Jiří Šremr

Floquetova teorie a stabilita lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu s periodickými koeficienty

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 68 (2023), No. 4, 246–274

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152030

Floquetova teorie a stabilita lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu s periodickými koeficienty

Jiří Šremr

Abstrakt. Tento článek ukazuje možné použití Floquetovy teorie v otázce ljapunovské stability lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu s periodickými koeficienty. Jsou uvedeny obecné věty o stabilitě řešení uvažovaných rovnic v řeči Floquetových multiplikátorů, které jsou následně využity v důkazech jednoduchých efektivních kritérií. Je také vysvětlena souvislost mezi Ljapunovovými a Floquetovými charakteristickými exponenty a ukázáno použití těchto pojmů mimo jiné v otázce stability rovnovážného stavu tlumeného matematického kyvadla s kmitajícím závěsem.

Uvažujme diferenciální rovnici

$$x'' + g(t)x' + p(t)x = 0, \tag{L}$$

v níž jsou koeficienty p, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojité funkce. Řešením rovnice (L) rozumíme funkci $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je spojitá spolu se svou první i druhou derivací a která po dosazení splňuje rovnost (L) všude v $\mathbb{R}$. Pokud je čtenář obeznámen s teorií Lebesgueova integrálu, může předpokládat, že koeficienty p, g jsou lokálně lebesgueovsky integrovatelné v $\mathbb{R}$ a řešení i jeho derivace jsou lokálně absolutně spojité, což zaručuje, že druhá derivace řešení existuje skoro všude.

Rovnice (L) popisuje například pohyb volného lineárního oscilátoru s nekonstantními tlumicími a tuhostními charakteristikami, který se pohybuje po přímce a jehož poloha v závislosti na čase je popsána funkcí x. Takový případ není pouze teoretický, může nastat po aproximaci nelinearit v pohybových rovnicích oscilátorů s tzv. geometrickými nelinearitami, či při studiu kmitání spojitých soustav (viz kapitolu 6.1). Lineární rovnice s nekonstantními koeficienty se objeví také při řešení stability rovnovážného stavu tlumeného matematického kyvadla s kmitajícím závěsem, jak je ukázáno v kapitole 6.2.

V tomto článku nejprve připomeneme základy Floquetovy teorie pro rovnici (L) s ω-periodickými koeficienty (zejména pojem Floquetova multiplikátoru), se kterými se čtenář může seznámit mimo jiné v příspěvku [10]. Poté budeme diskutovat možné využití Floquetových multiplikátorů v otázce ljapunovské stability rovnice (L) a dokážeme jednoduchá efektivní kritéria stability a nestability. Ukážeme také souvislost mezi Floquetovými multiplikátory a Ljapunovovými charakteristickými exponenty objevujícími se v teorii stability soustav neautonomních diferenciálních rovnic.

doc. Ing. Jiří Šremr, Ph.D., Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, e-mail: `sremr@fme.vutbr.cz`

1. Pojem ljapunovské stability

Pojem ljapunovské stability obvykle zavádíme pro řešení soustavy nelineárních diferenciálních rovnic

$$y' = f(t, y), \tag{1.1}$$

kde vektorová funkce $f\colon [a, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Řešení této soustavy hledáme ve třídě vektorových funkcí $y\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}^n$, jejíž složky jsou spojitě diferencovatelné na $[a, +\infty)$.[1]

Připomeňme definice základních typů stability řešení soustavy (1.1). Intuitivně můžeme přiblížit pojem stability a atraktivity následovně: Stabilita řešení y_0 soustavy (1.1) znamená, že každé řešení y této soustavy s počáteční podmínkou $y(t_0)$ „blízkou" k $y_0(t_0)$ zůstane „blízko" řešení y_0 v každém čase $t \geqq t_0$. Naproti tomu v případě atraktivity řešení y_0 se může stát, že řešení y této soustavy s počáteční podmínkou $y(t_0)$ „blízkou" k $y_0(t_0)$ se někdy v průběhu času „vzdálí" od y_0, avšak v limitě se jejich vzdálenost blíží k nule.

Nyní uvedeme přesné formulace. Poznamenejme, že v následujících definicích značí $\|\cdot\|$ libovolnou normu v $\mathbb{R}^n$.

Definice 1.1. Řešení $y_0\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ soustavy (1.1) se nazývá:

(1) (**ljapunovsky**) **stabilní**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a $t_0 \geqq a$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ takové, že libovolné řešení y soustavy (1.1) vyhovující podmínce

$$\|y(t_0) - y_0(t_0)\| < \delta \tag{1.2}$$

je prodloužitelné do $+\infty$ a splňuje nerovnost

$$\|y(t) - y_0(t)\| < \varepsilon \quad \text{pro } t \geqq t_0\ ;$$

(2) **nestabilní**, jestliže není stabilní;

(3) **atraktivní**, jestliže pro každé $t_0 \geqq a$ existuje $\delta = \delta(t_0) > 0$ takové, že libovolné řešení y soustavy (1.1) vyhovující podmínce (1.2) je prodloužitelné do $+\infty$ a splňuje

$$\lim_{t\to+\infty} \|y(t) - y_0(t)\| = 0;$$

(4) **asymptoticky stabilní**, jestliže je stabilní a atraktivní;

(5) **exponenciálně stabilní**, jestliže existují $K > 0$, $\eta > 0$ a $\delta > 0$ taková, že libovolné řešení y soustavy (1.1) vyhovující v nějakém $t_0 \geqq a$ podmínce (1.2) je prodloužitelné do $+\infty$ a splňuje nerovnost

$$\|y(t) - y_0(t)\| < K\|y(t_0) - y_0(t_0)\|\mathrm{e}^{-\eta(t-t_0)} \quad \text{pro } t \geqq t_0.$$

[1] Je možné předpokládat, že vektorová funkce f na pravé straně soustavy (1.1) je z Carathéodoryho třídy a řešení pak hledat ve třídě vektorových funkcí s lokálně absolutně spojitými složkami.

Je dobře známo, že z atraktivity řešení y_0 soustavy (1.1) (obecně) neplyne jeho stabilita. Dále si všimněme, že z exponenciální stability řešení y_0 plyne jeho asymptotická stabilita. Opačné tvrzení obecně samozřejmě neplatí.

Dříve však než vyšetřujeme stabilitu řešení nelineární neautonomní soustavy (1.1), začínáme obvykle se studiem některých jejích speciálních případů, mezi něž patří také homogenní lineární soustava

$$y' = A(t)y, \tag{1.3}$$

kde $A\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ je spojitá maticová funkce.

Pro lineární soustavy lze ukázat, že každé jejich atraktivní řešení je stabilní, tj. pojmy atraktivity a asymptotické stability jejich řešení splývají.

Řešení rovnice (L) a řešení dvoudimenzionální soustavy

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & -g(t) \end{pmatrix} y \tag{1.4}$$

jsou v následujícím vztahu: Je-li funkce x řešením rovnice (L), pak je vektorová funkce $y = (x, x')$ řešením soustavy (1.4). Naopak, je-li vektorová funkce $y = (y_1, y_2)$ řešením soustavy (1.4), pak je $y_2 = y_1'$ a funkce y_1 je řešením rovnice (L). Stabilitu řešení x_0 rovnice (L) proto definujeme následovně.

Definice 1.2. Řešení x_0 rovnice (L) se nazývá **stabilní** (resp. **asymptoticky stabilní**, resp. **exponenciálně stabilní**), je-li stabilní (resp. asymptoticky stabilní, resp. exponenciálně stabilní) odpovídající řešení (x_0, x_0') soustavy (1.4).

Jelikož je rovnice (L) lineární, lehce lze dokázat, že řešení x_0 rovnice (L) je stabilní (resp. asymptoticky stabilní, resp. exponenciálně stabilní) právě tehdy, když je stabilní (resp. asymptoticky stabilní, resp. exponenciálně stabilní) její nulové řešení. Odtud okamžitě plyne, že všechna řešení rovnice (L) jsou z pohledu stability „stejného typu“, a proto obvykle mluvíme o stabilitě lineární rovnice místo o stabilitě jejích řešení.

Pro jednotlivé typy stability jsou k dispozici následující nutné a postačující podmínky, které nám dovolí rozhodnout o stabilitě rovnice (L), známe-li chování jejího fundamentálního systému řešení. Poznamenejme, že zajímáme-li se o stabilitu řešení v okolí $+\infty$, stačí uvažovat rovnici (L) na nějakém okolí $+\infty$, například na poloose $[0, +\infty)$.

Tvrzení 1.3. *Nechť x_1, x_2 je fundamentální systém řešení rovnice* (L)*. Potom:*

(a) *Rovnice* (L) *je stabilní právě tehdy, když*

$$\sup\left\{|x_k(t)| + |x_k'(t)| : t \geqq 0\right\} < +\infty \quad \text{pro } k = 1, 2.$$

(b) *Rovnice* (L) *je asymptoticky stabilní právě tehdy, když*

$$\lim_{t\to+\infty} x_k(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} x_k'(t) = 0 \quad \text{pro } k = 1, 2.$$

(c) *Rovnice* (L) *je exponenciálně stabilní právě tehdy, když existují čísla $\alpha > 0$ a $N > 0$ taková, že*

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) & x_2(s) \\ x_1'(s) & x_2'(s) \end{pmatrix}^{-1} \right\| \leqq N\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)} \quad \text{pro } t \geqq s \geqq 0,$$

kde $\|\cdot\|$ značí libovolnou maticovou normu v $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Na závěr této kapitoly připomeneme, jak lze jednoduše rozhodnout o stabilitě diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$x'' + g_0 x' + p_0 x = 0, \tag{1.5}$$

kde p_0, $g_0 \in \mathbb{R}$. Jedná se zřejmě o speciální případ rovnice (L), přičemž její koeficienty jsou periodické s libovolnou periodou $\omega > 0$.

Tvrzení 1.4. *Nechť λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ jsou kořeny charakteristické rovnice*

$$\lambda^2 + g_0 \lambda + p_0 = 0 \tag{1.6}$$

odpovídající diferenciální rovnici (1.5). *Potom platí:*

(1) *Jestliže* $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ a $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$, *pak je rovnice* (1.5) *exponenciálně stabilní, a tudíž také asymptoticky stabilní.*

(2) *Jestliže* $\operatorname{Re} \lambda_1 \leqq 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 \leqq 0$, *existuje kořen s nulovou reálnou částí a každý kořen s nulovou reálnou částí je jednoduchý, pak je rovnice* (1.5) *stabilní (ale ne asymptoticky stabilní).*

(3) *Jestliže* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ *nebo* $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ *pro nějaké* $k \in \{1, 2\}$, *pak je rovnice* (1.5) *nestabilní.*

V kapitole 3 ukážeme, jak lze rozhodnout o stabilitě rovnice (L) s periodickými koeficienty, známe-li oba její Floquetovy multiplikátory.

2. Floquetovy multiplikátory rovnice (L) s periodickými koeficienty

V celé této kapitole předpokládáme, že koeficienty p, g rovnice (L) jsou ω-periodické funkce. Připomeneme velmi stručně pojem Floquetova multiplikátoru a další fakta, která jsou podrobně vysvětlena v příspěvku [10]. Poznamenejme zde, že v běžně dostupné literatuře je obvykle vybudována Floquetova teorie pro lineární soustavu (1.3) a poté jsou odvozeny důsledky pro lineární diferenciální rovnice vyšších řádů. V článku [10] jsme místo toho použili jiný postup a vybudovali jsme základy Floquetovy teorie přímo pro lineární diferenciální rovnice vyšších řádů, přičemž jsme se inspirovali postupem, který použil Giovani Sansone v knize [9].

Otázka existence netriviálního řešení rovnice (L) splňujícího podmínku

$$x(t + \omega) = \varrho x(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

vede k následující definici a tvrzení.

Definice 2.1. Kořeny charakteristické rovnice

$$\varrho^2 - \big(u_1(\omega) + u_2'(\omega)\big)\varrho + \mathrm{e}^{-\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s} = 0, \tag{2.2}$$

kde u_1, u_2 jsou řešení rovnice (L) splňující počáteční podmínky

$$u_1(0) = 1, \; u_1'(0) = 0 \qquad \text{a} \qquad u_2(0) = 0, \; u_2'(0) = 1, \tag{2.3}$$

nazýváme **Floquetovy multiplikátory** diferenciální rovnice (L).

Tvrzení 2.2. *Rovnice* (L) *má netriviální (eventuálně komplexní) řešení splňující podmínku* (2.1) *právě tehdy, když je* ϱ *Floquetovým multiplikátorem diferenciální rovnice* (L).

Floquetovy multiplikátory rovnice (L) jsou také vlastními čísly tzv. matice monodromie

$$Y(\omega) = \begin{pmatrix} u_1(\omega) & u_2(\omega) \\ u_1'(\omega) & u_2'(\omega) \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

kde Y je fundamentální matice soustavy (1.4) splňující podmínku $Y(0) = I$. Pro každý Floquetův multiplikátor ϱ rovnice (L) s násobností ℓ existuje právě ℓ lineárně nezávislých řešení rovnice (L), která je možné rozdělit do podskupin odpovídajících tzv. elementárním dělitelům[2] příslušné charakteristické matice. Mohou nastat pouze tři možnosti:

- Rovnice (L) má dva různé Floquetovy multiplikátory ϱ_1, $\varrho_2 \in \mathbb{C}$ a elementární dělitelé příslušné charakteristické matice jsou

$$\varrho - \varrho_1, \quad \varrho - \varrho_2 .$$

- Rovnice (L) má Floquetův multiplikátor $\varrho_0 \in \mathbb{R}$ s násobností 2 a elementární dělitelé příslušné charakteristické matice jsou

$$\varrho - \varrho_0, \quad \varrho - \varrho_0 .$$

- Rovnice (L) má Floquetův multiplikátor $\varrho_0 \in \mathbb{R}$ s násobností 2 a elementární dělitel příslušné charakteristické matice je

$$(\varrho - \varrho_0)^2.$$

Lze tedy dokázat následující tvrzení.

Tvrzení 2.3. *Nechť* $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$, $\varrho_1 \neq \varrho_2$, *jsou Floquetovy multiplikátory rovnice* (L). *Pak existují (reálná) lineárně nezávislá řešení* x_1, x_2 *rovnice* (L) *splňující*

$$x_1(t+\omega) = \varrho_1 x_1(t), \quad x_2(t+\omega) = \varrho_2 x_2(t) \quad \textit{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Tvrzení 2.4. *Nechť* $\varrho_0 \in \mathbb{R}$ *je Floquetův multiplikátor rovnice* (L) *s násobností* 2. *Pak existují (reálná) lineárně nezávislá řešení* x_1, x_2 *rovnice* (L) *splňující buď*

$$x_1(t+\omega) = \varrho_0 x_1(t), \quad x_2(t+\omega) = \varrho_0 x_2(t) \quad \textit{pro } t \in \mathbb{R},$$

nebo

$$x_1(t+\omega) = \varrho_0 x_1(t), \quad x_2(t+\omega) = \varrho_0 x_2(t) + x_1(t) \quad \textit{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Tvrzení 2.5. *Nechť* $\varrho_{1,2} = a \pm b\mathrm{i}$, *kde* $a, b \in \mathbb{R}$ *a* $b > 0$, *jsou Floquetovy multiplikátory rovnice* (L). *Pak existují (reálná) lineárně nezávislá řešení* x_1, x_2 *rovnice* (L) *splňující*

$$x_1(t+\omega) = a x_1(t) - b x_2(t), \quad x_2(t+\omega) = b x_1(t) + a x_2(t) \quad \textit{pro } t \in \mathbb{R}.$$

[2] Tento pojem jsme vysvětlili v [10] na str. 24.

Nakonec připomeňme, v jakém tvaru lze najít lineárně nezávislá řešení rovnice (L), známe-li její Floquetovy multiplikátory. V následující větě označme $C^2(\mathbb{R})$ množinu funkcí, které jsou spojité v $\mathbb{R}$ spolu se svou první a druhou derivací.

Věta 2.6. *Nechť ϱ_1, ϱ_2 jsou Floquetovy multiplikátory rovnice* (L). *Pak platí:*

(1) *Jestliže $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$ a $\varrho_1 \neq \varrho_2$, pak $\varrho_1\varrho_2 > 0$ a existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice* (L) *splňující*

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho_1|}{\omega}\,t}\varphi_1(t), \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho_2|}{\omega}\,t}\varphi_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(\mathbb{R})$ jsou ω-periodické (resp. 2ω-periodické) funkce, je-li $\varrho_1 > 0$ (resp. $\varrho_1 < 0$).

(2) *Jestliže $\varrho_1 = \varrho_2 =: \varrho_0$, pak existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice* (L) *splňující buď*

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}\,t}\varphi_1(t), \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}\,t}\varphi_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

nebo

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}\,t}\varphi_1(t), \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho_0|}{\omega}\,t}\big[t\varphi_1(t) + \varphi_2(t)\big] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(\mathbb{R})$ jsou ω-periodické (resp. 2ω-periodické) funkce, je-li $\varrho_0 > 0$ (resp. $\varrho_0 < 0$).

(3) *Jestliže $\varrho_{1,2} = \varrho_0\mathrm{e}^{\pm\vartheta\mathrm{i}}$, kde $\varrho_0 > 0$ a $\vartheta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, pak existují lineárně nezávislá řešení x_1, x_2 rovnice* (L) *splňující*

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln\varrho_0}{\omega}\,t}\left[\varphi_1(t)\cos\frac{\vartheta t}{\omega} - \varphi_2(t)\sin\frac{\vartheta t}{\omega}\right] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}$$

a

$$x_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln\varrho_0}{\omega}\,t}\left[\varphi_1(t)\sin\frac{\vartheta t}{\omega} + \varphi_2(t)\cos\frac{\vartheta t}{\omega}\right] \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

kde $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(\mathbb{R})$ jsou ω-periodické funkce.

3. Stabilita rovnice (L) v řeči Floquetových multiplikátorů

Shrňme nejprve obecné věty o stabilitě lineární soustavy (1.3) s periodickou maticovou funkcí A formulované v řeči Floquetových multiplikátorů, které lze najít v běžně dostupné literatuře (viz např. [12], kapitola 2.7).

Tvrzení 3.1. *Nechť $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ je ω-periodická spojitá maticová funkce. Potom platí:*

(1) *Soustava* (1.3) *je asymptoticky stabilní právě tehdy, když všechny její Floquetovy multiplikátory leží uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině se středem v počátku.*

(2) *Soustava* (1.3) *je stabilní právě tehdy, když všechny její Floquetovy multiplikátory leží v jednotkovém kruhu v komplexní rovině se středem v počátku a každému multiplikátoru ležícímu na hraniční kružnici odpovídají pouze lineární elementární dělitelé.*

(3) *Soustava* (1.3) *je nestabilní právě tehdy, když existuje alespoň jeden Floquetův multiplikátor soustavy* (1.3) *ležící buď vně jednotkového kruhu v komplexní rovině se středem v počátku, nebo na hraniční kružnici, přičemž mu odpovídá elementární dělitel, který není lineární.*

Z tvrzení 3.1 a 2.4 plynou následující kritéria stability (doplněná o exponenciální stabilitu v části (1)).

Věta 3.2. *Nechť* ϱ_1, $\varrho_2 \in \mathbb{C}$ *jsou Floquetovy multiplikátory rovnice* (L) *s ω-periodickými koeficienty. Potom platí:*

(1) *Jestliže* $|\varrho_1| < 1$ *a* $|\varrho_2| < 1$, *pak je rovnice* (L) *exponenciálně stabilní, a tudíž také asymptoticky stabilní.*

(2) *Jestliže* $|\varrho_k| > 1$ *pro nějaké* $k \in \{1, 2\}$, *pak je rovnice* (L) *nestabilní.*

(3) *Jestliže* ϱ_1, $\varrho_2 \in \mathbb{R}$, $|\varrho_1| = 1$ *a* $|\varrho_2| < 1$, *pak je rovnice* (L) *stabilní (ale ne asymptoticky stabilní).*

(4) *Nechť* ϱ_1, $\varrho_2 \in \mathbb{R}$ *a* $|\varrho_1| = |\varrho_2| = 1$. *Pak je rovnice* (L) *stabilní právě tehdy, když jsou všechna její řešení periodická. Je-li v tomto případě rovnice* (L) *stabilní, není stabilní asymptoticky.*

(5) *Jestliže* ϱ_1, $\varrho_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *a* $|\varrho_1| = |\varrho_2| = 1$, *pak je rovnice* (L) *stabilní (ale ne asymptoticky stabilní).*

Věta 2.6 říká, v jakém tvaru můžeme najít fundamentální systém řešení rovnice (L), známe-li oba její Floquetovy multiplikátory. To nám dovolí dokázat větu 3.2 přímou aplikací tvrzení 1.3. Podrobný důkaz zde uvádět nebudeme, to určitě zvládne udělat čtenář sám. Poznamenejme pouze, že v důkazu části (1) věty 3.2 použijeme následující fakt: *Pro každé* $\alpha > 0$ *existuje* $M = M(\alpha) > 0$ *takové, že*

$$t\mathrm{e}^{-\alpha t} \leqq M\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}\, t} \quad \textit{pro } t \geqq 0.$$

Z věty 3.2 okamžitě dostáváme následující velmi obecné kritérium nestability rovnice (L).

Věta 3.3. *Předpokládejme, že koeficienty* p, g *rovnice* (L) *jsou ω-periodické funkce. Je-li* $\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s < 0$, *pak je rovnice* (L) *nestabilní.*

Důkaz. Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 rovnice (L) jsou řešeními kvadratické rovnice (2.2), a proto platí

$$\varrho_1 \varrho_2 = \mathrm{e}^{-\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Vzhledem k předpokladu $\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s < 0$ odtud plyne, že $|\varrho_k| > 1$ pro nějaké $k \in \{1, 2\}$. Podle části (2) věty 3.2 je tedy rovnice (L) nestabilní. □

Všimněme si, že věta 3.2 je jakousi analogií tvrzení 1.4 pro diferenciální rovnici s nekonstantními (avšak periodickými) koeficienty. Je ale mezi nimi jeden velmi podstatný rozdíl! Kořeny λ_1, λ_2 charakteristické rovnice (1.6) lze jednoduše určit, neboť jsou to kořeny kvadratické rovnice s danými reálnými koeficienty p_0, g_0. Tvrzení 1.4 proto obsahuje efektivní kritéria stability rovnice s konstantními koeficienty (1.5). I když jsou Floquetovy multiplikátory rovnice (L) také kořeny kvadratické rovnice s reálnými koeficienty, jejich hodnoty nelze jednoduše určit. Koeficient $u_1(\omega) + u_2'(\omega)$ kvadratické rovnice (2.2) můžeme totiž vyčíslit pouze v případě, že jsme schopni vypsat nějaký fundamentální systém řešení rovnice (L). V takovém případě však můžeme přímo použít tvrzení 1.3 a nepotřebujeme hledat Floquetovy multiplikátory. Z tohoto pohledu jsou kritéria stability ve větě 3.2 neefektivní. Je proto potřeba hledat efektivní (tj. snadno ověřitelné) podmínky zaručující, že Floquetovy multiplikátory rovnice (L) splňují předpoklady jednotlivých tvrzení ve větě 3.2.

Větu 3.2 můžeme lehce přeformulovat v řeči reálných částí Floquetových charakteristických exponentů.

Definice 3.4. Nechť $\varrho \in \mathbb{C}$ je Floquetův multiplikátor rovnice (L) s ω-periodickými koeficienty a nechť $\varrho = |\varrho|\mathrm{e}^{\vartheta \mathrm{i}}$, kde $\vartheta \in (-\pi, \pi]$. Potom číslo

$$\alpha = \frac{1}{\omega}\big[\ln|\varrho| + \vartheta\mathrm{i}\big] \tag{3.1}$$

nazýváme **Floquetův charakteristický exponent** rovnice (L).

Ze vztahu (3.1) okamžitě vyplývá, že $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$ (resp. $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$, resp. $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$) právě tehdy, když $|\varrho| < 1$ (resp. $|\varrho| = 1$, resp. $|\varrho| > 1$).

V závěru této kapitoly se chvilku věnujme diferenciální rovnici s konstantními koeficienty (1.5). Lehce lze ukázat, že je-li $\omega > 0$ a λ je kořenem charakteristické rovnice (1.6), pak $\varrho = \mathrm{e}^{\lambda\omega}$ je Floquetovým multiplikátorem diferenciální rovnice (1.5) pro dané ω. Vskutku, je-li $\lambda = \mu + \nu\mathrm{i}$ ($\mu, \nu \in \mathbb{R}$) kořenem charakteristické rovnice (1.6), diferenciální rovnice (1.5) má (eventuálně komplexní) řešení $x(t) := \mathrm{e}^{\lambda t}$, pro které zřejmě platí

$$x(t+\omega) = \mathrm{e}^{\lambda(t+\omega)} = \mathrm{e}^{\lambda\omega}x(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Z tvrzení 2.2 pak okamžitě plyne, že $\varrho = \mathrm{e}^{\lambda\omega} = \mathrm{e}^{\mu\omega}\mathrm{e}^{\nu\omega\mathrm{i}}$ je Floquetův multiplikátor diferenciální rovnice (1.5) pro dané ω. Pro Floquetův charakteristický exponent α, který mu odpovídá, ze vztahu (3.1) dostaneme

$$\mathrm{Re}\,\alpha = \frac{1}{\omega}\ln|\varrho| = \mu = \mathrm{Re}\,\lambda,$$

a proto pro rovnici (1.5) jsou reálné části jejích Floquetových charakteristických exponentů stejné pro libovolné $\omega > 0$ a jsou rovny reálným částem kořenů charakteristické rovnice (1.6).

4. Ukázka efektivních kritérií stability rovnice (L)

Stejně jako v předchozích kapitolách i zde předpokládáme, že koeficienty p, g rovnice (L) jsou ω-periodické funkce. Ukážeme, jak lze použít větu 3.2 a dokázat efektivní kritéria stability rovnice (L) v případě, že koeficient p nestřídá znaménko. Tento předpoklad je samozřejmě možné zeslabit a dokázat kritéria podobného typu i pro koeficient p střídající znaménko, avšak důkazy by byly poněkud pracnější než důkazy vět 4.1 a 4.3. Některá z uvedených kritérií jsou jistě známá, avšak často jsou uvažovány speciální případy rovnice (L), kde je například tlumicí koeficient g diferencovatelný, či dokonce konstantní. Dle autorova vědomí, důkazy zde uvedené jsou nové a dobře poslouží účelu tohoto článku, neboť ukazují jak výhody, tak i nevýhody užití Floquetových multiplikátorů v otázce stability rovnice (L). Na závěr pak ukážeme dva výsledky E. L. Tonkova, které se také týkají Floquetových multiplikátorů a ze kterých okamžitě dostáváme kritérium exponenciální stability rovnice (L).

Diskuzi rozdělíme na tři případy v závislosti na střední hodnotě tlumicího koeficientu g. Nejprve však vyjasněme jednu otázku, která nejspíše čtenáře zběhlého v teorii diferenciálních rovnic napadla. Existuje několik dobře známých transformací, pomocí kterých lze převést rovnici (L) na rovnici s nulovým tlumicím koeficientem (viz např. [2], kapitola XI, sekce 1). Ukažme jednu z těch, které nevyžadují předpoklad diferencovatelnosti koeficientu g.

Položme

$$\sigma(g)(t) := \mathrm{e}^{-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s}, \quad \varphi(t) := \int_0^t \sigma(g)(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Funkce φ je zřejmě rostoucí na $\mathbb{R}$, existuje tedy k ní funkce inverzní a můžeme definovat funkci $\widehat{p}$ vztahem

$$\widehat{p}(\tau) := \frac{p(\varphi^{-1}(\tau))}{\left[\sigma(g)(\varphi^{-1}(\tau))\right]^2} \quad \text{pro } \tau \in \varphi(\mathbb{R}),$$

která je spojitá na $\varphi(\mathbb{R})$.

Přímým výpočtem lze ukázat, že je-li x řešením rovnice (L), pak je funkce $z(\tau) :=$ $:= x(\varphi^{-1}(\tau))$ pro $\tau \in \varphi(\mathbb{R})$ řešením diferenciální rovnice

$$z'' + \widehat{p}(\tau)z = 0. \tag{4.2}$$

Naopak, je-li z řešením rovnice (4.2), pak je funkce $x(t) := z(\varphi(t))$ pro $t \in \mathbb{R}$ řešením rovnice (L).

Jelikož předpokládáme, že koeficient g v rovnici (L) je ω-periodická funkce, platí

$$\varphi(k\omega) = \int_0^\omega \sigma(g)(s)\,\mathrm{d}s \sum_{n=1}^{k} \left(\mathrm{e}^{-\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s}\right)^{n-1} \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}$$

a

$$\varphi(-k\omega) = -\int_0^\omega \sigma(g)(s)\,\mathrm{d}s \sum_{n=1}^{k} \left(\mathrm{e}^{\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s}\right)^{n} \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}.$$

Odtud je vidět, že

$$\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \quad \text{právě tehdy, když} \quad \int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

(je-li $\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s \neq 0$, pak buď $\lim\limits_{k\to+\infty} \varphi(k\omega) < +\infty$ nebo $\lim\limits_{k\to+\infty} \varphi(-k\omega) > -\infty$). Navíc, jestliže $\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s = 0$, potom platí

$$\varphi(t+\omega) = \varphi(t) + \int_0^\omega \sigma(g)(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Rovnice (L) a (4.2) nejsou tedy z našeho pohledu vždy stejného typu, neboť koeficient $\widehat{p}$ v rovnici (4.2) je definovaný na celém $\mathbb{R}$ a je periodický právě tehdy, když $\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s = 0$. Odtud plyne, že v případě $\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s = 0$ lze rovnici (L) s ω-periodickými koeficienty p, g převést na mnohem jednodušší rovnici (4.2) s periodickým koeficientem $\widehat{p}$, která je lépe prostudovaná v dostupné literatuře, přičemž „nová“ perioda je pak $\widehat{\omega} := \int_0^\omega \sigma(g)(s)\,\mathrm{d}s$. V případě $\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s \neq 0$ nelze pro získanou rovnici (4.2) Floquetovu teorii použít.

4.1. Případ $\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s < 0$

Je-li střední hodnota tlumicího koeficientu g na intervalu $[0, \omega]$ záporná, z věty 3.3 okamžitě plyne, že rovnice (L) s ω-periodickými koeficienty je nestabilní.

4.2. Případ $\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s = 0$

Věta 4.1. *Předpokládejme, že koeficienty p, g rovnice* (L) *jsou ω-periodické funkce, přičemž $\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s = 0$. Potom platí:*

(A) *Jestliže $p(t) \leqq 0$ pro $t \in \mathbb{R}$, pak je rovnice* (L) *nestabilní.*

(B) *Jestliže*

$$p(t) \geqq 0 \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \qquad p(t) \not\equiv 0 \quad \text{na } [0, \omega]$$

a

$$\int_0^\omega \frac{p(s)}{\sigma(g)(s)}\,\mathrm{d}s \leqq \frac{4}{\int_0^\omega \sigma(g)(s)\,\mathrm{d}s}\,, \tag{4.3}$$

pak je rovnice (L) *stabilní (ale ne asymptoticky stabilní).*

Tvrzení věty plynou z výše popsané transformace, části (3) tvrzení 1.4 a vět 1 a 2 dokázaných v [1], hlava III, § 19 pro rovnici (4.2). Tyto věty jsou v monografii [1] dokázány pomocí Floquetových multiplikátorů a technikou vytvořenou Ljapunovem. Postup Ljapunova v této otázce je velmi zajímavý, ukazuje využití nekonečných řad v kvalitativní teorii diferenciálních rovnic, proto čtenáři se zájmem o „propojení“ různých oblastí matematiky vřele doporučujeme důkazy přečíst. Větu 4.1 lze dokázat také přímo, bez transformace, postupem podobným tomu, který použijeme v důkazu věty 4.3.

Poznámka 4.2. Pomocí transformace $\xi = \varphi(s)$ v integrálu na levé straně nerovnosti (4.3) dostaneme

$$\int_0^{\varphi(\omega)} \frac{p(\varphi^{-1}(\xi))}{\sigma(g)(\varphi^{-1}(\xi))}\,\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(\xi))}\,\mathrm{d}\xi \leqq \frac{4}{\varphi(\omega)}\,,$$

tj.

$$\int_0^{\widehat{\omega}} \widehat{p}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \leqq \frac{4}{\widehat{\omega}}\,,$$

což je známá nerovnost Ljapunova pro diferenciální rovnici (4.2) v případě nezáporného koeficientu $\widehat{p}$. Tato nerovnost zaručí, že libovolné netriviální řešení rovnice (4.2) s nezáporným koeficientem $\widehat{p}$ má v intervalu $[0,\,\widehat{\omega}]$ nejvýše jeden nulový bod (viz např. [2], kapitola XI, důsledek 5.1).

4.3. Případ $\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s > 0$

Věta 4.3. *Předpokládejme, že koeficienty p, g rovnice* (L) *jsou ω-periodické funkce, přičemž $\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s > 0$. Potom platí:*

(A) *Jestliže*

$$p(t) \leqq 0 \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \qquad p(t) \not\equiv 0 \quad \text{na } [0,\,\omega], \tag{4.4}$$

pak je rovnice (L) *nestabilní.*

(B) *Jestliže $p(t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R}$, pak je rovnice* (L) *stabilní (avšak ne asymptoticky stabilní).*

(C) *Jestliže*

$$p(t) \geqq 0 \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \qquad p(t) \not\equiv 0 \quad \text{na } [0,\,\omega] \tag{4.5}$$

a

$$\int_a^{a+\omega} \frac{p(s)}{\sigma(g)(s)}\,\mathrm{d}s \leqq \frac{4}{\int_a^{a+\omega} \sigma(g)(s)\,\mathrm{d}s} \quad \text{pro } a \in [0,\,\omega), \tag{4.6}$$

pak je rovnice (L) *exponenciálně stabilní, a tudíž také asymptoticky stabilní.*

Poznámka 4.4. Analogicky jako v poznámce 4.2 lze podmínku (4.6) přepsat do tvaru

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(a+\omega)} \widehat{p}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \leqq \frac{4}{\varphi(a+\omega) - \varphi(a)} \quad \text{pro } a \in [0,\,\omega),$$

což zaručí, že libovolné netriviální řešení rovnice (4.2) s nezáporným koeficientem $\widehat{p}$ má v každém intervalu $[\varphi(a),\,\varphi(a+\omega)]$ nejvýše jeden nulový bod. Pro rovnici (L) odtud plyne následující tvrzení: *Jestliže jsou splněny podmínky* (4.5) a (4.6), *pak libovolné netriviální řešení rovnice* (L) *s ω-periodickými koeficienty má v každém intervalu $[a,\,a+\omega]$ nejvýše jeden nulový bod.* V terminologii kvalitativní teorie diferenciálních rovnic to znamená, že rovnice (L) s ω-periodickými koeficienty je diskonjugovaná v každém uzavřeném intervalu délky ω.

Důkaz věty 4.3. Nechť ϱ_1, ϱ_2 jsou Floquetovy multiplikátory rovnice (L), tj. řešení kvadratické rovnice

$$\varrho^2 - A\varrho + \sigma(g)(\omega) = 0, \tag{4.7}$$

kde $A = u_1(\omega) + u_2'(\omega)$, u_1 a u_2 jsou řešení rovnice (L) splňující počáteční podmínky (2.3) a funkce $\sigma(g)$ je dána vztahem (4.1). Zřejmě platí

$$0 < \sigma(g)(\omega) < 1. \tag{4.8}$$

Část (A): Předpokládejme, že je splněna podmínka (4.4). Dokážeme nejprve, že

$$A > 1 + \sigma(g)(\omega). \tag{4.9}$$

Pro řešení u_1 rovnice (L) platí

$$u_1''(t)\mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s} + u_1'(t)g(t)\mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s} = -p(t)\mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s}u_1(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

tj.

$$\left(\frac{u_1'(t)}{\sigma(g)(t)}\right)' = -\frac{p(t)}{\sigma(g)(t)}\,u_1(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$

Z (2.3) okamžitě plyne $u_1(0) > 0$. Ukážeme sporem, že

$$u_1(t) > 0 \quad \text{pro } t \in [0, \omega]. \tag{4.11}$$

Vskutku, připusťme, že má řešení u_1 v intervalu $[0, \omega]$ nulový bod a položme

$$t_0 := \inf\big\{t \in [0, \omega] : u_1(t) \leqq 0\big\}.$$

Pak zřejmě $t_0 > 0$, $u_1(t_0) = 0$ a $u_1(t) > 0$ pro $t \in [0, t_0)$, a proto z (4.4), (4.8) a (4.10) okamžitě plyne $\left(\frac{u_1'(t)}{\sigma(g)(t)}\right)' \geqq 0$ pro $t \in [0, t_0]$. Integrací tohoto vztahu od 0 do t a použitím počáteční podmínky $u_1'(0) = 0$ dostaneme $\frac{u_1'(t)}{\sigma(g)(t)} \geqq 0$ pro $t \in [0, t_0]$. Odtud máme $u_1'(t) \geqq 0$ pro $t \in [0, t_0]$, neboť funkce $\sigma(g)$ je kladná, a proto $u_1(t_0) \geqq u_1(0) > 0$, což je ve sporu s definicí čísla t_0. Dosažený spor dokazuje nerovnost (4.11). Pak analogicky jako výše dostaneme

$$u_1(\omega) \geqq u_1(0) = 1. \tag{4.12}$$

Pro řešení u_2 rovnice (L) platí

$$\left(\frac{u_2'(t)}{\sigma(g)(t)}\right)' = -\frac{p(t)}{\sigma(g)(t)}\,u_2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \tag{4.13}$$

Jelikož $u_2(0) = 0$ a $u_2'(0) = 1$, z lemmatu 7.2 (viz dodatek) plyne $u_2(t) > 0$ pro $t > 0$. Rovnost (4.13) vzhledem k předpokladu (4.4) pak zaručí, že

$$\left(\frac{u_2'(t)}{\sigma(g)(t)}\right)' \geqq 0 \quad \text{pro } t \geqq 0, \qquad \left(\frac{u_2'(t)}{\sigma(g)(t)}\right)' \not\equiv 0 \quad \text{na } [0, \omega].$$

Integrací předchozí nerovnosti od 0 do ω a použitím počáteční podmínky $u_2'(0) = 1$ dostaneme

$$\frac{u_2'(\omega)}{\sigma(g)(\omega)} > \frac{u_2'(0)}{\sigma(g)(0)} = 1,$$

což spolu s (4.12) dokazuje požadovaný vztah (4.9).

Nyní použitím nerovnosti $4\alpha\beta \leqq (\alpha + \beta)^2$, která zřejmě platí pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, z (4.8) a (4.9) dostaneme

$$A^2 > \big(1 + \sigma(g)(\omega)\big)^2 \geqq 4\sigma(g)(\omega). \tag{4.14}$$

To však znamená, že kořeny ϱ_1, ϱ_2 kvadratické rovnice (4.7) jsou reálné a platí

$$\varrho_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4\sigma(g)(\omega)}}{2}\,. \tag{4.15}$$

Navíc, z nerovnosti (4.9) plyne

$$(2 - A)^2 = 4 - 4A + A^2 < A^2 - 4\sigma(g)(\omega).$$

Jestliže $A \leqq 2$, tento vztah zaručí $2 - A < \sqrt{A^2 - 4\sigma(g)(\omega)}$, a proto

$$\varrho_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4\sigma(g)(\omega)}}{2} > 1.$$

Jestliže $A > 2$, z nerovností (4.14) a (4.15) jednoduše dostaneme

$$\varrho_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4\sigma(g)(\omega)}}{2} \geqq \frac{A}{2} > 1.$$

Dokázali jsme, že existuje reálný Floquetův multiplikátor ϱ_1 rovnice (L) splňující $\varrho_1 > 1$, a proto podle části (2) věty 3.2 je rovnice (L) nestabilní.

<u>*Část* (B)</u>: Předpokládejme, že $p(t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R}$. Pak má rovnice (L) konstantní řešení $x(t) := 1$ pro $t \in \mathbb{R}$, a proto je zřejmě číslo 1 jejím Floquetovým multiplikátorem (viz tvrzení 2.2). Pro Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 platí $\varrho_1\varrho_2 = \sigma(g)(\omega)$, viz (4.7), a proto vzhledem k (4.8) máme

$$\varrho_1 = 1, \qquad 0 < \varrho_2 = \sigma(g)(\omega) < 1.$$

Z části (3) věty 3.2 tedy vyplývá, že je rovnice (L) stabilní (ale ne asymptoticky stabilní).

<u>*Část* (C)</u>: Předpokládejme, že jsou splněny podmínky (4.5) a (4.6). Pro Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 platí $\varrho_1\varrho_2 = \sigma(g)(\omega)$, viz (4.7). Navíc, buď platí $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$, nebo $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Prvně předpokládejme, že $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}$. Nejdříve ukážeme

$$\varrho_1 > 0, \qquad \varrho_2 > 0. \tag{4.16}$$

Jelikož $\varrho_1\varrho_2 = \sigma(g)(\omega) > 0$, viz (4.8), stačí dokázat $\varrho_1 > 0$. Předpokládejme sporem, že $\varrho_1 < 0$. Podle tvrzení 2.2 pak existuje netriviální řešení x rovnice (L) splňující

$$x(t + \omega) = \varrho_1 x(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \tag{4.17}$$

Odtud okamžitě plyne $x(\omega) = -|\varrho_1|x(0)$, a proto existuje $t_0 \in [0, \omega)$ takové, že $x(t_0) = 0$. Vzhledem k (4.17) pak také $x(t_0 + \omega) = 0$. To však znamená, že netriviální řešení x rovnice (L) má dva nulové body v intervalu $[t_0, t_0 + \omega]$, což je ve sporu s tvrzením formulovaným v poznámce 4.4. Dosažený spor dokazuje nerovnosti (4.16).

Jelikož jsou ϱ_1, ϱ_2 reálné kladné kořeny kvadratické rovnice (4.7), koeficient A nutně vyhovuje nerovnostem

$$A^2 \geqq 4\sigma(g)(\omega), \qquad A > 0. \tag{4.18}$$

Multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 tedy splňují

$$0 < \varrho_2 \leqq \varrho_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4\sigma(g)(\omega)}}{2} \,. \tag{4.19}$$

Pro řešení u_1 platí (4.10) a $u_1(0) > 0$. Jestliže $u_1(t) > 0$ pro $t \in [0, \omega]$, pak ze (4.5) a (4.10) okamžitě plyne $\left(\frac{u_1'(t)}{\sigma(g)(t)}\right)' \leqq 0$ pro $t \in [0, \omega]$. Integrací tohoto vztahu od 0 do t a použitím počáteční podmínky $u_1'(0) = 0$ dostaneme $\frac{u_1'(t)}{\sigma(g)(t)} \leqq 0$ pro $t \in [0, \omega]$. Odtud máme $u_1'(t) \leqq 0$ pro $t \in [0, \omega]$, neboť funkce $\sigma(g)$ je kladná, a proto

$$u_1(\omega) \leqq u_1(0) = 1. \tag{4.20}$$

Jestliže má u_1 v intervalu $[0, \omega]$ nulový bod, pak existuje $t_0 \in (0, \omega]$ takové, že $u(t_0) = 0$, $u(t) > 0$ pro $t \in [0, t_0)$ a také $u(t) < 0$ pro $t \in (t_0, \omega]$ je-li $t_0 < \omega$. Podle tvrzení formulovaného v poznámce 4.4 má totiž u_1 v intervalu $[0, \omega]$ nejvýše jeden nulový bod a zřejmě $u_1'(t_0) \neq 0$. To však znamená, že $u_1(\omega) \leqq 0$, tj. i v tomto případě je splněna podmínka (4.20).

Řešení u_2 splňuje (4.13). Jelikož $u_2(0) = 0$ a $u_2'(0) = 1$, z tvrzení formulovaného v poznámce 4.4 plyne $u_2(t) > 0$ pro $t \in (0, \omega]$. Nerovnost (4.13) vzhledem k předpokladu (4.4) pak zaručí, že

$$\left(\frac{u_2'(t)}{\sigma(g)(t)}\right)' \leqq 0 \quad \text{pro } t \in [0, \omega], \qquad \left(\frac{u_2'(t)}{\sigma(g)(t)}\right)' \not\equiv 0 \quad \text{na } [0, \omega].$$

Integrací předchozí nerovnosti od 0 do ω a použitím počáteční podmínky $u_2'(0) = 1$ dostaneme

$$\frac{u_2'(\omega)}{\sigma(g)(\omega)} < \frac{u_2'(0)}{\sigma(g)(0)} = 1,$$

což spolu s (4.20) vede k nerovnosti

$$A < 1 + \sigma(g)(\omega). \tag{4.21}$$

Jelikož $\sigma(g)(\omega) < 1$, z (4.21) plyne $A < 2$ a

$$(2 - A)^2 = 4 - 4A + A^2 > A^2 - 4\sigma(g)(\omega).$$

Tato nerovnost s ohledem na (4.18) zaručí, že $2 - A > \sqrt{A^2 - 4\sigma(g)(\omega)}$. Ze vztahu (4.19) tedy dostáváme $0 < \varrho_2 \leqq \varrho_1 < 1$.

Nyní předpokládejme, že $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Kořeny ϱ_1, ϱ_2 kvadratické rovnice (4.7) splňují $\varrho_1 = \overline{\varrho_2}$ a $\varrho_1\varrho_2 = \sigma(g)(\omega)$, což vzhledem k (4.8) zaručí $|\varrho_1|^2 = |\varrho_2|^2 = \varrho_1\varrho_2 < 1$, a tedy $|\varrho_1| < 1$ a $|\varrho_2| < 1$.

Dokázali jsme, že Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 rovnice (L) splňují nerovnosti $|\varrho_1| < 1$ a $|\varrho_2| < 1$, a proto podle části (1) věty 3.2 je rovnice (L) exponenciálně stabilní. $\square$

Otázku existence netriviálního řešení x rovnice (L) splňujícího podmínku (2.1) studoval v 70. letech minulého století také E. L. Tonkov v souvislosti s existencí, jednoznačností a „znaménkem“ periodických řešení nehomogenní lineární rovnice s periodickými koeficienty. Publikoval několik zajímavých a netriviálních výsledků mimo jiné i pro stabilitu rovnice (L). Zdá se, že ve studiu těchto otázek intenzivně nepokračoval a na jeho práce pravděpodobně ani nikdo nenavázal, neboť se nám nepodařilo najít v dostupné literatuře publikace, v nichž by byly jeho myšlenky rozpracovány až do úrovně efektivních (tj. snadno použitelných) kritérií. Ukážeme zde dva z jeho výsledků publikovaných v [11], které souvisí s tématem tohoto článku.

Tvrzení 4.5 ([11], lemma 1)**.** *Předpokládejme, že koeficienty p, g rovnice* (L) *jsou ω-periodické funkce a vzdálenost každých dvou po sobě jdoucích nulových bodů libovolného netriviálního řešení rovnice* (L) *je větší než ω. Pak pro každé $\varrho < 0$ má úloha* (L), (2.1) *pouze triviální řešení, tj. ϱ není Floquetovým multiplikátorem rovnice* (L).

Tvrzení 4.6 ([11], důsledek 1)**.** *Předpokládejme, že koeficienty p, g rovnice* (L) *jsou ω-periodické funkce, funkce g je spojitě diferencovatelná na $\mathbb{R}$ a*

$$\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s \geqq 0, \qquad \int_0^\omega p^*(s)\,\mathrm{d}s \geqq 0, \qquad p^*(t) \not\equiv 0 \quad \text{na } [0,\omega],$$

kde

$$p^*(t) := p(t) - \frac{g^2(t)}{4} - \frac{g'(t)}{2} + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s\Big)^2 \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Pak pro každé $\varrho \geqq 1$ má úloha (L), (2.1) *pouze triviální řešení, tj. ϱ není Floquetovým multiplikátorem rovnice* (L).

Poznámka 4.7. Jestliže jsou splněny předpoklady tvrzení 4.5 a 4.6, přičemž $\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s > 0$, pak je rovnice (L) exponenciálně stabilní. Jsou-li totiž Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 rovnice (L) reálné, podle tvrzení 4.5 a 4.6 jsou z intervalu $(0,1)$; 0 nemůže být Floquetovým multiplikátorem, viz (2.2). A jsou-li Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 komplexní, z důkazu věty 4.3 už víme, že $|\varrho_1| = |\varrho_2| < 1$. Exponenciální stabilita rovnice (L) pak plyne z části (1) věty 3.2.

K tvrzením 4.5 a 4.6 se vrátíme ještě na konci kapitoly 6.2 v souvislosti se stabilitou rovnovážného stavu kyvadla s kmitajícím závěsem.

5. Souvislost mezi Ljapunovovými a Floquetovými charakteristickými exponenty

Ljapunovův charakteristický exponent je dobře známý pojem, který dovoluje rozhodnout o stabilitě řešení soustav neautonomních (obecně nelineárních) diferenciálních rovnic. V literatuře se obvykle mluví o první Ljapunovově metodě. Zavedeme nejprve tento pojem, připomeneme jeho základní vlastnosti a ukážeme jeho možné použití v teorii stability řešení soustav lineárních i nelineárních diferenciálních rovnic. V druhé části této kapitoly pak vysvětlíme souvislost mezi Ljapunovovými a Floquetovými charakteristickými exponenty diferenciální rovnice (L) s periodickými koeficienty.

Definice 5.1. Nechť $t_0 \in \mathbb{R}$ a $f\colon [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Horní limitu

$$\chi[f] := \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ \ln|f(t)|$$

nazýváme **Ljapunovův charakteristický exponent** funkce f.

Pro komplexní funkci $f\colon [t_0, +\infty) \to \mathbb{C}$ se Ljapunovův charakteristický exponent zavádí analogicky, přičemž $|z|$ zřejmě značí modul komplexního čísla z.

Lemma 5.2 ([1], hlava III, str. 122). *Nechť $f\colon [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ je taková, že $f(t) \not\equiv 0$ v každém okolí $+\infty$. Potom:*

(1) *Je-li $\chi[f] = \nu \in \mathbb{R}$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{|f(t)|}{\mathrm{e}^{(\nu+\varepsilon)t}} = 0. \tag{5.1}$$

(2) *Je-li $\chi[f] = \nu \in \mathbb{R}$, pak existuje posloupnost $\{t_k\}_{k=1}^{+\infty}$ reálných čísel taková, že $\lim\limits_{k\to+\infty} t_k = +\infty$ a*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|f(t_k)|}{\mathrm{e}^{(\nu-\varepsilon)t_k}} = +\infty \quad \text{pro každé } \varepsilon > 0. \tag{5.2}$$

(3) *Jestliže $\nu \in \mathbb{R}$ a pro každé $\varepsilon > 0$ platí (5.1), pak $\chi[f] \leqq \nu$.*

(4) *Pokud $\nu \in \mathbb{R}$ a existuje posloupnost $\{t_k\}_{k=1}^{+\infty}$ reálných čísel taková, že $\lim\limits_{k\to+\infty} t_k = +\infty$ a platí (5.2), pak $\chi[f] \geqq \nu$.*

(5) *Pro každé $c \neq 0$ platí $\chi[cf] = \chi[f]$.*

Vlastnosti (1) a (2) lemmatu 5.2 dobře vysvětlují smysl Ljapunovova charakteristického exponentu: Jestliže $\chi[f] \in \mathbb{R}$, pak funkce $t \mapsto |f(t)|$ je asymptoticky menší než libovolná exponenciální funkce $t \mapsto \mathrm{e}^{(\chi[f]+\varepsilon)t}$ a zároveň její hodnoty v bodech posloupnosti $\{t_k\}_{k=1}^{+\infty}$ jsou asymptoticky větší než hodnoty libovolné exponenciální funkce $t \mapsto \mathrm{e}^{(\chi[f]-\varepsilon)t}$.

Příklad 5.3. Přímým výpočtem a použitím lemmatu 5.2 lze ukázat, že platí:

a) Je-li $f(t) := t^m$ pro $t \geqq 0$, kde $m \in \mathbb{N}$, pak $\chi[f] = 0$.

b) Je-li $a \in \mathbb{R}$, $z\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ a $f(t) := z(t)\mathrm{e}^{at}$ pro $t \geqq 0$, pak $\chi[f] = a + \chi[z]$.

c) Je-li $f(t) := tg(t) + h(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$, kde $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou T-periodické funkce a alespoň jedna z nich je nenulová, pak $\chi[f] = 0$.

Tvrzení 5.4 ([1], hlava III, § 1, věta 1). *Jestliže $f_1, f_2\colon [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$, pak $\chi[f_1 + f_2] \leqq \max\big\{\chi[f_1], \chi[f_2]\big\}$.*

Tvrzení 5.5 ([1], hlava III, § 2, věta 4). *Nechť $f\colon [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$,*

$$F(t) := \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{pro } t \geqq t_0, \quad \text{je-li} \quad \chi[f] \geqq 0,$$

a

$$F(t) := \int_t^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{pro } t \geqq t_0, \quad \text{je-li} \quad \chi[f] < 0.$$

Pak $\chi[F] \leqq \chi[f]$.

Definice 5.6. Nechť $t_0 \in \mathbb{R}$ a $y = (y_1, \dots, y_n)\colon [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ je vektorová funkce. **Ljapunovův charakteristický exponent** této funkce definujeme vztahem

$$\chi[y] = \max\left\{\chi[y_1], \chi[y_2], \dots, \chi[y_n]\right\}.$$

Pro Ljapunovův charakteristický exponent vektorové funkce platí:

Tvrzení 5.7 ([1], hlava III, § 2). *Nechť $t_0 \in \mathbb{R}$ a $y = (y_1, \dots, y_n)\colon [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ je vektorová funkce. Pak*

$$\chi[y] = \chi\left[|y_1| + \dots + |y_n|\right].$$

Nyní uvažujme lineární soustavu (1.3), tj.

$$y' = A(t)y,$$

kde $A\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ je spojitá[3] maticová funkce.

Úmluva. Ljapunovovým charakteristickým exponentem soustavy (1.3) rozumíme Ljapunovův charakteristický exponent některého jejího netriviálního řešení.

Definice 5.8. Množinu všech konečných Ljapunovových charakteristických exponentů soustavy (1.3) nazýváme **(Ljapunovovým) spektrem soustavy** (1.3).

Ohraničenost maticové funkce A dovolí dokázat následující tvrzení.

Tvrzení 5.9 ([1], hlava III, § 3, věta Ljapunovova). *Jestliže je v soustavě* (1.3) *maticová funkce A ohraničená na $[a, +\infty)$, tj. existuje $M > 0$ takové, že*

$$\|A(t)\| \leqq M \quad \text{pro } t \geqq a,$$

kde $\|\cdot\|$ značí libovolnou maticovou normu v $\mathbb{R}^{n\times n}$, pak Ljapunovův charakteristický exponent každého jejího netriviálního řešení je konečný.

Lemma 5.10 ([1], hlava III, § 3, lemma). *Mají-li netriviální řešení $y^1, \dots, y^k$ soustavy* (1.3) *různé Ljapunovovy charakteristické exponenty, jsou lineárně nezávislá.*

Z tvrzení 5.9, lemmatu 5.10 a skutečnosti, že množina všech řešení soustavy (1.3) tvoří vektorový prostor dimenze n, plyne:

Věta 5.11. *Spektrum libovolné soustavy* (1.3) *s ohraničenou maticovou funkcí A se skládá z konečného počtu reálných čísel*

$$\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_m \qquad (1 \leqq m \leqq n). \tag{5.3}$$

Pro každý Ljapunovův charakteristický exponent ν označme $\mathfrak{M}(\nu)$ množinu všech řešení y soustavy (1.3) takových, že $\chi[y] \leqq \nu$. Z vlastností Ljapunovových charakteristických exponentů vyplývá (viz tvrzení 5.4 a část (5) příkladu 5.3), že $\mathfrak{M}(\nu)$ je vektorový prostor.

Tvrzení 5.12 ([1], hlava III, § 4, důsledek 1). *Nechť* (5.3) *je spektrum soustavy* (1.3) *s ohraničenou maticovou funkcí A. Pak*

$$0 < \dim \mathfrak{M}(\nu_1) < \dim \mathfrak{M}(\nu_2) < \dots < \dim \mathfrak{M}(\nu_m) = n.$$

[3]Podobně jako výše stačí předpokládat, že maticová funkce A je lokálně lebesgueovsky integrovatelná.

Speciálním případem soustavy (1.3) je zřejmě lineární soustava s konstantními koeficienty

$$y' = By, \tag{5.4}$$

kde $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Jelikož víme, že fundamentální systém řešení soustavy (5.4) se skládá z vektorových funkcí, jejichž všechny složky jsou lineární kombinace součinů polynomů, exponenciálních funkcí, sinů a kosinů, pro spektrum soustavy (5.4) dostaneme následující tvrzení.

Tvrzení 5.13. *Spektrum soustavy* (5.4) *je množina reálných částí všech vlastních čísel matice B.*

Nyní ukážeme vyžití Ljapunovových charakteristických exponentů v otázce stability řešení neautonomních soustav (1.1) a (1.3). Začneme samozřejmě se soustavou lineární.

Věta 5.14 ([1], hlava III, § 5)**.** *Pro asymptotickou stabilitu soustavy* (1.3) *s ohraničenou maticovou funkcí A stačí, aby její největší Ljapunovův charakteristický exponent byl záporný.*

Postačující podmínka ve větě 5.14 není (obecně) podmínkou nutnou. Soustava (1.3) může být asymptoticky stabilní, i když má nulový Ljapunovův charakteristický exponent. Avšak je-li soustava (1.3) regulární (viz definici 5.16), pak je postačující podmínka ve větě 5.14 je také podmínkou nutnou.

Z části (2) lemmatu 5.2, definice Ljapunovova charakteristického exponentu a tvrzení 5.7 okamžitě dostáváme kritérium nestability soustavy (1.3).

Věta 5.15. *Jestliže soustava* (1.3) *má alespoň jeden kladný Ljapunovův charakteristický exponent, pak existuje řešení y soustavy* (1.3) *splňující*

$$\limsup_{t\to+\infty} \|y(t)\| = +\infty,$$

a tudíž je soustava (1.3) *nestabilní.*

Pro nelineární soustavu (1.1) zde uvedeme pouze kritérium asymptotické stability jejího nulového řešení, jehož možné použití ukážeme v kapitole 6.2. K formulaci kritéria však potřebujeme definovat následující pojmy.

Nechť (5.3) je spektrum soustavy (1.3) s ohraničenou maticovou funkcí A. Jestliže fundamentální matice $\widetilde{Y}$ soustavy (1.3) obsahuje $\tilde{n}_s \in \{0, 1, \dots, n\}$ řešení soustavy (1.3) s Ljapunovovým charakteristickým exponentem ν_s $(s = 1, \dots, m)$, hodnotu

$$\sigma_{\widetilde{Y}} = \sum_{s=1}^{m} \tilde{n}_s \nu_s$$

nazýváme součtem Ljapunovových charakteristických exponentů fundamentální matice $\widetilde{Y}$. Fundamentální matice Y se nazývá **normální**, jestliže součet σ_Y jejích Ljapunovových charakteristických exponentů je nejmenší ve srovnání s ostatními fundamentálními maticemi.

Definice 5.16. Lineární soustava (1.3) s ohraničenou maticovou funkcí A se nazývá **regulární**, jestliže pro normální fundamentální matici Y soustavy (1.3) platí

$$\sigma_Y = \liminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_a^t \operatorname{Tr} A(s)\,\mathrm{d}s.$$

Tvrzení 5.17 ([1], hlava III, § 16 (věta Ljapunovova) a § 11)**.** *Každá lineární soustava* (1.3) *s periodickou maticovou funkcí* $A\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ *je regulární.*

Nyní již uvedeme slíbené kritérium asymptotické stability nulového řešení nelineární soustavy (1.1).

Věta 5.18. *Nechť existují čísla* $c>0$, $m>1$ *a spojitá ohraničená maticová funkce* $A\colon [a,+\infty)\to\mathbb{R}^{n\times n}$ *taková, že*

$$\|f(t,z)-A(t)z\| \leqq c\|z\|^m \quad \text{pro } t\in[a,+\infty),\ z\in\mathbb{R}^n, \tag{5.5}$$

přičemž lineární soustava (1.3) *je regulární a všechny její Ljapunovovy charakteristické exponenty jsou záporné. Pak nulové řešení soustavy* (1.1) *je asymptoticky stabilní.*

Důkaz. Tvrzení věty vyplývá z [1], hlava IV, § 12, kritérium Ljapunova a z faktu, že $\chi[c]=0$ pro každé $c\neq 0$. □

Všimněme si, že předpoklad (5.5) ve větě 5.18 zaručí, že $f(t,0)\equiv 0$ na $[0,+\infty)$, a tudíž soustava (1.1) opravdu má nulové řešení. Navíc z (5.5) plyne, že pro každé $t\geqq a$ pevné je vektorová funkce $f(t,\cdot)\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ diferencovatelná v bodě 0, $A(t)$ je Jacobiho maticí vektorového pole $f(t,\cdot)$ v bodě 0, a proto lineární soustava (1.3) je linearizací nelineární soustavy (1.1) podél jejího nulového řešení.

Předpoklad regularity soustavy (1.3) ve větě 5.18 je podstatný a nelze ho vynechat. V roce 1930 Oskar Perron sestrojil příklad nelineární soustavy, jejíž linearizace (v našem případě lineární soustava (1.3)) má všechny Ljapunovovy charakteristické exponenty záporné, a přesto je nulové řešení nelineární soustavy nestabilní (viz např. [6], sekce 3). Navíc je v článku [6] uveden příklad G. A. Leonova, který ukazuje, že i když má linearizace nelineární soustavy (1.1) řešení s kladným Ljapunovovým charakteristickým exponentem, řešení původní nelineární soustavy (1.1) se stejnou počáteční podmínkou může mít Ljapunovův charakteristický exponent záporný. Odtud plyne, že při studiu stability řešení nelineárních neautonomních soustav bychom měli být s argumentací velmi opatrní.

A co tedy z výše uvedeného vyplývá pro diferenciální rovnici (L)? Řešení rovnice (L) a lineární soustavy (1.4) jsou ve vztahu popsaném v kapitole 1. Ljapunovovým charakteristickým exponentem řešení x rovnice (L) proto rozumíme Ljapunovův charakteristický exponent řešení (x,x') odpovídající soustavy (1.4), tj. symbol

$$\chi[(x,x')] = \max\{\chi[x],\chi[x']\} = \chi[|x|+|x'|],$$

viz tvrzení 5.7. Jsou-li navíc koeficienty p, g rovnice (L) ω-periodické funkce, je zřejmě ω-periodická také maticová funkce v (1.4). Z diskuze v [1], hlava III, § 8 a § 16 tedy vyplývá následující vztah mezi Floquetovými a Ljapunovovými charakteristickými exponenty rovnice (L).

Tvrzení 5.19. *Nechť koeficienty p, g rovnice* (L) *jsou ω-periodické funkce. Pak Ljapunovovy charakteristické exponenty rovnice* (L) *jsou reálnými částmi jejích Floquetových charakteristických exponentů.*

Použijeme-li tvrzení 2.101 z knihy [3], sekce 2.4 pro soustavu (1.4) a tvrzení přeformulujeme v řeči řešení rovnice (L), dostaneme:

Tvrzení 5.20. *Nechť $\varrho \in \mathbb{C}$ je Floquetův multiplikátor rovnice* (L) *s ω-periodickými koeficienty p, g a nechť α je odpovídající Floquetův charakteristický exponent. Pak*

$$\operatorname{Re} \alpha = \chi[(x, x')],$$

kde x je (eventuálně komplexní) řešení počáteční úlohy

$$x'' + g(t)x' + p(t)x = 0; \quad x(0) = v_1, \ x'(0) = v_2,$$

a (v_1, v_2) je vlastní vektor matice monodromie (2.4) *příslušný Floquetovu multiplikátoru ϱ.*

Je-li řešení x v předchozím tvrzení komplexní, pak $x_1 := \operatorname{Re} x$ a $x_2 := \operatorname{Im} x$ jsou reálná řešení rovnice (L) a navíc

$$\chi[(x_1, x_1')] = \operatorname{Re} \alpha \quad \text{nebo} \quad \chi[(x_2, x_2')] = \operatorname{Re} \alpha,$$

viz [1], hlava III, § 3.

Následující věta v jistém smyslu doplňuje tvrzení 5.20. Autor je přesvědčen o tom, že podobné tvrzení je známo, pouze se ho nepodařilo v rozsáhlé literatuře najít. Uvedeme zde úplný důkaz, který dobře poslouží účelu tohoto článku. Vyžaduje totiž pouze základní znalosti matematické analýzy, nepotřebuje žádný složitý „abstraktní" matematický aparát, jsou v něm však využity souvislosti mezi pojmy z různých oblastí kvalitativní teorie diferenciálních rovnic.

Věta 5.21. *Nechť α je Floquetův charakteristický exponent rovnice* (L) *s ω-periodickými koeficienty p, g. Pak existuje reálné řešení x rovnice* (L) *takové, že pro jeho Ljapunovův charakteristický exponent platí*

$$\chi[(x, x')] = \chi[x] = \operatorname{Re} \alpha, \tag{5.6}$$

a navíc, toto řešení je buď konstantní, nebo $\chi[x'] = \operatorname{Re} \alpha$.

Důkaz. Z definice 3.4 plyne, že k číslu α existuje Floquetův multiplikátor $\varrho \in \mathbb{C}$ rovnice (L) takový, že $\varrho = |\varrho|\mathrm{e}^{\vartheta \mathrm{i}}$, kde $\vartheta \in (-\pi, \pi]$, a platí

$$\alpha = \frac{1}{\omega}\big[\ln|\varrho| + \vartheta \mathrm{i}\big]. \tag{5.7}$$

Zřejmě buď $\varrho \in \mathbb{R}$, nebo $\varrho \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

<u>*Případ* 1</u>: Předpokládejme, že $\varrho \in \mathbb{R}$. Z věty 2.6 plyne, že existuje řešení x rovnice (L) tvaru

$$x(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho|}{\omega}t}\varphi(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \tag{5.8}$$

kde $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ je nenulová periodická funkce. Vzhledem k částem (b) a (c) příkladu 5.3 odtud dostaneme

$$\chi[x] = \frac{\ln|\varrho|}{\omega} + \chi[\varphi] = \frac{\ln|\varrho|}{\omega}. \tag{5.9}$$

Derivací vztahu (5.8) získáme

$$x'(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho|}{\omega}\,t}\left(\frac{\ln|\varrho|}{\omega}\,\varphi(t) + \varphi'(t)\right) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

a proto

$$\chi[x'] = \frac{\ln|\varrho|}{\omega} + \chi\left[\tfrac{\ln|\varrho|}{\omega}\,\varphi + \varphi'\right]. \tag{5.10}$$

Jestliže řešení x není konstantní, funkce $t \mapsto \frac{\ln|\varrho|}{\omega}\,\varphi(t) + \varphi'(t)$ je ω-periodická a nenulová, a proto z části (c) příkladu 5.3 vyplývá $\chi\big[\frac{\ln|\varrho|}{\omega}\,\varphi + \varphi'\big] = 0$. Ze vztahů (5.7) a (5.10) pak získáme

$$\chi[x'] = \frac{\ln|\varrho|}{\omega} = \operatorname{Re}\alpha,$$

což spolu s (5.9) a definicí 5.6 zaručí, že

$$\chi[(x,\,x')] = \max\big\{\chi[x],\,\chi[x']\big\} = \chi[x] = \operatorname{Re}\alpha, \tag{5.11}$$

tj. platí (5.6).

Je-li řešení x konstantní, pak $x'(t) \equiv 0$ na $\mathbb{R}$, z definice 5.1 plyne $\chi[x'] = -\infty$ a vzhledem k (5.7) a (5.9) je tedy i v tomto případě splněn vztah (5.11), tj. platí (5.6).

Případ 2: Předpokládejme, že $\varrho \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Z věty 2.6 plyne, že existují lineárně nezávislá řešení x, $\widetilde{x}$ rovnice (L) tvaru

$$x(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho|}{\omega}\,t}\Omega(t), \quad \widetilde{x}(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln|\varrho|}{\omega}\,t}\widetilde{\Omega}(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \tag{5.12}$$

přičemž

$$\Omega(t) := \varphi_1(t)\cos\frac{\vartheta t}{\omega} - \varphi_2(t)\sin\frac{\vartheta t}{\omega}, \quad \widetilde{\Omega}(t) := \varphi_1(t)\sin\frac{\vartheta t}{\omega} + \varphi_2(t)\cos\frac{\vartheta t}{\omega}$$

pro $t \in \mathbb{R}$, kde $\varphi_1,\,\varphi_2 \in C^2(\mathbb{R})$ jsou ω-periodické funkce a $\vartheta \in (-\pi,\,\pi]$. Všimněme si, že

$$\Omega^2(t) + \widetilde{\Omega}^2(t) = \varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Jelikož jsou řešení x, $\widetilde{x}$ lineárně nezávislá, nemají žádné společné nulové body, a proto nemají společné nulové body ani funkce φ_1, φ_2. Navíc jsou funkce φ_1, φ_2 periodické, z čehož vyplývá

$$\Omega^2(t) + \widetilde{\Omega}^2(t) \geqq m > 0 \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

To však znamená, že $\limsup\limits_{t\to+\infty}|\Omega(t)| > 0$, nebo $\limsup\limits_{t\to+\infty}|\widetilde{\Omega}(t)| > 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že

$$\limsup_{t\to+\infty}|\Omega(t)| > 0. \tag{5.13}$$

Navíc existuje $M > 0$ takové, že

$$|\Omega(t)| \leqq M \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \tag{5.14}$$

neboť jsou funkce φ_1, φ_2 periodické. Použijeme-li vztahy (5.13) a (5.14) v definici Ljapunovova charakteristického exponentu, dostaneme

$$\chi[\Omega] = \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ \ln |\Omega(t)| = 0.$$

Z (5.12) a části (b) příkladu 5.3 proto vyplývá

$$\chi[x] = \frac{\ln |\varrho|}{\omega} + \chi[\Omega] = \frac{\ln |\varrho|}{\omega}. \tag{5.15}$$

Derivací první rovnosti ve vztahu (5.12) získáme

$$x'(t) = \mathrm{e}^{\frac{\ln |\varrho|}{\omega}\, t} \left(\frac{\ln |\varrho|}{\omega}\, \Omega(t) + \Omega'(t) \right) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

a proto, opět vzhledem k části (b) příkladu 5.3, máme

$$\chi[x'] = \frac{\ln |\varrho|}{\omega} + \chi \left[\tfrac{\ln |\varrho|}{\omega}\, \Omega + \Omega' \right]. \tag{5.16}$$

Ukážeme nyní, že $x'(t) \not\equiv 0$ v každém okolí $+\infty$. Vskutku, připusťme opak. Řešení x je v takovém případě konstantní v nějakém okolí $+\infty$, a neboť koeficienty p, g jsou periodické, řešení x je konstantní na $\mathbb{R}$. To však znamená (viz tvrzení 2.2), že číslo 1 je Floquetovým multiplikátorem rovnice (L), což je ve sporu s předpokladem $\varrho \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dosažený spor dokazuje, že $x'(t) \not\equiv 0$ v každém okolí $+\infty$, a proto také

$$\frac{\ln |\varrho|}{\omega}\, \Omega(t) + \Omega'(t) \not\equiv 0 \quad \text{v každém okolí } +\infty. \tag{5.17}$$

Navíc existuje $K > 0$ takové, že

$$\left| \frac{\ln |\varrho|}{\omega}\, \Omega(t) + \Omega'(t) \right| \leqq K \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, \tag{5.18}$$

neboť funkce φ_1, φ_2 jsou ω-periodické. Použijeme-li vztahy (5.17) a (5.18) v definici Ljapunovova charakteristického exponentu, dostaneme

$$\chi \left[\tfrac{\ln |\varrho|}{\omega}\, \Omega + \Omega' \right] = \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ \ln \left| \frac{\ln |\varrho|}{\omega}\, \Omega(t) + \Omega'(t) \right| \leqq \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ \ln K = 0.$$

Z (5.16) proto plyne $\chi[x'] \leqq \frac{\ln |\varrho|}{\omega}$, což spolu s (5.15) a definicí 5.6 zaručí

$$\chi[(x, x')] = \max \left\{ \chi[x], \chi[x'] \right\} = \chi[x] = \operatorname{Re} \alpha, \tag{5.19}$$

tj. platí (5.6).

Nakonec dokážeme, že také $\chi[x'] = \operatorname{Re} \alpha$. Vskutku, zřejmě buď $\chi[x'] \geqq 0$, nebo $\chi[x'] < 0$.

Předpokládejme nejprve, že $\chi[x'] \geqq 0$. Jelikož

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

z tvrzení 5.4 a 5.5 a části (c) příkladu 5.3 dostaneme

$$\chi[x] \leqq \max\big\{\chi[x(0)], \chi[x']\big\} \leqq \max\big\{0, \chi[x']\big\} = \chi[x'].$$

Odtud a z výše dokázaného vztahu (5.19) získáme požadovanou rovnost $\chi[x'] = \operatorname{Re} \alpha$.

Nyní předpokládejme, že $\chi[x'] < 0$. Z části (1) lemmatu 5.2 plyne, že existují A, $B > 0$ a $T \in \mathbb{R}$ taková, že

$$|x'(t)| \leqq B\mathrm{e}^{-At} \quad \text{pro } t \geqq T.$$

Odtud

$$\int_T^{+\infty} |x'(s)|\,\mathrm{d}s \leqq \lim_{b\to+\infty} \int_T^b B\mathrm{e}^{-As}\,\mathrm{d}s = \frac{B}{A}\,\mathrm{e}^{-AT} < +\infty,$$

a tudíž existuje konečná limita $x(+\infty) := \lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$. Řešení x můžeme tedy psát ve tvaru

$$x(t) = x(+\infty) - \int_t^{+\infty} x'(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}. \tag{5.20}$$

Připusťme, že $x(+\infty) \neq 0$. Pak existují ε_1, $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ taková, že

$$0 < \varepsilon_1 \leqq |x(t)| \leqq \varepsilon_2 \quad \text{v nějakém okolí } +\infty, \tag{5.21}$$

což spolu s periodičností koeficientů p, g a Sturmovou separační větou (viz např. [2], kapitola XI, důsledek 3.1) zaručí, že každé netriviální řešení rovnice (L) má nejvýše jeden nulový bod v $\mathbb{R}$. To však znamená, že je rovnice (L) diskonjugovaná v $\mathbb{R}$. Navíc, vzhledem k (5.21) z definice Ljapunovova charakteristického exponentu dostáváme $\chi[x] = 0$, a proto z výše dokázaného vztahu (5.15) plyne $|\varrho| = 1$. Jelikož $\overline{\varrho} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ je také Floquetův multiplikátor rovnice (L), platí

$$|\overline{\varrho}| = |\varrho| = 1. \tag{5.22}$$

Odtud vyplývá, že $\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s = 0$, neboť řešení ϱ, $\overline{\varrho}$ kvadratické rovnice (2.2) splňují $\varrho\overline{\varrho} = \mathrm{e}^{-\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s}$. Avšak, vzhledem k části (5) věty 3.2, vztah (5.22) zaručí, že je rovnice (L) stabilní, což je ve sporu s tvrzením lemmatu 7.3 (viz dodatek). Získaný spor dokazuje, že $x(+\infty) = 0$, a tudíž podle (5.20) je

$$x(t) = -\int_t^{+\infty} x'(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Z tohoto vztahu, části (5) příkladu 5.3 a lemmatu 5.5 vyplývá $\chi[x] \leqq \chi[x']$, odkud spolu s (5.19) získáme požadovanou rovnost $\chi[x'] = \operatorname{Re} \alpha$. $\square$

6. Ukázky použití kritérií stability v mechanice

V této části ukážeme možné použití kritérií stability uvedených v předchozích kapitolách jak pro lineární, tak i nelineární neautonomní diferenciální rovnice 2. řádu objevující se při matematickém modelování pohybů mechanických soustav.

6.1. Mathieuho rovnice

V 70. letech 19. století studoval Émile Mathieu volné netlumené kmitání eliptické membrány, které je v nejjednodušším matematickém modelu obvykle popsáno lineární parciální diferenciální rovnicí hyperbolického typu. Po separaci prostorových proměnných získal v článku [8] obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\alpha^2} + \bigl(N - 4\lambda^2 c^2 \cos^2 \alpha\bigr)P = 0,$$

kde P je hledaná funkce proměnné α a N, λ, c jsou konstanty. Tuto rovnici lze po vhodném přeznačení a transformaci proměnné přepsat do tvaru

$$x'' + \bigl(\delta + \varepsilon \cos t\bigr)x = 0, \tag{6.1}$$

kde δ, ε jsou reálné parametry. Rovnice (6.1) je lineární diferenciální rovnicí 2. řádu s nekonstantním (avšak periodickým) koeficientem a běžně ji dnes v literatuře najdeme pod názvem Mathieuho rovnice. Vyšetřování stability této diferenciální rovnice zahájil pravděpodobně Edward Ince v článku [4] a dodnes je otázka stability rovnice (6.1) a jejích zobecnění hojně studována.

Je-li $\varepsilon = 0$, jedná se jednoduchou dvoučlennou lineární diferenciální rovnici s konstantním koeficientem, která je zřejmě stabilní (ale ne asymptoticky stabilní) v případě $\delta > 0$ a nestabilní v případě $\delta \leqq 0$ (viz např. tvrzení 1.4).

Je-li $\varepsilon \neq 0$, je situace mnohem zajímavější. Je známo, že v $\delta\varepsilon$-rovině existují regiony, v nichž je rovnice (6.1) stabilní či nestabilní (viz například přehledový článek [5]). Hranice těchto regionů jsou obvykle určovány numericky. Rovnice (6.1) je speciálním případem rovnice (L), v níž

$$p(t) := \delta + \varepsilon \cos t, \quad g(t) := 0 \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Dosazením do nerovnosti (4.3) pak dostaneme

$$\int_0^{2\pi} \bigl(\delta + \varepsilon \cos s\bigr)\, \mathrm{d}s \leqq \frac{4}{2\pi}$$

a z věty 4.1 proto plynou následující jednoduchá, avšak efektivní kritéria stability/nestability; určují samozřejmě pouze část jednoho z regionů stability/nestability.

Tvrzení 6.1. *Jestliže*

$$0 < |\varepsilon| \leqq \delta \leqq \frac{1}{\pi^2}\ ,$$

pak je rovnice (6.1) *stabilní (ale ne asymptoticky stabilní).*

Tvrzení 6.2. *Jestliže*

$$\delta \leqq -|\varepsilon| < 0,$$

pak je rovnice (6.1) *nestabilní.*

V kapitole 4 jsme zmínili, že kritéria stability rovnice (L), v níž koeficient p může střídat znaménko, jsou známa. V důkazech se opět využívá Floquetova teorie, ale důkazy jsou technicky mnohem náročnější než důkazy vět 4.1 a 4.3. Použitím takových obecnějších kritérií lze předpoklady tvrzení 6.1 a 6.2 podstatně zeslabit.

Tvrzení 6.3 ([7], věta 13.4, příklad 12.6)**.** *Jestliže* $\varepsilon \neq 0$ *a buď*

$$0 \leqq \delta \leqq \varepsilon^2 \left(\frac{\pi^2}{\left(\mathrm{e}^{2\pi|\varepsilon|} - 1\right)^2 - 1} \right),$$

nebo

$$|\varepsilon| \leqq \frac{1}{2\pi} \ln(1+\pi), \qquad -\frac{4\varepsilon^2}{\pi^3} \ln(1+\pi) \leqq \delta \leqq 0,$$

pak je rovnice (6.1) *stabilní (ale ne asymptoticky stabilní).*

Tvrzení 6.4 ([7], věta 13.3, poznámka 13.2, příklad 11.6)**.** *Jestliže* $0 < |\varepsilon| < 1$ *a*

$$\delta \leqq -\varepsilon^2,$$

pak je rovnice (6.1) *nestabilní.*

To, že v tvrzeních 6.1–6.4 dostáváme pouze část jednoho z regionů stability/nestability rovnice (6.1) není chyba, je to přirozené. Tato tvrzení jsme totiž dostali jako důsledky obecných kritérií stability použitelných pro dosti široké třídy neautonomních lineárních diferenciálních rovnic. Studujeme-li rovnici s konkrétním koeficientem, můžeme přizpůsobit metody tomuto konkrétnímu koeficientu a můžeme tak odvodit „přesnější“ výsledky.

6.2. Tlumené matematické kyvadlo s kmitajícím závěsem

V této části budeme uvažovat volné kmitání matematického kyvadla s viskózním tlumením, přičemž budeme předpokládat, že závěs kyvadla vertikálně osciluje a jeho pohyb je dán dvakrát spojitě diferencovatelnou ω-periodickou funkcí $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pohybová rovnice takové mechanické soustavy s jedním stupněm volnosti je tvaru

$$x'' + bx' + \left(\frac{\mathrm{g}}{\ell} - \frac{\psi''(t)}{\ell} \right) \sin x = 0, \tag{6.2}$$

kde x značí úhlovou výchylku kyvadla měřenou od svislé osy, b je tlumicí koeficient, g je tíhové zrychlení a ℓ je délka kyvadla.

Připomeňme, že bod $x_0 \in \mathbb{R}$ nazýváme ekvilibriem (nebo bodem rovnováhy) rovnice (6.2), jestliže má tato rovnice konstantní řešení $x(t) := x_0$. Každé ekvilibrium odpovídá rovnovážnému stavu uvažované mechanické soustavy. Je zřejmé, že rovnice (6.2) má nekonečně mnoho ekvilibrií, neboť každý nulový bod funkce sinus je jejím ekvilibriem. Soustřeďme se na ekvilibrium $x_0 = 0$.

Všimněme si nejprve, že je-li $\psi''(t) \equiv 0$ na $\mathbb{R}$, pak $x_0 = 0$ je ekvilibriem autonomní rovnice

$$x'' + bx' + \frac{\mathrm{g}}{\ell}\ \sin x = 0. \tag{6.3}$$

K určení jeho stability použijeme standardní linearizační větu (viz například [1], hlava IV, § 10). Rovnici (6.3) přepíšeme ve tvaru soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -\frac{\mathrm{g}}{\ell}\ \sin y_1 - by_2, \end{aligned} \tag{6.4}$$

jejímž ekvilibriem je mimo jiné bod $Y_0 = (x_0, 0) = (0, 0)$. Jacobiho matice vektorového pole $f(y_1, y_2) = \big(y_2, -\frac{\mathrm{g}}{\ell}\ \sin y_1 - by_2\big)$ je tvaru

$$Df(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\mathrm{g}}{\ell}\ \cos y_1 & -b \end{pmatrix},$$

odkud dostáváme

$$Df(Y_0) = Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\mathrm{g}}{\ell} & -b \end{pmatrix}.$$

Obě vlastní čísla matice $Df(Y_0)$ mají záporné reálné části, neboť b, g a ℓ jsou kladná čísla. Z linearizační věty proto plyne, že ekvilibrium Y_0 soustavy (6.4) je asymptoticky stabilní, a tudíž je asymptoticky stabilní také ekvilibrium $x_0 = 0$ rovnice (6.3).

Je-li $\psi''(t) \not\equiv 0$ na $\mathbb{R}$, situace je poněkud složitější. Využijeme větu 5.18 a dokážeme následující tvrzení.

Tvrzení 6.5. *Jestliže*

$$\psi''(t) \leqq \mathrm{g} \quad \textit{pro } t \in \mathbb{R}, \tag{6.5}$$

$$\int_a^{a+\omega} \mathrm{e}^{-bs}\ \mathrm{d}s \int_a^{a+\omega} \big(\mathrm{g} - \psi''(t)\big)\mathrm{e}^{bs}\ \mathrm{d}s \leqq 4\ell \quad \textit{pro } a \in [0, \omega), \tag{6.6}$$

pak je ekvilibrium x_0 rovnice (6.2) *asymptoticky stabilní.*

Důkaz. Rovnici (6.2) přepíšeme ve tvaru soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -\left(\frac{\mathrm{g}}{\ell} - \frac{\psi''(t)}{\ell}\right) \sin y_1 - by_2. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Řešení rovnice (6.2) a soustavy (6.7) jsou v následujícím vztahu: Je-li funkce x řešením rovnice (6.2), pak je vektorová funkce $y = (x, x')$ řešením soustavy (6.7). Naopak, je-li vektorová funkce $y = (y_1, y_2)$ řešením soustavy (6.7), pak je $y_2 = y_1'$ a funkce y_1 je řešením rovnice (6.2). Stabilitou řešení x rovnice (6.2) proto rozumíme stabilitu odpovídajícího řešení (x, x') soustavy (6.7).

Soustava (6.7) je speciálním případem soustavy (1.1), kde $f(t,\ y_1,\ y_2) :=$ $:= \big(y_2, -\big(\frac{g}{\ell} - \frac{\psi''(t)}{\ell}\big) \sin y_1 - b y_2\big)$. Položme

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Big(\frac{g}{\ell} - \frac{\psi''(t)}{\ell}\Big) & -b \end{pmatrix} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Jelikož platí $|\alpha - \sin \alpha| \leqq \alpha^2$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$, vektorová funkce f splňuje

$$\|f(t, z) - A(t)z\| \leqq \left|\frac{g}{\ell} - \frac{\psi''(t)}{\ell}\right| \ |z_1 - \sin z_1| \leqq \frac{g + |\psi''(t)|}{\ell}\ z_1^2 \leqq \frac{g + \psi^*}{\ell}\ \|z\|^2$$

pro $t \geqq 0$ a $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, kde $\psi^* = \max\big\{|\psi''(t)| : t \in [0, \omega]\big\}$.

Funkce ψ'' je ω-periodická, proto je ω-periodická také maticová funkce A. Podle tvrzení 5.17 je tedy lineární soustava (1.3) regulární. Ukážeme, že Ljapunovovy charakteristické exponenty soustavy (1.3) jsou záporné. Vskutku, soustava (1.3) odpovídá diferenciální rovnici

$$x'' + bx' + \left(\frac{g}{\ell} - \frac{\psi''(t)}{\ell}\right) x = 0. \tag{6.8}$$

Ljapunovovy charakteristické exponenty soustavy (1.3) jsou také Ljapunovovými charakteristickými exponenty rovnice (6.8) a vzhledem k tvrzení 5.19 jsou to reálné části Floquetových charakteristických exponentů rovnice (6.8). Z předpokladů (6.5), (6.6) a kladnosti čísel g, ℓ a b vyplývá, že pro rovnici (6.8) jsou splněny předpoklady části (C) věty 4.3. Z důkazu této věty však vidíme, že pro Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 rovnice (6.8) platí $|\varrho_1| < 1$, $|\varrho_2| < 1$ a použitím vztahu (3.1) tedy dostaneme pro Floquetovy charakteristické exponenty α_1, α_2 rovnice (6.8) nerovnosti $\operatorname{Re} \alpha_1 =$ $= \frac{1}{\omega} \ln |\varrho_1| < 0$ a $\operatorname{Re} \alpha_2 = \frac{1}{\omega} \ln |\varrho_2| < 0$. Z věty 5.18 proto vyplývá, že nulové řešení soustavy (6.7) je asymptoticky stabilní, a tudíž je asymptoticky stabilní také nulové řešení rovnice (6.2). Tím máme dokázánu asymptotickou stabilitu ekvilibria $x_0 = 0$ rovnice (6.2). $\square$

Využijeme-li fakt, že tlumicí koeficient v rovnici (6.8) je konstantní, a použijeme-li známé výsledky o vzdálenosti nulových bodů řešení rovnice (L), můžeme předpoklady (6.5), (6.6) tvrzení 6.5 nahradit bodovou podmínkou

$$\frac{g}{\ell} - \frac{\psi''(t)}{\ell} \leqq \frac{\pi^2}{\omega^2} + \frac{b^2}{4} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Platí-li totiž tato nerovnost, vzhledem ke kladnosti konstant b, g a ℓ lze ukázat, že jsou pro rovnici (6.8) splněny všechny předpoklady tvrzení 4.5 a 4.6. To spolu s poznámkou 4.7 zaručí, že pro Floquetovy multiplikátory ϱ_1, ϱ_2 rovnice (6.8) platí $|\varrho_1| < 1$ a $|\varrho_2| < 1$. Dostaneme tak například následující důsledek.

Důsledek 6.6. *Jestliže* $\psi(t) := A \sin(\Omega t)$ *pro* $t \in \mathbb{R}$ *a*

$$\frac{g}{\ell} + \frac{A}{\ell}\ \Omega^2 \leqq \frac{\Omega^2}{4} + \frac{b^2}{4}\ ,$$

pak je ekvilibrium x_0 *rovnice* (6.2) *asymptoticky stabilní.*

Tuto kapitolu uzavřeme poznámkou. Je-li $\psi(t) := A \cos t$ pro $t \in \mathbb{R}$, získáme pro „malé výchylky" kyvadla aproximativní pohybovou rovnici

$$x'' + bx' + \Big(\frac{\mathrm{g}}{\ell} + \frac{A}{\ell}\ \cos t\Big)x = 0,$$

což je Mathieuho rovnice (6.1) doplněná o tlumicí člen.

7. Dodatek

V této části uvedeme dvě lemmata potřebná k důkazu vět 4.3 a 5.21.

Definice 7.1. Rovnice (L) se nazývá **diskonjugovaná** v $\mathbb{R}$, jestliže každé její netriviální řešení má v $\mathbb{R}$ nejvýše jeden nulový bod.

Lemma 7.2. *Je-li*

$$p(t) \leqq 0 \quad \textit{pro } t \in \mathbb{R}, \tag{7.1}$$

pak je rovnice (L) *diskonjugovaná v* $\mathbb{R}$.

Toto tvrzení je v asymptotické teorii diferenciálních rovnic dobře známé. Ukážeme, jak ho lze jednoduše dokázat s využitím pouze základních znalostí matematické analýzy.

Důkaz lemmatu 7.2. Předpokládejme sporem, že je rovnice (L) konjugovaná v $\mathbb{R}$, tj. že má netriviální řešení u s více než jedním nulovým bodem v $\mathbb{R}$. Jelikož řešení u je netriviální, existují a, $b \in \mathbb{R}$ taková, že $a < b$, $u(t) \neq 0$ pro $t \in (a, b)$, $u(a) = 0$ a $u(b) = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že

$$u(t) > 0 \quad \text{pro } t \in (a, b), \tag{7.2}$$

rovnice (L) je totiž lineární. Odtud okamžitě plyne $u'(a) \geqq 0$ a $u'(b) \leqq 0$, neboť řešení u je spojitě diferencovatelná funkce. Navíc má pro každé $t_0 \in \mathbb{R}$ počáteční úloha

$$x'' + g(t)x' + p(t)x = 0; \quad u(t_0) = 0,\ \ u'(t_0) = 0$$

pouze triviální řešení, a proto

$$u'(a) > 0, \qquad u'(b) < 0. \tag{7.3}$$

Z rovnice (L) získáme

$$u''(t)\mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s} + u'(t)g(t)\mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s} = -p(t)\mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s}u(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R},$$

tj.

$$\Big(u'(t)\mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s}\Big)' = -p(t)\mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s}u(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Vzhledem k nerovnostem (7.1) a (7.2) odtud okamžitě plyne $\Big(u'(t)\mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s}\Big)' \geqq 0$ pro $t \in [a, b]$. Integrací tohoto vztahu od a do b dostaneme

$$u'(b)\mathrm{e}^{\int_0^b g(s)\,\mathrm{d}s} \geqq u'(a)\mathrm{e}^{\int_0^a g(s)\,\mathrm{d}s},$$

což je ve sporu s (7.3). □

Lemma 7.3. *Nechť koeficienty p, g rovnice* (L) *jsou ω-periodické funkce, přičemž $\int_0^\omega g(s)\,\mathrm{d}s = 0$. Je-li rovnice* (L) *diskonjugovaná v $\mathbb{R}$, pak je nestabilní.*

Důkaz. Předpokládejme, že je rovnice (L) diskonjugovaná v $\mathbb{R}$. Využijeme transformaci popsanou v kapitole 4. Víme, že existuje vzájemně jednoznačné přiřazení mezi řešeními rovnice (L) a řešeními rovnice (4.2) s nulovým tlumicím koeficientem, přičemž koeficient $\widehat{p}$ je definován v celém $\mathbb{R}$ a je $\widehat{\omega}$-periodický, kde $\widehat{\omega} = \int_0^\omega \sigma(g)(s)\,\mathrm{d}s$. Navíc, použitá transformace zachovává znaménko a „množství“ nulových bodů odpovídajících si řešení a také stabilitu rovnic. Z našeho předpokladu tedy vyplývá, že rovnice (4.2) je diskonjugovaná v $\mathbb{R}$. Použijeme-li tvrzení dokázaná v [7] (konkrétně větu 8.1, poznámku 3.2, větu 3.3 a poznámku 13.6), zjistíme, že je rovnice (4.2) nestabilní, což zaručí také nestabilitu rovnice (L). $\square$

Poděkování. Rád bych poděkoval svým kolegům za pečlivé přečtení rukopisu a za výborné nápady, čím doplnit text a zpřístupnit ho čtenáři. Moc si jejich pomoci vážím.

Literatura

[1] DEMIDOVICH, B. P.: *Lectures on stability theory (rusky).* Nauka, 1967.

[2] HARTMAN, P.: *Ordinary differential equations.* Wiley, 1964.

[3] CHICONE, C.: *Ordinary differential equations with applications.* Springer, 2006.

[4] INCE, E. L.: *Researches into the characteristic numbers of the Mathieu equation IV.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 46 (1927), 20–29.

[5] KOVACIC, I., RAND, R., SAH, S. M.: *Mathieu's equation and its generalizations: Overview of stability charts and their features.* Appl. Mech. Rev. 70 (2018), article no. 020802.

[6] LEONOV, G. A., KUZNETSOV, N. V.: *Time-varying linearization and the Perron effects.* Inter. J. Bifurc. Chaos 17 (2007), 1079–1107.

[7] LOMTATIDZE, A.: *Theorems on differential inequalities and periodic boundary value problem for second-order ordinary differential equations.* Mem. Differential Equations Math. Phys. 67 (2016), 1–129.

[8] MATHIEU, É.: *Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique.* J. Math. Pures Appl. 13 (1868), 137–203.

[9] SANSONE, G.: *Ordinary differential equations, Vol. I (rusky).* Izdat. inostrannoj literatury, 1953.

[10] ŠREMR, J.: *Floquetova teorie pro lineární obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu s periodickými koeficienty I.* Kvaternion (2022), No. 1–2, 17–31.
Dostupné z: `http://kvaternion.fme.vutbr.cz/2022/kv22_1-2_sremr_web.pdf`

[11] TONKOV, E. L.: *The second order periodic equation (rusky).* Dokl. Akad. Nauk SSSR 184 (1969), 296–299.

[12] YAKUBOVICH, V. A., STARZHINSKIJ, V. M.: *Linear differential equations with periodic coefficients and their applications (rusky).* Nauka, 1972.