FUNCTIONENLEHRE.

EINLEITUNG.

VERHÄLTNISSE ZWISCHEN VERÄNDERLICHEN ZAHLEN.

§. 1. Uibergang. Obwohl wir schon manche Arten der Abhängigkeit veränderlicher Zahlen von einer oder auch mehreren anderen in dem Bisherigen kennen gelernt; so haben wir uns doch niemals noch bey der Frage verweilet, wie die Veränderung beschaffen sey, die eine abhängige Zahl erfährt, wenn sich die Zahlen, von welchen sie abhängt, alle oder nur einige ändern? — Es läßt sich aber im Voraus erwarten, daß die Untersuchung dieser Frage auf sehr merkwürdige Wahrheiten leiten, und besonders dienlich seyn werde, uns die Natur der Fuctionen selbst näher kennen zu lehren; denn durch die Art des Zuwachses oder der Abnahme, die eine Function erleidet, wenn ihre veränderliche wächst oder abnimmt, gibt sich ja ihre eigene Beschaffenheit kund. Da wir nun durch das Vorhergehende hinreichend in den Stand gesetzt sind, eine Untersuchung dieser Art vorzunehmen; so soll sie der Gegenstand seyn, mit dem wir uns jetzt eben beschäftigen wollen.

§. 2. Erklärung. Man wird begreifen, daß es an einem Orte, wo die Veränderungen betrachtet werden sollen, die eine abhängige Zahl erfährt, wenn sich die Zahlen, von denen sie abhängt, verändern. — sehr wichtig sey, zu unterscheiden, ob die Abhängigkeit einer Zahl zu der Einen oder der andern der beyden Arten gehöre, die ich jetzt eben beschreiben will. Die erste Art ist vorhanden, wenn das Gesetz, nach welchem der Wert der abhängigen Zahl aus dem Werthe der frey veränderlichen Zahlen, von denen sie abhängig ist, auf eine Weise sich darstellen läßt, in welcher gar keine Erwähnung von irgend einem besonderen Werthe der frey veränderlichen Zahlen geschieht, wenn also im Gegentheil eine Regel angeblich ist, vermög deren die abhängige Zahl aus den frey Veränderlichen bestimmt werden kann, gleichviel von welchem Werthe diese letzteren auch immer seyn mögen. Wo dieses nicht angehet, wo also kein Gesetz der Ableitbarkeit der Classe der Veränderlichen aus den zugehörigen Classen der frey Veränderlichen angeblich ist, welches für alle Werthe der letzteren gleich lauten würde, findet die zweite Art der Abhängigkeit statt. Ein Beyspiel der ersteren haben wir in der Zahl W, wenn wir erklären, daß ihr jedesmaliger zu den Werthen der Veränderlichen x, y und z, von welchem sie abhängt, gehöriger Werth bestimmt werden könne, indem man x mit 2, y mit 3 und z mit 4 multiplicire, und diese Produkte in eine Summe vereinigt; oder daß $W = 2x + 3y + 4z$ sey. Hier nämlich geben wir für die Bestimmung der W aus x, y und z eine Regel an, in deren Ausdrucke offenbar gar keine Erwähnung irgend eines besonderen Werthes der Zahlen x, y und z geschieht, sondern die angegebene Regel gilt allgemein für einen jeden dieser Werthe. Ein Beyspiel der anderen Art ist W, wenn es den Preis bedeutet, womit wir die Geschicklichkeit der Schützen bey einem Scheibenschießen belohnen wollen, wenn wir festsetzen, daß der Schuß in den Mittelpunkt 100 Reichsthaler, ein Schuß aber, dessen in Zollen ausgedrückte Entfernung vom Mittelpunkte $= x$, nicht über 2 Zoll beträgt, $100 - 25x$ Reichsthaler, ein Schuß, dessen Entfernung vom Mittelpunkte > 2 und < 3 Zoll $58 - 2x^2$ Reichsthaler gewinnen soll u. s. w. Hier nämlich ist W von x nach einem Gesetze abhängig, daß sich nicht ausdrücken läßt, ohne gewisser besonderer Werthe von x zu erwähnen, indem von $x = 0$ bis $x = 2$, die Gleichung $W = 100 - 25x$, von $x = 2$ bis $x = 3$, aber die Gleichung $W = 58 - 2x^2$ u.s.w. eintritt. Von Functionen der ersten Art pflegt man zu sagen, daß sie nach einem einzigen für alle Werthe ihrer Veränderlichen gleichlautenden Gesetze bestimmt werden, von denen der zweyten Art aber, daß sie mehreren, für verschiedene Werthe ihrer Veränderlichen auch verschieden lautenden Gesetzen folgt. Wir werden uns in der Zukunft nicht eben ausschließlich, doch größtentheils nur mit Functionen der ersten Art befassen.

§. 3. Anmerkung. Man merke wohl, daß ich in dieser Erklärung gesagt, eine Function gehöre zur zweyten Art nur dann, wenn es nicht möglich ist, ihre Werthe durch ein einziges von dem besonderen Werth ihrer Veränderlichen ganz unabhängiges, und somit allgemein lautendes Gesetz zu bestimmen; nicht aber, sobald es nur möglich ist, gewisse für besondere Werthe ihrer Veränderlichen auch besonders lautende Gesetze ihrer Bestimmung anzugeben. Denn dieses Letztere ist bey jeder Function (auch von der ersten Art) möglich, weil dort, wo ein allgemein lautendes Gesetz hinreicht, auch mehrere für verschiedene Werthe verschieden lautende ausgedacht werden können. So könnten wir z. B. wenn $W = 3x$ ist, erklären, daß W für den Werth $x = 1$ der Zahl 3 gleichkomme, für jeden Werth aber, der < 3 ist, durch die Gleichung $W = \frac{6x}{2}$, und für jeden, der > 3 ist, durch die Gleichung $\frac{12x}{4}$ bestimmt werden solle.

§. 4. Erklärung. Wenn wir aus jenen mehreren (vielleicht unendlich vielen) Werthen, die von einer gewissen Zahlenvorstellung x, der Vorstellung von einer sogenannten veränderlichen Zahl vorgestellt werden können, Einen z. B. x_1 herausheben, und die Frage untersuchen, was für eine Zahl zu diesem x_1 hinzugesetzt, oder von diesem x_1 abgezogen werden müsse, um einen jeden anderen Werth der x z. B. x_2 zu erhalten: so nennen wir in dieser Beziehung den Werth x_1 einen zu Grunde gelegten oder ursprünglichen oder Haupt-Werth, die übrigen aber, die wir mit ihm vergleichen, wie x_2, geänderte Werthe: jene wirkliche oder auch nur eingebildete Zahl endlich, welche zu x_1 hinzugesetzt werden muß, um x_2 zu erhalten, nennen wir die Veränderung, auch wohl den Zuwachs, oder das Increment, am gewöhnlichsten aber die Differenz der x_1 und bezeichnen sie durch Δx_1. Wird der ursprüngliche Werth von x schlechtweg durch x bezeichnet, so wird die Veränderung oder dasjenige, was zu x addirt werden muß, um einen geänderten Wert wie x' zu erhalten, ebenfalls nur schlechtweg durch Δx bezeichnet. Ist das Zeichen der Zahl, deren Veränderung wir ausdrücken wollen, aus mehreren anderen Zeichen zusammengesetzt: so werden wir dasselbe der größeren Deutlichkeit wegen in Klammern einschließen, und also den Zuwachs, den die Zahl xy erleidet, durch $\Delta(xy)$ vorstellen. Wenn wir den Zuwachs oder (besser zu sagen) die Veränderung vorstellen wollen, die von den mehreren Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ abhängige $W = F(x, y, z \ldots)$ erfährt, wenn sich nur eine dieser Veränderlichen, nahmentlich x ändert, so schreiben wir $\Delta_x W$ oder $\Delta_x F(x, y, z, \ldots)$: dergestalt, daß also $\Delta_x F(x, y, z, \ldots)$ eigentlich nichts anderes als den Unterschied $F(x + \Delta x, y, z, \ldots) - F(x, y, z, \ldots)$, $\Delta_y F(x, y, z, \ldots)$ nichts anderes als den Unterschied $F(x, y+\Delta y, z \ldots) - F(x, y, z, \ldots)$ bezeichnet. Der Unterschied, den W erfährt, wenn x und y sich ändern, bezeichnen wir durch $\Delta_{xy} F(x, y, z, \ldots)$ u. s. w.

§. 5. Anmerkung. Ein Anderes also ist die Differenz zweyer gegebenen Zahlen, z. B. 6—4; ein Anderes die Differenz einer Veränderlichen Zahl $\Delta x_1 = x_2 - x_1$. Denn wenn z. B. x eine frey veränderliche Zahl ist, so kann sowohl x_1 als auch x_2 jeden beliebigen wirklichen oder auch blos eingebildeten Werth bezeichnen: und somit wird auch Δx_1 jeden beliebigen Werth vorstellen können: während die Differenz zweyer gegebener Zahlen jederzeit etwas Bestimmtes und Unveränderliches ist.

§. 6. Zusatz. Die Differenz einer veränderlichen Zahl x kann nach Beschaffenheit der beyden Werthe, die miteinander verglichen werden, des ursprünglichen nämlich und des geänderten, bald eine wirkliche Zahl, bald eine blos eingebildete Zahl, und wenn die Einheit, auf welche sich die Veränderliche x beziehet, eine des Gegensatzes fähige Einheit ist, bald etwas Positives, bald etwas Negatives seyn. So ist, wenn der ursprüngliche Werth von $x = 6$, und der geänderte $= 10$ ist, die Differenz $\Delta x = 10 - 6 = 4$. Wenn der ursprüngliche Werth noch wie vorhin $= 6$ der geänderte aber $= 3$; so ist die Differenz $3 - 6 = -3$ subtractiv. Wenn der Werth x_2, den wir uns als den geänderten vorstellen, mit dem Werthe x_1, den wir als den ursprünglichen betrachten, in einem besonderen Falle gleich ist: so ist die Vorstellung $\Delta x = x_2 - x_1$ vollends $= 0$, also gegenstandlos.

§. 7. Zusatz. Ist x der ursprüngliche Wert, und Δx die Veränderung, so ist der geänderte Werth $= x + \Delta x$.

§. 8. Zusatz. Wenn die Veränderliche W von den Veränderlichen $x, y, z \ldots$ abhängt, und somit $= F(x, y, z \ldots)$ ist, und es gehört zu den als ursprünglich betrachteten Werthen der $x, y, z \ldots$ der Werth W, zu den geänderten Werthen $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z \ldots$ aber der Werth $W+\Delta W$: so ist

$$W+\Delta W = F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z \ldots)$$

und somit $$\Delta W = F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z \ldots) - F(x, y, z \ldots).$$

§. 9. Zusatz. Auch ist $\Delta_{xy} F(x, y) = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y)$

$$= F(x+\Delta x, y) - F(x, y) + F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y)$$

$$= \Delta_x F(x, y) + \Delta_y F(x+\Delta x, y).$$

Und eben so $\Delta_{xyz} F(x, y, z) = F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x, y, z)$

$$= F(x+\Delta x, y, z) - F(x, y, z) + F(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - F(x+\Delta x, y, z)$$
$$+ F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x+\Delta x, y+\Delta y, z)$$
$$= \Delta_x F(x, y, z) + \Delta_y F(x+\Delta x, y, z) + \Delta_z F(x+\Delta x, y+\Delta y, z).$$ Usw.

§. 10. Lehrsatz. Der Zuwachs einer Function W von mehreren Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ ist im Allgemeinen abermahls nur eine Function von eben diesen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ und von den Zuwächsen derselben $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$; in einzelnen Fällen aber kann dieser Zuwachs auch von einer oder der anderen dieser Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ ganz unabhängig werden.

Beweis. Daß $\Delta W = F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - F(x, y, z, \ldots)$ von keiner anderen veränderlichen Zahl als von den $x, y, z, \ldots$ und ihren Zuwächsen $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ abhängen könne, leuchtet von selbst ein. Denn nur diese Veränderlichen kommen in dem Begriffe von ΔW vor, wenn in dem Begriffe von W oder $F(x, y, z, \ldots)$ keine anderen veränderlichen Zahlen als $x, y, z, \ldots$ vorkommen, d. h. wenn W in der That nur eine Function der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ und keiner anderen ist. Daß aber in einzelnen Fällen auch eine oder die andere jener Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ aus diesem Ausdrucke auch völlig verschwinden können, in welchem Falle ΔW von dieser Veränderlichen ganz unabhängig wird, können uns Beyspiele lehren. Setzet die Function W oder $F(x, y, z, \ldots)$ wäre von der Form $x + \varphi(y, z, \ldots)$, wo $\varphi(y, z, \ldots)$ blos nur noch eine von $y, z, \ldots$ abhängige Zahl bezeichnet. Dann wäre offenbar

$$W + \Delta W = x + \Delta x + \varphi(y+\Delta y, z+\Delta z \ldots)$$

und durch Abzug

$$\Delta W = \Delta x + \varphi(y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - \varphi(y, z, \ldots).$$

In diesem Ausdrucke erscheint die Veränderliche x gar nicht mehr, und es ist also ΔW gewiß ganz unabhängig von ihr. Auf eine ähnliche Weise würde sich zeigen, daß die Differenz der Function $x + y + \varphi(z)$ weder x noch y, sondern nebst z und Δz nur Δx und Δy enthalte. Usw.

§. 11. Lehrsatz. Wenn eine Function $W = F(x, y, z, \ldots)$ für alle Werthe ihrer Veränderlichen, oder doch für alle diejenigen Werthe derselben, unter deren Begriff auch die Werthe x und $x+\Delta x$: y und $y+\Delta y$; z und $z+\Delta z$: ... gehören, einförmig ist, so ist auch ΔW einförmig.

Beweis. Denn

$$\Delta W = F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - F(x, y, z, \ldots).$$

Sind nun $F(x+\varDelta x, y+\varDelta y, z+\varDelta z \ldots)$ und $F(x, y, z \ldots)$ ein Paar einförmige Ausdrücke, so ist es gewiß auch die Differenz derselben, oder $\varDelta W$.

§. 12. Zusatz. Nicht umgekehrt muß, wenn $W=F(x, y, z \ldots)$ mehrförmig ist, auch $\varDelta W$ eben so viele verschiedene Werthe haben.

§. 13. Erklärung. Da die Differenz einer gegebenen Function W von einer oder mehreren Veränderlichen $x, y, z \ldots$ in den meisten Fällen abermahls eine abhängige Zahl ist und zwar von denselben Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ und überdies noch von ihren Veränderungen $\varDelta x, \varDelta y, \varDelta z, \ldots$: so wird sich, wenn wir gewisse Werthe dieser Veränderlichen $x_1, y_1, z_1, \ldots \varDelta x_1, \varDelta y_1, \varDelta z_1, \ldots$ als die ursprünglichen und gewisse andere $x_2, y_2, z_2 \ldots \varDelta x_2, \varDelta y_2, \varDelta z_2, \ldots$ als die veränderten betrachten, untersuchen lassen, von welcher Beschaffenheit die Veränderung sey, die diese neue Function $\varDelta W$ erfährt?

Es ist gewöhnlich die Veränderung dieser d. h. die Differenz der Differenz von W die zweyte Differenz von W, und im Gegensatze mit ihr diejenige, die wir vorhin betrachteten d. i. die eigentliche Differenz von W, die erste Differenz zu nennen. Auf eine ähnliche Art wird der Begriff einer dritten, vierten und überhaupt jeder m-ten Differenz gebildet. Wir bezeichnen diese Differenzen beziehlich durch $\varDelta^2 W$, $\varDelta^3 W$, $\varDelta^4 W, \ldots, \varDelta^m W$ usw.

§. 14. Lehrsatz. Es ist für jeden Werth von n und m $\varDelta^n(\varDelta^m x)=\varDelta^{n+m}x$.

Beweis. Der Satz gilt offenbar für jeden Werth von m, wenn $n=1$ ist. Denn daß $\varDelta^1(\varDelta^m x)=\varDelta(\varDelta^m x)=\varDelta^{m+1}x$ sey, folgt unmittelbar aus der Erklärung. Gilt aber der Satz $\varDelta^n(\varDelta^m x)=\varDelta^{n+m}x$ für irgend einen Werth von n, so gilt er auch für den nächst größeren. Denn ist $\varDelta^n(\varDelta^m x)=\varDelta^{n+m}x$; so ist auch $\varDelta^{n+1}(\varDelta^m x)= =\varDelta^{m+n+1}x$: weil $\varDelta^{n+1}(\varDelta^m x)$ gewiß $=\varDelta(\varDelta^n(\varDelta^m x))$ ist. Ist aber $\varDelta^n(\varDelta^m x)=\varDelta^{n+m}x$: so ist $\varDelta^{n+1}(\varDelta^m x)=\varDelta(\varDelta^{n+m})x=\varDelta^{n+m+1}x$, weil nach dem vorhin bemerkten $\varDelta(\varDelta^m x)=\varDelta^{m+1}x$ für jeden Werth von m ist. Also ist $\varDelta^n(\varDelta^m x)=\varDelta^{n+m}x$ auch für $n=2$, $n=3$ und für jeden folgenden Werth.

§. 15. Lehrsatz. Wenn eine Function $W=F(x, y, z, \ldots)$ von einer oder mehreren Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ einförmig ist, so ist nebst ihrer ersten auch jede ihrer folgenden Differenzen einförmig.

Beweis. Ist nämlich W einförmig; so ist auch ΔW einförmig und ist ΔW einförmig, so ist nach eben diesem Satze auch $\Delta(\Delta W) = \Delta^2 W$ einförmig usw.

§. 16. Erklärung. Wenn wir uns W als eine solche Function von den Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ vorstellen, daß sie beim Uibergange der Werthe $x, y, z, \ldots$ in die Werthe $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots$ eine Veränderung erleidet, die der gegebenen Function $\varphi(x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots)$ von den Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ und $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ gleichgeltend ist: so nennen wir W in diesem Betrachte, die zu der Function $\varphi(x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots)$ gehörige Summe; und zwar die erste Summe. Denken wir uns dagegen W wäre eine solche Function von den Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ daß nicht die erste, sondern die zweyte, dritte oder die m-te Differenz, welche zum Vorschein kommt, wenn $x, y, z, \ldots$ und dann wieder nebst $x, y, z, \ldots$ auch noch $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ usw. sich ändern, der gegebenen Function $\varphi(x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots$ gleichgeltend ist; so nennen wir W die zweyte, dritte, überhaupt m-te Summe von $\varphi(x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots)$. Wir bezeichnen diese Summe beziehlich durch

$$\Sigma\varphi(x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots), \quad \Sigma\Sigma\varphi(x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots)$$
$$\text{oder } \Sigma^2\varphi(x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots), \quad \Sigma^3\varphi(x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots)$$
$$\text{und allgemein durch } \Sigma^m\varphi(x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots).$$

§ 17. Anmerkung. Sehr unterscheiden muß man also zwischen der Summe gewisser gegebener Zahlen in der früher (§.) erklärten Bedeutung, und zwischen der Summe eines gegebenen Zahlenausdrucks, den wir als eine Differenz ansehen sollen, in der hier angenommenen Bedeutung. Die erstere ist nichts als ein Inbegriff jener gegebenen Zahlen, bey welchen auf keine Ordnung der Theile geachtet, und die Theile der Theile als Theile des Ganzen betrachtet werden sollen. Eine Summe in der hier festgesetzten Bedeutung dagegen ist eine Function.

§. 18. Lehrsatz. Es ist allgemein $\Sigma^m \Sigma^n \varphi = \Sigma^{m+n}\varphi$.

Beweis. Völlig auf ähnliche Art wie im §. 14.

§. 19. Lehrsatz. Wenn eine Function W der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ die so beschaffen ist, daß die Veränderung, welche sie durch den Uibergang der $x, y, z, \ldots$ in die $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots$ erfährt, der gegebenen $\varphi(x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots)$ gleich kömmt, in der That angeblich ist; so gibt es nicht blos eine einzige dergleichen, sondern unendlich viele, die sich jedoch alle nur darin von einer derselben W unterscheiden, daß sie der Form $W+C$ unterstehen, sofern wir durch C eine von $x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ unabhängige, übrigens aber ganz willkührliche Zahl bezeichnen.

Beweis. Ist die Veränderung von W oder $\Delta W = \varphi(x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots)$; so ist auch die Veränderung von $W+C$ gleich $\varphi(x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots)$ für alle Werthe von C. Denn es ist jedesmahl $\Delta(W+C) = (W+\Delta W+C)-(W+C) = \Delta W$. Daß es aber sonst keine andere Function geben könne, die dieser Bedingung entspricht, erhellet so. Setzet, daß $F(x, y, z\ldots)$ und $\Phi(x, y, z\ldots)$ zwey Functionen wären, deren Veränderung beyde $= \varphi(x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z\ldots)$ sind. Sonach müßte für alle Werthe der Veränderlichen $x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ die Gleichung bestehen

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - F(x, y, z, \ldots) =$$
$$= \Phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z\ldots) - \Phi(x, y, z, \ldots).$$

Also auch, wenn wir zu beyden Seiten $\Phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z\ldots)$ abziehen und $F(x, y, z\ldots)$ addiren

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z\ldots) - \Phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) =$$
$$= F(x, y, z\ldots) - \Phi(x, y, z\ldots).$$

Da diese Gleichung für einen jeden Werth nicht nur der $x, y, z\ldots$ sondern auch der $\Delta x, \Delta y, \Delta z\ldots$ bestehen soll; so muß sie auch bestehen, wenn wir

$$\Delta x = a - x, \quad \Delta y = b - y, \quad \Delta z = c - z \quad \text{usw.}$$

wählen. In diesem Falle aber übergehet das erste Glied der Gleichung in $F(a, b, c\ldots) - \Phi(a, b, c\ldots)$, welches offenbar eine von $x, y, z\ldots$ ganz unabhängige Zahlenvorstellung ist. Stellen wir diese durch C vor: so ist

$$C = F(x, y, z\ldots) - \Phi(x, y, z\ldots).$$

Also $\qquad F(x, y, z\ldots) = \Phi(x, y, z, \ldots) + C,$

wie in dem Lehrsatze ausgesagt wird.

§. 20. Zusatz. Wenn die gegebene Function $\varphi(x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z\ldots)$ nicht wirklich so beschaffen ist, daß eine Function von $x, y, z\ldots W = \Phi(x, y, z\ldots)$ bestehet, welche, wenn $x, y, z\ldots$ in $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z\ldots$ übergehen, die Differenz $\varphi(x, y, z\ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z\ldots)$ hervorbringt: so ist die Vorstellung $\Sigma\varphi(x, y, z\ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z\ldots)$ gegenstandlos. Daher auch die $\Delta\Sigma\varphi(x, y, z\ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z\ldots)$ gegestandlos: ohngefähr eben so wie $(x-y)+y$

oder $y\left(\frac{x}{y}\right)$ gegenstadlos sind, wenn $x-y$ oder $\frac{x}{y}$ gegenstandlos sind. Allein wie wir Gründe fanden, die ursprünglichen Begriffe einer Differenz und eines Quotienten so zu erweitern, daß die Gleichungen $(x-y)+y=x$ und $y\left(\frac{x}{y}\right)=x$ allgemein angesetzt werden dürften: so können wir auch hier durch eine ähnliche Erweiterung der Begriffe festsetzen, daß die Gleichung

$$\Delta\Sigma\varphi(x, y, z \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots) = \varphi(x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots)$$

allgemein gelte.

§. 21. Zusatz. Dann wird auch eben so allgemein $\Delta^m \Sigma^{m+n} \varphi = \Sigma^n \varphi$ seyn, φ sey was immer es wolle.

§. 22. Zusatz. Nicht eben so ist aber $\Sigma\Delta\varphi$ schlechterdings $=\varphi$ zu setzen, sondern nur Einer der Werthe, die $\Sigma\Delta\varphi$ vorstellen kann, ist auch $=\varphi$. Alle Werthe, die $\Sigma\Delta\varphi$ vorstellt, sind aber unter der Form $\varphi + C$ enthalten.

§. 23. Lehrsatz. Die Differenz einer Function, die eine algebraische Summe mehrerer theils veränderlicher, theils auch wohl unveränderlicher Zahlen ist, bestehet aus der algebraischen Summe der Differenzen der einzelnen veränderlichen Summanden.

Beweis. Bezeichnen wir die algebraische Summe, welche die unveränderlichen Zahlen für sich allein bilden, durch a, die übrigen veränderlichen Zahlen aber durch $x, y, z, \ldots$, so ist die ganze Summe d. h. die Function, deren Veränderung wir bestimmen sollen, $W = a \pm x \pm y \pm z \pm \cdots$.

Ferner ist nach §. 8

$$W + \Delta W = a \pm (x + \Delta x) \pm (y + \Delta y) \pm (z + \Delta z) \pm \cdots.$$

Also durch Abzug $\Delta W = \pm \Delta x \pm \Delta y \pm \Delta z \pm \cdots$.

§. 24. Zusatz. Die Differenz einer ganz unveränderlichen Zahl ist also $=0$.

§. 25. Zusatz. Da die Zahlen $x, y, z \ldots$ nicht eben freye Veränderliche seyn müssen, so können sie auch Functionen von einer oder mehreren Veränderlichen vorstellen: und somit lehrt uns die Formel des vorigen Lehrsatzes auch die Differenz einer Function zu finden, die selbst schon eine algebraische Summe mehrerer anderen ist, wenn wir die Differenzen dieser zu finden wissen.

§. 26. Zusatz. Nichts hindert die Formel des vorigen Lehrsatzes gelten zu lassen, auch wenn die Menge der durch die Zeichen + oder — verbundenen Glieder unendlich ist.

§. 27. Zusatz. Ist aber die Menge der veränderlichen Glieder x, y, z . . . nur endlich, und können die einzelnen Zuwächse Δx, Δy, Δz . . . . während die Anzahl derselben sich nicht ändert, alle in das Unendliche abnehmen: so erhellet aus §. 23, daß auch die Differenz ΔW in das Unendliche abnehmen könne.

§. 28. Lehrsatz. Die Differenz einer Function, die ein Product aus einer beständigen meßbaren Zahl und einer veränderlichen aber stets meßbaren ist, bestehet aus dem Producte der beständigen Zahl, in die Differenz der Veränderlichen.

Beweis. Bezeichnen wir die beständige Zahl durch a, die veränderliche durch x: so ist die gegebene Function W entweder ax oder xa. Wenn aber a und x meßbare Zahlen seyn sollen: so haben wir $ax = xa$. Ferner ist $W + \Delta W = a\,(x + \Delta x)$. Wenn aber nicht nur x, sondern auch $x + \Delta x$ meßbar ist: so muß auch Δx meßbar seyn: daher sich der letztere Ausdruck in $ax + a\Delta x$ zerlegen läßt. Und wir erhalten durch Abzug $\Delta W = a\Delta x$.

§. 29. Zusatz. Nimmt also Δx in das Unendliche ab, so nimmt auch ΔW in das Unendliche ab.

§. 30. Zusatz. Auf ähnliche Weise ist auch die Differenz des Quotienten $\frac{x}{a}$, wenn nur a nicht Null ist $= \frac{\Delta x}{a}$. Denn unter der Voraussetzung, daß a nicht Null ist, ist $\frac{x}{a} = x \cdot \frac{1}{a}$ und $\frac{1}{a}$ meßbar.

§. 31. Lehrsatz. Die Differenz einer Function, die ein Product aus zwey Veränderlichen ist, wird erhalten, wenn wir jede dieser Veränderlichen mit der Differenz der anderen, sodann die beyden Differenzen selbst unter einander multipliciren und alle drey Producte addiren.

Beweis. Sind die Factoren nur zwey, so ist $W = xy$, und

$$W + \Delta W = (x + \Delta x)\,(y + \Delta y),$$

welches, weil x, y, Δx, Δy meßbare Zahlen sind, sich in $xy +$ $+ y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\,\Delta y$ auflösen läßt. Daher durch Abzug die verlangte Differenz $\Delta W = \Delta(xy) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\,\Delta y$.

§. 32. Zusatz. Ist die gegebene Function ein Product dreyer veränderlicher Factoren $W = xyz$; so erhalten wir, wenn wir das Product zweyer gegebenen yz erst als einen einzigen veränderlichen Factor u ansehen. nach der vorigen Formel $\Delta W = \Delta(xu) = u\Delta x + x\Delta u + \Delta x \Delta u$; wenn wir für u nun seinen Werth yz setzen und $\Delta u = \Delta(yz)$ abermals nach der vorigen Formel in $y\Delta z + z\Delta y + \Delta y \,.\, \Delta z$ auflösen: so findet sich

$$\Delta W = \Delta(xyz) = yz\Delta x + x(y\Delta z + z\Delta y + \Delta y \,.\, \Delta z) + \\ + \Delta x(y\Delta z + z\Delta y + \Delta y \,.\, \Delta z)$$

oder
$$\Delta(xyz) = yz\Delta x + xz\Delta y + xy\Delta z + \\ + z\Delta x\Delta y + + y\Delta x\Delta z + x\Delta y\Delta z + \Delta x\Delta y\Delta z.$$

§. 33. Zusatz. Man sieht von selbst, wie dieses Verfahren auf ein Product von jeder beliebigen Anzahl veränderlicher Factoren ausgedehnt werden könne.

§. 34. Zusatz. Können die Zuwächse $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ der einzelnen Factoren, aus welchen das Product $xyz\ldots$ zusammengesetzt ist, alle im Einzelnen in das Unendliche abnehmen, während sich ihre Anzahl nicht ändert; so kann auch $\Delta(xyz\ldots)$ in das Unendliche abnehmen. Sind nämlich der Factoren nur zwey, so ist offenbar, daß $\Delta(xy) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$ in das Unendliche abnehme, wenn Δx und Δy in das Unendliche abnehmen. (§. 31.) Gilt aber der Satz von einem Producte von n Factoren, so gilt er auch von einem aus $(n+1)$ Factoren: denn bezeichnen wir den Einen Factor durch x und das Produkt aus den n übrigen durch y; so ist das ganze Product $W = xy$, nimmt also nach dem soeben Gesagten, in das Unendliche ab, so oft nur Δx und Δy in das Unendliche abnehmen.

§. 35. Lehrsatz. Die Differenz eines Quotienten, wenn der Zähler und Nenner beyde veränderlich sind, jedoch stets meßbare Zahlen verbleiben, und der Nenner überdieß nie Null wird, kommt zum Vorschein, wenn wir den Nenner mit der Differenz des Zählers, und den Zähler mit der Differenz des Nenners multipliciren, das letztere Product von dem ersteren abziehen und den Rest durch das Product aus dem Nenner in den um seine Differenz vermehrten Nenner dividiren.

Beweis. Sind Zähler und Nenner veränderlich; so haben wir

$$W = \frac{x}{y} \text{ und } W + \Delta W = \frac{x+\Delta x}{y+\Delta y} \text{ und } \Delta W = \frac{x+\Delta x}{y+\Delta y} - \frac{x}{y}.$$

welches so oft nur y oder $y+\Delta y$ nicht Null sind, auch so geschrieben werden kann $\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y(y+\Delta y)}$.

§. 36. Zusatz. Können die Zuwächse von x und y d. h. $\varDelta x$ und $\varDelta y$ in das Unendliche abnehmen; so kann auch $\varDelta\left(\frac{x}{y}\right)$ in das Unendliche abnehmen: sofern nur y nicht $=0$ ist. Denn unter dieser Voraussetzung kann $\frac{y\varDelta x - x\varDelta y}{y(y+\varDelta y)}$ in das Unendliche abnehmen.