František Kuřina; Eduard Fuchs; Jan Novotný

Třikrát o tvořivosti

Učitel matematiky, Vol. 2 (1994), No. 4, 1–7

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152756

TŘIKRÁT O TVOŘIVOSTI

Významný ediční čin brněnských vědců

Při příležitosti oslav 75. výročí založení Masarykovy univerzity v Brně a 750. výročí založení města Brna vyšla v roce 1993 trilogie

O TVOŘIVOSTI ve vědě, politice a umění.

I. svazek je uceleným výkladem základních termínů a pojmů, které podmiňují tvořivost: obrazotvornost a fantazie, analogie a inspirace, náhoda a připravenost, intuice a racionalita, originalita a konvence atd. Výklad vychází z diskuse, kterou spolu několik let vedli Jaroslav Malina, Eduard Fuchs, Miroslav Holub, Jan Novotný, Marie Pardyová a Josef Šmatlák. Autoři se ho zúčastňují v literárním převleku, protože svazek má formu antického sympozia a odborné výklady se tak stávají kultivovanou a poutavou rozpravou.
I. svazek ilustroval **Adolf Born** a tvoří jej více než 250 stran včetně důkladných výkladových rejstříků důležitých jmen a pojmů a téměř 100 unikátních dokumentárních fotografií a kreseb.

II. svazek je souborem téměř šedesáti originálních esejů a úvah významných českých a slovenských vědců, umělců a politiků (Jiří Grygar, Ivan M. Havel, Miroslav Holub, Ilja Hurník, Ladislav Kováč, Zdeněk Mahler, Vladimír Preclík, Jan Sokol, Otto Wichterle, Jaromír Tomeček...). Vypovídá o tom, že lidská schopnost tvořit je především schopností povýtce individuální, což též podporuje široké spektrum profesionálního zaměření, hloubka fantazie a nezaměnitelnost originality autorů. Jejich úvahy mají někdy ráz zamyšlení nebo racionálního rozboru činnosti jiných anebo jsou naopak subjektivní spontánní výpovědí o vlastní práci.
II. svazek ilustroval **Vlastimil Zábranský** a tvoří jej více než 350 stran včetně důkladných výkladových rejstříků důležitých jmen a pojmů a téměř 60 fotografií a kreseb.

III. svazek obsahuje výstižné charakteristiky „malých" i „velkých" objevů nebo vynálezů a problémů, důmyslné hlavolamy či překvapivá řešení ve vědecké, pedagogické i umělecké práci nebo při vysokoškolském studiu. Autory jsou učitelé, studenti a přátelé akademické obce Masarykovy univerzity; zvláště střetávání pohledů, studentů a jejich pedagogů přináší inspirativní jiskření a mnoho námětů k přemítání. Třetí svazek by tak měl být oživením předchozích spíše uzavřenějších nebo teoretizujících úvah a dokázat, že tvořivost není jen vážnou záležitostí mimořádných osobností, ale všudypřítomně lidským rysem každodenního života. *Keep smiling* platí i zde.
III. svazek ilustroval **Vladimír Renčín** a tvoří jej téměř 300 stran včetně důkladných výkladových rejstříků důležitých jmen a pojmů.

O charakteru publikace si můžete udělat představu ze dvou krátkých ukázek, které zde přetiskujeme:
Umíte matematicky myslet *(E. Fuchs)*
Úvahy nad textem Umíte matematicky myslet *(J. Novotný)*

Doporučuji všem učitelům, nejen učitelům matematiky, toto zajímavé, poučné a krásné dílo. Nemělo by chybět v knihovně žádné vysokoškolské fakulty, ba ani v knihovně žádné naší střední školy.

František Kuřina

UMÍTE MATEMATICKY MYSLET?

Eduard Fuchs

Často se i u 'vzdělaných' lidí setkáváme s hrdým prohlášením typu: „Matematice jsem nikdy nerozuměl!" Je zajímavé, že málokdo se analogicky chlubí faktem, že se nikdy nenaučil gramatiku nebo nikdy nepochopil, kde na zeměkouli je Austrálie.

Abychom byli spravedliví, zamysleme se nad tím, co může přispívat k této skutečnosti, která přesto dle mého názoru neslouží autorům podobných výroků příliš ke cti.

První z 'bariér', které zřejmě řada školáků nikdy nepřekoná, spočívá již ve způsobu matematického vyjadřování, které sice užívá řady běžných hovorových obratů, avšak v přesně specifikovaném smyslu. Někdo prostě nepochopí, že věta „Jestliže 1 + 1 = 3, pak Kardašova Řečice je hlavním městem České republiky" sice vypadá na první pohled nesmyslně, avšak z logického hlediska - tak jak chápeme v matematice spojení jestliže-pak - je pravdivá.

Jakkoliv je přesnost a někdy zdánlivá šroubovanost matematického vyjadřování stylem matematických úvah vymezená, dělají si z nás - matematiků - často legraci i pracovníci jiných, byť rovněž exaktních věd. Okřídlená je například historka o tom, jak ve vlaku jedoucím skotskou krajinou sedí v kupé astronom, fyzik a matematik.

Astronom vyhlédne z okna, uvidí černou ovci a zvolá: „Přátelé, podívejte! Ve Skotsku jsou ovce černé!"

Fyzik ho opraví: „To přece nemůžeš tvrdit. Víme pouze, že *některé ovce* ve Skotsku jsou černé!"

A matematik ho rozhořčeně napomíná: „Jediné, co víme, je, že ve Skotsku je alespoň jedna ovce, která je alespoň z jedné strany černá!"

Ale nejen vyjadřování je jistě bariérou, která brání řadě lidí vniknout do tajů matematiky. Ať se nám to líbí nebo ne, pro mnohé prostě není způsob matematického myšlení přitažlivý nebo jim snad ani není dán, tak jako není každému dáno chápat krásu hudebních děl, význam malířova obrazu nebo kouzlo kamenných soch.

Čtenář těchto řádků si může snadno ověřit svůj vztah k matematice na následujícím příkladu, který patří dle mého názoru k nejkrásnějším příkladům takzvané rekreační matematiky. K jeho vyřešení stačí ty nejjednodušší školské znalosti, v podstatě jen násobilka, trocha trpělivosti a přesné uvažování. Pokud se vám bude uvedený příklad zdát rovněž krásný, je vám matematické uvažování jistě blízké. Možná však, že příklad pro vás bude jen dalším potvrzením toho, že my, matematikové, jsme opravdu nějací divní. Pak ale jistě hodiny matematiky nepatřily ve škole k vašim nejoblíbenějším.

Nyní již uveďme slíbený příklad.

Jsou dána dvě přirozená čísla větší než 1. (Připomeňme, že přirozená čísla jsou 1,2,3,4. . . . .) Součet těchto čísel přitom není větší než 100. Pánové, které označíme A, respektive B, jsou matematici. A zná pouze *součin* uvedených čísel, B zná pouze *součet* těch dvou čísel (a navzájem to o sobě vědí) a vy jste svědky tohoto jejich rozhovoru:

A: „Nevím, která jsou to čísla."

B: „To jsem věděl!"

A: „Tak já už vím."

B: „Já už taky."

Vaším úkolem je určit na základě uvedeného rozhovoru, která jsou ta neznámá přirozená čísla.

* * *

Na první pohled se nám může zdát, že je absurdní z uvedeného rozhovoru tato čísla určit. Jak si však nyní ukážeme, je úloha vskutku řešitelná a dokonce má jediné řešení!

Chceme-li k tomuto řešení dospět, musíme celý rozhovor pozorně analyzovat větu po větě a z každé věty vytěžit všechny informace, které jsou v ní obsaženy. Že se vám zdá, že tam žádné informace nejsou? To přece není pravda!

Začněme první větou. Co to znamená, že A, který zná součin, neví, která jsou to čísla? Kdyby například znal součin 15, věděl by jistě, že se jedná o čísla 3 a 5, protože jiná možnost prostě není. (Součin 1.15 nepřipadá v úvahu. V zadání jsme přece uvedli, že obě čísla musí být větší než 1.) Pokud by znal ale například součin 12, nevěděl by, zda se jedná o čísla 2 a 6 nebo 3 a 4.

Jaký závěr odtud můžeme učinit? V jakém případě by A mohl poznat, o která čísla se jedná? Odpověď je jednoduchá: kdyby se jednalo o součin dvou tzv. *prvočísel*. (Připomeňme si, že prvočíslo je takové přirozené číslo větší než 1, které je dělitelné jen jedničkou a sebou samým; prvočísla jsou například 3, 5, 11, 31, ne však třeba 18 nebo 30 apod.)

Obraťme nyní svou pozornost ke druhé větě rozhovoru. Jak mohl B vědět, že A *neví*, o která čísla se jedná?

Co kdyby B například věděl, že součet čísel je 8? Pak by hledaná čísla mohla být třeba 2 a 6 a to by A opravdu se součinem 12 nepoznal. (Víme přece, že součin 12 dá také třeba 3.4.) Ale součet 8 dají také čísla 3 a 5 a ta by A, jak víme, se součinem 15 určil. B však *věděl*, že A čísla určit nemůže. Co to znamená? Součet, který zná B, *nemůže být součtem dvou prvočísel!*

V této chvíli je jasné, že budeme potřebovat znát všechna prvočísla menší než 100. Snadno zjistíme, že to jsou čísla

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Co tedy v této chvíli víme? Hledaná čísla nemohou být dvě prvočísla se součtem nepřevyšujícím číslo 100. Navíc víme, že součet, který zná B, nemůže být libovolné číslo: nesmí to být součet dvou prvočísel. Když tedy součty dvou prvočísel (jako je například 8 = 5 + 3 nebo 46 = 29 + 17 atd.) vyloučíme, zjistíme, že 'povolené' součty jsou pouze

11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51, 53, 57, 59, 65, 67, 71, 77, 79, 83, 87, 89, 93, 95, 97.

Sice jsme pokročili, ale k určení čísel je ještě daleko. Uvedený rozhovor však pokračuje. Přečteme si třetí větu, kterou řekl A. Jakto, že v této chvíli již mohl čísla určit? Co mu pomohlo k identifikaci čísel? Pouze skutečnost, že jejich součet je ve výše uvedeném smyslu 'povolený'.

Abychom mohli posoudit celý význam třetí věty rozhovoru, vypíšeme si všechny možnosti, které mohou v této chvíli nastat, tj. ke každému povolenému součtu uveďme všechny možné součiny. (Protože všech možností je mnoho, uveďme z takto vzniklé tabulky jen její úvodní část, na níž však lze další úvahy snadno ilustrovat.)

11:2.9 = 18	17:2.15 = **30**	23:2.21 = **42**	
3.8 = 24	3.14 = **42**	3.20 = **60**	
4.7 = 28	4.13 = 52	4.19 = 76	
5.6 = **30**	5.12 = **60**	5.18 = 90	
	6.11 = **66**	6.17 = **102**	
	7.10 = **70**	.	
	8.9 = **72**	.	
27: 2.25 = 50	29: 2.27 = 54	35: 2.33 = **66**	37: 2.35 = **70**
3.24 = **72**	3.26 = 78	3.32 = 66	3.34 = **102**
4.23 = 92	4.25 = 100	4.31 = 124	4.33 = 132
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

V tabulce jsme některé výsledky vysadili tučně; jsou to ty výsledky, které se objevují vícekrát. A nyní dobře uvažme, zda součin, který A zná, může být například 30.

Tento výsledek lze obdržet různě. A již ví, že to nemůže být třeba 3.10, protože součet 13 není povolený. Musí přece jít o některý ze součinů, který je uveden v naší tabulce. Ale v ní jsou dvě možnosti: 5.6 nebo 2.15. Která z nich to má být? To A nemůže vědět! Víme však, že A ve třetí větě říká, že čísla již zná. Co tedy z toho plyne? Součin, o který se jedná, *nesmí být v naší tabulce vysazen tučně!*

Takových součinů, které v naší tabulce nejsou tučně, je ovšem celá řada. Který z nich to může být? To nám může napovědět pouze čtvrtá a poslední věta rozhovoru.

Uvažme, zda součin, který zná A, může být například 24. (V tom případě zná B součet 11.) První tři věty rozhovoru by opravdu proběhly tak, jak je uvedeno. Když však A řekne, že již ví, která jsou to čísla, co z toho může odvodit B? Ten zná součet 11, takže na počátku ví, že součin je některé z čísel 18, 24, 28, 30. Přitom součin 30 již nepřipadá, jak jsme uvedli, v úvahu, takže jde o některé číslo ze zbývající trojice. Jak však má B poznat, zda A zná součin 18, 24 nebo 28? To nemůže nijak rozhodnout. Přesto však B říká, že již také čísla zná! Jak je to možné? Jedině tak, že B zná takový součet, který má v tabulce příslušných součinů *jediný* 'netučný' výsledek. A když si celou naši tabulku prohlédneme, zjistíme, že takový součet je právě jen jeden jediný: je to součet 17 s 'netučným' součinem 4.13 = 52.

Tím jsme ale úlohu vyřešili! Uvedený rozhovor mohl proběhnout, tak jak proběhl, za jediného předpokladu: A zná součin 52, B zná součet 17 a hledaná čísla jsou 4 a 13.

Připadá vám tato úloha nudná nebo fascinující? To je právě dáno tím, zda je vám či není styl matematického myšlení blízký.

ÚVAHY NAD TEXTEM
UMÍTE MATEMATICKY MYSLET?

Jan Novotný

V knize J. E. Littlewooda *Matematická směs* se říká, že jistá nepraktická, leč přitažlivá úloha pohltila 10 000 pracovních hodin matematiků zaměstnaných na válečných úkolech. Byl dokonce podán návrh svrhnout tuto úlohu nad nacistickým Německem.

Úloha připomenutá kolegou Fuchsem měla kdysi podstatný podíl na tom, že jsem se dostatečně nepřipravil na zkoušku a nesložil ji na první pokus. Své řešení jsem si uschoval a chtěl bych je dnes využít ke dvěma poznámkám, které snad čtenáři přiblíží subtilnost a provázanost matematiky.

1. Jak již čtenář dobře ví, A by mohl poznat, o jaká čísla se jedná, kdyby šlo o součin dvou prvočísel. Je však ještě další možnost, kdy by to mohl poznat - totiž kdyby šlo o třetí mocninu prvočísla (např. 27 je pouze 3x9). Proto součet, který zná B, nemůže být ani součtem prvočísla a jeho druhé mocniny. Nepovede tato podmínka k redukci soupisu povolených součtů, a tím případně ke změně řešení problému? Naštěstí se tak nestane a abychom to viděli, nemusíme podstoupit ani malou námahu s počítáním. Součet čísla s jeho druhou mocninou je nutně sudý a v soupisu povolených součtů žádné sudé číslo nemáme. *Je to náhoda?* Pokud ne, znamená to platnost věty: *Každé sudé číslo* (větší než 2) *je součtem dvou prvočísel.* Nedoporučuji čtenáři, aby se pokoušel tak jednoduše formulovanou větu dokazovat. Nepodařilo se to kdysi mně, ale jak jsem později zjistil, ani nikomu jinému, a to již od roku 1742, kdy byla tato *Goldbachova hypotéza* poprvé vyslovena.

Znalost hypotézy nám mohla urychlit sestavení soupisu povolených součtů - jsou to všechna čísla typu: liché neprvočíslo + 2. Všimněme si, že v tomto seznamu zůstávají i mnohá prvočísla s výjimkou těch, která jsou druhými členy *páru prvočíselných dvojčat* (jako např. 41, 43). Prvočísel je, jak ukázal již Eukleidés, nekonečný počet - je rovněž nekonečný počet dvojčat? Opět otázka, na kterou ještě nikdo nenašel odpověď.

Poučení: Mezi rekreační a opravdovou matematikou není žádná tvrdá bariéra.

2. S překvapením jsem dále zjistil, že na rozdíl od kolegy Fuchse mi nevyšlo jen jedno řešení. Podle mne se rozhovor matematiků mohl týkat ještě čísel

4, 61 (součet 65, součin 244) a čísel 16, 73 (součet 89, součin 1168). *Kdo z nás se spletl?* Během váhání, zda si to mám začít pracně ověřovat, porovnal jsem si svou a kolegovu formulaci úlohy a shledal rozdíl, který by nematematik sotva považoval za podstatný. Podmínka, že součet čísel není větší než 100, je u Fuchse uvedena před rozhovorem obou matematiků, kdežto ve verzi, která se dostala ke mně, až za ním. To znamená: já jsem tuto podmínku chápal jako dodatečnou informaci pro řešitele úlohy, která však nebyla sdělena matematikům. *K čemu by jim také byla?* Zná-li A součin 52 a B součet 17, pak oba vědí, že součet není větší než 100, každý z nich také ví, že to ví i jeho partner. Přináší-li jim vyhlášení podmínky vůbec nějakou informaci (to ať uváží čtenář), ve svém rozhovoru ji nijak nevyužívají.

Přesto jsou obě formulace úlohy podstatně odlišné. Ve Fuchsově formulaci je totiž informovanější řešitel úlohy - ví, že matematikům byla sdělena informace, které by případně mohli využít (při jiném součtu a součinu). Tak součin 244 by mohl být psán jako 2x122 nebo 4x61, pokud matematik B ví, že A ví, že součet nesmí být větší než 100, pak ví, že A by při uvedeném součinu činitele znal. Podobně je tomu se součinem 1168. Proto řešitel Fuchsovy formulace úlohy má dodatečná řešení vyřazuje, řešitel mé formulace to udělat nemůže.

Poučení: Také neuskutečněné možnosti ovlivňují skutečnost - přinejmenším v matematice.