Martin Hriňák

Nekonečné rady na strednej škole

Učitel matematiky, Vol. 31 (2023), No. 4, 232–250

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152018

NEKONEČNÉ RADY NA STREDNEJ ŠKOLE

Martin Hriňák

Nekonečné rady nepatria v školskej matematike medzi ťažiskové témy, aj keď môžu byť zaujímavé a dokážu žiakov podnietiť k živej diskusii. V tomto príspevku sa pozrieme na to, ako sa vyvíjala táto téma vo vybraných učebniciach a knihách pre stredoškolákov v posledných desaťročiach na území Československa, Česka a Slovenska. Do porovnania bolo zaradených 15 titulov (učebnice zvyčajne vychádzajú so „svojou“ zbierkou úloh, preto sú v porovnaní zahrnuté aj tieto zbierky). Okrem učebníc a publikácií uvedených v zozname literatúry boli do výskumu zaradené aj súčasné slovenské učebnice matematiky pre gymnáziá od Kubáčka, avšak v nich sa téma nekonečných radov medzi spracovanými témami vôbec nevyskytuje, a preto nie sú uvádzané ani v zozname literatúry.

Skúmané publikácie môžeme rozdeliť do niekoľkých skupín. Hlavnú skupinu publikácií tvoria štandardné učebnice a zbierky úloh pre žiakov stredných škôl (Kudláček et al., 1963; Odvárko & Řepová, 1986; Smida et al., 1988; Hecht, 2000, 2002; Zemek & Zemková, 2017; Králová & Navrátil, 2017; Odvárko, 2018, 2019; Tlustý, 2020). Druhú skupinu predstavujú materiály, ktoré sú určené pre šikovnejších žiakov najmä z tried s rozšíreným vyučovaním matematiky (Jarník, 1979; Smítal & Šalát, 1986; Králiková, 2006). Publikácie (Liška et al., 2019a, 2019b) nepredstavujú štandardné učebnice (nemajú schvaľovaciu doložku v SR), avšak sú používané na stredných školách ako pomocná literatúra, preto boli taktiež zaradené do prehľadu. Učebnica (Tlustý, 2020) a publikácia (Liška et al., 2019a) obsahujú aj odkazy na webové stránky, na ktorých sa dajú nájsť ďalšie úlohy. Uvedené publikácie sú ich prvým vydaním s výnimkou dvoch – (Odvárko, 2019) bola prvýkrát vydaná v roku 1995 a (Odvárko, 2018) v roku 1997, pričom existujú ešte staršie verzie týchto textov – napríklad text o nekonečných radoch je v učebnici Odvárka a Řepovej (1986) takmer totožný s textmi v učebniciach Odvárka (2019) a Smidu et al. (1988), tieto texty sa odlišujú len v niektorých formuláciách a príkladoch, pričom spôsob a rozsah výkladu je rovnaký.

V porovnávaných publikáciách boli sledované najmä nasledujúce ukazovatele:

- motivačné úlohy z histórie (Zénónove apórie),
- výklad o nekonečnom rade $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$,
- zavedenie základných pojmov a označenia $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a jeho dvojaký význam (rad aj súčet radu),
- konštrukcia postupnosti čiastočných súčtov a jej limity,
- vety o nekonečných radoch (nutné podmienky konvergencie, združovanie a prerovnávanie susedných členov nekonečných radov a pod.),
- nekonečný geometrický rad (pojem, súčet, dôkaz vzťahu pre súčet),
- príklady výpočtov súčtov a použitia nekonečných geometrických radov, aplikačné úlohy,
- určenie súčtu nekonečného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,
- zisťovanie konvergencie nekonečného radu typu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ (Grandiho rad),
- harmonický rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a jeho divergencia,
- počet riešených a neriešených úloh v rámci výkladu učiva a v zodpovedajúcej zbierke úloh.

K jednotlivým oblastiam uvedieme v nasledujúcich kapitolách podrobnejšie komentáre a zistenia.

1. Motivačné úlohy z histórie (Zénónove apórie)

Motivačné úlohy založené na Zénónových apóriách som našiel len v dvoch zdrojoch – v učebnici (Hecht, 2000) sa úlohou o Achillovi výklad o nekonečnom rade začína a v učebnici (Tlustý, 2020) ňou výklad končí. Vzhľadom na to, že tieto apórie sa v súčasných učebniciach nevyskytujú, priblížim ich v krátkosti čitateľovi.

Medzi prvé známe úlohy vedúce na sčitovanie nekonečného počtu sčítancov patria tzv. Zénónove apórie (paradoxy) z piateho storočia pred naším letopočtom. Aby sme lepšie pochopili jeho prístup a motiváciu, priblížime si najprv jeho filozofické východiská. Zénón z Eley (asi 490 – 430 p. n. l.), grécky matematik a filozof, bol žiakom Parmenida, ktorý „nahradil boha jediným, nemenným, nedeliteľným a nehybným bytím (súcnom) uzavretým do seba a vylučujúcim akúkoľvek variabilitu, zmenu alebo pohyb“ (Čižmár, 2017, s. 150). Zénónovým cieľom bolo vyvrátiť myšlienku pohybu predložením série príkladov, v ktorých sa za pomoci logických argumentov dostal z predpokladu pohybu k logickým protirečeniam. Podľa historických zdrojov bolo týchto príkladov približne 20, avšak do dnešnej doby sa zachovali len štyri. Ich znenie sa líši v rôznych literárnych zdrojoch, v nasledujúcom texte citujeme preklad podľa Čižmára (2017, s. 150):

> *Dichotómia:* Pohyb neexistuje, pretože to, čo sa pohybuje, musí prísť najprv do stredu, než príde na koniec.
>
> *Achilles a korytnačka:* V behu pomalší nikdy nebude predstihnutý rýchlejším, pretože prenasledujúci musí najprv dospieť k bodu, z ktorého vybehol prenasledovateľ, takže pomalší bude vždy nevyhnutne o určitú vzdialenosť stále vpredu.
>
> *Šíp:* Nech je všetko buď v pokoji, buď v pohybe a nech všetko zaberá priestor rovnajúci sa objemu predmetu. Pretože pohybujúci sa predmet existuje vždy v okamihu, je pohybujúci sa šíp nehybný.

> *Štadión:* Nech existujú dva rady telies, z ktorých každý sa skladá z toho istého počtu telies stáleho objemu. Nech sa tieto rady pohybujú po pretekárskej dráhe jeden vedľa druhého opačnými smermi rovnakou rýchlosťou, jeden od konca štadióna, druhý z jeho stredu. Prídeme k záveru, že polovica daného času sa rovná jeho dvojnásobku.

Prvé dve apórie vedú na sčitovanie nekonečných radov, a preto si ich vysvetlíme podrobnejšie. V apórii Dichotómia si predstavme, že máme prejsť istú vzdialenosť (bez ujmy na všeobecnosti nech je to cesta medzi bodmi A a B, ktorých vzdialenosť je jedna jednotka dĺžky, $|AB| = 1$). Na to, aby sme ju prešli, však musíme prejsť polovicu jednotkovej vzdialenosti – dostať sa do stredu cesty – stredu úsečky AB, ktorý si označíme S_1. Platí $|AS_1| = \frac{1}{2}$. Aby sme sa však dostali z bodu A do bodu S_1, musíme sa dostať do stredu cesty z bodu A do bodu S_1. Tento bod si označíme S_2. Jeho vzdialenosť od bodu A je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, teda $|AS_2| = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$. Takto môžeme ľubovoľne pokračovať a dostaneme, že na to, aby sme sa dostali do bodu S_n, musíme prejsť vzdialenosť $|AS_n| = \frac{1}{2^n}$. Teda v ľubovoľnom kroku musíme prejsť kladnú vzdialenosť, a teda pohyb sa nemôže začať. Ak by sa totiž pohyb začal v n-tom kroku, tak v tom čase by sme už museli byť o nenulovú vzdialenosť vzdialení od bodu A, čo ale znamená, že pohyb musel začať skôr. Preto musíme urobiť nekonečný počet krokov v konečnom čase, čo nie je možné, a pohyb sa tak nemôže vôbec začať.

Táto interpretácia je trochu náročná na pochopenie vzhľadom na to, že kroky sa robia spätne. Jednoduchšie je to interpretovať pomocou približovania k cieľu: Predstavme si opäť, že máme prejsť vzdialenosť medzi bodmi A a B, $|AB| = 1$. Na to, aby sme ju vychádzajúc z bodu A prešli, musíme najprv prejsť polovicu jednotkovej vzdialenosti – dostať sa do stredu cesty – stredu úsečky AB, ktorý si označíme S_1. Platí $|S_1B| = \frac{1}{2}$. Aby sme sa však dostali z bodu S_1 do bodu B, musíme sa dostať do stredu cesty z bodu S_1 do bodu B. Tento bod si označíme S_2. Jeho vzdialenosť od bodu B je $|S_2B| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, teda $|S_2B| = \frac{1}{2^2}$. Takto môžeme ľubovoľne pokračovať a dostaneme, že v n-tom kroku budeme v bode S_n, pričom jeho vzdialenosť od bodu B bude $|S_nB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$. Teda v ľubovoľnom kroku budeme od bodu B vzdialení kladnú vzdialenosť, a teda do bodu B nikdy neprídeme. Aby sme tam došli, museli by sme urobiť nekonečný počet krokov v konečnom čase, čo nie je možné.

Na podobnom princípe funguje aj apória Achilles a korytnačka – ak dá Achilles korytnačke istý náskok, tak na to, aby prišiel do bodu, z ktorého vyštartovala, potrebuje istý čas (nehľadiac na to, koľkokrát rýchlejší Achilles je, je tento čas nenulový). Za tento čas sa však korytnačka posunie o istú vzdialenosť. Achilles musí opäť prebehnúť túto vzdialenosť za nenulový čas atď. To ale znamená, že korytnačka bude vždy o istú vzdialenosť pred Achillom, a teda Achilles ju nepredbehne.

Riešenie týchto problémov spočíva v správnom uchopení a pochopení nekonečna. Zénón pri svojej argumentácii využíval tzv. potenciálne nekonečno (nekonečno, ktoré nevieme dosiahnuť, ale vieme sa k nemu ľubovoľne blížiť). Ak sa na problémy pozrieme z pohľadu tzv. aktuálneho nekonečna (nekonečno, ktoré je „výsledkom“ nekonečného procesu, nekonečno, ktoré dokážeme „uchopiť“ ako celok), tak dokážeme jednotlivé vzdialenosti spočítať a aj keď ich je nekonečne veľa, tak ich dokážeme prejsť za konečný čas (v prípade oboch vyššie uvedených apórií sa totiž s dĺžkou úseku skracuje aj čas potrebný na jeho prejdenie).

To, že sa tieto apórie dostali raz na začiatok výkladu a raz na jeho koniec, súvisí pravdepodobne aj s ich náročnosťou, keďže u ostatných autorov sa do témy nedostali vôbec. Očakávanie, že týmito motivačnými úlohami bude začínať väčšina autorov, sa však nenaplnilo. Vzhľadom na súčasnú úroveň stredoškolákov je možné prikloniť sa k názoru, že tieto apórie je vhodné predniesť až na konci výkladu témy nekonečných radov, keď už žiaci dokážu vnímať ich podstatu a dokážu si pomocou nich spočítať napríklad aj to, kedy Achilles predbehne korytnačku, ak sú zadané údaje o jej náskoku a ich rýchlostiach, a porovnať tieto výsledky s „fyzikálnym“ výpočtom. Druhým aspektom, ktorý môžeme pri zaradení tejto úlohy zobrať do úvahy, sú medzipredmetové vzťahy s filozofiou. Ak sa približne v rovnakom čase preberá téma starogréckych filozofov z eleatskej školy na hodinách filozofie, potom je zaradenie apórií na hodinách matematiky veľmi vítané.

2. Výklad o nekonečnom rade $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Táto úloha sa vyskytla vo všetkých skúmaných učebniciach, pričom sa väčšinou vyskytovala na prvých miestach v rámci témy nekonečných radov. Výnimkou sú (Liška et al., 2019a), (Králiková, 2006) a (Smítal & Šalát, 1986), kde sa výklad témy začína definíciou základných pojmov. V publikácii (Liška et al., 2019a) sa téma nekonečných radov začína definíciou postupnosti čiastočných súčtov bez toho, aby boli čo i len spomenuté základné pojmy, ako sú členy radu a pod. Niektorí autori doplnili výklad geometrickou interpretáciou tohto radu vo forme postupného delenia torty (Tlustý, 2020; Zemek & Zemková, 2017), iní vo forme skracujúcich sa úsečiek (Liška et al., 2019a). Toto doplnenie je vhodné, avšak je potrebné dávať pozor na precízne definovanie procesu delenia. Vzhľadom na jednoduchosť tejto úlohy sa javí jej zaradenie na úvod výkladu ako najvhodnejšie. Učebné texty, ktoré sú určené pre žiakov so záujmom o matematiku, nekladú veľký dôraz na motiváciu, pretože tá sa u nich implicitne predpokladá, a tak výklad realizujú systémom definícia-veta-dôkaz.

3. Základné pojmy, označenie a vety

V tejto oblasti sa autori vydali rôznymi smermi. Väčšina z nich najprv definuje členy nekonečného radu, jeho označenie, postupnosť čiastočných súčtov a potom definujú súčet nekonečného radu ako limitu jeho postupnosti čiastočných súčtov. Veľmi zaujímavá (a zároveň aj ojedinelá) je definícia Smítala a Šaláta (1986, s. 46):

> Nechť $a_n \in \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Nekonečnou řadou* (stručněji řadou)
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

nazýváme posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ (n = 1, 2, \ \dots).$$

V tejto definícii nie je totiž nekonečný rad zavedený ako formálny nekonečný súčet zapisovaný pomocou symbolu $\sum$, ale ako špeciálne zostavená postupnosť (postupnosť čiastočných súčtov). Tento prístup môže u žiakov stredných (ale aj vysokých) škôl spôsobiť značný problém s filozofickým uchopením tohto pojmu. Aj preto túto definíciu nemožno odporúčať pre použitie na strednej škole. Zámer autorov podrobne opisuje Šalát (1975, s. 1) – cieľom tejto definície bolo „dať skutočnú definíciu radu bez neurčitého pojmu „symbol“, definíciu, ktorá v konečnom dôsledku prevádza pojem radu na pojem množiny“. Táto neobvyklá definícia potom uľahčila výklad ďalších pojmov (medzi ne patria napríklad pojmy konvergencia/divergencia, ktoré už boli predtým zavedené pri všeobecnej postupnosti, ktorej limita sa v našom prípade nazýva súčtom radu, či termín „rad s ohraničenou postupnosťou čiastočných súčtov“, ktorý bolo možné skrátiť na „ohraničený rad“).

Podobne je potrebné žiakom zdôrazniť aj to, že pod symbolom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ musíme chápať nielen číslo ako súčet tohto radu, ale aj rad ako taký. Na túto skutočnosť priamo upozorňujú Jarník (1979), Odvárko (2019), Odvárko a Řepová (1986), Smida et al. (1988), Tlustý (2020) a Zemek a Zemková (2017). Ostatní autori sa tejto otázke nevenujú.

Problematika prerovnávania členov nekonečných súčtov a umiestňovania zátvoriek v nich je v aktuálnych učebniciach spomenutá len u Odvárka (2019) a Zemka a Zemkovej (2017). V poslednej menovanej učebnici na strane 57 autori ukazujú, že vhodné prerovnanie, resp. umiestnenie zátvoriek medzi členy tohto radu, môže viesť k trom rôznym súčtom (0, 1 a -1) Grandiho radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

Pojem divergentného nekonečného radu zavádzajú všetci autori okrem Smidu et al. (1988). Liška et al. (2019a, s. 88 – 95) sa v celej svojej publikácii obmedzuje len na nekonečné geometrické rady a ďalej nebudeme na túto skutočnosť upozorňovať. Autori vo svojich publikáciách uvádzajú najčastejšie ako príklady divergentných radov nekonečný geometrický rad s kvocientom väčším ako 1, Grandiho rad, prípadne nekonečný rad tvorený z členov aritmetickej postupnosti s nenulovou diferenciou. Harmonický rad okrem kníh určených pre nadaných žiakov (kde sa jeho divergencia aj dokazuje) spomínajú len Zemek a Zemková (2017).

Z terminologického hľadiska je zaujímavé sledovať označovanie postupností – v publikáciách vydaných do roku 2000 sú preferovaným označením zložené zátvorky. Výnimkou z tohto pravidla je Smítal a Šalát (1986), kde však preferenciu pre okrúhle zátvorky môžeme pripísať tomu, že táto publikácia vyšla ako skriptum písané na písacom stroji, a teda zložené zátvorky by museli dopisovať ručne; túto teóriu podporujú aj iné publikácie týchto autorov z rovnakého obdobia, kde používajú zložené zátvorky. V publikáciách vydaných po roku 2000 analyzovaní autori okrem Králikovej (2006) používajú okrúhle zátvorky.

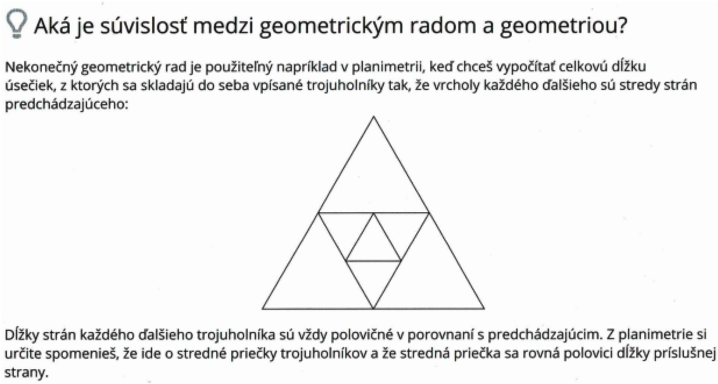
Vety o konvergencii nekonečných radov nájdeme len v troch publikáciách – (Hecht, 2000), (Králiková, 2006) a (Smítal & Šalát, 1986), čo v prípade posledných dvoch kníh vyplýva aj z ich zamerania na talentovaných žiakov.

4. Nekonečný geometrický rad a jeho aplikácie

Pri definovaní a odvodzovaní vlastností nekonečných geometrických radov je výnimkou dvojica učebníc autorov Smidu et al. (1988) a Odvárka (2019) – obe učebnice odvodzujú vzorec pre súčet členov nekonečnej geometrickej postupnosti ako limitu postupnosti čiastočných súčtov ešte pred definovaním pojmu nekonečného radu. Vzhľadom na to, že Odvárko bol členom autorského kolektívu Smida et al. (1988), je táto zhoda pochopiteľná. Ostatní autori sa však nekonečnému geometrickému radu a jeho vlastnostiam venujú až po definovaní základných pojmov nekonečných radov. Dôkaz tvrdenia o súčte nekonečného geometrického radu obsahujú všetky učebné texty okrem Lišku et al. (2019a). Všetci autori okrem Jarníka (1979) sa venujú precvičeniu určovania súčtu nekonečného geometrického radu na minimálne jednom cvičení, zvyčajne viacerých.

V rámci aplikácií nekonečných geometrických radov sa autori zvyčajne venujú prevodu periodických desatinných čísel na zlomky, pričom Smida et al. (1988) a Smítal a Šalát (1986) sa úlohám tohto typu priamo nevenujú, resp. venujú len v rámci neriešených úloh.

Autori novších učebníc dbajú na vizuálnu stránku a uvádzajú minimálne jednu úlohu na geometrický rad s geometrickým podtextom. Napríklad ide o úlohu, v ktorej je úlohou žiakov určiť celkovú dĺžku čiar v útvare, ktorý vznikne tak, že v rovnostrannom trojuholníku nakreslíme jeho stredné priečky, vo vzniknutom trojuholníku tvorenom týmito strednými priečkami opäť stredné priečky atď. Výnimkou je Liška et al. (2019a), ktorý tento útvar síce zobrazuje pod heslom „Aká je súvislosť medzi geometrickým radom a geometriou?“, ale s komentárom, ktorý na slabšieho žiaka môže pôsobiť mätúco, navyše túto úlohu ponecháva nevyriešenú (obr. 1).



Obr. 1: Aká je súvislosť medzi geometrickým radom a geometriou? (Liška et al., 2019a, s. 90)

Ďalšou oblasťou, ktorou sa autori snažia zaujať čitateľa, sú útvary, ktoré majú konečný obsah a nekonečný obvod (Sierpińského trojuholník a Kochova krivka) – tieto útvary sú vizuálne atraktívne, matematicky zaujímavé a v spojení so slovom fraktál vyvolávajú záujem žiakov o ne.

5. Určenie súčtu nekonečného radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Tento rad je jedným z mála (s výnimkou geometrických radov), ktorých súčet sa dá relatívne ľahko určiť aj na úrovni strednej školy. Napriek tomu sa tento rad vo väčšine učebníc neuvádza a v učebniciach vydaných po roku 2000 ho nachádzame len u Odvárka (2019). Skutočnosť, že existujú konvergentné rady, ktoré nie sú geometrické, sa v učebniciach explicitne nespomína, a aj preto je vhodné tento rad do vyučovania zaradiť.

Pri určovaní súčtu tohto radu využijeme rozklad zlomku $\frac{1}{n(n+1)}$ na parciálne zlomky, teda že pre všetky prirodzené čísla n platí

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Potom pre postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ tohto radu platí

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Využitím tohto vzťahu a jednoduchým limitným prechodom dostaneme, že platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

a teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

Tento rad patrí medzi tzv. teleskopické rady. Pri určovaní ich čiastočných súčtov využívame to, že po vhodnej úprave jednotlivých členov radu (zvyčajne) na parciálne zlomky sa tieto parciálne zlomky navzájom odčítajú a zostane ich len konečný počet nezávislý od indexu n súčtu s_n. Pre takýto výraz s_n už je potom oveľa jednoduchšie spočítať jeho príslušnú limitu.

6. Rozsah spracovania témy

Zaujímavým zistením bolo to, že celkový počet strán venovaných téme nekonečných radov nezodpovedá množstvu, resp. hĺbke preberaného učiva. Najvyšší počet riešených úloh – 18 – uvádza Králiková (2006) a druhý najvyšší počet – 15 – Zemek a Zemková (2017). Najvyšší počet neriešených úloh v učebnici uvádzajú Odvárko (2018) – 17/39, Smítal a Šalát (1986) – 20/31 a Králiková (2006) – 9/18. Prvé číslo udáva počet neriešených úloh z hľadiska typológie a druhé číslo počet úloh na úrovni radov (ak má jedna úloha 3 časti, tak prispieva v uvedenom ukazovateli v prvom čísle hodnotou 1 a v druhom čísle hodnotou 3, skrátenene hodnotou „1/3“). Zo zbierok k učebniciam obsahuje najviac úloh Hecht (2002) – až 16/63 úloh – a Králová a Navrátil (2017) – 19/56 – pri rovnakom spôsobe sledovania úloh.

7. RVP/ŠVP a maturita

Súčasná pedagogická dokumentácia v Česku neobsahuje na úrovni *Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia* (VÚP, 2007, s. 24 – 25) žiadnu zmienku o nekonečných radoch. Žiak má zvládnuť z oblastí postupností a radov len oblasť postupností: v rámci oblasti *Závislosti a funkční vztahy* „žák řeší aplikační úlohy s využitím poznatků o funkcích a posloupnostech a interpretuje z funkčního hlediska složené úrokování, aplikuje exponenciální funkci a geometrickou posloupnost ve finanční matematice“ a ovláda učivo „posloupnost – určení a vlastnosti posloupností, aritmetická a geometrická posloupnost“.

Na Slovensku je v tomto smere stav horší a *Štátny vzdelávací program* vo vzdelávacom štandarde pre učebný predmet matematika – gymnázium so štvorročným a päťročným vzdelávacím programom (ŠPÚ, 2015) vôbec neobsahuje učivo o postupnostiach. Tento dokument na uvedenú skutočnosť aj priamo upozorňuje tým, že uvádza „orientačný prehľad tém, ktoré nie sú náplňou Štátneho vzdelávacieho programu, ale sú obsiahnuté v požiadavkách na maturitu z matematiky“ (ŠPÚ, 2015, s. 31), medzi ktorými sa vyskytuje aj téma *Aritmetická a geometrická postupnosť*.

Na úrovni maturitnej skúšky zo skúšobného predmetu matematika v Česku opäť nekonečné rady nenájdeme, avšak v rámci tematického okruhu *Posloupnosti a finanční matematika* (CZVV, 2014, s. 10) nájdeme štyri základné okruhy – *Základní poznatky o posloupnostech, Aritmetická posloupnost, Geometrická posloupnost* a *Využití posloupností pro řešení úloh z praxe, finanční matematika*. Podobne je to aj na Slovensku, kde sú obsahom maturitnej skúšky z matematiky (ŠPÚ, 2019, s. 11 – 15) v rámci témy *Funkcie* základné vlastnosti postupností (lokálne extrémy, monotónnosť), postupnosti dané rekurentne, aritmetické a geometrické postupnosti (základné pojmy, prevod explicitného a rekurentného vyjadrenia pre n-tý člen postupnosti, určenie súčtu prvých n členov danej postupnosti). Obsahom maturitnej skúšky z matematiky teda v oboch krajinách nie sú nekonečné rady vôbec.

Od školského roka 2020/2021 sa v Česku realizuje skúška „matematika rozšiřující“, v rámci ktorej už nekonečné rady nájdeme. Oproti maturitnej skúške z matematiky pribudla v rámci tematického okruhu *Posloupnosti a řady, finanční matematika* (CZVV, 2020, s. 11) téma *Limita posloupnosti a nekonečná geometrická řada*, v rámci ktorej má žiak vedieť používať pojmy vlastná a nevlastná limita, konvergentná a divergentná postupnosť, vedieť použiť vety o limitách postupností na výpočet limity postupnosti a určiť podmienky konvergencie nekonečného geometrického radu a vypočítať jeho súčet. V zadaniach z roku 2021 nájdeme v oboch zadaniach didaktických testov (jar aj jeseň 2021) po jednej úlohe z oblasti nekonečných radov (obr. 2 a 3).

8. Záver

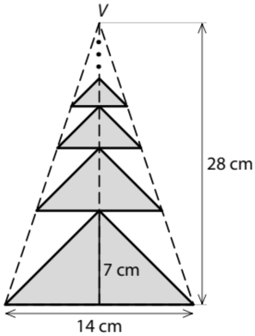
Na základe predložených ukážok zo starších i aktuálnych kníh a učebníc matematiky pre žiakov stredných škôl a aktuálnych požiadaviek na celoštátnej úrovni vidíme, že požadovaná úroveň vedomostí v oblastí postupností, limít a nekonečných radov neustále klesá. Pritom problematika nekonečného geometrického radu a limity sa dá aj slabším žiakom veľmi ľahko a rýchlo priblížiť, ako nám ukazuje aj Kudláček et al. (1963) v učebnici *Matematika pro 1. a 2. ročník studia na středních průmyslových školách pro pra-*

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

Šedý obrazec je složen z nekonečně mnoha rovnoramenných trojúhelníků. Každé dva sousední trojúhelníky mají právě jeden společný bod a jsou obrazem a vzorem ve stejnolehlosti se středem *V*. Na obrázku jsou zakresleny pouze 4 trojúhelníky.

V největším trojúhelníku má základna délku 14 cm a výška na základnu velikost 7 cm.

Výška celého obrazce je 28 cm.



(*CZVV*)

max. 3 body

10 Vypočtěte v cm^2 obsah šedého obrazce.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Obr. 2: Úloha č. 10, jar 2021 (CZVV, 2021a, s. 9)

max. 3 body

10 Je dána rovnice, jejíž levou stranu tvoří nekonečná geometrická řada.

$$\frac{1}{x-1}-\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{9}{(x-1)^3}-\frac{27}{(x-1)^4}+\cdots=\frac{8-x}{16}$$

10.1 Určete množinu všech $x \in \mathbf{R}$, pro která je řada na levé straně rovnice konvergentní.

10.2 Řešte rovnici v oboru **R**.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

Obr. 3: Úloha č. 10, jeseň 2021 (CZVV, 2021b, s. 9)

cující, kde autor na základe úloh o geometrickej postupnosti (má definovanú geometrickú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, S_n je súčet prvých n členov tejto postupnosti) intuitívne definuje pojem nekonečného radu. Touto ukážkou (použijúc termíny a formulácie použité autorom, pozorný čitateľ isto nájde aj nepresnosti, ktoré vzhľadom na autentickosť textu ponechávame v pôvodnom znení) zároveň zakončíme aj tento príspevok:

> Narůstá-li v součtu S_n n členů posloupnosti neomezeně počet členů n ($n \to \infty$), dostáváme tzv. **nekonečnou řadu.** Např. součtem členů geometrické posloupnosti $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$:
>
> $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$
>
> je uvedený tvar, kde třemi tečkami naznačujeme, že součet pokračuje neomezeně dále.
>
> Vypočítejme dílčí součty S_1, S_2, S_3, ... naší posloupnosti:
>
> $$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ S_3 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \\ S_4 &= \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} \\ &\vdots \\ S_{100} &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right) = \\ &= 2 - \frac{1}{2^{99}} \doteq 2 \\ S_{1000} &= 2 - \frac{1}{2^{999}} \doteq 2 \end{aligned}$$
>
> Zjišťujeme, že hodnota S_n se blíží čím dále tím více číslu 2. Roste-li bez omezení číslo n ($n \to \infty$), blíží se i S_n bez omezení číslu 2 ($S_n \to 2$).
>
> Číslo 2, které je hranicí tohoto blížení, nazýváme **limitou součtu** S_n naší nekonečné geometrické řady pro

$n \to \infty$, a píšeme:

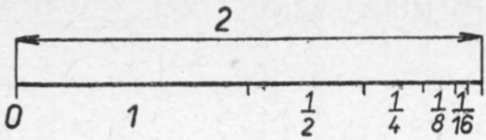
$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2$$

nebo

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = 2$$

Vidíme, že se prakticky nejedná o součet nekonečné řady (nekonečně mnoho čísel sčítat nemá smyslu), ale o limitu součtu (z lat. limes – mez, hranice). Přesto však zůstáváme z historických důvodů u původní terminologie – nekonečná řada a její součet.

O tom, že součet nekonečné řady $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$ skutečně existuje, přesvědčíme sa snadno graficky (obr. 4).



Obr. 320

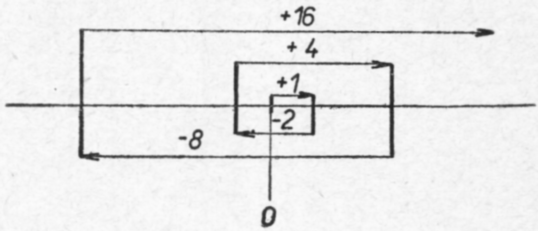
Obr. 4

Podobnou úvahu je možno provést i pro řadu $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$, která má kvocient $q = -\frac{1}{2}$. Limita součtu existuje a je rovna $\frac{2}{3}$.

Naproti tomu u řad

$$1 + 1 + 1 + \ldots \text{ s kvocientem } q = 1$$
$$1 - 2 + 4 - 8 + \ldots \text{ s kvocientem } q = -2$$

zjistíme, že limita součtu neexistuje (obr. 5):



Obr. 321

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	$\to S_n$
1	2	3	4	5	$\to \infty$ pro $n \to \infty$

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	$\to S_n$
1	−1	3	−5	11	? pro $n \to \infty$

Obr. 5

Ve všech případech se jednalo o součet členů geometrické posloupnosti, o **nekonečnou geometrickou řadu.** Z příkladů je možno učinit závěr: **Tento součet existuje pouze pro**

$$-1 < q < 1$$

a je

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}}$$

neboť q^n je za uvedeného předpokladu veličinou bez omezení blížící se nule, je-li $n \to \infty$ $\left(q = \frac{1}{2}; q^{100} = = \frac{1}{2^{100}} \ldots\right)$ a je:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \frac{1-0}{1-q} = a_1 \frac{1}{1-q}$$

(Kudláček et al., 1963, s. 543 – 545)

Literatura

[1] CZVV (2014). *Katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky platný od školního roku 2015/2016. Matematika*. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. `https://maturita.cermat.cz/files/files/katalog-pozadavku/MA_Katalog_pozadavku_MZ_1718.pdf`

[2] CZVV (2020). *Katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky platný od školního roku 2020/2021. Matematika rozšiřující*. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. `https://maturita.cermat.cz/files/files/MR/MR-katalog.pdf`

[3] CZVV (2021a). *Matematika rozšiřující. Maturitní zkouška – jaro 2021 – didaktický test*. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. `https://maturita.cermat.cz/files/files/MA-rozsirujici/intaktni-zaci/MZ2021_MX_DT.pdf`

[4] CZVV (2021b). *Matematika rozšiřující. Maturitní zkouška – podzim 2021 – didaktický test*. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. `https://maturita.cermat.cz/files/files/MA-rozsirujici/intaktni-zaci/MZ2021P/MZ2021P_MX_DT.pdf`

[5] Čižmár, J. (2017). *Dejiny matematiky. Od najstarších čias po súčasnosť*. Perfekt.

[6] Hecht, T. (2000). *Matematika pre 4. ročník gymnázií a SOŠ, 1. zošit – Postupnosti*. Orbis Pictus Istropolitana.

[7] Hecht, T. (2002). *Matematika pre 4. ročník gymnázií a SOŠ, 4. zošit – Zbierka úloh*. Orbis Pictus Istropolitana.

[8] Jarník, J. (1979). *Posloupnosti a řady (Škola mladých matematiků 43)*. Mladá fronta.

[9] Králiková, J. (2006). *Matematika v dialógoch – Nekonečné rady*. `http://www.galeje.sk/web_object/9491.pdf`

[10] Králová, M., & Navrátil, M. (2017). *Matematika pro střední školy – 9. díl: Posloupnosti, řady, finanční matematika – Pracovní sešit*. Didaktis.

[11] Kudláček, L., Válka, F., & Burian, F. (1963). *Matematika pro 1. a 2. ročník studia na středních průmyslových školách pro pracující*. Státní pedagogické nakladatelství.

[12] Liška, M., Valenta, T., & Král, L. et al. (2019a). *Matika pre spolužiakov. Postupnosti a rady. Učebnica*. PreSpolužiakov.sk.

[13] Liška, M., Valenta, T., & Král, L. et al. (2019b). *Matika pre spolužiakov. Postupnosti a rady. Pracovný zošit*. PreSpolužiakov.sk.

[14] Odvárko, O., & Řepová, J. (1986). *Stereometrie a posloupnosti pro III. ročník studijních oborů SOU*. Státní pedagogické nakladatelství.

[15] Odvárko, O. (2018). *Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia. Posloupnosti a řady*. Prometheus.

[16] Odvárko, O. (2019). *Matematika pro gymnázia. Posloupnosti a řady*. Prometheus.

[17] Smida, J., Odvárko, O., Božek, M., & Ryšánková, M. (1988). *Postupnosti a rady pre gymnázium*. Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

[18] Smítal, J., & Šalát, T. (1986). *Posloupnosti a řady pro III. ročník tříd gymnázií se zaměřením na matematiku*. Státní pedagogické nakladatelství.

[19] Šalát, T. (1975). K definícii pojmu nekonečného radu a divergencii harmonického radu. *Matematické obzory, 7*, 1 – 5.

[20] ŠPÚ (2015). *Štátny vzdelávací program – Vzdelávací štandard pre učebný predmet matematika – gymnázium so štvorročným a päťročným vzdelávacím programom*. Štátny pedagogický ústav. `https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_g_4_5_r.pdf`

[21] ŠPÚ (2019). *Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky*. Štátny pedagogický ústav.

[22] Tlustý, P. (2020). *Matematika s nadhledem od prváku k maturitě, 14. díl Posloupnosti a řady*. Fraus.

[23] VÚP (2007). *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia.* Výzkumný ústav pedagogický v Praze. `http://www.nuv.cz/file/159_1_1/`

[24] Zemek, V., & Zemková, K. (2017). *Matematika pro střední školy – 9. díl: Posloupnosti, řady, finanční matematika – Učebnice.* Didaktis.

Abstract

The article analyzes the development of the issue of teaching infinite series in selected textbooks and books for high school students in recent decades in Czechoslovakia, Czechia, and Slovakia to the current state of state/framework educational programs and the school-leaving examination. It takes a closer look at Zeno's aporias and telescopic series. Two interesting approaches to the definition of the infinite series are presented.

Martin Hriňák
Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity
Kotlářská 267/2
611 37 Brno
e-mail: hrinak@gmail.com