Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetzetes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege

I. Bey der *gewöhnlichsten* Beweisart stützt man sich auf eine aus der *Geometrie* entlehnte Wahrheit: *daß nähmlich eine jede continuirliche Linie von einfacher Krümmung, deren Ordinaten erst positiv, dann negativ sind.* (oder umgekehrt), *die Abscissenlinie nothwendig irgendwo in einem Puncte, der zwischen jenen Ordinaten liegt, durchschneiden müsse.* Gegen die *Richtigkeit* sowohl, als auch gegen die *Evidenz* dieses geometrischen Satzes ist gar nichts einzuwenden. Aber eben so offenbar ist auch, daß es ein nicht zu duldender Verstoß gegen die *gute Methode* sey, Wahrheiten der *reinen* (oder allgemeinen) Mathematik (d. h. der Arithmetik, Algebra oder Analysis) aus Betrachtungen herleiten zu wollen, welche in einen bloß *angewandten* (oder speciellen) Theil derselben, nahmentlich in die *Geometrie* gehören. Und hat man die Unschicklichkeit einer dergleichen *μεταβασις εις αλλο γενος* nicht längst schon gefühlt und anerkannt? hat man sie nicht schon in hundert andern Fällen, wo man ein Mittel gewußt, vermieden, und diese Vermeidung sich zum Verdienste angerechnet? *) Muß man sich also nicht, wenn man anders folgerecht seyn will, dieses auch hier zu

thun

---

*) Ein Beyspiel geben die vorhin angeführten Abhandlungen des Hrn. Prof. Gauß.

thun bestreben? — Denn in der That, wer immer bedenket, daß die Beweise in der Wissenschaft keineswegs bloße Gewißmachungen, sondern vielmehr Begrundungen d. h. Darstellungen jenes objectiven Grundes, den die zu beweisende Wahrheit hat, seyn sollen: dem leuchtet von selbst ein, daß der echt wissenschaftliche Beweis, oder der objective Grund einer Wahrheit, welche von allen Größen gilt, gleich viel, ob sie im Raume oder nicht im Raume sind, unmöglich in einer Wahrheit liegen könne, die bloß von Größen, welche im Raume sind, gilt. Bey Festhaltung dieser Ansicht begreift man vielmehr, daß ein dergleichen geometrischer Beweis, wie in den meisten Fällen, so auch in dem gegenwärtigen, ein wirklicher Zirkel sey. Denn ist gleich die geometrische Wahrheit, auf die man sich hier beruft, (wie wir schon eingestanden haben) höchst evident, und bedarf sie also keines Beweises als Gewißmachung; so bedarf sie nichts desto weniger doch einer Begründung. Denn sichtbar sind die Begriffe, aus denen sie besteht, so zusammengesetzt, daß man nicht einen Augenblick anstehen kann, zu sagen, sie gehöre keineswegs zu jenen einfachen Wahrheiten, welche man eben deßhalb, weil sie nur Grund von andern, selbst keine Folgen sind, Grundsätze oder Grundwahrheiten nennet; sie sey vielmehr ein Lehrsatz oder eine Folgewahrheit, d. h. eine solche Wahrheit, die ihren Grund in gewissen andern hat, und daher auch in der Wissenschaft durch Her-

lei-

leitung aus denselben, dargethan werden muß. *) Nun denke, wer da will, dem objectiven Grunde nach, warum eine Linie unter den vorhin erwähnten Umständen ihre Abscissenlinie durchschneide: so wird gewiß jeder sehr bald gewahr werden, daß dieser Grund in nichts Anderm liege, als in jener allgemeinen Wahrheit, zufolge deren jede stetige Function von x, welche für einen Werth von x positiv, für einen andern negativ wird, für irgend einen dazwischen liegenden Werth von x zu Null werden muß. Und dieß ist eben die Wahrheit, die hier bewiesen werden soll. Weit gefehlt also, daß diese letztere aus jener hergeleitet werden dürfte (wie dieß in der Beweisart, die wir jetzt prüfen, geschieht): muß vielmehr umgekehrt diese von jener abgeleitet werden, wenn man die Wahrheiten in der Wissenschaft eben so darstellen will, wie sie nach ihrem objectiven Zusammenhange mit einander verbunden sind.

II. Nicht minder verwerflich ist der Beweis, den Einige aus dem Begriffe der Stetigkeit einer Function, mit Einmengung der Begriffe von Zeit

und

*) Man vergleiche über dieß Alles meine Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Ite Lieferung. Prag 1810. II. Abthl. §§. 2. 10. 20. 21, wo man die logischen Begriffe, welche ich hier als bekannt voraussetze, entwickelt findet.

und Bewegung, führten. „Wenn sich zwey Functionen fx und φx, sagen sie, nach dem Gesetze der „Stetigkeit ändern, und wenn für $x = \alpha$, „$f\alpha < \varphi\alpha$; für $x = \beta$ aber $f\beta > \varphi\beta$ ist: so muß es „irgend einen zwischen α und β liegenden Werth u „geben, für welchen $fu = \varphi u$ ist. Denn wenn „man sich vorstellt, daß die veränderliche Größe x in „diesen beyden Functionen nach und nach alle zwischen „α und β liegende Werthe, und in demselben Au„genblicke immer beyderseits denselben Werth annimmt: „so ist im Anfange dieser stetigen Werthveränderung „von x, $fx < \varphi x$, und am Ende $fx > \varphi x$. „Da aber beyde Functionen vermöge ihrer Stetigkeit „erst alle mittleren Werthe durchgehen müssen, bevor „sie zu einem höheren gelangen können; so muß es „irgend einen mittleren Augenblick geben, in „welchem beyde einander gleich waren.“ — Dieses versinnlicht man noch durch das Beyspiel der Bewegung zweyer Körper, deren der eine anfangs hinter dem andern war, zuletzt ihm vorgeeilt ist, und folglich nothwendig einmahl bey ihm vorbey gegangen seyn muß. —

Niemand wird wohl in Abrede stellen, daß der Begriff der Zeit, und vollends jener der Bewegung in der allgemeinen Mathematik eben so fremdartig sey, als der des Raumes. Gleichwohl, wenn diese zwey Begriffe hier nur der Erläuterung wegen eingemengt wären, hätten wir nichts dagegen zu

er-

erinnern. Denn auch wir sind keineswegs einem so übertriebenen Purismus zugethan, der, um die Wissenschaft von allem Fremdartigen rein zu erhalten, verlangt, daß man in ihrem Vortrage nicht einmahl einen aus fremdem Gebiethe entlehnten Ausdruck, auch nur in uneigentlicher Bedeutung, und in der Absicht aufnehme, um eine Sache so kürzer und klärer zu bezeichnen, als es durch eine in lauter eigenthümlichen Benennungen abgefaßte Beschreibung geschehen kann, oder nur, um den Uibelklang der steten Wiederholung der nähmlichen Worte zu meiden, oder um durch den bloßen Nahmen, den man der Sache beylegt, schon an ein Beyspiel zu erinnern, das zur Bestätigung der Behauptung dienen kann. Hieraus ersieht man zugleich, daß wir auch Beyspiele und Anwendungen nicht im Geringsten für etwas Solches halten, das der Vollkommenheit des wissenschaftlichen Vortrages Abbruch thue. Nur dieses fordern wir dagegen strenge: daß man die Beyspiele nie statt der Beweise aufstelle, und auf bloß uneigentlich gebrauchte Redensarten, und auf die Nebenvorstellungen, die sie mit sich führen, niemahls die Wesenheit des Schlusses selbst gründe, so daß der letztere wegfällt, sobald man jene ändert.

Nach diesen Ansichten dürfte sich also noch allenfalls die Einmengung des Begriffes der Zeit in obigem Beweise entschuldigen lassen; weil auf die Redensarten, die von ihm hergenommen sind, kein

Schluß

Schluß gegründet wird, der nicht auch ohne ihn gälte. Keineswegs aber kann die zuletzt gegebene Versinnlichung durch die Bewegung eines Körpers für etwas Mehreres angesehn werden, als für ein bloßes Beyspiel, das den Satz selbst nicht beweist, vielmehr durch ihn erst bewiesen werden muß.

2. Halten wir uns also mit Weglassung dieses Beyspiels nur an das übrige Raisonnement. Bemerken wir zuförderst, daß in demselben ein unrichtiger Begriff der Stetigkeit zu Grunde gelegt sey. Nach einer richtigen Erklärung nähmlich versteht man unter der Redensart, daß eine Function fx für alle Werthe von x, die inner- oder außerhalb gewisser Grenzen liegen *), nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändre, nur so viel, daß, wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x+\omega) - fx$ kleiner als jede

*) Es gibt Functionen, welche für alle Werthe ihrer Wurzel stetig veränderlich sind, z. B. $\alpha x + \beta x$. Allein es gibt auch andre, die sich nur inner- oder außerhalb gewisser Grenzwerthe ihrer Wurzel nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern. So ändert sich $x + \sqrt{(1-x)(2-x)}$ nur für alle Werthe von x die $< +1$, oder $> +2$ sind, stetig; nicht aber für die Werthe, die zwischen $+1$ und $+2$ liegen.

de gegebene Größe gemacht werden könne, wenn man ω so klein, als man nur immer will, annehmen kann; oder es sey (nach den Bezeichnungen, die wir im §. 14. des binomischen Lehrsatzes u. s. w. Prag 1816. eingeführt) $f(x+\omega) = fx + \Omega$. Daß aber, wie man in diesem Beweise annimmt, die stetige Function niemahls zu einem höheren Werthe gelange, ohne erst alle niedrigeren durchgegangen zu seyn, d. h. daß $f(x+n\Delta x)$ jeden zwischen fx und $f(x+\Delta x)$ liegenden Werth annehmen könne, wenn man n nach Belieben zwischen 0 und + 1 nimmt: das ist wohl eine sehr wahre Behauptung, aber sie kann nicht als Erklärung des Begriffes der Stetigkeit angesehn werden, sondern ist vielmehr ein Lehrsatz über denselben; und zwar ein solcher, der sich nur erst nach Voraussetzung des Satzes selbst beweisen läßt, zu dessen Beweise man ihn hier anwenden will. Denn wenn M irgend eine zwischen fx und $f(x+\Delta x)$ liegende Größe bedeutet; so ist die Behauptung, daß es irgend einen zwischen 0 und + 1 liegenden Werth von n gebe, für welchen $f(x+n\Delta x) = M$ ist, nur ein besonderer Fall von der allgemeinen Wahrheit, daß, wenn $fx < \varphi x$ und $f(x+\Delta x) > \varphi(x+\Delta x)$ ist, es irgend einen mittleren Werth $x+n\Delta x$ geben müsse, für welchen $f(x+n\ \ x) = \varphi(x+n\Delta x)$ ist. Aus dieser allgemeinen Wahrheit nähmlich ergibt sich jene erstere Be-

Behauptung in dem besondern Falle, wo die Function φx in eine constante Größe M übergehet.

b. Aber gesetzt auch, man könnte diesen Satz auf einem andern Wege darthun: doch würde der Beweis, den wir prüfen, noch einen andern Fehler haben. Daraus nähmlich, daß $f\alpha > \varphi\alpha$ und $f\beta < \varphi\beta$ ist, würde nur folgen, daß wenn u irgend ein zwischen α und β liegender Werth ist, bey welchem $\varphi u > \varphi\alpha$ aber $< \varphi\beta$ ist; so werde fx bevor es aus $f\alpha$ in $f\beta$ übergeht, d. h. bey irgend einem x, das zwischen α und β liegt, ebenfalls $= \varphi u$. Ob aber dieses bey eben demselben Werthe von x, der $= u$ ist, geschehe; d. h. (weil u jeden beliebigen Werth zwischen α und β bedeuten kann, der $\varphi u > \varphi\alpha$ und $< \varphi\beta$ macht) ob es irgend einen zwischen α und β liegenden Werth von x gibt, bey welchem beyde Functionen fx und φx einander gleich werden: das würde noch immer nicht folgen.

c. Das Täuschende des ganzen Beweises beruhet überhaupt nur auf der Einmengung des Begriffes der Zeit. Denn wenn man diesen wegläßt, so zeigt sich alsbald, daß der Beweis nichts anders, als eine Wiederholung des zu beweisenden Satzes selbst mit andern Worten ist. Denn sagen, daß die Function fx, bevor sie aus ihrem Zustande des Kleinerseyns in den des Größerseyns übergeht, erst durch den des Gleichseyns mit φx hindurch gehen müsse; heißt ohne Zeitbegriffe sagen, daß unter den Werthen, die fx annimmt, wenn man für x jeden beliebigen Werth zwischen α und β setzt, auch einer sey, der $fx = \varphi x$ macht; was der zu beweisende Satz selbst ist.

III. Andere beweisen unsern Satz, indem sie folgenden, entweder ganz ohne Beweis, oder doch nur gestützt auf einige aus der Geometrie entlehnte Beyspiele, zum Grunde legen: „Jede veränder„liche Größe kann aus einem bejahten „Zustande im einen verneinten nur durch „den Zustand des Nullseyns, oder den „der Unendlichkeit übergehen.“ Da nun das Resultat einer Gleichung bey keinem endlichen Werthe der Wurzel unendlich groß werden kann: so muß, wie sie schließen, jener Uibergang hier durch Null geschehen. —

a. Wenn man in obigem Satze die uneigentliche Vorstellung eines Uiberganges, die den Begriff einer Veränderung in Zeit und Raum enthält, absondern will; wodurch von selbst auch schon der ungereimte Ausdruck eines Zustandes des Nichtvorhandenseyns wegfällt: so bekömmt man am Ende folgenden Satz: „Wenn ei„ne veränderliche Größe, die von einer „andern x abhängig ist, für $x=\alpha$ bejaht, „für $x=\beta$ verneint befunden wird: so „gibt es jedesmahl einen zwischen α und

„ß gelegenen Werth von x, für den sie „Null, oder aber einen, für den sie un„endlich wird.“ Und nun bemerkt gewiß ein Jeder, daß eine so zusammengesetzte Behauptung keine Grundwahrheit sey, sondern bewiesen werden müsse; daß aber ihr Beweis kaum leichter seyn dürfte, als der des Satzes selbst, zu dessen Behufe man sie aufstellen will.

b. Ja bey genauerer Betrachtung zeigt sich, daß sie im Grunde sogar identisch mit ihm sey. Denn es ist nicht zu vergessen, daß diese Behauptung eigentlich nur dann erst wahr ist, wenn sie von bloß stetig veränderlichen Größen verstanden wird. So hat z. B. die Function $x + \sqrt{(x-2)(x+1)}$ für $x = +2$ wohl allerdings einen bejahten, für $x = -1$ einen verneinten Werth; dennoch, weil sie sich innerhalb dieser Grenzen nicht nach dem Gesetze der Stetigkeit ändert: so gibt es auch keinen innerhalb $+2$ und -1 liegenden Werth von x, für welchen sie Null oder unendlich würde. Schränkt man aber die Behauptung auf bloß stetig veränderliche Größen ein; so muß man auch diejenigen Functionen, die für einen gewissen Werth ihrer Wurzel unendlich werden, ausschließen. Denn eine solche Function, wie $\frac{a}{b-x}$, ist eigentlich nicht für alle Werthe von x, sondern nur für alle, die $>$ oder $<$ b

sind,

sind, stetig veränderlich. Denn für den Werth $x = b$ erhält sie gar keinen bestimmten Werth, sondern wird das, was man unendlich groß nennt. Also kann man auch nicht sagen, daß die Werthe, die sie für $x = b + \omega$ annimmt, die alle bestimmt sind, dem Werthe, den sie für $x = b$ erhält, so nahe kommen können, als man nur immer will. Und dieß gehört doch zu dem Begriffe der Stetigkeit (II. a). Setzt man nun zu der obigen Behauptung den Begriff der Stetigkeit noch hinzu, und läßt dagegen den Fall des Unendlichwerdens hinweg: so geht sie wörtlich in den Satz, der erst bewiesen werden sollte, über; nähmlich, daß jede stetig veränderliche Function von x, welche für $x = \alpha$ bejaht, für $x = \beta$ verneint ist, für irgend einen zwischen α und β liegenden Werth zu Null werden müsse.

IV. Irgendwo liest man folgenden Schluß: „Weil fx für $x = \alpha$ bejaht, für $x = \beta$ verneint ist: so muß es zwischen α und β „zwey Größen a und b geben, bey denen „der Uibergang aus den bejahten Werthen der fx in die verneinten geschieht; „so zwar, daß zwischen a und b kein „Werth von x mehr fällt, für den fx noch „bejaht oder verneint wäre." U. s. w. — Dieser Irrthum bedarf kaum einer Widerlegung, und würde hier gar nicht angeführt werden, wenn er nicht zum Beweise diente, wie undeutlich noch die Begrifgriffe mancher selbst angesehener Mathematiker über diesen Gegenstand sind. Es ist doch bekannt genug, daß es zwischen je zwey einander auch noch so nahe stehenden Werthen einer unabhängig veränderlichen Größe, dergleichen die Wurzel x einer Function ist, immer noch unendlich viele mittlere Werthe gebe; und eben so, daß eine jede stetige Function kein letztes x, das sie bejaht, und kein erstes x, das sie verneint macht, also kein solches a und b, wie hier beschrieben wird, besitze! —

V. Das Mißlingen dieser Versuche, den Satz, von dem wir handeln, unmittelbar zu beweisen, leitete auf den Gedanken, ihn aus dem zweyten Satze, dessen wir anfangs erwähnt, nähmlich aus dem von der Zerlegbarkeit jeder Function in gewisse Factoren abzuleiten. Es ist auch kein Zweifel, daß, wenn dieser zugegeben wird, jener aus ihm geschlossen werden könne. Aber der Umstand ist nur, daß eine solche Herleitung desselben keine echt wissenschaftliche Begründung heissen könnte, indem der zweyte Satz offenbar eine viel zusammengesetztere Wahrheit ausspricht, als unser gegenwärtige; daher sich jener wohl auf diesen, nicht aber umgekehrt dieser auf jenen gründen kann. Wirklich ist es auch noch Niemand gelungen, jenen ohne Voraussetzung von diesem zu beweisen. Betreffend die Beweise, deren Unstatthaftigkeit schon Hr. Gauß in seiner Abhandlung vom Jahre 1799 ge-zeigt hat; so ist es eben darum, weil sie bereits als unstatthaft erwiesen worden sind, nicht nothig, zu untersuchen, ob sie auf unsern Satz sich gründen oder nicht. Der Beweis des Herrn La Place *) hat gleichfalls seine Fehler, die wir jedoch schon darum hier nicht auseinander zu setzen brauchen, weil derselbe ausdrücklich auf unsern gegenwärtigen Satz gegründet ist. Und eben so brauchen wir auch auf den zuerst erschienenen Beweis des Hrn. Gauß keine Rücksicht zu nehmen, weil dieser sich auf geometrische Betrachtungen stützet. Inzwischen wäre es leicht darzuthun, daß auch in ihm unser Satz stillschweigend angenommen wird, indem die geometrischen Betrachtungen, die in ihm angestellt werden, ganz jenen ähnlich sind, deren wir n°. I. erwähnet. — Alles kömmt also nur noch auf des Herrn Gauß Demonstratio nova altera und tertia an. Jene beruft sich auf unsern Satz ausdrücklich; indem sie S. 30 voraussetzt: aequationem ordinis imparis certo solubilem esse; eine Behauptung, die bekanntlich nichts anders, als eine leichte Folgerung aus unserm Satze ist. Nicht so offenbar ist es bey der Demonstratio nova tertia, daß sie von unserm Satze abhängt. Sie gründet sich unter Anderm auf fol-

*) In dem Journal de l' école normal, oder auch in des la Croix Treite du calcul diff. et int. T. I. n°, 162, 163.

folgenden Lehrsatz: Wenn eine Function für alle Werthe ihrer veränderlichen Größe x, die zwischen α und β liegen, stets positiv verbleibt; so hat auch ihr Integral, so genommen, daß es für $x=\alpha$ verschwindet, und daß hierauf $x=\beta$ gesetzt ist, einen positiven Werth. Nun findet man zwar in dem Beweise, den uns La Grange *) für diesen Lehrsatz geliefert, keine ausdrückliche Berufung auf den unsrigen. Allein dieser La Grange-sche Beweis hat auch noch eine Lücke. Er fordert nähmlich, die Größe i so klein zu nehmen, daß

$$\frac{f(x+i)-fx}{i}-f'x<\frac{f'x+f'(x+i)+f'(x+2i)+..+f'(x+(n-1)i)}{n}$$

werde, wobey das Product i. n einer gegebenen Größe gleich bleiben soll, und die bekannte Bezeichnung $f'x$ die erste abgeleitete Function von fx vorstellt. Hier entsteht nun die Frage, ob die Erfüllung dieser Forderung auch möglich sey? Je kleiner man i nimmt, um den Unterschied $\frac{f(x+i)-fx}{i}-f'x$ zu vermindern, desto größer muß man auch n, den Divisor in dem Ausdrucke rechter Hand annehmen, wenn i. n

*) Leçons sur le Calcul des fonctions. Nouvelle Edition. Paris. 1806. Leç. 9. p. 89.

stets der gegebenen Größe gleich bleiben soll. Nun vermehret sich zwar auch die Menge der Glieder in dem Zähler: ob aber diese Vermehrung den Zahler n eben dem Verhältnisse, wie der Nenner wächst, vergrößere, ob sich der Werth des ganzen Bruches durch die Verminderung von i, nicht vielleicht eben so stark oder noch stärker vermindere, als der Ausdruck $\frac{f(x+i)-fx}{i} - f'x$, das ist noch zu erweisen. Soll diese Lücke nun ausgefüllt werden; so wird dieß wohl nur durch Berufung auf unsern gegenwärtigen Satz geschehen können; da wir uns schon bey dem Beweise eines mit diesem La Grangeschen verwandten, obgleich viel einfacheren Lehrsatzes *) auf ihn beziehen mußten.

So mangelhaft also sind alle bisherigen Beweise des Satzes, der auf dem Titel dieser Abhandlung genannt ist. Derjenige nun, den ich hier der Beurtheilung der Gelehrten vorlege, enthält, wie ich mir schmeichle, nicht eine bloße Gewißmachung, sondern die objective Begründung der zu beweisenden Wahrheit; d. h. er ist echt wissenschaftlich. **)

Fol-

*) Nähmlich des Satzes § 29 in der Abhandlung: der binomische Lehrsatz u. s. w.

**) Doch erwarte man nicht, daß ich hier etwa schon alle Regeln befolge, die in den Beyträgen

Folgendes ist eine kurze Uibersicht des Ganges, den er nimmt.

Die zu beweisende Wahrheit, daß zwischen den zwey Werthen α und β, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, jederzeit wenigstens eine reelle Wurzel liege, beruhet offenbar auf jener allgemeineren, daß, wenn zwey stetige Functionen von x, fx und φx, von solcher Beschaffenheit sind, daß für $x = \alpha$, $f\alpha < \varphi\alpha$, für $x = \beta$ aber $f\beta > \varphi\beta$ ausfällt, allemahl irgend ein zwischen α und β, liegender Werth von x vorhanden seyn müsse, für welchen $fx = \varphi x$ wird. Allein wenn $f\alpha < \varphi\alpha$ ist; so ist vermöge des Gesetzes der Stetigkeit auch noch $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$, wenn man nur i klein genug annimmt. Die Eigenschaft des

---

zu einer begründeteren u. s. w. (II. Abth.) für die Construction eines echt wissenschaftlichen Vortrags von mir selbst aufgestellt worden sind. Denn bin ich gleich von der Richtigkeit dieser Regeln noch immer vollkommen überzeuget; so ist doch eine genaue Befolgung derselben nur dort allein möglich, wo man den Vortrag einer Wissenschaft von ihren ersten Sätzen und Begriffen anfängt; nicht aber dort, wo man nur einige Lehren derselben, herausgehoben aus dem Zusammenhange des Ganzen, abhandelt; wie dieses hier geschieht. Diese Bemerkung ist denn, wie sich von selbst versteht, auch auf die Abhandlung über den binomischen Lehrsatz zu beziehen.

des Kleinerseyns also kömmt der Function von i, die der Ausdruck $f(\alpha+i)$ darstellt, für alle Werthe von i zu, die kleiner sind, als ein gewisser. Gleichwohl kömmt diese Eigenschaft ihr nicht für alle Werthe von i ohne Einschränkung zu; nahmentlich nicht für ein i, daß $=\beta-\alpha$ wäre; indem $f\beta$ schon $>\varphi\beta$ ist. Nun gilt der Lehrsatz, daß so oft eine gewisse Eigenschaft M allen Werthen einer veränderlichen Größe i, die kleiner als ein gegebener sind, und doch nicht allen überhaupt zukömmt: so gibt es jederzeit irgend einen größten Werth u, von dem behauptet werden kann, daß alle i, die $< u$ sind, die Eigenschaft M besitzen. Für diesen Werth von i selbst kann nun $f(\alpha+u)$ nicht $<\varphi(\alpha+u)$ seyn; weil sonst nach dem Gesetze der Stetigkeit auch noch $f(\alpha+u+\omega)<\varphi(\alpha+u+\omega)$ wäre, wenn man ω nur klein genug annähme. Und folglich wäre es nicht wahr, daß u der größte von den Werthen ist, von welchen die Behauptung gilt, daß alle unter ihm stehende Werthe von i, $f(\alpha+i)<\varphi(\alpha+i)$ machen; sondern $u+\omega$ wäre ein noch größerer Werth, von dem dasselbe gilt. Noch weniger aber kann $f(\alpha+u)>\varphi(\alpha+u)$ seyn; indem sonst auch $f(\alpha+u-\omega)>\varphi(\alpha+u-\omega)$ seyn müßte, wenn man ω klein genug nimmt; und folglich wäre es nicht wahr, daß für alle Werthe von i, die $< u$ sind, $f(\alpha+i)<\varphi(\alpha+i)$ sey. So muß denn also $f(\alpha+u)=\varphi(\alpha+u)$ seyn; d. h. es gibt einen zwischen α und β liegenden Werth von x, nähmlich

$\alpha+$

$\alpha + u$, für welchen die Functionen fx und φx einander gleich werden. Es handelt sich nur noch um den Beweis des erwähnten Lehrsatzes. Diesen erweisen wir nun, indem wir zeigen, daß jene Werthe von i, von welchen behauptet werden kann, daß alle kleineren die Eigenschaft M besitzen, und jene, von denen sich dieß nicht mehr behaupten läßt, einander so nahe gebracht werden können, als man nur immer will; woraus sich für Jeden, der einen richtigen Begriff von Größe hat, ergibt, daß der Gedanke eines i, welches das größte derjenigen ist, von denen gesagt werden mag, daß alle unter ihm stehende die Eigenschaft M besitzen, der Gedanke einer reellen d. h. wirklichen Größe sey.

Bevor ich noch diese Vorrede schließe, mögen mir ein Geständniß und eine Bitte erlaubt seyn, welche sich nicht bloß auf diese gegenwärtige, sondern auf meine sämmtlichen, auch, so Gott will, künftigen Schriften beziehen.

Schon aus dem Wenigen, so bisher erschienen ist, vornehmlich aber aus jenem Grundrisse einer neuen Logik, den die erste Lieferung der Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik in ihrer zweyten Abtheilung unter der Uiberschrift: über die mathematische Methode, liefert, konnte ein aufmerksa-

samer Leser entnehmen, daß ich gewisse Ansichten he-
ge, die, werden sie anders nicht als durchaus unrich-
tig befunden werden, eine gänzliche Umstal-
tung aller rein apriorischen Wissen-
schaften zur Folge haben müssen. Den größten
und wichtigsten Theil dieser Ansichten habe ich be-
reits durch eine so lange Zeit und mit so vieler
Unbefangenheit geprüfet; daß es wohl nicht mehr zu
frühe ist, wenn ich jetzt etwas lauter davon zu spre-
chen wage. Es können aber Ansichten, welche das
ganze Gebiet einer oder mehrerer Wissenschaften
umfassen, auf eine doppelte Art bekannt gemacht wer-
den; indem man sie entweder auf einmahl und im
Zusammenhange, oder auch theilweise und in ein-
zelnen Abhandlungen vorträgt. Die erste Art ist
bisher bey weitem die gewöhnlichste gewesen; und
ohne Zweifel auch der Weg, den Jeder einschlagen
muß, dem es nur darum zu thun ist, um in der
kürzesten Zeit zu großem Ansehen bey dem gelehrten
Theile seiner Zeitgenossen zu gelangen. Für die
Vervollkommnung der Wissenschaften aber däucht
mir die zweyte Verfahrungsart viel zuträglicher
zu seyn; und zwar aus folgenden Gründen:

Erstlich, weil der Entdecker der neuen Ansichten auf
diese Art viel weniger Gefahr läuft, sich zu übereilen;
indem der theilweise Vortrag seiner Meinungen ihm
gestattet, seine Erklärung über Puncte, worüber er
anfangs noch selbst im Zweifel steht, auf eine spätere
Zeit zu verschieben; aus den Beurtheilungen aber,

die

die das schon Vorgetragene erfährt, zu lernen, und manches unrichtig Gegebene noch zu berichtigen.

Zweytens läßt sich bey einer solchen bloß theilweise vor sich gehenden Entfaltung seiner Ansichten auch eine weit strengere Prüfung derselben von Seite der Leser erwarten. Denn wer mit einem schon vollendeten Systeme auftritt, bietet der Aufmerksamkeit unseres Geistes auf einmahl eine zu große Anzahl neuer Behauptungen dar, als daß zu hoffen wäre, wir werden jede derselben mit eben der Genauigkeit prüfen, als wenn sie uns einzeln vorgelegt worden wäre. Wer einen vollständigen Lehrbegriff liefert, zeigt, oder soll wenigstens zeigen, wie auch aus seinen abweichenden Vordersätzen sich jene Wahrheiten, die der gesunde Menschenverstand mit unläugbarer Sicherheit erkennt, herleiten lassen. Gerade dieses aber söhnt uns mit jenen Vordersätzen aus, und macht, daß wir sie ihm viel unbedenklicher zugeben werden, als wenn er sie einzeln aufgestellt, und uns in Zweifel gelassen hätte, ob und in wie fern sie sich mit allem Uibrigen, was für uns Wahrheit ist, vertragen. Endlich ist wohl auch nicht zu läugnen, daß schon der bloße Anblick eines dickleibigen Buches, das ein vollständiges System dieser oder jener Wissenschaft verspricht, uns eine Art von Achtung einflöße, bevor wir es noch gelesen haben. Entdecken wir nun beym Lesen selbst einen gewissen Zusammenhang in den Behauptungen desselben; hat das Gebäude des menschlichen Wissens, das man uns hier im Grundrisse darstellt, eine gefällige Form; ist alles angelegt nach Maß und Zahl und Symmetrie: so wird unser Urtheil bestochen; so fangen wir selbst an zu wünschen, hier endlich möchte doch jenes einzig richtige System, das wir so lange schon gesucht, vorhanden seyn! Und das Geringste, was erfolgt, ist, daß wir uns einbilden, um des bemerkten Zusammenhanges willen stehe uns höchstens Eines von Beydem frey, entweder das Ganze anzunehmen, oder das Ganze zu verwerfen; während doch in der That weder das Eine, noch das Andere geschehen sollte!

Dieß ohngefähr waren die Gründe, aus welchen ich schon im Jahre 1804 beschloß, in keiner Wissenschaft je mit der Herausgabe eines vollständigen Lehrbuchs anzufangen; sondern in jeder meine von den gewöhnlichen abweichende Begriffe nur erst in einzelnen Abhandlungen bekannt zu machen. Und, wenn diese nach vielfältiger Berichtigung bey einem Theile des Publicums Beyfall gefunden haben, dann erst soll an die Ausfertigung ganzer Systeme gedacht werden, wird anders nicht dieß letztere Geschäft der Tod Andern zu überlassen gebieten.

Ich fing denn meine schriftstellerische Laufbahn mit einer die Mathematik betreffenden Abhandlung an, und trug unter dem Titel: Betrachtungen über einige Gegenstände der Elemenmentargeometrie (Prag, bey C. Barth. 1804), nebst mehreren andern Ansichten, eine neue Theorie der Parallelen vor *). Einige Jahre hierauf faßte ich den Entschluß, meine gesammten in das Gebiet der Mathematik gehörigen Ansichten unter dem Titel: Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik, lieferungsweise herauszugeben. Allein gleich die erste dieser Lieferungen (Prag, bey C. Widtmann, 1810) hatte bey aller Wichtigkeit ihres Inhaltes das Unglück, in einigen gelehrten Zeitschriften gar nicht, in andern nur sehr oberflächlich angezeigt und beurtheilt zu werden. Dieß nöthigte mich, die Fortsetzung dieser Beyträge auf eine spätere Zeit zu verschieben, und mittlerweile erst zu versuchen, ob es mir nicht vielleicht gelänge, mich durch die Herausgabe einiger Abhandlungen, welche durch ihren Titel geeigneter wären, Aufmerksamkeit zu erregen, der gelehrten Welt etwas bekannter zu machen. Zu diesem Zwecke erschien

*) Diese Theorie dürfte wenigstens des doppelten Umstandes wegen Aufmerksamkeit verdienen: erstlich, weil sie die einzige ist, der man doch keinen offenbaren Fehler nachzuweisen vermochte; dann weil der größte jetzt lebende Geometer Frankreichs, Legendre in der zehnten Ausgabe seiner Elemens de Geometrie. Paris. 1813 gewiß ganz unabhängig von mir, auf eben dieselbe Ansicht der Dinge verfallen ist.

schien im J. 1816 der schon vorhin erwähnte binomische Lehrsatz u. s. w. (Prag, bey Enders). Zu diesem Zwecke soll, meinem Wunsche nach, auch die gegenwärtige Abhandlung dienen, deren Herausgabe überdieß noch dadurch nöthig wurde, weil ich mich auf den Satz, den sie beweiset, in jener früheren schon berufen hatte. Einige andre Abhandlungen, welche schon gleichfalls druckfertig ausgearbeitet sind, z. B. eine, welche den Titel führen soll: Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, erwarten noch ihre Verleger. —

Soll ich nun ferner auf diesem Wege, der mir der zuträglichste scheint, fortfahren können: so bestehet die einzige Gunst des Publicums, um die ich bitten muß, darin, daß man diese einzelne Abhandlungen ihres geringeren Umfanges wegen nicht übersehe, sondern sie vielmehr prüfe mit aller nur möglichen Strenge, die Resultate dieser Prüfung aber öffentlich kund machen wolle, damit, was vielleicht undeutlich gesagt ist, deutlicher erkläret, was ganz unrichtig ist, widerrufen werde, das Wahre und richtige aber je eher je lieber zur allgemeinen Annahme gelange.