Terezie Kladivová

Barevné Výhonky

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 98 (2023), No. 4, 12–19

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/152000`

Barevné Výhonky

Terezie Kladivová, studentka Gymnázia Aloise Jiráska, Litomyšl

Abstrakt. V tomto článku se pokusím co nejlépe nastínit problematiku hry Výhonky a představit novou variantu této hry. Ta je obohacena o barvy a další pravidla, čímž se mění její původní vlastnosti. Zaměříme se především na spodní hranici počtu tahů, jež je potřebná k ukončení hry.

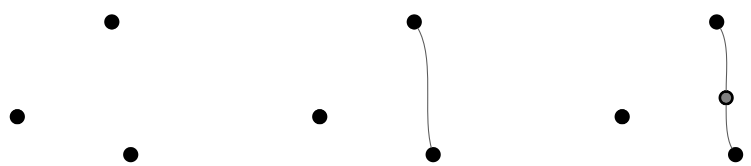
Abychom mohli správně pochopit rozšířenou variantu, musíme nejdříve vysvětlit, jak se hraje a chová původní hra.

Originální hra Výhonky

V roce 1967 vymysleli dva matematici z Cambridgské univerzity, John H. Conway a Michael S. Paterson, hru na grafech pro dva hráče [1]. Její výhodou je, že k ní potřebujete pouze tužku a papír. To však jistě nebylo jediným důvodem, proč se hra stala mezi matematickou společností populární. Její povaha totiž nabízí i mnoho prostoru pro zkoumání.

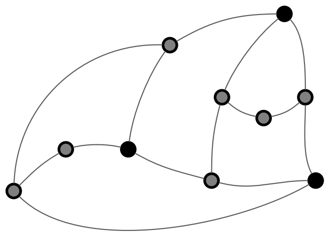
Na pravidlech není třeba hledat nic těžkého. Na začátku hry nakreslí dva hráči na papír předem domluvený počet puntíků (tedy vrcholů). Domluví se, kdo z nich začne, a poté se již střídají ve svých tazích, dokud hra neskončí.

Tah spočívá ve spojení dvou vrcholů souvislou čarou (tedy hranou) a to tak, aby tato nebyla incidentní s žádným jiným vrcholem (nezasahovala do něj) nebo nekřížila jiné hrany (ani sama sebe). Přitom může být libovolně zakřivená. Není zakázáno hranu započít a ukončit ve stejném vrcholu. Hráč svůj tah uzavře nakreslením nového vrcholu kamkoli na právě vzniklou hranu.



Obr. 1: Hráčův tah

Je důležité poznamenat, že z každého vrcholu mohou vycházet vždy nejvýše tři hrany, nebo chcete-li, každý vrchol může být nejvýše stupně tři. Hra končí, když už není možné provést další tah, a vítězem je ten, kdo hrál jako poslední. Příklad hry, ve které již nelze provést další tah, můžeme vidět na obrázku 2. V ní vyhrává hráč, jenž začínal. Pravidla byla převzata z [1].



Obr. 2: Ukončená hra na třech původních vrcholech

Konec hry a maximální počet tahů

Nabízí se otázka, zda hra musí vždy skončit. Odpověď zní ano a lze podpořit jednoduchou myšlenkou. Označme počet vrcholů na začátku hry n a řekněme, že v tu chvíli je ve hře $3n$ možných připojení. To proto, že každý vrchol může být až stupně tři.

Postupně odhalíme, že s každým tahem se tento počet sníží o jedna, jak ilustruje obrázek 3. Dvě připojení ubudou napojením nové hrany, zato jedno nové přibude nakreslením nového vrcholu. Pokud například zbývá jedno možné připojení, není možné provést další tah a hra skončí. Počet zbývajících připojení v jakémkoli okamžiku hry můžeme vyjádřit jako $3n - t$, kde t značí počet tahů.

Obr. 3: Možná připojení po provedení tahu

Přidání nového vrcholu na konci každého tahu znamená, že vždy bude existovat alespoň jedno možné připojení, neboli $3n - t \geq 1$. Přeskládáním se dostaneme ke vztahu $t \leq 3n - 1$, jenž určuje nejvyšší možný počet tahů v závislosti na n. Maximálního počtu tahů lze vždy dosáhnout, vyvarujeme-li se uzavírání různých vrcholů stupně dva do různých oblastí.

Minimální počet tahů

Pro účely důkazu spodní hranice počtu tahů si rozdělíme vrcholy na konci hry na tři kategorie. První budou *přeživší* (jejich počet označíme p), jež jsou vrcholy, které zůstaly stupně dva. Druhou skupinu nazveme *strážci* (s) – vrcholy, které sousedí s přeživšími. Není složité si představit, že každý strážce musí na konci hry příslušet pouze jednomu přeživšímu vrcholu, a proto platí $s = 2p$. Poslední skupinu tvoří *farizejové* (f) a jedná se o vrcholy, které nesplňují podmínky první ani druhé skupiny.

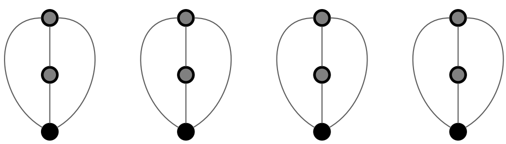
Zapišme rovnici pro počet vrcholů

$$\begin{aligned} n + t &= p + s + f \\ n + t &= 3p + f. \end{aligned} \tag{1}$$

Mluvili jsme o možném počtu zbývajících připojení. Na konci hry odpovídá počet zbývajících připojení počtu přeživších vrcholů. Dosazením vztahu $p = 3n - t$ do rovnice 1 dostaneme

$$\begin{aligned} n + t &= 3(3n - t) + f \\ 4t &= 8n + f \\ t &= 2n + \frac{f}{4}. \end{aligned}$$

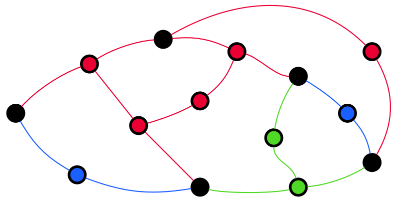
Víme, že počet farizejů nemůže být záporné číslo, a tak dostáváme nerovnici omezující počet tahů zespodu, $t \geq 2n$. Hru s takovým počtem tahů lze hrát pro jakýkoli počáteční počet vrcholů (n), jak ukazuje univerzální postup na obrázku 4.



Obr. 4: Hra ukončená pomocí $2n$ tahů

Pravidla barevné hry

Podívejme se nyní, jak se hraje barevná varianta Výhonků. K nakreslení nové hrany si hráč zvolí vždy jednu ze tří barev: červenou, modrou nebo zelenou. Zároveň musí dodržet pravidlo, že z každého vrcholu mohou vycházet buď hrany pouze stejné barvy, nebo vzájemně různých barev. Nemůže se tedy stát, že by z jednoho vrcholu vycházely dvě hrany stejné barvy a jedna hrana barvy odlišné. Mimo to platí v barevné hře stejná pravidla jako v původní verzi.



Obr. 5: Příklad ukončené barevné hry

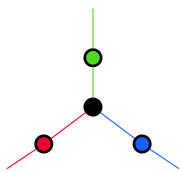
Druhy vrcholů a maximální počet tahů

Rozdělme si vrcholy v barevné hře na dva druhy. *Monochromatickým* nazveme vrchol, ze kterého vychází hrany stejné barvy, a *duhovým* zase vrchol, ze kterého vychází hrany různých barev. K určení druhu vrcholu stačí, aby byl stupně dva, jediná možná barva třetí hrany je v takovém okamžiku již určena. Není na škodu si uvědomit, že každý nově vzniklý vrchol v barevné hře je nutně monochromatický, jelikož z něho vychází dvě hrany stejné barvy.

Maximální počet tahů není třeba nijak odvozovat. Stačí se při kreslení hran omezit na jednu barvu a pak je maximum stejné jako v klasické hře.

Minimální počet tahů

Jak jsme naznačili na začátku, spodní hranice počtu tahů potřebná k ukončení hry se díky novým pravidlům v barevné hře sníží. Vzpomeňme si na přeživší vrcholy a jejich strážce na konci hry. V klasické hře jeden strážce sousedil výlučně s jedním přeživším. V nové variantě však může jeden strážce příslušet až třem přeživším vrcholům (tzv. *ideální strážce*), kdy u každého přeživšího chybí hrana jiné barvy jako na obr. 6.

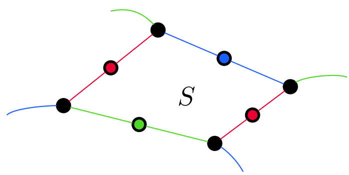


Obr. 6: Ideální strážce v barevné hře

Z toho, co jsme již uvedli, platí $p \leq \frac{3s}{2}$, neboť každý přeživší vrchol má vždy dva strážce. Pokud budeme chtít minimum tahů, bude naším cílem mít na konci hry co nejvíce přeživších vrcholů, a tedy i co nejvíce ideálních strážců. Dosaďme ekvivalentní nerovnost $s \geq \frac{2p}{3}$ do rovnice

$$\begin{aligned} n + t &= p + s + f \\ n + t &\geq p + \frac{2p}{3} + f \wedge p = 3n - t \\ 8t &\geq 12n + 3f \\ t &\geq \frac{3n}{2} + \frac{3f}{8}. \end{aligned}$$

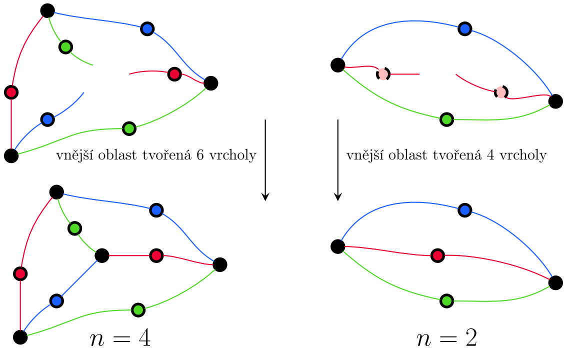
Za předpokladu, že se ve hře nevyskytnou žádní farizejové a že všichni strážci budou ideální, můžeme dospět k rovnosti $t = \frac{3n}{2}$. Kdy je toto ale možné? Mějme na paměti, že na konci takové hry se vyskytují pouze dva typy vrcholů: ideální strážci a přeživší vrcholy. Pro tuto hru nelze vytvořit oblast, jejíž hranici by tvořilo více než šest vrcholů a šest hran. Pokud bychom takovou oblast nalezli (obr. 7), mohli bychom pokračovat dalším tahem, a tím bychom porušili podmínky pro vrcholy ve hře s $\frac{3n}{2}$ tahy, neboť by se ve hře už vyskytovali i jiní než ideální strážci.



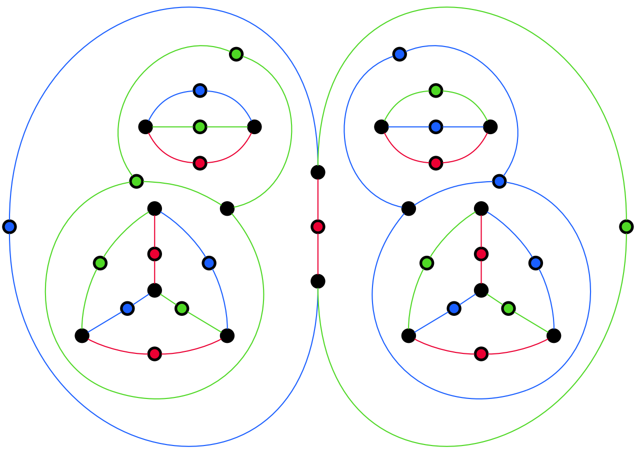
Obr. 7: Oblast S, ve které lze provést další tah

Toto musí platit i pro vnější oblast a pro nás to znamená, že existují pouze dvě možnosti pro hru hranou $\frac{3n}{2}$ tahy: hra na dvou nebo na čtyřech původních vrcholech (obr. 8). Vzhledem k požadavku na hranice vnější oblasti a ke skutečnosti, že původní vrcholy musí zůstat ideálními strážci stejně jako že každý nově vzniklý vrchol musí zůstat přeživším, jsou tato dvě řešení jediná možná.

Z toho vyplývá, že pro jakékoli jiné n nebude možné ukončit hru méně než $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor + 1$ tahy, tedy $t \geq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor + 1$ pro $t \notin \{2; 4\}$. Můžeme ale s jistotou tvrdit, že pro libovolné n zvládneme sestrojit graf ukončené hry pomocí $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor + 1$ tahů? Na to bohužel zatím odpovědět nedokáži. Nejvýše se mi to podařilo pro $n = 16$, kde byl k ukončení skutečně užit nejnižší možný počet tahů (obr. 9). Mimo to umím zkonstruovat grafy her s minimálním počtem tahů pro všechna $n \leq 16$ vyjma $n = 11, 13$ a 15.



Obr. 8: Jediné dvě možnosti pro hru ukončenou $\frac{3n}{2}$ tahy



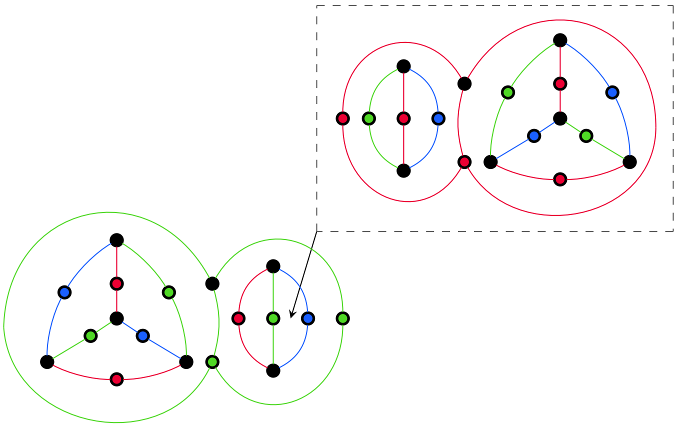
Obr. 9: Graf hry ukončené pomocí $\frac{3n}{2}$ tahů pro $n = 16$

Není bez zajímavosti, že odebíráním vhodných komponent[1)] z grafu na obr. 9 můžeme dostat grafy her ukončených minimálními počty tahů také pro všechna $n \leq 16$ mimo $n = 1, 11, 13$ a 15, jak si čtenář může sám vyzkoušet.

[1)] Komponenta grafu G je takový jeho podgraf, který je souvislý a zároveň z něj neexistuje cesta do jiného disjunktního podgrafu (komponenty) grafu G. Souvislý graf má jednu komponentu.

Nízké počty tahů

Sice znám postupy, kterými lze dosahovat nízkých počtů tahů, ale nevím, zda jsou tyto počty nejnižší možné či nikoli. Jedním takovým postupem je rekurzivní vkládání konstrukce na sedmi původních vrcholech (pojmenujme ji K) samu do sebe, které se vzhledem k počtu tahů jeví jako výhodné. Její vnější oblast totiž obsahuje pouze jeden přeživší vrchol a zároveň v ní najdeme oblast, na jejíž hranici jsou dva přeživší vrcholy. Můžeme tedy do nekonečna vkládat její kopie do těchto jejích oblastí a tím dosahovat nízkých počtů tahů. V každém okamžiku je však nutné dbát na správné rozložení barev, aby bylo možné rekurzi provést.



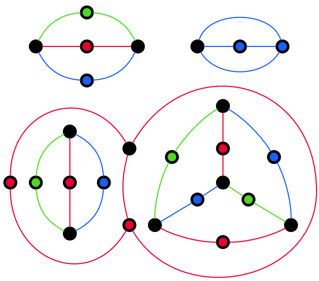
Obr. 10: Rekurzivní vkládání za účelem nízkých počtů tahů

Jestliže známe graf hry ukončené pomocí t_1 tahů na n_1 původních vrcholech, který obsahuje alespoň jednu oblast, na jejíž hranici jsou nejvýše dva přeživší vrcholy, pak můžeme pro jakékoli $n \equiv n_1 \pmod 7$ sestrojit pomocí výše uvedené rekurze graf ukončené hry pomocí $t = \frac{n-n_1}{7} \cdot 11 + t_1$ tahů.

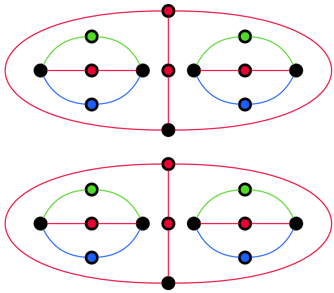
Příklad 1. Pokuste se sestavit graf ukončené hry na 10 původních vrcholech pomocí co nejnižšího počtu tahů.

Řešení. Nejnižší možný počet tahů je v tomto případě $\lfloor \frac{3 \cdot 10}{2} \rfloor + 1 = 16$. To znamená, že jestliže realizujeme graf ukončené hry 16 tahy, dosáhneme minimálního počtu. Snad nejjednodušší je užít zmiňovanou konstrukci K. K jejímu sestavení „spotřebujeme“ 11 tahů. Pokud pak zvládneme sestrojit graf na třech původních vrcholech pomocí 5 tahů, jenž bude obsahovat alespoň jednu vyhovující oblast pro vložení naší konstrukce K, máme vyhráno. Nalézt příklad takového grafu není náročné, jak se čtenář může přesvědčit na obr. 11a. Ten ukazuje hru ukončenou minimálním počtem tahů – konstrukci K vloženou do vnější oblasti grafu na třech původních vrcholech.

Další řešení ukazuje obr. 11b. Jiné řešení by zahrnovalo například odstranění dvou komponent z grafu na obr. 9 – jedné na čtyřech a druhé na dvou původních vrcholech. Možností je skutečně mnoho.



(a) Užitím konstrukce K



(b) Jiným způsobem

Obr. 11: Sestrojení grafů ukončených her na 10 původních vrcholech

Závěr

Doufám, že vám tento úvod do světa Výhonků přinesl něco nového, byť třeba jen potěšení. Jistě je z článku cítit, že mé zkoumání minimálních počtů tahů v nové hře není kompletní a že celé téma nabízí mnohem více. Níže je k nalezení odkaz na mou práci SOČ, ve které téma Výhonků a jejich barevné varianty rozebírám podrobněji. Dále lze například zkoumat i minimálními počty tahů pro 1-souvislé a 2-souvislé grafy. Chci tím říci, že otázka obecného řešení zůstává otevřena a představuje výzvu pro kohokoli se zájmem o teorii grafů.

L i t e r a t u r a

[1] Piggott, J. Scholten, J.: Sprouts Explained. NRICH [online], University of Cambridge, Cambridge, 2021, `https://nrich.maths.org/2413`.

[2] Berlekamp, E. R. Conway, J. H. Guy, R. K.: Winning Ways for Your Mathematical Plays. Academic Press, New York, 1982.

[3] `https://socv2.nidv.cz/archiv45/getWork/hash/4e659b71-c648-11ed-acaf-005056bd6e49`