Pavel Tlustý; Jana Vysoká

Zákon odrazu a přelévání vody mezi nádobami

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 99 (2024), No. 1, 15–17

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/152332`

Zákon odrazu a přelévání vody mezi nádobami

Pavel Tlustý – Jana Vysoká
Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

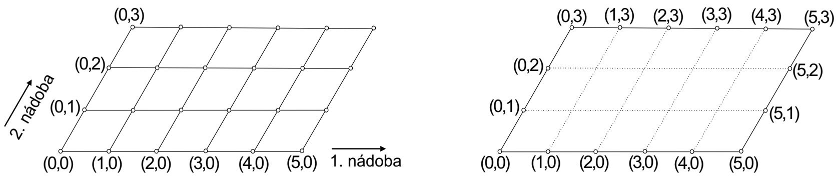
Občas se v rekreační matematice nebo v různých logických hádankách a hříčkách setkáme s úkolem odměřit (bez měření) určené množství tekutiny, a to pouze jejím přeléváním mezi několika nádobami. Dovolujeme si čtenáře upozornit na inspirativní článek [1], který rozhodně stojí za přečtení. Autor zde velmi nápaditě využil problém přelévání kapaliny jako motivaci k objevení celé škály matematických pojmů a tvrzení, které umožňují řešit i mnohem složitější úlohy reálného života. Na druhou stranu je třeba říci, že uvedené teorie (Markovské řetězce, teorie grafů, modulární aritmetika) se přednášejí až na vysokých školách a jejich zvládnutí vyžaduje určité úsilí a čas.

Zůstaňme ale v oblasti rekreační matematiky a řešme jen problém s přeléváním vody mezi nádobami. Pak lze použít mnohem jednodušší postup založený na *zákonu odrazu*, který se učí již žáci základní školy. Skutečnosti, že *úhel odrazu je roven úhlu dopadu* se běžně využívá v mnoha oblastech reálného života – zpětná zrcátka či reflektory automobilů, přihrávky o zem nebo mantinel ve sportu, periskopy a zrcadla v dopravě atd. Nyní si ukážeme, jak lze tento fyzikální zákon použít k řešení matematického problému. Pro jednoduchost užijeme stejnou motivační úlohu jako v [1].

Úloha. Máme dvě nádoby na vodu, jednu o objemu 5 litrů, druhou o objemu 3 litry (bez rysek udávajících výšku hladiny). Můžeme jednu nebo druhou nádobu zcela naplnit vodou, můžeme libovolnou nádobu zcela vyprázdnit (tím, že vodu vylijeme do odpadu) nebo můžeme vodu z jedné nádoby přelít do druhé nádoby, a to tak, že buďto přelijeme všechnu vodu, pokud se do druhé nádoby vejde, tedy až do stavu, kdy je první nádoba prázdná, nebo můžeme přelít takové množství vody, až je druhá nádoba zcela plná.

Problém. Lze s původně prázdnými nádobami dosáhnout stavu, kdy je v jedné nádobě 1 litr vody?

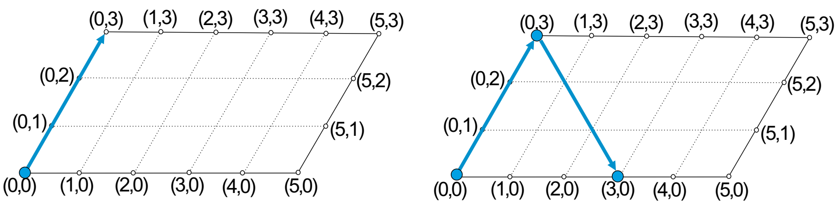
Řešení. Vzhledem k tomu, že máme jen dvě nádoby, můžeme aktuální stav vody v nádobách znázornit jako bod v rovině s odpovídajícími souřadnicemi. Souřadnicové osy budou svírat úhel $60°$, čímž vznikne „kosočtvercová síť“ (obr. 1a).



Obr. 1a) kosočtvercová síť 1b) možné množství vody v nádobách

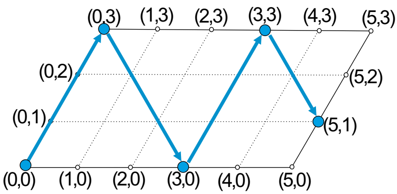
Na obr. 1a) vidíme, že na ose x budeme znázorňovat množství vody v první (pětilitrové) nádobě, zatímco na ose y najdeme množství vody v druhé (třílitrové) nádobě. Bod o souřadnicích $(4, 2)$ v takovém modelu představuje situaci, kdy jsou v pětilitrové nádobě 4 litry vody a ve třílitrové nádobě jsou dva litry vody. Vzhledem k tomu, jak smíme vodu mezi nádobami přelévat, je zřejmé, že ne každý z vyznačených 24 bodů je dosažitelný. Například situace $(4, 2)$ nelze podle pravidel nikdy dosáhnout. Uvědomte si, že dosažitelné jsou pouze situace, které odpovídají bodům na „obvodu sítě“. Na (obr. 1b) tedy již pracujeme jen s 16 možnými situacemi, ostatní nebudeme uvažovat (srv. [1, obr. 2]).

Na začátku jsme ve stavu $(0, 0)$. Proces přelévání vody mezi nádobami můžeme reprezentovat jako pohyb kuličky po „zvláštním“ kulečníkovém stole. Na začátku (obr. 2a) je kulička v bodě $(0, 0)$ a pošleme ji směrem k bodu $(0, 3)$, tj. naplníme druhou nádobu.

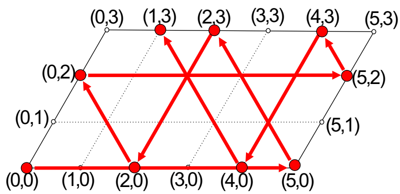


Obr. 2a) kosočtvercová síť 2b) možné množství vody v nádobách

Kulička se v bodě $(0, 3)$ odrazí a podle *zákona odrazu* letí směrem k bodu $(3, 0)$, což vidíme na obr. 2b). V praxi to znamená, že přelijeme vodu ze druhé nádoby do první. Pohyb kuličky ukončíme v okamžiku, když se odráží v bodě, jehož jedna z souřadnic má hodnotu 1 (obr. 3a).



Obr. 3a) řešení úlohy



3b) jiné možné řešení

Tím je úloha vyřešena a z obr. 3a) vidíme, jak přelévat:

$$(0,0) \to (0,3) \to (3,0) \to (3,3) \to (5,1).$$

Tedy nejprve naplníme třílitrovou nádobu, pak ji vyprázdníme do pětilitrové nádoby a znova naplníme třílitrovou nádobu. Z třílitrové nádoby pak odlijeme 2 litry do pětilitrové (víc se tam nevejde), čímž nám zbývá ve třílitrové nádobě jeden litr vody.

Samozřejmě nás napadne, že můžeme začít i naplněním pětilitrové nádoby. I tento postup vede k cíli, ale je mnohem zdlouhavější:

$$(0,0) \to (5,0) \to (2,3) \to (2,0) \to (0,2) \to$$
$$\to (5,2) \to (4,3) \to (4,0) \to (1,3).$$

Toto řešení vyplývá z obr. 3b).

Nyní můžeme problém zobecnit a uvažovat nádoby o objemu m a n litrů. Pak si můžeme položit celou řadu nejrůznějších otázek:

1. Pro jaká m, n $(m > n)$ lze odměřit i litrů, kde $i = 1, 2, \ldots, m$?
2. Pro jaké i je počet přelití nejmenší?
3. Jak se změní situace, pokud máme tři nádoby a chceme, aby ve dvou nádobách bylo požadované množství vody? atd.

Literatura

[1] Pokorný, P.: Přelévání vody mezi nádobami, teorie grafů a modulární aritmetika. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 1, s. 9–24.