

Rozhledy matematicko-fyzikální

Luděk Spíchal

Aproximace čísla π pomocí zlatého řezu a kovových průměrů

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 98 (2023), No. 4, 20–30

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/152001>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2023

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Aproximace čísla π pomocí zlatého řezu a kovových průměrů

Luděk Spíchal, Česká lesnická akademie, Trutnov

Stanovení hodnoty čísla π poutá pozornost matematiků již od starověku. Prvotní postupy stanovení hodnoty čísla π vycházely ze znalostí starořeckých matematiků. Výpočet navržený Archimédem a dále rozvíjený v následujících generacích je založen na použití opsaných a vepsaných mnohoúhelníků a současném využití exhaustivní (vyčerpávající) metody. Archimédes ve své práci začal s šestiúhelníkem a nakonec sestrojil pravidelný mnohoúhelník s 96 stranami a získal tak odhad hodnoty čísla π odpovídající nerovnosti

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

nebo

$$3,14084 < \pi < 3,14289,$$

tedy s přesností na dvě desetinná místa. Daný postup lze považovat z geometrického pohledu za velmi intuitivní a to zejména zjevným spojením výpočtu hodnoty čísla π a délky kružnice. Nevýhodou je značně omezená možnost získání většího počtu desetinných pozic. Ludolph van Ceulen (1540–1610) dokázal v roce 1596 pomocí mnohoúhelníku o 60×2^{29} stranách vypočítat z dnešního pohledu „pouhých“ 20 desetinných míst. Později dokázal výpočet ještě zpřesnit na 35 desetinných míst, a to použitím pravidelného mnohoúhelníku o 2^{62} stranách.

Další výrazný pokrok v dané oblasti nastal v 17. století. Objev kalkulu a další rozvoj matematiky přinesl mnohem výkonnější metody umožňující stanovit větší počet desetinných míst než dříve používané geometrické metody. Velkou roli sehrály zejména nekonečné řady konvergující k číslu π , jako například řada

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots,$$

dnes připisovaná skotskému matematikovi Jamesi Gregorymu (1638–1675) a Gottfriedu Wilhelmu Leibnizovi (1646–1716), která byla ovšem

známa již v období před nástupem kalkulu díky práci indického matematika Mádhavy ze Sangamagrámy (asi 1350–1425). Tato řada se ovšem pro praktický výpočet čísla π příliš nehodí, neboť se hodnotě čísla π blíží (konverguje) velmi pomalu. Museli bychom sečíst zhruba 4 000 členů řady tak, aby byl výsledek přesnější než Archimédův. Na druhou stranu platí, že nejen tato řada, ale i další postupně objevované nekonečné řady konvergující k číslu π naznačují, že za zdánlivým chaosem se patrně ukrývá jistý řád.

Významné postavení mezi nekonečnými řadami využívanými pro výpočty desetinných pozic čísla π představuje rozvoj funkce arkus tangens¹⁾

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \tag{1}$$

objevený již zmíněným J. Gregorym. Jeho objev tak např. již v roce 1705 mohl využít společně s nedávno objeveným kalkulem anglický astronom a matematik Abraham Sharp (1651–1742) k sestavení řady

$$\pi = 2\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{27} + \frac{\sqrt{3}}{45} - \dots\right),$$

¹⁾Funkce arkus tangens je inverzní k funkci tangens, jejíž definiční obor je omezen na interval $(-\pi/2; \pi/2)$. Arkus tangens zapisujeme v matematických výrazech ve tvaru arctg nebo tg^{-1} . Platí, že tangens daného úhlu udává číslo, jehož arkus tangens je opět daný úhel, např.

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \iff \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Dále naznačíme postup odvození uvedeného rozvoje funkce arkus tangens, který ovšem k úplnému porozumění vyžaduje znalosti z vyšší matematiky. Platí, že

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Jestliže $|x| < 1$, pak lze lomený výraz zapsat ve tvaru nekonečné řady

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots,$$

kde dále integraci člen po členu dostáváme

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

kde uplatnil rovnost²⁾

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \iff \frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3},$$

a dokázal správně určit 72 desetinných pozic čísla π .

Použití řady pro rozvoj funkce arkus tangens se stalo základem pro celou řadu dalších vzorců. Pro účely našeho článku dále zmíníme práci anglického astronoma Johna Machina (asi 1686–1751), který v roce 1706 (tedy pouhý jeden rok po A. Sharpovi) publikoval vzorec³⁾

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}. \quad (2)$$

Uvedený vzorec v kombinaci s řadou pro rozvoj funkce arkus tangens poskytuje rychle konvergující řadu, s jejíž pomocí Machin dokázal určit hodnotu π s přesností na 100 desetinných pozic. Machinovy vzorce se následně staly zavedeným nástrojem, který postupně rozpracovaly další generace matematiků (např. [1]). Zmínit na tomto místě můžeme vzorec

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}, \quad (3)$$

označovaný podle geniálního švýcarského matematika Leonharda Eulera (1707–1783) nebo následující vzorec, který tvoří tři členy

$$\frac{\pi}{4} = 12 \operatorname{arctg} \frac{1}{18} + 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} - 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

a který je nazýván podle slavného německého matematika Carla Friedricha Gausse (1777–1855).

Záměrem článku je ukázat příklad odvození vzorce pro výpočet čísla π zahrnující:

- konstrukci převrácené hodnoty *zlatého řezu* na jednotkové parabole,
- odvození vztahu pro výpočet čísla π pomocí zlatého řezu, jeho převrácené hodnoty a funkce tangens,

²⁾Objev rovnosti je připisován slavnému anglickému astronomovi, matematikovi a fyzikovi Edmundu Halleyovi (1656–1742).

³⁾Postup odvození vzorce např. v [7].

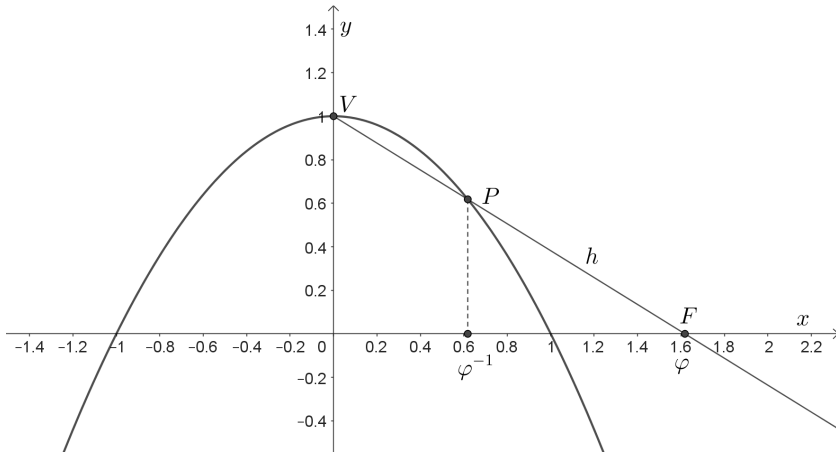
- určení hodnoty čísla π využitím nekonečné řady pro rozvoj funkce arkus tangens,
- zařazení zlatého řezu mezi tzv. *kovové průměry* a následné porovnání výkonnosti vzorců pro výpočet π pomocí prvních tří kovových průměrů.

Jednotková parabola, zlatý řez a konstrukce převrácené hodnoty

Za jednotkovou parabolu budeme považovat křivku určenou rovnicí

$$x^2 + y = 1.$$

Jednotkovou parabolu použijeme jednak k určení převrácené hodnoty zlatého řezu, jednak k nalezení rovnice pro aproximaci čísla π .



Obr. 1: Určení převrácené hodnoty zlatého řezu φ^{-1} pomocí jednotkové paraboly

Připomeňme, že zlatý řez je číslo, které označuje poměr, kdy se úsečka dělí do dvou částí takovým způsobem, že poměr celé úsečky vůči její větší části se rovná poměru větší části k té menší [2]. Postup nalezení převrácené hodnoty zlatého řezu je naznačen na obr. 1. Jestliže označíme $[\varphi, 0]$ průsečík přímky h a osy x , pak má přímka h rovnici

$$y = 1 - \frac{x}{\varphi}.$$

Průsečík přímky h a paraboly získáme porovnáním jejich rovnic

$$1 - x^2 = 1 - \frac{x}{\varphi},$$

kde po zjednodušení je

$$x(\varphi x - 1) = 0,$$

dále

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{\varphi}.$$

Podrobný popis konstrukce převrácených hodnot pomocí jednotkových kuželoseček (kružnice, paraboly a hyperboly) lze nalézt např. v [8, 9, 10]. Pro úplnost dodejme, že číselnou hodnotu zlatého řezu získáme z řešení rovnice

$$\frac{x + y}{x} = \frac{x}{y},$$

kde x, y ($x > y$) jsou části úsečky o délce $x + y$. Pokud dále položíme $y = 1$, pak po zjednodušení dostáváme rovnici

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{4}$$

pro jejíž kořeny platí

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Zlatým řezem φ je kladný kořen

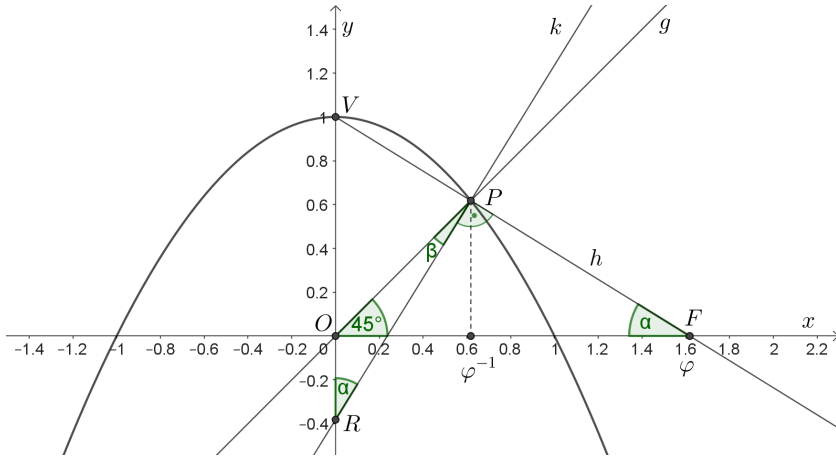
$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \tag{5}$$

převrácenou hodnotou pak

$$\varphi^{-1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \tag{6}$$

Odvození vzorce pro výpočet hodnoty čísla π

V této sekci odvodíme vztah pro výpočet čísla π , ve kterém využijeme výše uvedenou konstrukci převrácené hodnoty zlatého řezu. Východiskem pro naše další úvahy tedy bude situace znázorněná na obr. 1, kterou postupně vhodně doplníme (obr. 2).



Obr. 2: Geometrická situace pro odvození vzorce v rovnici (9)

Přímka k , která je kolmicí k přímce h v bodě $P[\varphi^{-1}; \varphi^{-1}]$, protíná osu y v bodě R . Podle věty uu platí, že

$$\triangle VRP \sim \triangle VFO,$$

a tedy

$$\alpha = |\sphericalangle OFV| = |\sphericalangle VRP|.$$

Pokud dále doplníme přímku $g = \overleftrightarrow{PO}$, pak lze snadno ověřit, že v trojúhelníku POR pro součet vnitřních úhlů α, β platí

$$\frac{\pi}{4} = \alpha + \beta, \tag{7}$$

neboť přímka g je určena rovnicí $y = x$.

V trojúhelníku VFO pro úhel α platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\varphi}, \tag{8}$$

a dále $\alpha = \pi/4 - \beta$, tj.

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right).$$

Použitím součtového vzorce pro funkci tangens dostáváme

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) = \frac{\operatorname{tg}(\pi/4) - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}(\pi/4)\operatorname{tg}\beta},$$

porovnáním s rovnicí (8) dále

$$\frac{\operatorname{tg}(\pi/4) - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}(\pi/4)\operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{\varphi}$$

a po zjednodušení s využitím $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}.$$

Použitím funkce arkus tangens pro velikost úhlů α, β dostáváme

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\varphi}\right), \quad \beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}\right),$$

a dále po dosazení do rovnice (7)

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\varphi}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}\right). \quad (9)$$

Z posledního vzorce je zřejmé, že tento závisí pouze na hodnotě zlatého řezu φ . V této chvíli se vrátíme k rozvoji funkce arkus tangens do nekonečné řady (1), kde po dosazení za $x = 1/\varphi$, resp. $x = (\varphi - 1)/(\varphi + 1)$ postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\varphi}\right) &= \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{3\varphi^3} + \frac{1}{5\varphi^5} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2k-1}, \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}\right) &= \frac{\varphi - 1}{\varphi + 1} - \frac{1}{3} \left(\frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}\right)^5 - \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}\right)^{2k-1}, \end{aligned}$$

a dále po dosazení do rovnice (9)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}\right)^{2k-1}. \quad (10)$$

Součet členů nekonečných řad v posledním vzorci pro $k \rightarrow \infty$ se blíží (konverguje) k hodnotě $\pi/4$, neboť

$$\left| \frac{1}{\varphi} \right| < 1 \wedge \left| \frac{\varphi - 1}{\varphi + 1} \right| < 1,$$

tj. obě nekonečné řady jsou konvergentní.

Výpočet můžeme provést např. podle níže uvedeného kódu MATLAB (GNU Octave), při výpočtu nastavíme pomocí parametru n počet sčítaných členů v nekonečných řadách.

```
p = (1+sqrt(5))/2;
arctan1 = 0;
arctan2 = 0;
n = 20;
output_precision(16);
for k = 1:n
    s = (-1)^(k-1);
    arctan1 = arctan1 + s/((2*k-1)*p^(2*k-1));
    arctan2 = arctan2 + (s*(p-1)^(2*k-1))/((2*k-1)*(p+1)^(2*k-1));
    value = 4*(arctan1 + arctan2);
end
```

V níže uvedené tabulce 1 jsou uvedené správné desetinné pozice čísla π pro vybrané hodnoty n vypočtené podle rovnice (10).

n	<i>Správné desetinné pozice π</i>
5	3,14
10	3,141 5
15	3,141 592 6
20	3,141 592 653
25	3,141 592 653 5
30	3,141 592 653 589 7
35	3,141 592 653 589 793

Tabulka 1: Výpočet hodnoty čísla π využitím rovnice (10) pomocí programu MATLAB (GNU Octave)

Kovové průměry

Kovové průměry byly popsány v knize [11] a dále v článku [12] Verou de Spinadel jako zobecnění pojmu tzv. *zlatého řezu*. Jestliže do rovnice (4) doplníme k lineárnímu členu jako parametr koeficient p tak, že $p \in \mathbb{N}$, pak získáme rovnici ve tvaru [11, 12]

$$x^2 - px - 1 = 0, \quad (11)$$

pro jejíž kořeny platí

$$x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4}}{2}. \quad (12)$$

Kovovým průměrem σ_p je kladný kořen rovnice (11), tj.

$$\sigma_p = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}. \quad (13)$$

Volbou parametru $p = 1$ získáme výše zmíněný zlatý řez (*zlatý průměr*), pro volbu $p = 2$ dostaneme tzv. *stříbrný průměr*

$$\sigma_2 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2},$$

pro volbu $p = 3$ pak tzv. *bronzový průměr*

$$\sigma_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Ačkoliv jsme vzorec v rovnici (9) odvodili použitím zlatého řezu φ , použití součtového vzorce pro funkci arkus tangens⁴⁾

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\varphi}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1}{\varphi} + \frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}}{1 - \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}}\right) = \operatorname{arctg} 1 \quad (14)$$

ukazuje, že rovnost je splněna pro libovolné kladné reálné číslo, které dosadíme za φ . Pokud nyní přepíšeme rovnici (9), kde položíme $\varphi = \sigma_p$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sigma_p}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_p - 1}{\sigma_p + 1}\right), \quad (15)$$

pak můžeme porovnat výkonnost vzorce při aproximaci hodnoty čísla π pro první tři kovové průměry.

⁴⁾ $\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg} \frac{u+v}{1-uv}$, $uv \neq 1$

	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
<i>zlatý průměr</i>	3,141 5	3,141 592 6	3,141 592 653
<i>stříbrný průměr</i>	3,141 592 65	3,141 592 653 5	3,141 592 653 589 793
<i>bronzový průměr</i>	3,141 592	3,141 592 653	3,141 592 653 589

Tabulka 2: Porovnání vybraných kovových průměrů při aproximaci hodnoty čísla π (uvedeny jsou správné desetinné pozice)

Tabulka 2 ukazuje, že pro daný počet členů nekonečné řady získáme různé rozsahy správných desetinných pozic čísla π v závislosti na použité hodnotě kovového průměru. Tabulka 2 současně naznačuje, že se výpočet použitím vzorce (15) blíží hodnotě čísla π nejrychleji pro stříbrný řez. Rigorózní důkaz platnosti této domněnky by bylo možné získat použitím postupu, který je uveden v článku [5]. Zmíněný postup by rovněž ukázal, že stříbrný řez představuje pro aproximaci nejlepší možnou volbu mezi kladnými reálnými čísly a dále, že vzorec (15) je obdobně efektivní jako výše uvedený vzorec Eulerův.

V článku jsme odvodili pomocí jednotkové paraboly a s využitím zlatého řezu vzorec umožňující aproximovat hodnotu čísla π . Obdobných vzorců existuje celá řada a lze je shrnout pod označením Machinovy vzorce (*Machin-like formulae*). V literatuře popsané Machinovy vzorce jsou v převážné míře založené na použití racionálních zlomků. Machinovy vzorce obsahující iracionální zlomky se objevily později, např. [6]

$$\frac{\pi}{2} = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{8}} \right).$$

Jistou souvislost lze rovněž hledat v zájmu nejen profesionálních matematiků o některá iracionální čísla, jako je např. zlatý řez, popř. v širším pohledu tzv. kovové průměry. Jako příklady můžeme uvést vzorce využívající mocniny zlatého řezu [3]

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\varphi} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\varphi^3} \right), \\ \frac{\pi}{4} &= 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\varphi^2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\varphi^6} \right), \\ \frac{\pi}{4} &= 3 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\varphi^3} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\varphi^5} \right). \end{aligned}$$

Závěrem lze konstatovat, že je poměrně komplikované zjistit, zda je určitý vzorec zcela nový, či byl již dříve ve stejné nebo obměněné podobě v literatuře popsán. Záměrem předloženého článku nebyl ovšem v první řadě samotný vzorec, jako spíše způsob jeho odvození vycházející v podstatné míře z použití nástrojů analytické geometrie a trigonometrie na úrovni dostupné středoškolským studentům. Neméně důležitým aspektem bylo poukázání na spojitost mezi jednotkovou parabolou, zlatým řezem (a kovovými průměry obecně) a číslem π , která nemusí být zdaleka tak zřejmou jako tradiční spojení kružnice a čísla π .

Literatura

- [1] Abrarov, S. M., Siddiqui, R., Jagpal, R. K., Quine, B. M.: A new form of the Machin-like formula for π by iteration with increasing integers. *Journal of Integer Sequences*, roč. 25 (2022), Article 22.4.5, s. 1–17.
- [2] Bellos, A.: *Alexova dobrodružství v zemi čísel*. Dokořán, Praha, 2015.
- [3] Chan, H. Ch.: Machin-type formulas expressing π in terms of φ . *Fibonacci Quarterly*, roč. 46/47 (2008/2009), č. 1, s. 32–37.
- [4] Chien-Lih, H.: More Machin-Type Identities. *Mathematical Gazette*, roč. 81 (1997), č. 490, s. 120–121.
- [5] Lehmer, D. H.: On arccotangent relations for π . *American Mathematical Monthly*, roč. 45 (1938), č. 10, s. 657–664.
- [6] Luca, F., Stanica, P.: On Machin's formula with powers of the golden section. *International Journal of Number Theory*, roč. 5 (2009), č. 6, s. 973–979.
- [7] Nishiyama, Y.: Machin's formula and Pi. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, roč. 82 (2013), č. 3, s. 421–430.
- [8] Spíchal, L.: Jednotková parabola, zlatý řez a parabolické π . *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 96 (2021), č. 1, s. 8–17.
- [9] Spíchal, L.: About the harmonic mean on the unit parabola. *Symmetry: Culture and Science*, roč. 33 (2022), č. 1, s. 45–54.
- [10] Spíchal, L.: Konstrukce převrácených hodnot reálných čísel na jednotkových kuželosečkách. *Učitel matematiky*, roč. 30 (2022), č. 4, s. 217–228.
- [11] de Spinadel, V. W.: *From the golden mean to chaos*. Nueva Librería, Buenos Aires, 1998.
- [12] de Spinadel, V. W., Paz, J. M.: A new family of irrational numbers with curious properties. *Humanistic Mathematics Network Journal*, roč. 19 (1999), s. 33–37.