Kryštof Sedláček

Rozměňování peněz pomocí geometrie

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 99 (2024), No. 2, 33–41

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/152488`

Rozměňování peněz pomocí geometrie

Kryštof Sedláček, Gymnázium Evolution, Praha

Abstrakt. V matematice se často stává, že se věta z jednoho oboru použije na důkaz tvrzení, které pochází úplně z jiné části matematiky. V tomto článku si ukážeme příklad právě jednoho takového propojení dvou oborů, které vede ke krásnému vzorci, který se vám může třeba hodit při nákupu ve večerce.

Pickův vzorec

Abychom mohli správně pochopit Pickův vzorec, musíme prvně vědět, co je to bodová mříž. Bodová mříž v $\mathbb{R}^2$ je množina celočíselných lineárních kombinací dvou bodů $\binom{x_1}{x_2}$, $\binom{y_1}{y_2}$, které neleží na stejné přímce, tj.

$$\left\{ a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nejjednodušší příklad takové mříže je $\mathbb{Z}^2$, kde

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Věta 1 (Pickův vzorec [2]). *Obsah jakéhokoliv jednoduchého mnohoúhelníku*[1] *s vrcholy na obecné bodové mříži je určen rovností*

$$S = A\left(I + \frac{B}{2} - 1\right),$$

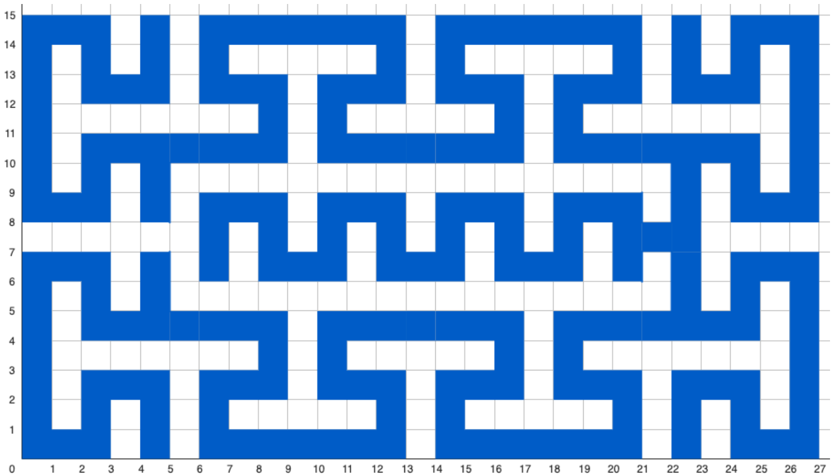
kde A je obsah jednoho pole mříže, I je počet mřížových bodů ležících uvnitř mnohoúhelníku a B je počet mřížových bodů ležících na stranách mnohoúhelníku.

Příklad 1. Vyzkoušejme nyní Pickův vzorec na mnohoúhelníku z obr. 1. Hlavní poznatek, který nám pomůže problém vyřešit, je ten, že daný mnohoúhelník neobsahuje žádné vnitřní mřížové body, tedy $I = 0$. Dále

[1] Jednoduchý mnohoúhelník je takový mnohoúhelník, ve kterém se žádné strany navzájem neprotínají.

si uvědomme, že naopak každý z mřížových bodů náležících obdélníku 15×27 leží na straně tohoto mnohoúhelníku, a tedy $B = 16 \cdot 28$. Nyní dosadíme do Pickova vzorce. Se znalostí toho, že obsah jednoho pole mříže je v tomto případě 1, dostáváme

$$S = 1\left(0 + \frac{448}{2} - 1\right) = 223.$$



Obr. 1: Příklad mnohoúhelníku, pro který použití Pickova vzorce velmi zjednoduší práci při zjišťování obsahu

Jak můžeme vidět, Pickův vzorec nám pomohl s výpočtem obsahu paradoxně „nejednoduchého“jednoduchého mnohoúhelníku. Tento geometrický vzorec má navíc spoustu leckdy nečekaných využití. Uveďme nyní problém z kombinatoriky, který je zobecněnou verzí problému z článku [1], na jehož vyřešení použijeme právě Pickův vzorec.

Rozměňování peněz

Předpokládejme, že máme neomezený počet mincí se třemi různými celočíselnými hodnotami n_1, n_2, n_3. Chceme zaplatit nenulovou celou částku C, která je *dělitelná všemi třemi hodnotami mincí*. Kolika způsoby lze s těmito mincemi zaplatit částku C?

Nechť x, y, z určují počty mincí s hodnotami n_1, n_2, n_3 v tomto pořadí. Všechna nezáporná celočíselná řešení (x, y, z) rovnice

$$xn_1 + yn_2 + zn_3 = C$$

budou pak všechny možné kombinace, kterými můžeme částku C zaplatit. Problém můžeme převést na úlohu pro dvě neznámé s jedním parametrem úpravou rovnice na tvar

$$xn_1 + yn_2 = \left(\frac{C}{n_3} - z\right) n_3,$$

kde $\left(\frac{C}{n_3} - z\right)$ může být jakékoliv celé číslo k z intervalu $\langle 0, \frac{C}{n_3} \rangle$. Stačí tedy najít nezáporná řešení (x, y) rovnice $xn_1 + yn_2 = kn_3$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq \frac{C}{n_3}$, a poté dopočítat z ze vztahu $\frac{C}{n_3} - z = k$.

Obsah pole mříže

Uvažujme diofantické rovnice[2)]

$$xn_1 + yn_2 = kn_3 \quad \text{pro } k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Označme M množinu bodů $\binom{x}{y} \in \mathbb{Z}^2$, kde (x, y) řeší některou z rovnic (1). V následujícím textu vysvětlíme, že M je mříž.

Věta 2 (Bézoutova). *Pro $a, b, c \in \mathbb{Z}$ platí, že rovnice $ax + by = c$ má celočíselná řešení (x, y) právě tehdy, pokud $\operatorname{nsd}(a, b)$ dělí pravou stranu c beze zbytku.*[3)] *Navíc pokud (x_0, y_0) je jedno řešení, jsou pak všechna řešení ve tvaru*

$$\left(x_0 - l\frac{b}{d}, y_0 + l\frac{a}{d}\right), \quad \textit{kde } l \in \mathbb{Z} \textit{ a } d = \operatorname{nsd}(a, b).$$

Příklad 2. Pro lepší představu o tom, jak funguje Bézoutova věta, si zkusme najít všechna celočíselná řešení (x, y) diofantické rovnice

$$4x + 6y = 18.$$

Nejprve si všimněme, že $2 = \operatorname{nsd}(4, 6) \mid 18$, což znamená, že rovnice má celočíselná řešení. Uvědomme si také, že $(0, 3)$ je jedním z nich. Bézoutova věta tedy říká, že všechna celočíselná řešení budou tvaru

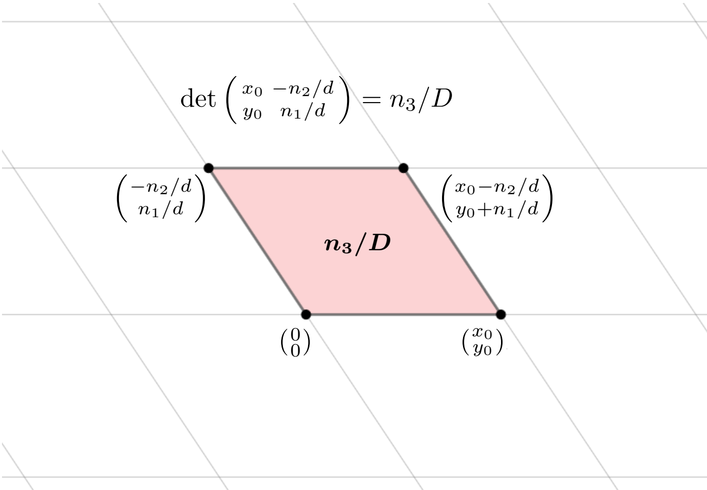
$$\left(0 - l\frac{6}{2}, 3 + l\frac{4}{2}\right) = (-3l, 3 + 2l), \quad \text{kde } l \in \mathbb{Z}.$$

[2)] Polynomiální rovnice, kde řešení hledáme pouze v oboru celých čísel.

[3)] Píšeme $\operatorname{nsd}(a, b) \mid c$.

Nyní můžeme dosazením vyzkoušet, zda získaná řešení opravdu fungují pro jakoukoliv celočíselnou hodnotu l.

$$4(-3l) + 6(3 + 2l) = 18.$$



Obr. 2: Transformace mříže

Vraťme se k případu (1), kde musí nutně platit $\operatorname{nsd}(n_1, n_2) \mid kn_3$. Dále je zřejmé, že platí $\operatorname{nsd}(n_1, n_2) \mid k \operatorname{nsd}(n_1, n_2)$. Tyto dva postřehy můžeme po krátkém zamyšlení spojit do vztahu

$$\operatorname{nsd}(n_1, n_2) \mid \operatorname{nsd}(kn_3, k \operatorname{nsd}(n_1, n_2)). \tag{2}$$

Z definice největšího společného dělitele evidentně platí

$$\operatorname{nsd}(kn_3, k \operatorname{nsd}(n_1, n_2)) = k \operatorname{nsd}(n_3, \operatorname{nsd}(n_1, n_2)) = k \operatorname{nsd}(n_1, n_2, n_3).$$

Zapišme nyní vztah (2) jako rovnost

$$k \operatorname{nsd}(n_1, n_2, n_3) = m \operatorname{nsd}(n_1, n_2) \quad \text{pro nějaké } m \in \mathbb{Z}.$$

Nyní můžeme vyjádřit k a dostáváme

$$k = m \frac{\operatorname{nsd}(n_1, n_2)}{\operatorname{nsd}(n_1, n_2, n_3)}, \quad \text{kde } m \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Dostali jsme, že právě pro k tvaru (3) má rovnice (1) celočíselné řešení. Pro zjednodušení označme

$$\text{nsd}(n_1, n_2) = d, \quad \text{nsd}(n_1, n_2, n_3) = D.$$

Dosazením vyjádření (3) do rovnice (1) získáme

$$xn_1 + yn_2 = m\frac{d}{D}n_3.$$

Dále uvažujme (x_0, y_0), která splňují rovnost (podle Bézoutovy věty existují)

$$x_0n_1 + y_0n_2 = \frac{d}{D}n_3.$$

Pak je zřejmé, že bude platit i rovnost

$$(mx_0)n_1 + (my_0)n_2 = m\frac{d}{D}n_3.$$

Podle Bézoutovy věty budou tedy všechna celočíselná řešení rovnic (1) ve tvaru

$$(mx_0 - l\frac{n_2}{d}, my_0 + l\frac{n_1}{d}) \quad \text{pro } l \in \mathbb{Z}.$$

Tudíž i všechny body z množiny M budou ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} -\frac{n_2}{d} \\ \frac{n_1}{d} \end{pmatrix}.$$

Tudíž M je opravdu mříž. Maticově lze body z M zapsat jako

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & -\frac{n_2}{d} \\ y_0 & \frac{n_1}{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix}.$$

Body $\binom{m}{l}$, kde $m, l \in \mathbb{Z}$, popisují základní čtvercovou bodovou mříž $\mathbb{Z}^2$ s obsahem jednoho pole 1. Matice $\begin{pmatrix} x_0 & -\frac{n_2}{d} \\ y_0 & \frac{n_1}{d} \end{pmatrix}$ je maticí lineární transformace bodů $\binom{m}{l}$ ze $\mathbb{Z}^2$ na body $\binom{x}{y}$ z mříže M, a tedy násobek, o který se zvětší obsah jednoho pole mříže, bude

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & -\frac{n_2}{d} \\ y_0 & \frac{n_1}{d} \end{pmatrix} = \frac{x_0n_1 + y_0n_2}{d}.$$

Čtenář, který neví, že obsah rovnoběžníku odpovídá determinantu, může obsah pole spočítat jiným způsobem (viz obr. 2). Z rovnosti

$$x_0n_1 + y_0n_2 = \frac{d}{D}n_3$$

dostaneme

$$\frac{x_0n_1 + y_0n_2}{d} = \frac{n_3}{D}.$$

Obsah jednoho pole mříže M je tedy roven n_3/D.

Mřížové body na stranách trojúhelníku

Abychom mohli použít Pickův vzorec, nyní pro změnu uvažujme trojúhelník XYZ ležící na naší bodové mříži M, jehož vrcholy jsou po řadě body

$$\begin{pmatrix} \frac{C}{n_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C}{n_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Trojúhelník jsme si vybrali právě tak, aby souřadnice bodů $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ v trojúhelníku byly po řadě z omezených intervalů $\langle 0, C/n_1\rangle$ a $\langle 0, C/n_2\rangle$, protože nechceme mít záporný počet mincí. Lze si tedy všimnout, že souřadnice všech mřížových bodů ležících uvnitř nebo na hranách tohoto trojúhelníku budou přesně všechna celočíselná nezáporná řešení (x, y) rovnice $xn_1 + yn_2 = kn_3$ pro $k \in \mathbb{Z}$, $0 \le k \le \frac{C}{n_3}$ (viz obr. 3).

Vypočtěme nyní počet těchto mřížových bodů ležících na stranách trojúhelníku, který si označíme B:

$$B = B_x + B_y + B_c,$$

kde
B_x je počet bodů trojúhelníku, kde $y = 0$, kromě vrcholu $\begin{pmatrix} \frac{C}{n_1} \\ 0 \end{pmatrix}$.
B_y je počet bodů trojúhelníku, kde $x = 0$, kromě vrcholu $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.
B_c je počet bodů trojúhelníku, kde $xn_1 + yn_2 = C$, kromě vrcholu $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C}{n_2} \end{pmatrix}$.

Pro první skupinu bodů platí $xn_1 = kn_3$, tj.

$$x = k_x \frac{n_3}{\mathrm{nsd}(n_1, n_3)}, \quad \text{kde } k_x \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Ze zřejmé nerovnosti $0 \le x < \frac{C}{n_1}$ dostáváme

$$0 \le k_x \frac{n_3}{\mathrm{nsd}(n_1, n_3)} n_1 < C,$$

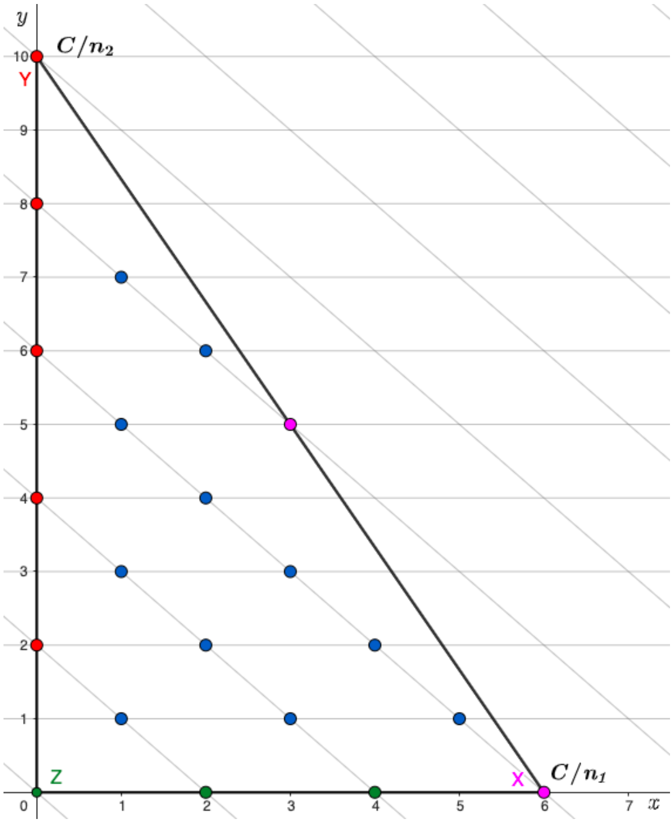
tedy

$$0 \leq k_x < \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_3)}{n_1 n_3}.$$

Proto může k_x nabývat jen celočíselných hodnot z $\left\langle 0, \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_3)}{n_1 n_3} \right)$, a tedy

$$B_x = \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_3)}{n_1 n_3}.$$

Poznamenejme, že celočíselnost $\frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_3)}{n_1 n_3}$ plyne z předpokladu $n_1 \mid C$ a $n_3 \mid C$.



Obr. 3: Příklad trojúhelníku XYZ pro vybrané hodnoty $C = 60$, $n_1 = 10$, $n_2 = 6$ a $n_3 = 4$

Pro B_y lze použít obdobný argument a dostáváme

$$B_y = \frac{C\,\mathrm{nsd}(n_2, n_3)}{n_2 n_3}.$$

Pro třetí skupinu bodů platí, že $xn_1 + yn_2 = C$. Použijeme opět Bézoutovu větu. Jedním řešením je zjevně $(x_0, y_0) = (\frac{C}{n_1}, 0)$ neboli všechna řešení budou ve tvaru

$$\left(\frac{C}{n_1} - k_c \frac{n_2}{\mathrm{nsd}(n_1, n_2)}, k_c \frac{n_1}{\mathrm{nsd}(n_1, n_2)}\right).$$

Obě složky řešení musí být nezáporné, x musí být dokonce kladné, a proto $k_c \geq 0$ a zároveň $k_c < \frac{C\,\mathrm{nsd}(n_1,n_2)}{n_1 n_2}$. Tudíž k_c nabývá jen celočíselných hodnot z intervalu $\left\langle 0, \frac{C\,\mathrm{nsd}(n_1 n_2)}{n_1 n_2}\right)$, což znamená

$$B_c = \frac{C\,\mathrm{nsd}(n_1, n_2)}{n_1 n_2}.$$

Závěrem dostáváme, že počet bodů na stranách trojúhelníku je roven

$$B = \frac{C\,\mathrm{nsd}(n_1, n_3)}{n_1 n_3} + \frac{C\,\mathrm{nsd}(n_2, n_3)}{n_2 n_3} + \frac{C\,\mathrm{nsd}(n_1, n_2)}{n_1 n_2}.$$

Propojení všeho pomocí Pickova vzorce

Použijeme nyní Pickův vzorec na trojúhelník XYZ ležící na naší mříži s obsahem jednoho pole $\frac{n_3}{D}$.

Obsah trojúhelníku bude roven

$$\frac{1}{2}|XZ||YZ| = \frac{C^2}{2n_1 n_2}.$$

Z Pickova vzorce tedy dostáváme

$$\frac{C^2}{2n_1 n_2} = \frac{n_3}{D}\left(I + B - \frac{1}{2}\left(\frac{C\,\mathrm{nsd}(n_1,n_3)}{n_1 n_3} + \frac{C\,\mathrm{nsd}(n_2,n_3)}{n_2 n_3} + \frac{C\,\mathrm{nsd}(n_1,n_2)}{n_1 n_2}\right) - 1\right).$$

Odtud můžeme vyjádřit $B + I$:

$$B + I = \frac{C^2\,\mathrm{nsd}(n_1,n_2,n_3)}{2n_1 n_2 n_3} + \frac{C\,\mathrm{nsd}(n_1,n_3)}{2n_1 n_3} + \frac{C\,\mathrm{nsd}(n_2,n_3)}{2n_2 n_3} + \frac{C\,\mathrm{nsd}(n_1,n_2)}{2n_1 n_2} + 1.$$

Tato rovnice určuje počet všech mřížových bodů mříže M (viz (1)) ležících uvnitř nebo na hranách trojúhelníku XYZ. To však ale zároveň znamená, že se tato hodnota rovná všem nezáporným řešením rovnice $xn_1 + yn_2 = kn_3$ pro $0 \leq k \leq \frac{C}{n_3}$. Neboli počet všech možných kombinací, kterými můžeme zaplatit částku C třemi mincemi s hodnotami n_1, n_2, n_3, je roven

$$\frac{C^2 \operatorname{nsd}(n_1, n_2, n_3)}{2n_1n_2n_3} + \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_3)}{2n_1n_3} + \frac{C \operatorname{nsd}(n_2, n_3)}{2n_2n_3} + \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_2)}{2n_1n_2} + 1. \tag{4}$$

Příklad 3. Zkusme nyní použít tento vzorec na příklad z obr. 3, tedy pro hodnoty $C = 60$, $n_1 = 10$, $n_2 = 6$ a $n_3 = 4$. Můžete si sami spočítat, kolik je na obrázku mřížových bodů ležících uvnitř nebo na stranách trojúhelníku, a nebo můžete věřit, že jich je 21. Dosaďme nyní hodnoty do vzorce (4) a uvidíme, jestli to vyjde.

$$\frac{3600 \cdot 2}{2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 4} + \frac{60 \cdot 2}{2 \cdot 10 \cdot 4} + \frac{60 \cdot 2}{2 \cdot 6 \cdot 4} + \frac{60 \cdot 2}{2 \cdot 10 \cdot 6} + 1 = 21.$$

Příště až si budete ve večerce kupovat nějaký chlazený nápoj, který stojí přesně 60 korun, a budete mít u sebe velký počet smyšlených 4, 6 a 10 korunových mincí, tak vězte, že máte přesně 21 způsobů, jak nápoj zaplatit.

Poděkování

Na závěr bych chtěl poděkovat Adamu Blažkovi za velikou pomoc při formulování důkazu a psaní článku. Také bych chtěl velmi poděkovat paní docentce Dvořákové za všechny rady k článku a za umožnění stáže na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT.

Literatura

[1] Holíková, M.: O Pickově vzorci a rozměňování peněz. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 61 (2016), č. 4, s. 312–322.

[2] Pick, G. A.: Geometrisches zur Zahlenlehre. (Bearbeitung eines in der deutschen mathematischen Gesellschaft zu Prag gehaltenen Vortrags.) In: *Sitzungsberichte des deutschen naturwissenschaftlich-medizinischen Vereines für Böhmen „Lotos“ in Prag*, roč. 19, Praha, 1899, s. 311–319.