 gefundene Reihe den Werth der complexen Function $(1 + \overset{(1)}{a}x + \overset{(2)}{a}x^2 + \ldots + \overset{(m)}{a}x^m)^n$ für möglichst vielerley Werthe von n und x richtig ausdrücken soll, so muß $\overset{(0)}{A} = 1$ seyn.

Beweis. Denn wenn man x immer kleiner nimmt; so nähert sich der wahre Werth von $(1 + \overset{(1)}{a}x + \ldots + \overset{(m)}{a}x^m)^n$ dem Werthe 1, was auch n seyn mag. Der Werth der Reihe aber nähert sich dem Werthe ihres ersten Gliedes $\overset{(0)}{A}$. Also muß nach §. 27 $\overset{(0)}{A} = 1$ seyn.

§. 59.

Lehrsatz. Die §. 56 gefundene Reihe gibt nach der näheren Bestimmung, die ihr §. 58 ertheilt, den Werth der complexen Function $(1 + \overset{(1)}{a}x + \overset{(2)}{a}x^2 + \ldots + \overset{(m)}{a}x^m)^n$, so oft n eine ganze positive Zahl bedeutet, völlig genau an, wenn man nur r nicht $< m\,n$ seyn läßt; bey jedem andern Werthe von n dagegen gibt sie den Werth jener Function nur dann, wenn $(\overset{(1)}{a}x + \overset{(2)}{a}x^2 + \ldots + \overset{(m)}{a}x^m) < \pm 1$ ist, auf die Art an, daß der Unterschied kleiner, als jede gegebene Größe zu werden vermag, wenn man die Menge ihrer Glieder groß genug nimmt.

Beweis. Vermöge §. 55 muß jede nach den Potenzen von x entwickelte Reihe, welche den Werth der Function $(1 + \overset{(1)}{a}x + \overset{(2)}{a}x^2 + \ldots + \overset{(m)}{a}x^m)^n$ für alle x, die kleiner als ein gewisses sind, ausdrücken soll, von der §. 56 angegebenen Form, und nach §. 58 noch überdieß die Größe A in ihr $= 1$ seyn. Nach dieser doppelten Bestimmung aber bleibt in derselben schon nichts mehr unbestimmt; so zwar, daß sie für jeden besondern Werth der Größen $x, \overset{(1)}{a}, \overset{(2)}{a}, \ldots \overset{(m)}{a}$ und n nur einen einzigen Werth annimmt. Sollte sich also auch selbst durch diese Reihe der Werth der Function $(1 + \overset{(1)}{a}x + \overset{(2)}{a}x^2 + \ldots + \overset{(m)}{a}x^m)^n$ auf keine Art genau darstellen lassen; so müßte es überhaupt unmöglich seyn, den Werth derselben vollkommen auszudrücken. Nach §. 50 aber muß dieses, wenn n eine ganze positive Zahl vorstellt, allemahl möglich seyn. Also muß es die Reihe des §. 53 vermögen. Daß sie es aber, wenn in ihr x unbestimmt bleiben soll, nur dann vermöge, wenn man sie wenigstens bis zur Potenz x^{mn} fortsetzt, erhellet daraus, weil $(1 + \overset{(1)}{a}x + \overset{(2)}{a}x^2 + \ldots + \overset{(m)}{a}x^n)^n$, wenn man es auf dem Wege der Multiplication entwickelte, sicher bis auf ein Glied von der Form x^{mn}

(aber auch nicht höher) steigen würde. Soll nun die Reihe des §. 58 dieser Entwickelung für alle x, die kleiner als ein gewisses sind, gleich gesetzt werden können: so müssen beyde Ausdrücke identisch seyn; und folglich muß auch in jenem sich ein Glied von der Potenz x^{mn} vorfinden. Aus eben diesem Grunde erhellet aber auch, daß es nie nothwendig seyn könne, die Reihe noch über das Glied x^{mn} fortzusetzen. Denn weil die Entwickelung durch Multiplication keine höheren Potenzen gibt; so dürfen sie auch in der Reihe nicht erscheinen, sondern der Coefficient eines jeden dergleichen Gliedes muß, wenn man ihn sucht, $= 0$ befunden werden.

2. Ist aber n keine ganze positive Zahl; so ist es nach §. 53 doch unter der Bedingung, daß $(\overset{(1)}{a}x + \overset{(2)}{a}x^2 + \ldots + \overset{(m)}{a}x^m) < \pm 1$ sey, möglich, jene complexe Function in eine nach den Potenzen von x entwickelte Reihe zu verwandeln, welche dem Werthe derselben so nahe kömmt, als man nur immer will, wenn man die Menge ihrer Glieder groß genug nimmt. Also muß dieses die Reihe des §. 58 leisten, weil es sonst keine andere vermögte. Doch wird man dieß freylich nur dann von ihr erwarten können, wenn man die Anzahl ihrer Glieder groß genug nimmt. Denn weil es nur eine einzige Reihe gibt, die dieß zu leisten vermag, so muß dieselbe mit derjenigen, die man nach der Methode des §. 53, d. h. durch allmählige Entwickelung finden würde, identisch seyn. Nun gibt die erste Entwickelung:

$$1 + n(\overset{(1)}{a}x + \overset{(2)}{a}x^2 + \ldots + \overset{(m)}{a}x^m)$$

$$+ n.\frac{n-1}{2}(\overset{(1)}{a}x + \overset{(2)}{a}x^2 + \ldots + \overset{(m)}{a}x^m)^2$$

$$+ \ldots + n.\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-p+1}{p}(\overset{(1)}{a}x + \overset{(2)}{a}x^2 + \ldots + \overset{(m)}{a}x^m)^p,$$

worin man, wenn der Unterschied zwischen dem Werthe dieser Reihe und der gegebenen Function so klein werden soll, als man nur immer will, p so groß muß annehmen dürfen, als man nur will. Darf man hier aber p so groß annehmen, als man nur immer will; so überschreitet auch die höchste Potenz, die in der Entwicklung dieser Reihe vorkömmt, nähmlich x^{mp}, jede gegebene Grenze. Folglich muß man auch in der Reihe des §. 58, die mit der gegenwärtigen identisch ist, die Menge der Glieder so groß annehmen können, als man nur immer will.

§. 60.

Erklärung. Eine Größe y, die von zwey andern a und x so abhängt, daß immer $y = a^x$ ist, wird, so fern man sich vorstellt, daß wenigstens x veränderlich sey, wenn nicht auch a es ist, eine Exponentialgröße genannt; während daß x in dieser Beziehung der Logarithmus von y bey der Grundzahl (oder Basis) a heißt. Um anzudeuten, daß x der Logarithmus von y sey, schreibt man gewöhnlich $x = \mathrm{l}\,y$, oder $\log y$, u. dgl.; wo aber nöthig ist, wenn man in derselben Rechnung Logarithmen von verschiedenen Grundzahlen hat, für jede eigene Grundzahl auch eine eigene Bezichnungsart der sich auf sie beziehenden Logarithmen zu wählen, damit dieselben nicht mit einander verwechselt würden. Denn sind a, α verschieden, und $a^x = \alpha^\xi = y$; so sind auch x und ξ verschieden: d. h. einerley Größe hat in Beziehung auf verschiedne Grundzahlen verschiedne Logarithmen. In solchen Fällen also dürfte es wohl am Schicklichsten seyn, die Grundzahl, auf die sich ein Logarithmus beziehen soll, in seine Bezeichnung selbst mit aufzunehmen; so nach z. B. den Logarithmus von y in Rücksicht auf die Grundzahl a durch $\overset{(a)}{\mathrm{l}}\,y$ vorzustellen.

§. 61.

Uibergang. Nachdem es uns bereits gelungen, jede Function der Form $(1+x)^n$, auch so gar jede der Form $(1+\overset{(1)}{a}x+\overset{(2)}{a}x^2+\ldots+\overset{(m)}{a}x^m)^n$ unter bestimmten Bedingungen in eine nach den Potenzen der x fortschreitende Reihe aufzulösen: so führt dieß auf den Gedanken, ob sich nicht auch die Functionen a^x und $\log y$ in gewisse Reihen nach den Potenzen ihrer veränderlichen Größen, jene der x, diese der y, oder auch nur nach den Potenzen einer aus x und y leicht abzuleitenden anderen Größe auflösen lassen? Dieß untersuchen wir noch in dem gleich Folgenden.

§. 62.

Lehnsatz. Vorausgesetzt, daß unter y eine entweder bloß abstracte (d. h. eine gar keines Gegensatzes empfängliche) oder doch eine nur positive Größe, unter

y^ω aber nur der reelle und positive Werth dieses Ausdruckes verstanden wird: so gilt für alle y, die $> +\frac{1}{2}$ sind, die Gleichung:

$$\frac{y^\omega - 1}{\omega} = \frac{(y-1)}{y} + \frac{1}{2}\frac{(y-1)^2}{y^2} + \frac{1}{3}\frac{(y-1)^3}{y^3} + \dots$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{(y-1)^r}{y} + \Omega;$$

für alle y aber, die $< +2$ sind, folgende:

$$\frac{y^\omega - 1}{\omega} = (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \dots$$

$$\pm \frac{1}{r}(y-1)^r + \overset{1}{\Omega};$$

in welchen Gleichungen Ω und $\overset{1}{\Omega}$ so klein werden können, als man nur immer will, wenn man ω hinlänglich klein, r aber, oder die Menge der Glieder in den Reihen hinlänglich groß annimmt.

Beweis. 1. Es sey zuförderst $y > +\frac{1}{2}$; so hat man nach §. 48 für jeden Werth von ω die Gleichung:

$$y^\omega = 1 + \omega\frac{(y-1)}{y} + \omega\frac{\omega+1}{2}\frac{(y-1)^2}{y^2}$$

$$+ \omega\frac{\omega+1}{2}\frac{\omega+2}{3}\frac{(y-1)^3}{y^3} + \dots$$

$$+ \omega\frac{\omega+1}{2}\frac{\omega+2}{3}\dots\frac{\omega+r-1}{r}\frac{(y-1)^r}{y^r} + \Omega.$$

Verrichtete man die hier bloß angedeuteten Multiplicationen mit den Factoren $\frac{\omega+1}{2}, \frac{\omega+2}{3}, \dots \frac{\omega+(r-1)}{r}$ wirklich, und ordnete hierauf alles nach den Potenzen von ω; so käme man auf eine Gleichung von folgender Form:

$$y^{\omega} = 1 + \omega\left(\frac{(y-1)}{y} + \frac{1}{2}\frac{(y-1)^2}{y^2} + \frac{1}{3}\frac{(y-1)^3}{y^3} + \ldots + \frac{1}{r}\frac{(y-1)^r}{y^r}\right)$$
$$+ A\omega^2 + B\omega^3 + \ldots + R\omega^r + \Omega;$$

wo A, B, ... R gewisse Functionen der Größe $\frac{y-1}{y}$ vorstellen. Hieraus ergäbe sich dann

$$\frac{y^{\omega}-1}{\omega} = \frac{(y-1)}{y} + \frac{1}{2}\frac{(y-1)^2}{y^2} + \frac{1}{3}\frac{(y-1)^3}{y^3} + \ldots + \frac{1}{r}\frac{(y-1)^r}{y^r}$$
$$A\omega + B\omega^2 + \ldots + R\omega^{r-1} + \frac{\Omega}{\omega}.$$

Ich behaupte nun, daß sich die Größe

$$A\omega + B\omega^2 + \ldots + R\omega^{r-1} + \frac{\Omega}{\omega}$$

bloß durch Verminderung von ω, und Vermehrung von r so klein machen lasse, als man nur will.

α) Um dieses einzusehen, laßt uns zuförderst nur den Fall betrachten, wo ω so wohl auch $\frac{y-1}{y}$ positive Größen sind, und also $y > +1$. In diesem Falle kömmt, wenn man die Größen $(y-1)$ und $(r-1)$ als unzerlegbare betrachtet, in der Reihe

$$1 + \omega\frac{(y-1)}{y} + \omega\frac{\omega+1}{2}\frac{(y-1)^2}{y^2} + \ldots$$
$$+ \omega\frac{\omega+1}{2}\frac{\omega+2}{3}\ldots\frac{\omega+(r-1)}{r}\frac{(y-1)^r}{y^r}$$

durchaus kein Zeichen der Subtraction, und keine negative Größe vor; daher auch in der Entwickelung dieser Reihe nach den Potenzen von ω sämmtliche Glieder positiv seyn müssen. Also sind A, B, ... R alle positiv. Hieraus ergibt sich weiter, daß auch der Werth von Ω stets positiv seyn müsse. Denn wäre Ω negativ; d. h. wäre der Werth der obigen Reihe bey irgend einem r größer als y^ω: so könnte der Unterschied dadurch, daß man die Menge der Glieder in dieser Reihe vermehrt, d. i. neue positive Größen hinzufügt, nicht vermindert, und kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden können, wie doch nach §. 48 seyn soll. Sind aber alle Glieder in $A\omega^2 + B\omega^3 + \ldots R\omega^r + \Omega$ positiv: so folgt von selbst, daß wenn man diese Größe getheilt noch durch das positive ω wegläßt,

$$\frac{y^\omega - 1}{\omega} > \frac{(y-1)}{y} + \frac{1}{2}\frac{(y-1)^2}{y^2} + \frac{1}{3}\frac{(y-1)^3}{y^3} + \ldots + \frac{1}{r}\frac{(y-1)^r}{y^r}$$

seyn müsse. Um nun auch von der andern Seite eine Größe zu finden, zu der $\frac{y^\omega - 1}{\omega}$ in dem Verhältnisse des Kleinern steht: erwäge man, daß jeder der Factoren

$$\frac{\omega+1}{2}, \frac{\omega+2}{3}, \frac{\omega+1}{2}, \frac{\omega+2}{3}, \frac{\omega+3}{4}, \ldots \frac{\omega+1}{2}, \frac{\omega+2}{3}, \frac{\omega+3}{4} \ldots$$

$\frac{\omega+r-1}{r}$, die in der obigen Reihe erscheinen, unter der allgemeinen Form

$$\frac{\omega+1}{2} \cdot \frac{\omega+2}{3} \cdots \frac{\omega+p-1}{p} =$$

$$\frac{\omega+1}{1} \cdot \frac{\omega+2}{2} \cdots \frac{\omega+p-1}{p-1} \cdot \frac{1}{p} =$$

$$(1+\omega)\left(1+\frac{\omega}{2}\right)\left(1+\frac{\omega}{3}\right) \cdots \left(1+\frac{\omega}{p-1}\right)\frac{1}{p}$$

enthalten sey, wenn man p nach und nach 2, 3, 4, ... r bedeuten läßt. Nun ist gewiß

$$(1+\omega)\left(1+\frac{\omega}{2}\right)\left(1+\frac{\omega}{3}\right)\left(1+\frac{\omega}{p-1}\right)<(1+\omega)^{p-1},$$

indem die $(p-1)$ Factoren dieses letzteren Productes sämmtlich dem größten in dem ersteren gleichen. Aber $(1+\omega)^{p-1}$ ist, da $(p-1)$ eine ganze positive Zahl bedeutet, nach §. 8

$$= 1 + (p-1)\,\omega + (p-1)\frac{(p-2)\,\omega^2}{2}$$

$$+ (p-1)\frac{(p-2)}{2}\frac{(p-3)\,\omega^3}{3} + \ldots$$

$$= 1+(p-1)\,\omega\left(1+\frac{p-2}{2}\omega+\frac{p-2}{2}\,\frac{p-3}{3}\omega^2 + \ldots\right.$$

eine Reihe, in welcher alle Glieder positiv oder Null sind (§. 4). Es ist daher ihr Werth gewiß

$$< 1+(p-1)\,\omega\left(1+(p-2)\,\omega+(p-2)\frac{(p-3)\,\omega^2}{2} + \ldots\right)$$

$$= 1 + (p-1)\,\omega\,(1+\omega)^{p-2}.$$

Um so gewisser ist demnach

$$(1+\omega)\left(1+\frac{\omega}{2}\right)\left(1+\frac{\omega}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{\omega}{p-1}\right)$$

$$< 1 + (p-1)\,\omega\,(1+\omega)^{p-2}.$$

Wenn man daher in der Reihe, die den Werth von y^ω ausdrückt, statt jedes Factors von der Form

$$\frac{\omega+1}{2}\,\frac{\omega+2}{3}\ldots\frac{\omega+p-1}{p}=(1+\omega)\left(1+\frac{\omega}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{\omega}{p-1}\right)\frac{1}{p}$$

eine Größe von der Form $\dfrac{1+(p-1)\,\omega\,(1+\omega)^{p-2}}{p}$

setzt: so muß der Werth derselben nothwendig $> y^\omega$ ausfallen, auch wenn man dafür Ω wegläßt. Denn dieses kann zufolge §. 48 bey unverändertem y und ω bloß durch Vermehrung von r kleiner als jede gegebene Größe werden, also auch kleiner als eine der positiven Größen, die man hier zusetzt, die bey einerley y und ω einen bestimmten Werth besitzen. Es ist daher

$$y^{\omega} < 1 + \omega \frac{(y-1)}{y} + \frac{\omega}{2} \frac{(y-1)^2}{y^2} (1+\omega)$$
$$+ \frac{\omega}{3} \frac{(y-1)^3}{y^3} (1 + 2\omega (1+\omega))$$
$$+ \frac{\omega}{4} \frac{(y-1)^4}{y^4} (1+3\omega (1+\omega)^2) + \ldots$$
$$+ \frac{\omega}{r} \frac{(y-1)^r}{y^r} (1 + (r-1)\,\omega\,(1+\omega)^{r-2})$$
$$= 1 + \omega \frac{(y-1)}{y} + \frac{\omega}{2} \frac{(y-1)^2}{y^2} + \frac{\omega}{3} \frac{(y-1)^3}{y^3} + \ldots + \frac{\omega}{r} \frac{(y-1)^r}{y^r}$$
$$+ \frac{\omega^2}{2} \frac{(y-1)^2}{y^2} + \frac{2}{3} \omega^2 \frac{(y-1)^3}{y^3} (1+\omega) + \frac{3}{4} \omega^2 \frac{(y-1)^4}{y^4} (1+\omega)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{r-1}{r} \omega^2 \frac{(y-1)^r}{y^r} (1+\omega)^{r-2}.$$

Die hier zuletzt stehende Reihe, welche den Factor ω^2 enthält, ist sicher kleiner, als folgende, die aus ihr entsteht, wenn man statt der Brüche $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \frac{r-1}{r}$ überall die Einheit setzt:

$$+ \omega^2 \frac{(y-1)^2}{y^2} + \omega^2 \frac{(y-1)^3}{y^3} (1+\omega) + \omega^2 \frac{(y-1)^4}{y^4} (1+\omega)^2 + \ldots$$
$$+ \omega^2 \frac{(y-1)^r}{y} (1+\omega)^{r-2}$$
$$= \omega^2 \frac{(y-1)^2}{y^2} \left(1 + \frac{(y-1)}{y} (1+\omega) + \frac{(y-1)^2}{y^2} (1+\omega)^2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{(y-1)^{r-2}}{y} (1+\omega)^{r-2} \right)$$

Die Reihe innerhalb der Klammer ist nun eine geometrische Progression, deren Exponent $\frac{(y-1)}{y} (1+\omega)$ ist. Nimmt man also ω so klein, daß das Product aus $(1+\omega)$

in den echten Bruch $\frac{(y-1)}{y}$ auch noch ein echter Bruch bleibt: so wird von diesem Werthe an, und für alle kleineren die Reihe abnehmend, und ihr Werth

$$= \frac{1-\left(\frac{y-1}{y}\right)^{r-1}(1+\omega)^{r-1}}{1-\left(\frac{y-1}{y}\right)(1+\omega)}$$ verbleibt, so groß man auch r nehme, doch immer

$$< \frac{1}{1-\left(\frac{y-1}{y}\right)(1+\omega)} = \frac{y}{1-\omega(y-1)}.$$

Es ist also stets:

$$\frac{y^\omega-1}{\omega} < \frac{(y-1)}{y} + \frac{1}{2}\frac{(y-1)^2}{y^2} + \frac{1}{3}\frac{(y-1)^3}{y^3} + \dots + \frac{1}{r}\frac{(y-1)^r}{y^r}$$
$$+ \frac{\omega\,(y-1)^2}{y-\omega y(y-1)}.$$

Und vorhin war:

$$\frac{y^\omega-1}{\omega} > \frac{(y-1)}{y} + \frac{1}{2}\frac{(y-1)^2}{y^2} + \frac{1}{3}\frac{(y-1)^3}{y^3} + \dots + \frac{(y-1)^r}{y^r}.$$

Hier haben wir also zwey Grenzen, zwischen denen der Werth der Function $\frac{y^\omega-1}{\omega}$ stets eingeschlossen bleibt. Ihr Unterschied $\frac{\omega\,(y-1)^2}{y-\omega y(y-1)}$ kann, wie man aus dem Beweise des §. 19 ersieht, kleiner als jede gegebene Größe werden, wenn man ω klein genug nimmt. Also ist der wahre Werth von

$$\frac{y^\omega-1}{\omega} = \frac{(y-1)}{y} + \frac{1}{2}\frac{(y-1)^2}{y^2} + \frac{1}{3}\frac{(y-1)^3}{y^3} + \dots$$
$$+ \frac{1}{r}\frac{(y-1)^r}{y^r} + \overset{1}{\Omega}.$$

β.) Nun sey ω noch immer positiv, y aber $< +1$, obgleich doch $> + \frac{1}{2}$. Sonach stellt $\frac{y-1}{y}$ jetzt eine negative Größe vor; weil aber y doch $> \frac{1}{2}$, so gilt noch immer die Gleichung:

$$\frac{y^{\omega}-1}{\omega} = \frac{(y-1)}{y} + \frac{1}{2}\frac{(y-1)^2}{y^2} + \frac{1}{3}\frac{(y-1)^3}{y^3} + \ldots + \frac{1}{r}\frac{(y-1)^r}{y^r}$$
$$+ \overset{I}{A}\omega + \overset{I}{B}\omega^2 + \ldots + \overset{I}{R}\omega^{r-1} + \frac{\overset{I}{\Omega}}{\omega}.$$

Allein zu jedem y, das $> \frac{1}{2}$ und zugleich < 1, ist eine Größe z angeblich, welche der Gleichung $\frac{y-1}{y} = -\frac{z-1}{z}$ entspricht, und hiebey $> + 1$ ist. Dazu bedarf es nähmlich nur, daß man $z = \frac{y}{2y-1}$ nehme; so ist z positiv und > 1. Daher gilt auch die Gleichung:

$$\frac{z^{\omega}-1}{\omega} = \frac{(z-1)}{z} + \frac{1}{2}\frac{(z-1)^2}{z^2} + \frac{1}{3}\frac{(z-1)^3}{z^3} + \ldots + \frac{1}{r}\frac{(z-1)^r}{z^r}$$
$$+ A\omega + B\omega^2 + \ldots + R\omega^{r-1} + \frac{\Omega}{\omega},$$

in welcher nach bereits Erwiesenem die Größe $A\omega + B\omega^2 + \ldots + R\omega^{r-1} + \frac{\Omega}{\omega}$ bloß durch Vermehrung von r, und durch Verminderung von ω so klein werden kann, als man nur will; insonderheit gilt dieses auch von dem Theile $A\omega + B\omega^2 + \ldots + R\omega^{r-1}$. Vergleichen wir aber diesen mit $\overset{I}{A}\omega + \overset{I}{B}\omega^2 + \ldots + \overset{I}{R}\omega^{r-1}$; so leuchtet alsbald ein, daß die Coefficienten $\overset{I}{A}, \overset{I}{B}, \ldots \overset{I}{R}$ ganz auf dieselbe Art aus der Größe $\frac{z-1}{z}$, wie die $A, B, \ldots R$ aus der Größe $\frac{y-1}{y}$

zusammen gesetzt werden. Da nun $\frac{z-1}{z}$ und $\frac{y-1}{y}$ dem Werthe nach einander gleichen; und da, wie in α) bemerkt, die einzelnen Theile $\frac{z-1}{z}$, $\frac{(z-1)^2}{z^2}$, $\frac{(z-1)^3}{z^3}$, .. $\frac{(z-1)^r}{z^r}$, aus welchen A, B, ... R zusammen gesetzt sind, alle positiv, und nur durch lauter Additionen verknüpft sind, während in $\overset{1}{A}$, $\overset{1}{B}$, ... $\overset{1}{R}$ theils negative Glieder, wie $\frac{(y-1)}{y}$, $\frac{(y-1)^3}{y^3}$, $\frac{(y-1)^5}{y^5}$, ..., theils positive, wie $\frac{(y-1)^2}{y^2}$, $\frac{(y-1)^4}{y^4}$, $\frac{(y-1)^6}{y^6}$, ... vorkommen: so folgt unläugbar, daß der Gesammtwerth von $\overset{1}{A}\omega + \overset{1}{B}\omega^2 + \ldots + \overset{1}{R}\omega^{r-1}$ kleiner als der von $A\omega + B\omega^2 + \ldots + R\omega^{r-1}$ seyn müsse. Bleibt nun der letztere, so groß man auch r annehmen mag, stets $< \frac{\omega(z-1)^2}{z-\omega z(z-1)} = \frac{\omega(y-1)^2}{2y^2-y+\omega y(y-1)}$; so muß um so gewisser $\overset{1}{A}\omega + \overset{1}{B}\omega^2 + \ldots + \overset{1}{R}\omega$ stets $< \frac{\omega(y-1)^2}{2y^2-y+\omega y(y-1)}$ verbleiben, so groß man auch r nehme. Soll demnach $\overset{1}{A}\omega + \overset{1}{B}\omega^2 + \ldots + \overset{1}{R}\omega^{r-1} + \frac{\overset{1}{\Omega}}{\omega}$ kleiner als irgend eine gegebene Größe D werden; so nehme man erst ω so klein, daß $\frac{\omega(y-1)^2}{2y^2-y+\omega y(y-1)} < \frac{D}{2}$ sey; und es wird für jeden Werth von r, $\overset{1}{A}\omega + \overset{1}{B}\omega^2 + \ldots + \overset{1}{R}\omega^{r-1} < \frac{D}{2}$ verbleiben. Nimmt man daher jetzo noch r so groß, daß $\overset{1}{\Omega} < \frac{\omega D}{2}$; so wird $\frac{\overset{1}{\Omega}}{\omega} < \frac{D}{2}$, und

$\overset{1}{A}\omega + \overset{1}{B}\omega^2 + \ldots + \overset{r}{R}\omega^{r-1} + \frac{\overset{1}{\Omega}}{\omega}$ gewiß $<$ D seyn, wie verlangt ward. Also ist nicht nur für jedes $y > +1$, sondern auch für jedes $> +\frac{1}{2}$ die Gleichung richtig:

$$\frac{y^{\omega}-1}{\omega} = \frac{(y-1)}{y} + \frac{1}{2}\frac{(y-1)^2}{y^2} + \frac{1}{3}\frac{(y-1)^3}{y^3} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{r}\frac{(y-1)^r}{y^r} + \Omega,$$

wenn nur ω positiv ist.

γ. Leicht zeigt es sich endlich, daß sie auch richtig sey, wenn ω negativ ist. Denn da $\frac{y^{-\omega}-1}{-\omega} = \frac{y^{\omega}-1}{\omega} \cdot \frac{1}{y^{\omega}}$; und da der Factor $\frac{1}{y^{\omega}}$, wenn man ω so klein nimmt, als man will, der Einheit so nahe tritt, als man nur immer will: so ist $\frac{y^{-\omega}-1}{-\omega} = \frac{y^{\omega}-1}{\omega}(1+\Omega)$. Aus dem Bisherigen ist aber zu ersehen, daß der Werth von $\frac{y^{\omega}-1}{\omega}$, so klein man auch ω annehmen mag, innerhalb einer gewissen endlichen Grenze verbleibe. Denn der Werth der Reihe

$$\frac{(y-1)}{y} + \frac{1}{2}\frac{(y-1)^2}{y^2} + \frac{1}{3}\frac{(y-1)^3}{y^3} + \ldots + \frac{1}{r}\frac{(y-1)^r}{y^r},$$

der ihm so nahe kommt, als man nur immer will, wenn man r hinlänglich groß nimmt, ist offenbar kleiner als der Werth der geometrischen Progression

$$\pm\frac{(y-1)}{y} + \frac{(y-1)^2}{y^2} \pm \frac{(y-1)^3}{y^3} + \ldots \pm \frac{(y-1)^r}{y},$$

in welcher alle Glieder positiv angenommen werden. Nun ist der Exponent dieser Progression $\frac{y-1}{y}$ ein echter Bruch, also ihr Werth stets kleiner als eine gewisse endliche Größe; mithin ist nach §. 17 $\frac{y^{\omega}-1}{\omega}\,\Omega = \overset{1}{\Omega}$, und folglich nach §. 16:

$$\frac{y^{-\omega}-1}{-\omega} = \frac{(y-1)}{y} + \frac{1}{2}\frac{(y-1)^2}{y^2} + \frac{1}{3}\frac{(y-1)^3}{y^3} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{(y-1)^r}{y^r} + \overset{(2)}{\Omega}.$$

2. Der Beweis der zweyten Formel hat nun keine Schwierigkeiten mehr. Für alle Werthe von y, die $< +2$ sind, bedeutet nähmlich $\frac{1}{y}$ eine Größe, die $> +\frac{1}{2}$ ist.

Da nun nach n.°1. $\frac{y^{\omega}-1}{\omega} = \frac{y^{-\omega}-1}{-\omega} - \overset{1}{\Omega}$

$= -\frac{\left(\frac{1}{y}\right)^{\omega}-1}{\omega} - \overset{1}{\Omega}$ ist: so wird $\frac{\left(\frac{1}{y}\right)^{\omega}-1}{\omega}$ nach der Formel des n.°1 entwickelt werden können, wenn man daselbst statt y, $\frac{1}{y}$ setzt. Hiedurch verwandelt sich aber $\left(\frac{y-1}{y}\right)$ in $(1-y)$; und man erhält:

$$\frac{y^{\omega}-1}{\omega} = -\Big((1-y) + \frac{1}{2}(1-y)^2 + \frac{1}{3}(1-y)^3 + \ldots$$

$$+ \frac{1}{r}(1-y)^r\Big) - \overset{1}{\Omega},$$

oder, was eben so viel ist:

$$\frac{y^{\omega}-1}{\omega} = (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \ldots$$

$$\pm \frac{1}{r}(y-1)^r - \overset{1}{\Omega}.$$

§. 63.

Zusatz. Für einen negativen Werth der Größe y^ω nähert sich der Zähler des Bruches $\frac{y^\omega - 1}{\omega}$ dem Werthe — 2, so sehr man will, während sein Nenner ω so klein wird, als man will; woraus erhellet, daß $\frac{y^\omega - 1}{\omega}$ größer als jede gegebene Größe werde, wenn man ω stets vermindert, also auch durch keine Formel darstellbar sey, die jenen des §. 62 ähnlich wäre. Ist aber y selbst negativ; so kömmt es auf die Beschaffenheit von ω an, ob sich $\frac{y^\omega - 1}{\omega}$ auf eine dem §. 62 ähnliche Art entwickeln lasse. Ist dieses von der Form $\frac{2n}{m}$ d. h. ein Bruch mit geradem Zähler; so ist $(-y)^\omega = (+y)^\omega$, und also gilt von diesem Falle alles, was von $\frac{(+y)^\omega - 1}{\omega}$ so eben gezeiget ward. Ist aber ω von der Form $\frac{2n+1}{m}$; so kömmt es noch auf die Beschaffenheit des Nenners m an. Ist auch m ungerad, so ist $(-y)^\omega$ negativ, und folglich wächst $\frac{(-y)^\omega - 1}{\omega}$ ohne Ende. Ist vollends m gerade, so ist $(-y)^\omega$, und folglich auch $\frac{(-y)^\omega - 1}{\omega}$ imaginär.

§. 64.

Aufgabe. Zu untersuchen, ob und auf welche Art die Exponentialgröße a^x, so fern a positiv, und unter a^x nur der reelle und positive Werth dieses Ausdruckes verstanden wird, in eine Reihe nach den Potenzen von x aufgelöst werden könne.

Auflösung. 1. Nach §. 48 bestehet, je nachdem $a < +2$ oder $> +\frac{1}{2}$ ist, für jeden Werth von x, eine von folgenden zwey Gleichungen: entweder

$$a^x = 1 + x(a-1) + x\frac{x-1}{2}(a-1)^2$$
$$+ x\frac{x-1}{2}\frac{x-2}{3}(a-1)^3 + \ldots$$
$$+ x\frac{x-1}{2}\frac{x-2}{3}\ldots\frac{x-r+1}{r}(a-1)^r + \Omega,$$

oder

$$a^x = 1 + x\frac{(a-1)}{a} + x\frac{x+1}{2}\frac{(a-1)^2}{a^2}$$
$$+ x\frac{x+1}{2}\frac{x+2}{3}\frac{(a-1)^3}{a^3} + \ldots$$
$$+ x\frac{x+1}{2}\frac{x+2}{3}\ldots\frac{x+r-1}{r}\frac{(a-1)^r}{a^r} + \overset{1}{\Omega}.$$

Vollzöge man nun die hier bloß angedeuteten Multiplicationen mit den Factoren $\frac{x-1}{2}, \frac{x-2}{3}, \ldots \frac{x-r+1}{r}$ oder $\frac{x+1}{2}, \frac{x+2}{3}, \ldots \frac{x+r-1}{r}$ wirklich; und vereinigte dann alle Größen, die einerley Potenz von x enthalten, in ein Glied: so erhielte man aus beyden Gleichungen schon, was verlangt wird, eine nach den Potenzen der x fortschreitende Reihe, welche dem Werthe der Function a^x so nahe käme, als man nur immer will, wenn man nur r d. h. die Menge ihrer Glieder groß genug nimmt. Hieraus erhellet also die Möglichkeit einer dergleichen Reihe für jeden Werth von x; nur wäes auf diesem Wege schwer, das Bildungsgesetz für die Coefficienten ihrer Glieder zu entdecken. Dieß also suchen wir auf einem andern Wege.

2. Die Reihe, welche man aus der Entwickelung einer der beyden obigen Gleichungen erhielte, würde offenbar das erste Glied $= 1$, und in den folgenden nur lauter positive und ganzzählige Potenzen von x haben. Da aber Jemand vermeinen könnte, die aus jenen beyden Gleichungen herleitbare Form sey vielleicht nicht die einzige, die eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe haben muß, um dem Werthe von a^x für möglichst vielerley — d. i., wie wir jetzt wissen, für alle — Werthe von x entweder völlig gleich, oder doch so nahe zu kommen, als man nur immer will: so wollen wir annehmen, $Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots + Rx^\varrho$ sey jene allgemeinste Form, die eine solche Reihe besitzen muß, d. h. es sey für alle Werthe von x:

$$a^x = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots + Rx^\varrho + \Omega, \ldots \odot,$$

wenn man die Menge der Glieder in dieser Reihe hinlänglich vermehret. So muß denn also auch

$$a^{x+\omega} = A(x+\omega)^\alpha + B(x+\omega)^\beta + C(x+\omega)^\gamma + \ldots$$
$$+ R(x+\omega)^\varrho + \overset{1}{\Omega}$$

seyn; und folglich durch Abzug und Division mit ω:

$$a^x \cdot \frac{a^\omega - 1}{\omega} = A\left(\frac{(x+\omega)^\alpha - x^\alpha}{\omega}\right) + B\left(\frac{(x+\omega)^\beta - x^\beta}{\omega}\right) + \ldots$$
$$+ R\left(\frac{(x+\omega)^\varrho - x^\varrho}{\omega}\right) + \frac{\overset{1}{\Omega} - \Omega}{\omega}.$$

Die Größe $\frac{a^\omega - 1}{\omega}$ nähert sich, wenn man ω klein genug nimmt, zufolge §. 63 so sehr, als man nur immer will, einem gewissen, beständigen Werthe, den, je nachdem a $< +2$, oder $> +\frac{1}{2}$ ist, entweder die Reihe:

$$(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\ldots\pm\frac{1}{r}(a-1)^r,$$

oder die Reihe:

$$\frac{(a-1)}{a}+\frac{1}{2}\frac{(a-1)^2}{a^2}+\frac{1}{3}\frac{(a-1)^3}{a^3}+\ldots+\frac{1}{r}\frac{(a-1)^r}{a^r}$$

so genau angibt, als man nur immer will, wenn man r groß genug nimmt. Wir wollen diesen Werth, weil er von a abhängt, kurz durch $\mathfrak{A}$ bezeichnen, und $\frac{a^\omega-1}{\omega} = \mathfrak{A} + \overset{(a)}{\omega}$ setzen. Unter derselben Bedingung, daß ω so klein genommen werde, als man nur immer will, ist auch nach §. 23

$$\frac{(x+\omega)^\alpha - x^\alpha}{\omega} = \alpha x^{\alpha-1} + \overset{(\alpha)}{\omega},$$

$$\frac{(x+\omega)^\beta - x^\beta}{\omega} = \beta x^{\beta-1} + \overset{(\beta)}{\omega}$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$\frac{(x+\omega)^\varrho - x^\varrho}{\omega} = \varrho x^{\varrho-1} + \overset{(\varrho)}{\omega}$$

Daher erhalten wir die Gleichung:

$$a^x.\mathfrak{A} = A\alpha x^{\alpha-1}+B\beta x^{\beta-1}+\ldots+R\varrho x^{\varrho-1}$$
$$-a^x.\overset{(a)}{\omega}+A\overset{(\alpha)}{\omega}+B\overset{(\beta)}{\omega}+\ldots+R\overset{(\varrho)}{\omega}+\frac{\overset{1}{\Omega}-\Omega}{\omega}.$$

Wie von dem ähnlichen in §. 30, läßt sich auch hier von dem Ausdrucke $\frac{\overset{1}{\Omega}-\Omega}{\omega}$ zeigen, daß er bloß durch Vermehrung der Gliederzahl in der Reihe $Ax^\alpha + Bx^\beta + \ldots + Rx^\varrho$ so klein gemacht werden könne, als man nur immer will. Dann aber kann bey einerley Gliederzahl bloß durch Verminderung von ω, die Summe

$$A^{(\alpha)}_{\omega} + B^{(\beta)}_{\omega} + \ldots + R^{(\varrho)}_{\omega} - a^{x\,(a)}_{\omega}$$

kleiner als jede gegebene Größe werden (§. 17. 15). Also ist

$$a^{x}.\,\mathfrak{A} = A\alpha x^{\alpha-1} + B\beta x^{\beta-1} + \ldots + R\varrho x^{\varrho-1} + \Omega; \quad (2)$$

und wenn man statt a^x die Reihe setzt, die diesem Werthe gleichen soll; so ist nach abermahliger Anwendung von §. 17. 15:

$$\mathfrak{A}Ax^{\alpha} + \mathfrak{A}Bx^{\beta} + \mathfrak{A}Cx^{\gamma} + \ldots + \mathfrak{A}Rx^{\varrho} =$$
$$\alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \ldots + \varrho Rx^{\varrho-1} + \Omega \ldots; \quad (3)$$

Da diese Gleichung, als eine nothwendige Bedingung zur Giltigkeit der Gleichung ⊙ bestehen muß: so läßt sich auf sie §. 28 anwenden; und man findet durch ähnliche Schlüsse, wie die §. 32 gebrauchten, daß $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, ..., $\varrho =$ irgend einer ganzen Zahl r, die um 1 kleiner, als die Menge der Glieder in der Reihe ist; ferner $B = \mathfrak{A}\,A$; $C = \frac{\mathfrak{A}^2\,A}{2}$; $D = \frac{\mathfrak{A}^3\,A}{2 \cdot 3}$; ...;

$R = \frac{\mathfrak{A}\,Q}{r} = \frac{\mathfrak{A}^r\,A}{2.3.4..r}$ seyn müsse. Und bey diesen Bestimmungen tilgen sich alle Glieder der Gleichung, bis auf das höchste $\mathfrak{A}\,R\,x^{\varrho} = \frac{\mathfrak{A}^{r+1}\,Ax^r}{2 \cdot 3 \ldots r}$. Aber es ist leicht einzusehen, daß dieser Unterschied, d. r, wenn die Gleichung gelten soll, so klein muß werden können, als man nur immer will, diese Eigenschaft auch in der That besitze. Denn jeder folgende Werth desselben $\frac{\mathfrak{A}^{r+2}Ax^{r+1}}{2.3\ldots(r+1)}$ entstehet aus dem nächst vorhergehenden $\frac{\mathfrak{A}^{r+1} Ax^r}{2.3\ldots r}$ durch Multiplication mit $\frac{\mathfrak{A}x}{r+1}$. Da nun bey einerley $\mathfrak{A}$ und x, r so groß werden kann, als man nur will; so ist von dort an, wo $(r+1) > \mathfrak{A}x$ geworden, und für alle größeren Werthe $\frac{\mathfrak{A}x}{r+1}$ ein echter Bruch, der immer kleiner wird. Mithin wird jeder folgende Werth jenes Unterschiedes aus dem vorhergehenden durch die Multiplication mit einem echten Bruche, der immer kleiner wird, erzeugt; also wird dieser Unterschied selbst gewiß so klein, als man nur immer will, wenn man r groß genug nimmt. Folglich ist die Gestalt der Reihe $Ax^\alpha + Bx^\beta + \ldots + Rx^\varrho$, welche die Bedingungsgleichung ☿ fordert, durch die sie auch befriediget wird, nachstehende:

$$A + A\mathfrak{A}x + \frac{A\mathfrak{A}^2x^2}{1.2} + \frac{A\mathfrak{A}^3x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{A\mathfrak{A}^rx^r}{1.2.3..r}.$$

Hier bleibt noch A ganz unbestimmt. Die Gleichung ⊙ aber fordert, daß $A = 1$ sey; weil sonst unmöglich für jeden Werth von x,

$$a^x = A + A\mathfrak{A}x + \frac{A\mathfrak{A}^2x^2}{1.2} + \ldots + \frac{A\mathfrak{A}^rx^r}{1.2.3..r} + \Omega$$

seyn könnte. Denn nimmt man $x = \omega$, so nähert sich a^x der Einheit; die Reihe $A + A\mathfrak{A}x + \ldots + \frac{A\mathfrak{A}^rx^r}{1.2.3..r} + \Omega$ aber, bey einerley r, dem Werthe A so sehr, als man nur immer will. Also muß nach §. 27 $A = 1$ seyn. Durch diese Bestimmung erhält nun unsre Reihe folgendes Aussehen:

$$1 + \mathfrak{A}x + \frac{\mathfrak{A}^2 x^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{A}^3 x^3}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{A}^4 x^4}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{\mathfrak{A}^r x^r}{1.2.3..r}.$$

Es ist denn also jetzt nichts mehr unbestimmt in ihrer Form; daher wir erfahren, daß es nur eine einzige Gestalt für eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe gebe, wenn sie dem Werthe von a^x für jedes x entweder völlig gleich oder doch so nahe kommen soll, als man nur immer will. Da nun nach n° 1 eine dergleichen Reihe in der That möglich ist, so muß es die eben gefundene seyn, und es ist also für jeden Werth von x:

$$a^x = 1 + \mathfrak{A}x + \frac{\mathfrak{A}^2 x^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{A}^3 x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\mathfrak{A}^r x^r}{1.2.3..r} + \Omega,$$

wenn man nur r hinlänglich groß annimmt.

§. 65.

Zusatz. Soll einmahl a^x eine des Gegensatzes empfängliche Größe bezeichnen, so sind die beyden reellen Werthe, die sie zuweilen hat (nähmlich wenn x von der Form $\frac{p}{2n}$), bekanntlich gleich groß, und nur im Zeichen verschieden. Daraus ergibt sich, daß man sie beyde durch die Formel:

$$a^x = \pm 1 \pm \mathfrak{A}x \pm \frac{\mathfrak{A}^2 x^2}{1.2} \pm \frac{\mathfrak{A}^3 x^3}{1.2.3} \pm \ldots \pm \frac{\mathfrak{A}^r x^r}{1.2.3..r} \pm \Omega$$

darstellen könne. Ist aber a eine des Gegensatzes fähige Größe, und dabey negativ, so weiß man, daß a^x nur dann etwas Reelles sey, wenn x nicht von der Form $\frac{2n+1}{2m}$, sondern entweder $= \frac{2n}{2m}$, oder $= \frac{2n+1}{2m+1}$ ist.

Allein $(-a)^{\frac{2n}{2m}}$ ist bekanntlich $= (+a)^{\frac{2n}{2m}}$; und $(-a)^{\frac{2n+1}{2m+1}} = -(+a)^{\frac{2n+1}{2m+1}}$: also läßt sich der Werth von a^x auch selbst in diesen Fällen, d. h. die sämmtlichen reellen Werthe von a^x lassen sich ausgedrückt in einer nach den Potenzen von x fortschreitenden Reihe darstellen.

§. 66.

Aufgabe. Zu untersuchen, ob und auf welche Art die Function $\overset{(a)}{l}\,y$ in eine Reihe nach den Potenzen der x, oder sonst einer aus ihr leicht abzuleitenden Größe auflöslich sey, wenn man unter a eine entweder bloß abstracte, oder doch nur positive Größe, und unter jeder Potenz derselben nur den reellen und positiven Werth verstehet.

Auflösung. 1) Wenn wir zur Abkürzung $\overset{(a)}{l}\,y = x$ schreiben, so soll $a^x = y$ seyn; und folglich auch, was immer ω bedeute,

$a^{\omega x} = y^{\omega}$, und $\frac{(a^{\omega x}-1)}{\omega x} x = \frac{y^{\omega}-1}{\omega}$. Nun lasse man ω eine Größe, welche so klein werden kann, als man nur immer will, bedeuten; so wird bey einerley x, auch ωx eine dergleichen Größe seyn. Daher wird $\frac{a^{\omega x}-1}{\omega x}$ bloß durch Verminderung von ω einem gewissen beständigen Werthe, den wir §. 64 bereits durch A bezeichnet haben, so nahe gebracht werden können, als man nur immer will; also $= \mathfrak{A} + \mathfrak{n}$ seyn. Unter derselben Bedingung wird aber auch $\frac{y^{\omega}-1}{\omega}$, je nachdem $y < +2$, oder $> +\frac{1}{2}$, entweder

$$=(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\ldots\pm\frac{1}{r}(y-1)^r+\overset{1}{\Omega},$$

oder

$$=\left(\frac{y-1}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y-1}{y}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y}\right)^3+\ldots$$
$$+\frac{1}{r}\left(\frac{y-1}{y}\right)^r+\overset{2}{\Omega}$$

seyn. Wir erhalten also die Gleichung:

$$x(\mathfrak{A}+\mathfrak{n})=\begin{cases}(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\ldots\\ \qquad\pm\frac{1}{r}(y-1)^r+\overset{1}{\Omega},\\ \text{— — — oder — — — — —}\\ \left(\frac{y-1}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y-1}{y}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y}\right)^3+\ldots\\ \qquad+\frac{1}{r}\left(\frac{y-1}{y}\right)^r+\overset{2}{\Omega}.\end{cases}$$

Daher nach Anwendung der §. 17. 15;

$$x=\frac{1}{\mathfrak{A}}\Big((y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\ldots$$
$$\pm\frac{1}{r}(y-1)^r\Big)+\overset{3}{\Omega},$$

wenn $y < +2$ ist; oder:

$$x=\frac{1}{\mathfrak{A}}\left(\left(\frac{y-1}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y-1}{y}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y}\right)^3+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r}\left(\frac{y-1}{y}\right)^r\right)+\overset{4}{\Omega},$$

wenn $y > +\frac{1}{2}$ ist.

Hier haben wir also bereits, was verlangt worden war, $x = \overset{(a)}{l}\,y$ durch eine Reihe steigender Potenzen zwar nicht der y selbst, aber doch einer aus ihr leicht abzuleitenden Größe, nähmlich entweder der $(y-1)$, oder der $\left(\frac{y-1}{y}\right)$, ausgedrückt.

2. Es frägt sich nur noch, ob es nicht möglich sey, $\overset{(a)}{l}\,y$ auf eine andere Art, nahmentlich durch eine Reihe steigender Potenzen der Größe y selbst, oder einer noch einfacheren Ableitung aus ihr, als es die $(y-1)$, $\left(\frac{y-1}{y}\right)$ sind, darzustellen. Zu diesem Ende sey z diejenige Größe, nach deren steigenden Potenzen $x = \overset{(a)}{l}\,y$ ausdrückbar ist; und zwar, man habe:

$$x = Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + \ldots + Rz^{\varrho} + \Omega \ldots \odot$$

Soll diese Gleichung für alle z, die kleiner als ein gewisses sind, gelten; so muß sie auch gelten, wenn man statt z, $z+\omega$ setzt, wodurch sich x in $x + \overset{1}{\omega}$ verwandeln mag. Es muß daher

$$x + \overset{1}{\omega} = A(z+\omega)^{\alpha} + B(z+\omega)^{\beta} + \ldots + R(z+\omega)^{\varrho} + \overset{1}{\Omega}$$

seyn; oder durch Abzug und Division mit ω, wenn man auch gleich die aus §. 30. 55 und 64. schon bekannte Bezeichnungsart einführt:

$$\frac{\overset{1}{\omega}}{\omega} = \left\{\begin{array}{l} \alpha A z^{\alpha-1} + \beta B z^{\beta-1} + \ldots + \varrho R z^{\varrho-1} \\ + \overset{(\alpha)}{A}\,\omega + \overset{(\beta)}{B}\,\omega + \ldots + \overset{(\varrho)}{R}\,\omega \end{array}\right. + \frac{\overset{1}{\Omega} - \Omega}{\omega}.$$

Ganz auf dieselbe Art, wie in den eben genannten §§., läßt sich auch hier zeigen, daß die Größe

$A\overset{(\alpha)}{\omega} + B\overset{(\beta)}{\omega} + \ldots + R\overset{(\rho)}{\omega} + \frac{\overset{I}{\Omega}-\Omega}{\omega}$ bloß durch Vermehrung der Gliederzahl, und Verminderung von ω so klein werden könne, als man nur immer will. Wir haben also:

$$\frac{\overset{1}{\omega}}{\omega} = \alpha A z^{\alpha-1} + \beta B z^{\beta-1} + \ldots + \rho R z^{\rho-1} + \overset{(2)}{\Omega}.$$

Soll nun z irgend eine von y abgeleitete Größe seyn; so kann auch umgekehrt y als eine Function von z betrachtet, und also $y = fz$ geschrieben werden. Je einfacher die Beschaffenheit der Function fz angenommen wird, um desto einfacher wird auch die Herleitungsart der z aus y seyn. Ist aber $a^x = y = fz$, so muß auch $a^{x+\overset{1}{\omega}} = f(z+\omega)$ seyn. Dieß gibt $a^{x+\overset{1}{\omega}} - a^x = f(z+\omega) - fz$, und $\frac{a^{x+\overset{1}{\omega}} - a^x}{a^x} = a^{\overset{1}{\omega}} - 1 = \frac{f(z+\omega)-fz}{fz}$; also:

$$\frac{a^{\overset{1}{\omega}}-1}{\overset{1}{\omega}} = \mathfrak{A} + \overset{2}{\omega} = \frac{f(z+\omega)-fz}{\overset{1}{\omega}fz},$$

woraus sich durch Anwendung von §. 17. 15

$$\frac{\overset{1}{\omega}}{\omega} = \frac{f(z+\omega)-fz}{\omega}\,\frac{1}{\mathfrak{A}fz} + \overset{3}{\omega}$$

ergibt. Also muß folgende Gleichung:

$$\frac{f(z+\omega)-fz}{\omega}\,\frac{1}{\mathfrak{A}fz} = \alpha A z^{\alpha-1} + \beta B z^{\beta-1} + \ldots + \rho R z^{\rho-1} + \overset{3}{\Omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ♀$$

als eine unumgängliche Bedingung zur Giltigkeit der Gleichung ⊙ bestehen. Aus ihr läßt sich beurtheilen, —

nicht, wie f z beschaffen seyn müsse, aber doch — wie es nicht beschaffen seyn dürfe; indem bey jeder Form der Function f z, bey der nicht einmahl ♃ bestehet, auch ⊙ nicht besteht, allein nicht umgekehrt.

α. Hieraus ersehen wir zuförderst, daß $y = fz$ nicht $= z$ selbst, auch nicht $=$ einem bloßen Vielfachen von z, z. B. n z seyn dürfe. Denn nähmen wir $fz = nz$ an; so fände sich

$$\frac{f(z+\omega)-fz}{\omega}\ \frac{1}{\mathfrak{A}fz} = \frac{1}{\mathfrak{A}z}.$$ Es müßte also

$$\frac{1}{\mathfrak{A}z} = \alpha A z^{\alpha-1} + \beta B z^{\beta-1} + \ldots + \varrho R z^{\varrho-1} + \overset{3}{\Omega},$$

oder $1 = \alpha A \mathfrak{A} z^{\alpha} + \beta B \mathfrak{A} z^{\beta} + \ldots + \varrho R \mathfrak{A} z^{\varrho} + \overset{4}{\Omega}$ seyn; welches nach §. 28 unmöglich ist, indem es voraussetzen würde, daß $\alpha = 0$, $A = 1$, $B = 0$, $C = 0, \ldots$ $R = 0$ sey, d. h., daß man gar keine Function von z, sondern bloß eine beständige Größe 1 vor sich habe.

β.) Wir wollen denn nun für f z die Form $m + nz$ annehmen, als die einfachste unter jenen, welche zusammengesetzter als nz sind. Da findet sich

$$\frac{f(z+\omega)-fz}{\omega}\ \frac{1}{\mathfrak{A}fz} = \frac{n}{\mathfrak{A}(m+nz)},$$ und also muß

$$\frac{n}{\mathfrak{A}(m+nz)} = \alpha A z^{\alpha-1} + \beta B z^{\beta-1} + \ldots + \varrho R z^{\varrho-1} + \overset{3}{\Omega},$$

oder

$$n = \alpha A m \mathfrak{A} z^{\alpha-1} + \beta B m \mathfrak{A} z^{\beta-1} + \ldots + \varrho R m \mathfrak{A} z^{\varrho-1} + \alpha A n \mathfrak{A} z^{\alpha} + \beta B n \mathfrak{A} z^{\beta} + \ldots + \varrho R n \mathfrak{A} z^{\varrho} + \overset{4}{\Omega}$$

seyn. Diese Bedingungsgleichung gibt durch Schlüsse, wie §. 32, folgende Bestimmungen: $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, \ldots \varrho =$ irgend einer ganzen Zahl r; dann

$$A = \frac{n}{m\mathfrak{A}},\ B = -\frac{nA}{2m} = -\frac{n^2}{2m^2\mathfrak{A}},$$

$$C = -\frac{2nB}{3m} = +\frac{n^3}{3m^3\mathfrak{A}}, \ldots R = -\frac{(r-1)Qn}{rm} = \pm\frac{n^r}{rm^r\mathfrak{A}}.$$

Also erhielte man die Form:

$$\frac{nz}{m\mathfrak{A}} - \frac{n^2z^2}{2m^2\mathfrak{A}} + \frac{n^3z^3}{3m^3\mathfrak{A}} - \ldots \pm \frac{n^rz^r}{rm^r\mathfrak{A}},$$

oder, weil $z = \frac{y-m}{n}$ ist, folgende:

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}\left(\left(\frac{y-m}{m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{m}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{y-m}{m}\right)^3 - \ldots\right.$$

$$\left.\pm \frac{1}{r}\left(\frac{y-m}{m}\right)^r\right)$$

Hier wäre nun die Größe n von selbst ganz ausgefallen; wie aber m genommen werden solle, das würde die Gleichung ż ganz unbestimmt lassen; wie denn auch aus ihr allein gar nicht beurtheilt werden könnte, ob und bey welchen Werthen von y obige Reihe den Werth von $\overset{(a)}{l}\,y$ in der That angebe. Aus andern Gründen erst, z. B. aus dem Umstande, daß für $y = m$, die Reihe den Werth von $\overset{(a)}{l}\,m$ der Null gleich gibt, ließe sich schließen, daß $m = 1$ seyn muß, weil doch nur der Logarithmus von $1 = 0$ seyn kann. Daß aber die Reihe nur für Werthe von y, die $< +2$, für diese aber auch ohne Ausnahme gelte, folgt bloß aus derjenigen Herleitung derselben, die wir in n°.1 gegeben.

γ. Nehmen wir endlich noch als die einfachste aus den gebrochenen Functionen $fz = \frac{m}{n+pz}$, oder, weil diese Form immer auf $\frac{1}{\frac{n}{m}+\frac{p}{m}z}$ gebracht werden kann, $fz = \frac{1}{m+nz}$ an: so erhalten wir

$$\frac{f(z+\omega) - fz}{\omega} \cdot \frac{1}{\mathfrak{A}fz} = \frac{-n}{\mathfrak{A}(m+nz)} + \omega.$$

Es muß daher

$$\frac{-n}{\mathfrak{A}(m+nz)} = \alpha A z^{\alpha-1} + \beta B z^{\beta-1} + \ldots + \varrho R z^{\varrho-1} + \Omega,$$

oder

$$-n = \alpha A m \mathfrak{A} z^{\alpha-1} + \beta B m \mathfrak{A} z^{\beta-1} + \ldots + \varrho R m \mathfrak{A} z^{\varrho-1} + \alpha A n \mathfrak{A} z^{\alpha} + \beta B n \mathfrak{A} z^{\beta} + \ldots + \varrho R n \mathfrak{A} z^{\varrho} + \Omega$$

seyn. Dieses gibt die Bestimmungen $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, ... $\varrho = r$; dann $A = \frac{-n}{m\mathfrak{A}}$,

$B = -\frac{An}{2m} = +\frac{n^2}{2m^2\mathfrak{A}}$, $C = -\frac{2Bn}{3m} = -\frac{n^3}{3m^3\mathfrak{A}}$

... $R = -\frac{(r-1)Qn}{rm} = \pm\frac{n^r}{rm^r\mathfrak{A}}$. Also ist die Gestalt der Reihe, die den Werth von $\overset{(a)}{l}\,y$ ausdrücken soll:

$$-\frac{nz}{m\mathfrak{A}} + \frac{n^2z^2}{2m^2\mathfrak{A}} - \frac{n^3z^3}{3m^3\mathfrak{A}} + \ldots \pm \frac{n^rz^r}{rm^r\mathfrak{A}};$$

oder, weil $z = \frac{1-my}{ny}$ ist:

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}\left(\left(\frac{my-1}{my}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{my-1}{my}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{my-1}{my}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{r}\left(\frac{my-1}{my}\right)^r\right).$$

Wie m zu nehmen sey, läßt sich hieraus nicht lernen; wohl aber daraus, daß für $y = \frac{1}{m}$, der Werth von

$\overset{(a)}{1}\,\overline{m}^{\,1}$ sich aus der Reihe $= 0$ findet; woraus zu ersehen, daß $\frac{1}{m} = 1$, $m = 1$ seyn müsse. Daß aber die Reihe nur für Werthe von $y > +\frac{1}{2}$, für diese aber auch ohne Ausnahme gelte, beweiset bloß n°.1.

3. So sind denn also $(y-1)$ und $\frac{(y-1)}{y}$ die zwey **einfachsten** Functionen von y, welche die Fähigkeit haben, den Werth der Function $\overset{(a)}{1}\,y$ durch eine Reihe ihrer steigenden Potenzen auszudrücken. Hiemit wird aber keineswegs gesagt, daß es nicht unter den **zusammengesetzteren** Functionen noch manche andere gebe, die diese Fähigkeit gleichfalls besitzen. Wenn man z. B. $y = fz = \frac{m+nz}{p+qz}$ oder $= \frac{1+mz}{n+pz}$ setzte; so würde man abermahls eine Formel für $\overset{(a)}{1}\,y$ erhalten, die in Potenzen von $z = \frac{1-ny}{py-m}$ fortschritte; und durch Schlüsse wie in β, γ, würde sich $m = 1$, $n = 1$, $p = -1$ finden. U. s. w.

§. 67.

Zusatz. Nun läßt sich auch beurtheilen, ob und in welchen Fällen die Function $\overset{(a)}{1}\,y$ durch eine Reihe steigender Potenzen einer von y abgeleiteten Größe selbst dann darstellbar sey, **wenn y negativ ist.** Denn bekanntlich ist $(-a)^x$, so oft es reell und negativ ist, $= -(+a)^x$, wenn man jetzt unter $(+a)^x$, falls dieser Ausdruck einen gedoppelten reellen Werth besitzt, nur den einen positiven verstehet. Da nun §. 66 lehrt, wie man die Größe x durch eine Reihe steigender Potenzen einer aus dem positiven y abgeleiteten Größe darstellen könne: so hat man, weil doch jede Ableitung von + y auch eine Ableitung von — y ist, in den nähmlichen Formeln, die §. 66 angibt, den Werth von x auch dann durch y ausgedrückt, wenn dieses negativ ist; aber, wie schon gesagt, nur dann, wenn $y = a^x$ reell ist, d. h. im Falle eines negativen a, und eines rationalen x, nur wenn das letztere die Form $\frac{2p+1}{2q+1}$ hat.

§. 68.

Anmerkung. Aus §. 66 erhellet, daß es für jede zwey abstracte oder positive Werthe der Größen a und y ein x gebe, wobey die Gleichung $y = a^x$ besteht; d. h. jede abstracte oder positive Größe hat einen möglichen Logarithmus in einem jeden Systeme, dessen Grundzahl selbst eine abstracte oder doch positive Größe ist. Und gleicherweise erhellet aus §. 64, daß es in einem solchen Systeme zu jedem reellen Logarithmus auch eine ihm entsprechende reelle Größe gibt. Wenn man dagegen eine negative Größe — a zur Basis des Systemes annehmen wollte: so ist zuförderst gewiß, daß es weder für alle positive, noch für alle negative Größen einen entsprechenden Logarithmus gäbe. Nicht für alle positive; weil für alle Werthe von y, die von der Form $\frac{1}{(+a)^{2n+1}}$ sind, offenbar kein x möglich ist, wobey

$(-a) = y = \frac{1}{(+a)^{2n+1}}$ würde. Auch nicht für alle negative, indem für alle y, die von der Form $-\frac{1}{(+a)^{2n}}$ sind, kein Werth von x angeblich ist, der $(-a)^x = -\frac{1}{(+a)^{2n}}$ machte. Eine andere Unbequemlichkeit wäre, daß auch nicht jedem reellen x ein reelles y entspräche. Denn so oft x von der Form $\frac{2n+1}{2m}$ wäre, so wäre y imaginär. Daraus entspränge sodann die dritte Unbequemlichkeit, daß in allen solchen Fällen, wo man den Werth des Logarithmus x nicht ganz genau, sondern nur näherungsweise kennt, und aus ihm schließen soll, ob und was für ein y ihm entspricht, hierüber keine sichere Auskunft zu finden wäre, wenn sich der Werth von x, je nachdem als man die Näherung bald früher bald später abbricht, bald unter der Form $\frac{2n+1}{2m}$, bald unter der $\frac{2n+1}{2m+1}$ darstellt. Aus jener würde man vermuthen wollen, daß y imaginär, aus dieser, daß es reell sey. — Aus diesem Allen ersieht man nun, daß die Größe, welche man zur Grundzahl eines logarithmischen Systemes annehmen will, nur eine positive, oder vielmehr eine bloß abstracte Zahl seyn müsse. Dann wird es zu jeder gedenkbaren abstracten oder auch positiven Größe einen reellen Logarithmus, und umgekehrt zu jedem Logarithmus eine reelle Größe geben. Für negative Größen gibt es dann freylich keine Logarithmen; deren bedarf man aber auch nicht, da der

Gebrauch der Logarithmen vornehmlich nur darauf beruhet, daß man Multiplicationen und Divisionen durch sie in Additionen und Subtractionen, Erhebungen auf Potenzen und Wurzelziehungen in Multiplicationen und Divisionen verwandelt; was auch dann thunlich ist, wenn die Größen, mit denen man diese Operationen vorzunehmen hat, negativ sind, indem dieser Umstand nicht den Werth, sondern nur höchstens das Zeichen des Resultates ändert, falls selbes überhaupt reell ist.

§. 69.

Uebergang. Der eben jetzt erwähnte Nutzen, den ein Verzeichniß genau berechneter Logarithmen hat, macht die Erfindung gewisser Formeln erwünschlich, vermittelst deren man den einer jeden Zahl entsprechenden Logarithmus bey irgend einer Grundzahl bequemer, als durch die Formeln des §. 66 ausrechnen könnte. Da die Gestalt dieser Formeln am allereinfachsten ausfällt, wenn man die Größe A der Einheit gleich setzen kann: so entsteht hieraus die Vermuthung, daß ein logarithmisches System, bey welchem eine solche Grundzahl angenommen wäre, daß $A = 1$ befunden wird, überhaupt am leichtesten zu berechnen seyn würde. Wir müssen aber zuförderst untersuchen, ob eine solche Grundzahl in der That möglich sey.

§. 70.

Aufgabe. Zu untersuchen, ob es eine Größe a von der Beschaffenheit gebe, daß in der Gleichung

$\frac{a^{\omega}-1}{\omega} = \mathfrak{A} + \overset{(\omega)}{\omega}$, die Größe $\mathfrak{A} = 1$ ist; d. h. daß sich der Werth des Ausdruckes $\frac{a^{\omega}-1}{\omega}$ dem Werthe 1 so sehr annähere, als man nur immer will, wenn man ω so klein nimmt, als man will.

Auflösung. Gesetzt, es gäbe eine solche Größe, und a wäre dieselbe; so müßte, weil allgemein

$$a^x = 1 + \mathfrak{A}x + \frac{\mathfrak{A}^2 x^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{A}^3 x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\mathfrak{A}^r x^r}{1.2.3..r} + \Omega$$

ist (§. 64), für diesen besonderen Fall, wo $\mathfrak{A} = 1$ seyn soll,

$$a^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^r}{1.2.3\ldots r} + \Omega,$$

und folglich, wenn man $x = 1$ setzt, der Werth von a selbst $= 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots r} + \Omega$ seyn. Nun ist zuförderst gewiß, daß diese Reihe wirklich eine reelle endliche Größe ausdrückt, indem ihr Werth nicht nur stets endlich bleibt, sondern sich auch so sehr, als man nur will, einer gewissen beständigen Größe nähert, wenn man sie nur weit genug fortsetzt. Das Erstere erhellet leicht daraus, weil

$1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots r}$ offenbar immer $< 1 + 1 + 1 = 3$ verbleibt. Um auch das Letztere einzusehen, setze man den Werth, den diese Reihe hat, wenn sie nur bis zu einem bestimmten Gliede $\frac{1}{1.2.3\ldots r}$ fortgesetzt worden ist, $= R$: so ist $R < 3$; und wenn die Reihe jetzt noch weiter, und so weit, als man nur immer will, fortgesetzt wird, so ist der Zuwachs, den sie erfährt

$$= \frac{1}{1.2.3..r(r+1)} + \frac{1}{1.2.3...r(r+1)(r+2)} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{1.2.3...r(r+1)..(r+s)}$$

unläugbar kleiner als der Werth der geometrischen Reihe:

$$\frac{1}{1.2.3...r(r+1)} + \frac{1}{1.2.3...r(r+1)^2} + \ldots + \frac{1}{1.2.3...r(r+1)^s},$$

welche aus jener entsteht, indem man statt der Factoren $(r+2)$, $(r+3)$, ..., $(r+s)$ in den Nennern überall nur den kleinern $(r+1)$ setzt. Der Werth dieser letztern Reihe ist aber, so weit sie auch fortgesetzt werde, stets

$$< \frac{1}{1.2.3...r(r+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{r+1}} = \frac{1}{1.2.3...r.r},$$ eine Größe,

die durch Vermehrung von r kleiner als jede gegebene D werden kann; um so gewisser also kann man die Reihe $1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3...r}$ so weit fortsetzen, daß der Zuwachs, welchen sie durch jede fernere Fortsetzung annehmen kann, kleiner als jede gegebene Größe D verbleibt. Hieraus folgt aber, es müsse eine gewisse beständige Größe vorhanden seyn, der diese Reihe sich stets [nähe]rt, und der sie so nahe treten kann, daß der Unterschied [klein]er als jede gegebene Größe ist; und eben aus dem jedesmahligen Werthe der Reihe = R erfährt man auch, zwar nicht genau, doch beyläufig, was diese Größe sey, indem sie von R nur um etwas, das < D ist, unterschieden seyn kann. Wir wollen den Werth dieser beständigen Größe einmal für allemal durch e bezeichnen, daß also die Gleichung

$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots r} + \Omega$ gilt. Da nun für jede reelle Größe die Gleichung

$$a^x = 1 + \mathfrak{A}x + \frac{\mathfrak{A}^2 x^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{A}^3 x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\mathfrak{A}^r x^r}{1.2.3..r} + \overset{1}{\Omega}$$

bestehet (§. 64); so gilt dieselbe auch für e, und es muß also, wenn wir das, worein sich $\mathfrak{A}$ verwandelt, wenn a in e übergeht, durch $\mathfrak{E}$ bezeichnen, $e^x = 1 + \mathfrak{E}x + \frac{\mathfrak{E}^2 x^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{E}^3 x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\mathfrak{E}^r x^r}{1.2.3\ldots r} + \overset{2}{\Omega}$ seyn; mithin auch, wenn man $x = 1$ setzt: $e = 1 + \mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{E}^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{E}^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\mathfrak{E}^r}{1.2.3..r} + \overset{2}{\Omega}$. Vergleichen wir nun mit diesem Ausdrucke den oben angenommenen

$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots r} + \Omega$; so erhellet deutlich, daß die beständige Größe $\mathfrak{E}$ der **Einheit** gleich seyn müsse. Denn wäre sie > 1, so müßte auch $1 + \mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{E}^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{E}^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\mathfrak{E}^r}{1.2.3\ldots r} + \overset{2}{\Omega}$ nothwendig $> 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots r} + \Omega$, und im entgegengesetzten Falle jenes nothwendig klein.. als dieses befunden werden. Also ist nun erwiesen, daß in der That eine Größe, und zwar die

$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots r} + \Omega$ vorhanden sey, bey welcher die Function $\frac{e^\omega - 1}{\omega} = \mathfrak{E} + \overset{(e)}{\omega}$ dem Werthe 1 so nahe kömmt, als man nur immer will, wenn man ω so klein nimmt, als man will.

§. 71.

Erklärung. Ein logarithmisches System, bey welchem die Größe e des §. 70 zur Grundzahl angenommen ist, wird ein natürliches genannt; die Logarithmen selbst heißen natürliche Logarithmen; sonst nannte man sie auch hyperbolische. Wir werden sie durch $\overset{(e)}{l}$ bezeichnen.

§. 72.

Zusatz. Also ist in Beziehung auf natürliche Logarithmen, wenn man in der Formel des §. 64. $a = e$ annimmt:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^r}{1.2.3\ldots r} + \Omega,$$

eine Formel, vermittelst welcher man aus einem jeden gegebenen natürlichen Logarithmus $= x$ die ihm entsprechende Zahl $= e^x$ bequem genug berechnen kann. Denn hat man den Werth der Reihe nur bis zu dem Gliede $\frac{x^r}{1.2.3\ldots r}$ berechnet (wo nun r eine bestimmte Zahl bedeutet); so ist der Zuwachs, welchen sie durch jede weitere Fortsetzung erfahren kann,

$$= \frac{x^{r+1}}{1.2.3\ldots r(r+1)} + \frac{x^{r+2}}{1.2.3\ldots r(r+1)(r+2)} + \ldots$$

$$+ \frac{x^{r+s}}{1.2.3\ldots r(r+1)\ldots(r+s)}$$

$$< \frac{x^r}{1.2.3\ldots r(r+1)} \cdot \frac{x}{1 - \frac{1}{r+1}} = \frac{x^r}{1.2.3\ldots r} \cdot \frac{x}{r}.$$

Ist also r so groß, daß $\frac{x^r}{1.2.3\ldots r} \cdot \frac{x}{r}$, d. h. der Werth des Gliedes, bey dem man die Rechnung abbricht, multipliciret noch durch $\frac{x}{r} < D$ ausfällt: so weiß man auch, daß der aus diesem Stücke der Reihe berechnete Werth von a^x von dessen wahrem Werthe nur um etwas, das $< D$ ist, abweichen kann. Da nun die Glieder der Reihe von dort an, wo $r > x$ geworden ist, stets abnehmen, und da der Bruch, durch dessen Multiplication jedes folgende aus dem vorhergehenden entsteht, beständig kleiner wird: so wird man, wenn x noch so groß seyn sollte, doch immer bald zu einem Werthe von $\frac{x^r}{1.2.3\ldots r} \cdot \frac{x}{r} < D$ gelangen. — Soll aber umgekehrt aus der gegebenen Zahl $= y$ der ihr entsprechende natürliche Logarithmus $= x$ berechnet werden; so liefert uns der §. 66, wenn wir daselbst $\mathfrak{A} = 1$ setzen, die Formeln:

(e)
$$l\,y = (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \ldots \pm \frac{1}{r}(y-1)^r + \Omega, \text{ wenn } y < +2, \text{ und}$$

(e)
$$l\,y = \frac{(y-1)}{y} + \frac{1}{2}\frac{(y-1)^2}{y^2} + \frac{1}{3}\frac{(y-1)^3}{y^3} + \ldots + \frac{1}{r}\frac{(y-1)^r}{y^r} + \overset{1}{\Omega}, \text{ wenn } y > +\frac{1}{2} \text{ ist.}$$

Diese zwey Formeln sind in verschiedenen Fällen — (jene so oft y sehr klein oder sehr nahe an $+2$, diese so oft y sehr groß oder sehr nahe an $+\frac{1}{2}$) — sehr unbequem zum Gebrauche, indem die Glieder derselben dann nur sehr langsam abnehmen. Dieß macht denn folgende Aufgabe nöthig.

§. 73.

Aufgabe. Bequeme Formeln anzugeben, vermittelst deren die natürlichen Logarithmen jeder ganzen, gebrochenen oder auch irrationalen Zahl, die nur nicht negativ ist, berechnet werden könnten.

Auflösung. 1. Es ist bloß nöthig, einige Formeln zu finden, die zur Berechnung der natürlichen Logarithmen sämmtlicher Primzahlen bequem gebraucht werden könnten. Denn hat man diese einmal berechnet, so lassen sich die Logarithmen aller übrigen Größen, die nur nicht negativ sind, mit leichter Mühe aus ihnen herleiten.

a) Die Logarithmen der ganzen Zahlen, die nicht Primzahlen, sondern Producte aus solchen sind, werden durch eine einfache Addition der Logarithmen ihrer Factoren gefunden.

b) Gebrochene Größen, die jedoch rational sind, lassen sich auf die Form $\frac{m}{n}$ bringen, worin m, n zwey ganze Zahlen bedeuten; daher findet sich ihr Logarithmus aus a) durch eine einfache Subtraction des Logarithmus der n von jenem der Zahl m.

c) Die Logarithmen irrationaler Größen, die von der Form $\left(\frac{m}{n}\right)^p$ sind, wo m, n ganze Zahlen bedeuten, und p was immer für eine reelle Größe ist, gibt eine einfache Multiplication des nach b) gefundenen Logarithmus von $\frac{m}{n}$ durch p.

d) Endlich sey die Irrationalgröße $= i$ von welcher Beschaffenheit sie wolle; so gibt es doch, wenn sie nur positiv ist, immer zwey positive Zahlen m, n von der Art, daß der Bruch $\frac{m}{n}$ der i so nahe kömmt, als man nur immer will; dann also kömmt auch der nach b) zu bestimmende Logarithmus von $\frac{m}{n}$ dem Logarithmus von i so nahe, als man will.

2. Da der Logarithmus von 1 = 0 ist, so ist die kleinste Primzahl, deren Logarithmus zu suchen ist, = 2. Dieser könnte noch allenfalls bequem genug aus der Formel

$$\overset{(e)}{l}y = \frac{(y-1)}{y} + \frac{1}{2}\frac{(y-1)^2}{y^2} + \frac{1}{3}\frac{(y-1)^3}{y^3} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{(y-1)^r}{y^r} + \Omega$$ berechnet werden; indem sich dieselbe für diesen Fall in folgende verwandelt:

$$\overset{(e)}{l}2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r + \Omega.$$

Da man hier eine Reihe hat, die schneller abnimmt, als eine geometrische, deren Exponent $\frac{1}{2}$; so kann man auf eben die Art wie §. 72 beurtheilen, wie groß der Unterschied zwischen dem wahren Werthe des zu findenden Logarithmus, und dem Werthe, welchen man erhält, wenn man die Reihe bey ihrem rten Gliede abbricht, höchstens seyn könne. — Zur Berechnung des natürlichen Logarithmus von 3 würde die Formel folgende Reihe geben:

$$\overset{(e)}{l}3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \ldots$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{2}{3}\right)^r + \Omega,$$ welche noch langsamer abnimmt.

U. s. w.

3. Dagegen findet sich aus der Formel

(e)
$$ly = (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \ldots \mp \frac{1}{r}(y-1)^r + \Omega,$$

welche für jedes $y < +2$ gilt, wenn man $y = 1 + z$ annimmt, folgende:

(e)
$$l(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \ldots \mp \frac{1}{r}z^r + \Omega,$$

und diese muß für jedes $z < \pm 1$ gelten. Daher ist auch bey eben demselben Werthe von z folgende Formel giltig:

(e)
$$l(1-z) = -z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 - \ldots - \frac{1}{r}z^r + \Omega.$$

Also durch Abzug auch nachstehende:

(e)
$$l\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left(z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \ldots + \frac{1}{2n+1}z^{2n+1} + \frac{\Omega}{2}\right),$$

wo $2n+1$ eine ungerade Zahl anzeigt. Nun mag u jede gedenkbare Größe, wenn sie nur positiv ist, bedeuten, so ist $\frac{u-1}{u+1}$ allemal $< \pm 1$, kann also in obiger Formel an die Stelle der z gesetzt werden. Dadurch wird aber $\frac{1+z}{1-z} = u$, und man erhält:

(e)
$$lu = 2\left(\left(\frac{u-1}{u+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^5 + \ldots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{2n+1} + \Omega\right),$$

eine Formel, die schon merklich schneller, als die vorigen, abnimmt, wenn $\frac{u-1}{u+1}$ ein hinlänglich kleiner Bruch ist. Zur Berechnung der Logarithmen von 2 und 3 mag man sie wenigstens bequem genug finden. Denn für $u = 2$ ist $\frac{u-1}{u+1} = \frac{1}{3}$; für $u = 3$, $\frac{u-1}{u+2} = \frac{1}{2}$: dort also nimmt die Reihe schneller ab, als eine geometrische mit dem Exponenten $\frac{1}{9}$, hier als eine mit dem Exponenten $\frac{1}{4}$. Für größere Zahlen aber wird der Bruch $\frac{u-1}{u+1}$ zu groß.

4. Um nun auf eine Formel zu kommen, die auch für größere Zahlen, Primzahlen wenigstens, anwendbar wäre, bemerke man, daß so oft u eine Primzahl bedeutet, $u-1$ und $u+1$ gewiß keine dergleichen sind. Denn ist u eine Primzahl, die größer ist als 2; so muß u ungerad seyn, und demnach sind $u-1$, $u+1$ sicher gerad, also zum wenigsten durch die Zahl 2 theilbar. Eben so einleuchtend ist es, daß die Factoren, in welche die beyden Zahlen $u-1$, $u+1$ zerlegbar sind, $<$ u seyn müssen. Geht man daher in der Berechnung der Logarithmen der Primzahlen nach der natürlichen Ordnung vor; so werden die Logarithmen der Factoren von $u-1$, $u+1$, bereits berechnet worden seyn, bevor man zur Berechnung des Logarithmus von u anlangt. Mithin kann man nach n°1. a) die Logarithmen $\overset{e}{l}(u-1)$, $\overset{(e)}{l}(u+1)$ bey der Berechnung von $\overset{(e)}{l}u$ schon als bekannt ansehen; also auch $\overset{(e)}{l}(u-1) + \overset{(e)}{l}(u+1) = \overset{(e)}{l}(u^2-1)$. Nach der Formel des n.°3 läßt sich aber der Logarithmus einer jeden Größe, die nicht viel $>$ 1, ziemlich bequem berechnen. Eine dergleichen ist z. B. $\frac{u^2}{u^2-1}$, wenn anders u doch merklich $>$ 1, und um so mehr, je größer u ist. Also ist auch $\overset{e)}{l}\left(\frac{u^2}{u^2-1}\right)$ als eine Größe zu betrachten, die sich berechnen läßt. Ist aber $\overset{(e)}{l}(u^2-1)$

und $\overset{(e)}{l}\left(\frac{u^2}{u^2-1}\right)$ bekannt; so ist es auch $\overset{(e)}{l}(u^2)$ und mithin $\overset{(e)}{l}\,u$; denn

$$\overset{(e)}{l}\left(\frac{u^2}{u^2-1}\right)=\overset{(e)}{l}(u^2)-\overset{(e)}{l}(u^2-1)=2\,\overset{(e)}{l}\,u-\overset{(e)}{l}(u^2-1)$$

Also $\overset{(e)}{l}\,u=\frac{1}{2}\left(\overset{(e)}{l}\left(\frac{u^2}{u^2-1}\right)+\overset{(e)}{l}(u^2-1)\right)$.

Setzen wir in der That $\frac{u^2}{u^2-1}$ in der Formel des n.° 3 an die Stelle des dortigen u, oder $\frac{1+z}{1-z}$; so findet sich $z=\frac{1}{2u^2-1}$; und wir erhalten also die Formel:

$$\overset{(e)}{l}\,u=\frac{\overset{(e)}{l}(u-1)+\overset{(e)}{l}(u+1)}{2}$$
$$+\left(\frac{1}{2u^2-1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2u^2-1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2u^2-1}\right)^5+\ldots$$
$$+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2u^2-1}\right)^r+\Omega.$$

Die Reihe nimmt offenbar um desto schneller ab, je größer die Primzahl u, die man berechnen soll, ist. Schon für $u=5$, d. h. für die nächste Primzahl, die man nach 2 und 3 zu berechnen hat, ist $\frac{1}{2u^2-1}=\frac{1}{49}$; und also nimmt die Reihe stärker ab, als eine geometrische, deren Exponent $=\left(\frac{1}{49}\right)^2=\frac{1}{2401}$ ist. Bey größeren Zahlen ist die Schnelligkeit der Abnahme noch größer.

§. 74.

Aufgabe. Wenn die natürlichen Logarithmen bereits berechnet sind; die Logarithmen jedes andern Systemes, das eine positive oder abstracte Grundzahl hat, ingleichen zu jedem gegebenen Logarithmus die in diesem Systeme ihm entsprechende Zahl zu berechnen.

Auflösung. 1. Es sey die Grundzahl des Systemes a, y irgend eine Zahl, und x der ihr entsprechende Logarithmus; also $y = a^x$. Wenn nun die natürlichen Logarithmen aller positiven oder abstracten Größen bereits berechnet sind; so kennt man sowohl $\overset{(e)}{l}\, a$, als $\overset{(e)}{l}\, y$. Es sey das Erstere $\overset{(e)}{l}\, a = \alpha$; so ist $a = e^{\alpha}$; und daher $y = a^x = e^{\alpha x}$; d. h. αx ist der natürliche Logarithmus von y, $\alpha x = \overset{(e)}{l}\, y$; mithin $x = \frac{\overset{(e)}{l}\, y}{\alpha} = \frac{\overset{(e)}{l}\, y}{\overset{(e)}{l}\, a}$ d. h. man erhält die Logarithmen jedes andern Systemes aus den natürlichen, indem man diese nur noch durch den natürlichen Logarithmus der Grundzahl jenes Systemes dividirt.

2. Um aus dem gegebenen Logarithmus die ihm entsprechende Größe zu finden; erinnere man sich aus §. 64, daß allgemein

$$y = a^x = 1 + \mathfrak{A}x + \frac{\mathfrak{A}^2 x^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{A}^3 x^3}{1.2.3} + \dots + \frac{\mathfrak{A}^r x^r}{1.2.3..r} + \Omega$$

sey; worin die Größe $\mathfrak{A} = \frac{a^{\omega} - 1}{\omega} + \overset{(a)}{\omega}$ entweder

$$= (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \dots \pm \frac{1}{r}(a-1)^r + \overset{1}{\Omega},$$

oder $= \left(\frac{a-1}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a}\right)^3 + \dots$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{a-1}{a}\right)^r + \overset{2}{\Omega},$$

je nachdem a entweder $< +2$, oder $> +\frac{1}{2}$ ist. Hieraus ergibt sich durch Vergleichung mit §. 72, daß $\mathfrak{A} = \overset{(e)}{l}a$ seyn müsse (§. 27). Sind also die natürlichen Logarithmen jeder nicht negativen Größe bekannt; so ist auch $\overset{(e)}{l}a$ bekannt; und mithin läßt sich aus dem gegebenen x die diesem Logarithmus entsprechende Zahl y mittelst der Formel berechnen:

$$y = a^x = 1 + (\overset{(e)}{la})x + \frac{(\overset{(e)}{la})^2 x^2}{1.2} + \frac{(\overset{(e)}{la})^3 x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{(\overset{(e)}{la})^r x^r}{1.2.3..r} + \alpha.$$

So groß auch x und $\overset{(e)}{l}a$ sey; so nimmt doch von dem Gliede an, wo $r > x(\overset{(e)}{la})$ geworden ist, diese Reihe stärker ab, als eine geometrische, deren Exponent der echte Bruch $\frac{x(\overset{e}{la})}{r}$ wäre. Und aus diesem Umstande läßt sich ganz wie in §. 72 ermessen, wie weit man sich dem wahren Werthe von y genähert habe, wenn man den Werth der Reihe bis zu dem Gliede $\frac{(\overset{(e)}{l}a)^r x^r}{1.2.3...r}$ hin für y selbst annimmt.

§. 75.

Schlußanmerkung. Absichtlich haben wir in dieser ganzen Abhandlung den Fall, wenn eine der Größen, die in der Rechnung sind, z. B. die Größe, welche potenzirt werden soll, oder der Exponent derselben, imaginär geworden sind, mit Stillschweigen übergangen. Eben so haben wir auch §. 67 gar nicht den Fall berührt, wenn eine *negative* Größe auf eine Potenz mit *irrationalem* Exponenten erhoben werden sollte, z. B. $(-2)^{\sqrt{3}}$. Dieses sind nähmlich Gegenstände, worüber wir unser Urtheil nicht eher mit Gründen durchführen können, als bis verschiedene Begriffe erst genauer als bisher erkläret worden sind. Man muß zuförderst schon den Begriff *imaginärer Ausdrücke* selbst, dann jenen der *Irrationalität* einer Größe, ingleichen den des *mathematischen Gegensatzes*, endlich auch den der *Potenzirung* einer Größe deutlich entwickelt haben, wenn man über obige Fragen gründlich entscheiden will. Da wir uns nun bey gegenwärtiger Abhandlung vorgenommen hatten, überall nur von schon bekannten und gewöhnlichen Begriffen auszugehen, und jede schwierigere Neuerung zu meiden; so konnten auch jene Untersuchungen hier keinen Platz greifen. Wir behalten es uns aber für eine spätere Zeit vor, wenn dieser gegenwärtige Versuch beyfällig aufgenommen wird, auch über die eben erwähnten Gegenstände unsere Meinung zu eröffnen.