Pavel Gajdoš

Transcendentní čísla a konstrukce pravítkem a kružítkem

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 99 (2024), No. 3, 25–33

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/152604`

Transcendentní čísla a konstrukce pravítkem a kružítkem

Pavel Gajdoš, student FSI VUT, Brno

Abstrakt. Transcendentní čísla jsou vysoce teoretický a vcelku obtížně uchopitelný matematický koncept a po staletích od jejich objevu stále skýtají mnoho nezodpovězených otázek. Cílem tohoto článku je ukázat jejich spojitost s takovou banalitou, jako jsou konstrukce pravítkem a kružítkem.

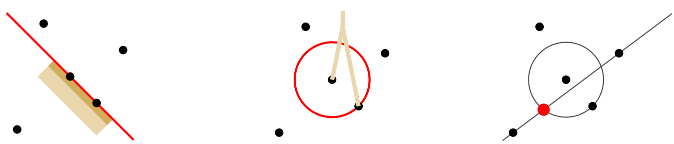
Řekněme, že se jednou ráno probudíte s nepotlačitelnou touhou provést nějakou geometrickou konstrukci. Přirozeně se rozběhnete pro své oblíbené rýsovací pomůcky – ale všechny jsou pryč! Zůstalo jen staré pravítko (a ještě bez stupnice!) a kružítko. Je to konec, nebo se ve světě konstrukcí pravítkem a kružítkem ukrývá něco velkolepého?

Než se vydáme hledat odpověď na tuto otázku, měli bychom se přesně domluvit, které kroky můžeme provádět. Každou konstrukci začneme s nějakou množinou výchozích *význačných bodů* a v každém kroku konstrukce smíme provést jeden ze tří úkonů (obr. 1):

(a) Sestroj přímku procházející dvěma význačnými body.

(b) Sestroj kružnici se středem ve význačném bodě procházející jiným význačným bodem.

(c) Průsečík dvou různoběžných přímek, dvou kružnic, nebo přímky a kružnice přidej k význačným bodům.

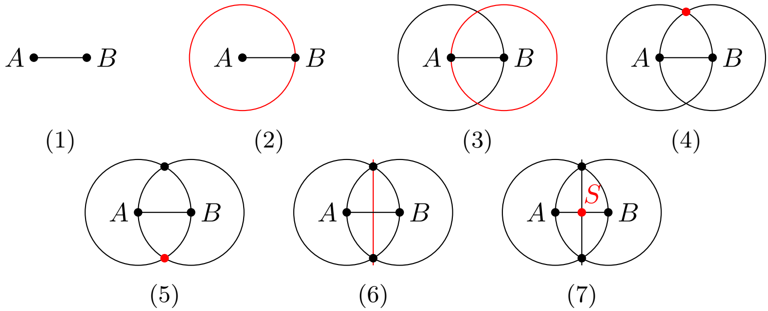


(a) (b) (c)

Obr. 1: Povolené kroky při konstrukci pravítkem a kružítkem

Příklad 8. Pomocí pravítka a kružítka můžeme sestrojit například střed libovolné úsečky AB (obr. 2).

Začneme s množinou význačných bodů $V = \{A, B\}$. Nejprve zkonstruujeme kružnici se středem v bodě A procházející bodem B, poté kružnici se středem v bodě B procházející bodem A. Oba průsečíky těchto kružnic přidáme k význačným bodům a sestrojíme přímku, která jimi prochází. Hledaný střed S potom získáme jako průsečík této přímky a úsečky AB.

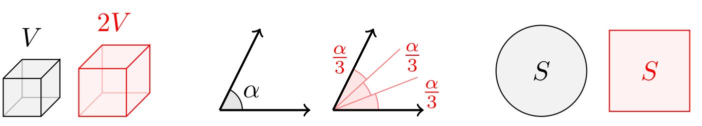


Obr. 2: Konstrukce středu úsečky pomocí pravítka a kružítka

Pro usnadnění manipulace s geometrickými objekty zasadíme prováděné konstrukce do kartézské soustavy souřadnic Oxy. Každý bod tedy popíšeme dvojicí reálných čísel a každou přímku nebo kružnici jejich odpovídající rovnicí.

Antické problémy

Za dob antiky se vyprofilovala trojice konstrukcí, jejichž proveditelnost pravítkem a kružítkem byla po tisíce let záhadou: zdvojení krychle, trisekce úhlu a kvadratura kruhu (obr. 3). Antické úlohy byly vyřešeny až v 19. století pomocí teorie transcendentních čísel.



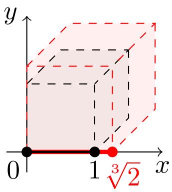
(a) zdvojení krychle (b) trisekce úhlu (c) kvadratura kruhu

Obr. 3: Antické úlohy

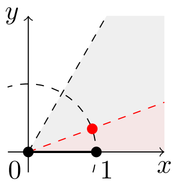
Zdvojení krychle. Je možné k libovolné krychli pravítkem a kružítkem sestrojit krychli dvojnásobného objemu?

Přestože je úloha formulována v prostoru, můžeme ji snadno převést na obyčejnou rovinnou konstrukci. Řekněme, že daná krychle má stranu délky a, tedy objem a^3. Krychle, o jejíž konstrukci usilujeme, má potom objem $2a^3$, tedy délku strany $a\sqrt[3]{2}$. Jde tedy o to, zda můžeme v rovině k úsečce libovolné délky a sestrojit úsečku délky $a\sqrt[3]{2}$.

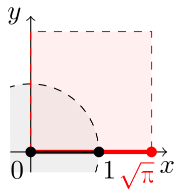
Pro jednotkovou krychli bychom tedy mohli začít s množinou význačných bodů $V = \{[0,0],[1,0]\}$ a snažit se sestrojit bod $[\sqrt[3]{2},0]$ (obr. 4a).



(a) zdvojení krychle



(b) trisekce úhlu



(c) kvadratura kruhu

Obr. 4: Rozbor antických problémů.

Trisekce úhlu. Lze libovolný úhel pomocí pravítka a kružítka rozdělit na třetiny?

Každý úhel můžeme pomocí pravítka a kružítka známým postupem rozdělit na poloviny. Dále je zřejmé, že některé úhly (např. $90°$) roztřetit lze. Obtížnější je rozhodnout, zda existuje nějaký úhel, který roztřetit nelze.

Rozeberme například situaci pro úhel $60° = \frac{\pi}{3}$. Stačí, když začneme s dvouprvkovou množinou význačných bodů $V = \{[0,0],[1,0]\}$, poněvadž třetí bod určující úhel snadno sestrojíme jako vrchol rovnostranného trojúhelníku. Naším cílem je pak nad osou x sestrojit úhel $20° = \frac{\pi}{9}$.

Kdyby se nám podařilo získat libovolný bod jeho hraniční přímky, v dalších krocích můžeme sestrojit její průsečík s kružnicí $x^2 + y^2 = 1$, jímž je bod $[\cos\frac{\pi}{9}, \sin\frac{\pi}{9}]$ (obr. 4b).

Kvadratura kruhu. Můžeme k libovolnému kruhu pomocí pravítka a kružítka sestrojit čtverec o stejném obsahu?

Má-li daný kruh poloměr r, je jeho obsah roven πr^2. Čtverec o stejném obsahu by pak měl stranu délky $r\sqrt{\pi}$.

Jedná-li se o jednotkový kruh se středem v počátku, můžeme začít s množinou význačných bodů $V = \{[0,0],[0,1]\}$. Kýžený bod by potom měl souřadnice $[\sqrt{\pi}, 0]$ (obr. 4c).

Exkurze do světa algebry

V následujícím textu budeme velmi často pracovat s číselnými tělesy.

Definice 2. Řekneme, že množina $T \subseteq \mathbb{C}$ s operacemi $+$ (sčítání) a $\cdot$ (násobení) tvoří *číselné těleso*, jestliže

(a) $0, 1 \in T$,

(b) pro každá $x, y \in T$ je $x + y \in T$, $x - y \in T$, $x \cdot y \in T$, a pokud navíc $y \neq 0$, tak i $\frac{x}{y} \in T$.

Například množina celých čísel $\mathbb{Z}$ těleso netvoří, poněvadž například $1, 2 \in \mathbb{Z}$, ale $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Z uvedených podmínek není těžké si domyslet, že každé číselné těleso T musí nutně obsahovat všechna racionální čísla. Mezi nejznámější tělesa patří racionální čísla $\mathbb{Q}$, reálná čísla $\mathbb{R}$ nebo komplexní čísla $\mathbb{C}$.

Příklad 9. Zajímavějším příkladem tělesa je množina

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ \text{kde } a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Zřejmě $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ a $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Dále označme $x = x_1 + x_2\sqrt{2}$ a $y = y_1 + y_2\sqrt{2}$, kde $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$. Potom

$$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

a podobně ověříme, že $x - y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Dále

$$\begin{aligned} x \cdot y = &= x_1y_1 + x_1y_2\sqrt{2} + x_2\sqrt{2}y_1 + x_2\sqrt{2}y_2\sqrt{2} = \\ &= (x_1y_1 + 2x_2y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]. \end{aligned}$$

Konečně pokud $y \neq 0$, platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} &= \frac{1}{y_1 + y_2\sqrt{2}} \cdot \frac{y_1 - y_2\sqrt{2}}{y_1 - y_2\sqrt{2}} = \frac{y_1 - y_2\sqrt{2}}{y_1^2 - 2y_2^2} = \\ &= \frac{y_1}{y_1^2 - 2y_2^2} - \frac{y_2}{y_1^2 - 2y_2^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]. \end{aligned}$$

Z toho v kombinaci s předchozí rovností plyne

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

Definice 3. *Polynomem f nad tělesem T* rozumíme každý výraz

$$f = f_0 + f_1 x + \cdots + f_n x^n,$$

kde $f_0, f_1, \cdots, f_n \in T$ a $n \in \mathbb{N}$. Jestliže $f_n \neq 0$, řekneme, že *stupeň polynomu f* je roven n. Stupeň polynomu $f = 0$ definujeme jako $-\infty$.

Pro $z \in \mathbb{C}$ označme $f(z) = f_0 + f_1 z + \cdots + f_n z^n$ *hodnotu polynomu f* v bodě z. Jestliže $f(z) = 0$, řekneme, že z je *kořenem* polynomu f.

Množinu všech polynomů nad T označíme $T[x]$.

Například $p = x^2 - 5x + 6$ je polynom nad $\mathbb{Q}$ druhého stupně. Platí kupříkladu $p(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2$. Polynom p má právě dva kořeny, a to 2 a 3.

Transcendentní čísla

Definice 4. Řekneme, že číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ je *algebraické nad tělesem T*, jestliže je kořenem nějakého polynomu nad T. Číslo α nazveme *algebraické*, je-li algebraické nad tělesem $\mathbb{Q}$. Číslo nazveme *transcendentní*, jestliže není algebraické.

Každé racionální číslo $p \in \mathbb{Q}$ je zřejmě algebraické (nad $\mathbb{Q}$), poněvadž je kořenem polynomu $x - p \in \mathbb{Q}[x]$. Algebraická jsou však i některá iracionální čísla, například $\sqrt{2}$ je kořenem polynomu $x^2 - 2$. Mimo reálná čísla je algebraická například imaginární jednotka $i \in \mathbb{C}$, je totiž kořenem polynomu $x^2 + 1$.

S trochou teorie polynomů není těžké dokázat, že pro každé algebraické α nad T existuje jediný normovaný ireducibilní[1)] polynom nad T, jehož kořenem je α. Budeme ho označovat *minimální polynom* daného algebraického čísla a jeho stupeň nazveme *stupeň* daného čísla. Všechny polynomy uvedené v předchozím odstavci jsou minimální. To znamená, že všechna racionální čísla jsou algebraická (nad $\mathbb{Q}$) stupně 1 a čísla $\sqrt{2}$ a i stupně 2. Nad $\mathbb{R}$ je však i $\sqrt{2}$ algebraická stupně 1, poněvadž jejím minimálním polynomem je $x - \sqrt{2} \in \mathbb{R}[x]$.

Lze dokázat, že součet, rozdíl, součin i podíl (pokud je definován) dvou algebraických čísel nad T je opět algebraický nad T.

[1)] *Normovaný polynom* má u nejvyšší mocniny x číslo 1. Polynom $x^2 - 1$ je normovaný, zatímco $2x + 1$ ne. *Ireducibilní nad T* je takový polynom, který nelze vyjádřit jako součin dvou nekonstantních polynomů nad T. Polynom $x^2 - 2$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$, avšak nikoli nad $\mathbb{R}$, neboť $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.

Přirozeně si nyní můžeme položit otázku, zda vůbec nějaká transcendentní čísla existují. Trvalo téměř dvě století, než bylo nějaké takové číslo zkonstruováno. To se povedlo francouzskému matematikovi Josephu Liouvilleovi (1809–1892). Jím objevené transcendentní číslo bylo tvaru

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = 0{,}110\,001\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,000\,000\,0\ldots$$

Vzhledem k tomu, jak umělé toto číslo je, bychom mohli usoudit, že transcendentní čísla budou velmi úzká skupina podivných čísel. Roku 1874 však německý matematik Georg Cantor (1845–1918) dokázal šokující tvrzení, podle kterého je v jistém smyslu[2)] více transcendentních čísel než čísel algebraických. Dnes je již známo, že mezi transcendentní čísla patří například čísla e, π, $\sin\alpha$ nebo $\ln\alpha$ pro každé algebraické $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \neq 1$.

Souvislost s konstrukcemi

Nejprve pro jednoduchost zavedeme nové značení. Je-li V množina význačných bodů, označíme

$$\mathcal{T}(V) \supseteq \bigcup_{[x,y]\in V} \{x, y\}$$

nejmenší číselné těleso, které obsahuje x-ové i y-ové souřadnice všech bodů z V.

Je-li například $V = \{[0,0],[1,0]\}$, je $\mathcal{T}(V)$ nejmenší těleso, které obsahuje čísla 0 a 1, tedy $\mathcal{T}(V) = \mathbb{Q}$. Jestliže $V = \{[0,0],[1,0],[\sqrt{2},0]\}$, je $\mathcal{T}(V) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ \text{kde } a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Všimněme si, že můžeme na dané množině význačných bodů elegantně vyjádřit všechny objekty zkonstruovatelné pravítkem a kružítkem:

Věta 1. *Buď V množina význačných bodů. Potom každou přímku sestrojitelnou v jednom kroku lze vyjádřit ve tvaru $ax+by+c=0$ a každou kružnici sestrojitelnou v jednom kroku ve tvaru $(x-m)^2+(y-n)^2=w$, kde $a,b,c,m,n,w \in \mathcal{T}(V)$.*

[2)] Cantor konkrétně dokázal, že množina algebraických čísel je spočetná (tzn. algebraická čísla lze jednoznačně očíslovat přirozenými čísly). Množina transcendentních čísel je potom nutně nespočetná.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že konstruujeme přímku kolmou na osu x, která osu x protíná v bodě $[c, 0]$, potom $c \in \mathcal{T}(V)$. Její rovnici napíšeme jako $x - c = 0$.

Dále uvažme přímku p vedenou body $u[u_1, u_2], v[v_1, v_2] \in V$, která není kolmá na osu x. Rovnici přímky p lze zapsat ve tvaru $y = ax + c$, přičemž $u_2 = au_1 + c$ a $v_2 = av_1 + c$. Odečtením těchto rovnic dostaneme $v_2 - u_2 = a(v_1 - u_1)$. Jelikož p není kolmá k ose x, platí $v_1 - u_1 \neq 0$, a tedy

$$a = \frac{v_2 - u_2}{v_1 - u_1} \in \mathcal{T}(V) \quad \text{a dále} \quad c = u_2 - \frac{v_2 - u_2}{v_1 - u_1} u_1 \in \mathcal{T}(V).$$

Tím je dokázána první část tvrzení.

Nyní předpokládejme, že sestrojíme kružnici k se středem v bodě $S[m, n] \in V$ procházející bodem $u[u_1, u_2] \in V$. Má poloměr

$$|Su| = \sqrt{(m - u_1)^2 + (n - u_2)^2},$$

a tedy její rovnici můžeme napsat jako

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = |Su|^2 = (m - u_1)^2 + (n - u_2)^2.$$

Jelikož $m, n, u_1, u_2 \in \mathcal{T}(V)$, je i $w = (m - u_1)^2 + (n - u_2)^2 \in \mathcal{T}(V)$, čímž jsme dokázali i druhou část věty.

Pro řešení antických problémů však využijeme zejména následující vlastnosti.

Věta 2. *Buď V výchozí množina význačných bodů a V' množina význačných bodů po provedení jednoho kroku. Potom každé $t \in \mathcal{T}(V')$ je algebraické nad $\mathcal{T}(V)$ stupně nejvýše 2.*

Důkaz. První dva úkony (a), (b) žádné význačné body nepřidávají. Poslední úkon (c) přidává význačný bod, který je průsečíkem dvou přímek, dvou kružnic, nebo kružnice a přímky.

Předpokládejme, že přidáme průsečík $P[x_0, y_0]$ dvou různoběžných přímek

$$p\colon p_1x + p_2y + p_3 = 0 \quad \text{a} \quad q\colon q_1x + q_2y + q_3 = 0,$$

kde $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{T}(V)$. Alespoň jedno z čísel q_1, q_2 je přitom nenulové, jinak by q nebyla přímka. Předpokládejme, že $q_1 \neq 0$, druhý případ se dokáže analogicky.

Označme $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$, potom $r_1q_1 = p_1$ a současně $r_1q_2 \neq p_2$, neboť přímky p, q jsou různoběžné. Protože $P \in p, q$, platí

$$\begin{aligned} 0 &= (p_1x_0 + p_2y_0 + p_3) - r_1(q_1x_0 + q_2y_0 + q_3) = \\ &= (p_2 - r_1q_2)y_0 + (p_3 - r_1q_3). \end{aligned}$$

Jelikož $p_2 - r_1q_2 \in \mathcal{T}(V)$, $p_3 - r_1q_3 \in \mathcal{T}(V)$ a $p_2 - r_1q_2 \neq 0$, je y_0 algebraické nad $\mathcal{T}(V)$ stupně 1.

Pokud $q_2 = 0$, z rovnice přímky q ihned dostáváme $q_1x_0 + q_3 = 0$, přičemž $0 \neq q_1 \in \mathcal{T}(V)$. Jestliže $q_2 \neq 0$, pro $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ platí $r_2q_2 = p_2$ a $r_2q_1 \neq p_1$, tedy

$$\begin{aligned} 0 &= (p_1x_0 + p_2y_0 + p_3) - r_2(q_1x_0 + q_2y_0 + q_3) = \\ &= (p_1 - r_2q_1)x_0 + (p_3 - r_2q_3), \end{aligned}$$

kde opět $p_1 - r_2q_1 \in \mathcal{T}(V)$, $p_3 - r_2q_3 \in \mathcal{T}(V)$ a $p_1 - r_2q_1 \neq 0$. V obou případech tak dostáváme, že x_0 je algebraické nad $\mathcal{T}(V)$ stupně 1.

Tvrzení pro průsečík dvou kružnic nebo přímky a kružnice dokážeme podobně. Při tom využijeme fakt, že rovnice kružnice je kvadratická, tedy druhého stupně.

Větu 2 je možné za pomoci náročnější algebry dále zobecnit na konstrukce pravítkem a kružítkem o libovolném počtu kroků. Tento výsledek bude stěžejní při řešení antických problémů.

Věta 3. *Buď V výchozí množina význačných bodů a V_n množina význačných bodů po aplikaci n konstrukčních kroků. Potom každé $t \in \mathcal{T}(V_n)$ je algebraické nad $\mathcal{T}(V)$ a jeho stupeň dělí 2^n.*

(Ne)řešení antických problémů

Nyní se můžeme vrátit k antickým problémům. Při tom budeme pracovat s případy rozebranými výše (obr. 4). Vždy tak začneme s množinou význačných bodů $V = \{[0,0],[1,0]\}$, čemuž odpovídá nejmenší těleso $\mathcal{T}(V) = \mathbb{Q}$. Každý bod zkonstruovatelný v n krocích má tedy dle věty 3 algebraické souřadnice (nad $\mathbb{Q}$) stupně, který dělí výraz 2^n.

V případě *zdvojení krychle* se snažíme sestrojit bod $[\sqrt[3]{2}, 0]$. Kdyby se nám to podařilo v n krocích, musel by stupeň algebraického čísla $\sqrt[3]{2}$ dělit 2^n. Víme však, že stupeň $\sqrt[3]{2}$ je 3, což je spor, tedy zkonstruovat daný bod není možné.

Při *trisekci úhlu* $\frac{\pi}{3}$ konstruujeme bod $[\cos\frac{\pi}{9}, \sin\frac{\pi}{9}]$. Kdyby se nám to podařilo v n krocích, pak by číslo $\cos\frac{\pi}{9}$ bylo algebraické a jeho stupeň by dělil výraz 2^n.

Všimněme si, že ze známých goniometrických identit můžeme odvodit rovnost

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - (2\sin x\cos x)\sin x = \\ &= \cos^3 x - 3\sin^2 x\cos x = \cos^3 x - 3(1-\cos^2 x)\cos x = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

Potom

$$1 = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cos 3\cdot\frac{\pi}{9} = 8\cos^3\frac{\pi}{9} - 6\cos\frac{\pi}{9}.$$

To znamená, že $\cos\frac{\pi}{9}$ je kořenem polynomu $f = 8x^3 - 6x - 1$. Z teorie polynomů vyplývá, že f nemá žádné racionální kořeny, z čehož dále plyne jeho ireducibilita nad $\mathbb{Q}$. Číslo $\cos\frac{\pi}{9}$ je tak sice algebraické, avšak stupně 3, což je spor, a konstrukce tak není proveditelná.

U *kvadratury kruhu* chceme získat bod $[\sqrt{\pi}, 0]$. Kdyby se nám to podařilo v n krocích, pak by $\sqrt{\pi}$ bylo algebraické číslo (jehož stupeň dělí 2^n). To by však znamenalo, že i číslo $\pi = \sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}$ je algebraické. Je však dokázáno, že číslo π je transcendentní, což je spor, takže ani kvadratura kruhu není sestrojitelná.

Pomocí teorie transcendentních čísel jsme tak dokázali, že všechny tři antické problémy jsou obecně neproveditelné.

Závěr

Teorie transcendentních čísel je dodnes plná nezodpovězených otázek a od svého vzniku potrápila řadu proslulých matematiků. Na druhou stranu konstrukce pravítkem a kružítkem jsou jedním z historicky prvních matematických konceptů a všichni se s nimi seznamujeme už na začátku základní školy. Je zajímavé, že mezi těmito dvěma oblastmi dokážeme najít tak úzkou souvislost.

Literatura

[1] Rosický, J.: *Algebra.* 4. přeprac. vyd., Masarykova univerzita, Brno, 2002.

[2] Burger, E. B., Tubbs, R.: *Making Transcendence Transparent.* Springer, New York, 2004, `https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4114-8`.

[3] Dummit, D. S., Foote, R. M.: *Abstract algebra.* John Wiley, Hoboken, 2004.