Leontýna Šlégrová; Jan Šlégr

Keplerovy zákony v historických souvislostech

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 98 (2023), No. 3, 52–61

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151846`

Keplerovy zákony v historických souvislostech

Leontýna Šlégrová, Jan Šlégr
Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Abstrakt. Ve středoškolské fyzice se obvykle nejdříve vykládá Newtonův gravitační zákon, na který posléze navazují zákony Keplerovy, které v zásadě (téměř doslova) padají z nebe. V učebnicích je uvedeno, že zákony odvodil Johannes Kepler na základě pozorování a že z nich vyšel Isaac Newton při konstrukci zákona gravitačního, ale už není vysvětleno, jak postupoval. V tomto článku je popsána myšlenková cesta od Keplerových zákonů k Newtonovu gravitačnímu zákonu obdobně, jako byla představena v Newtonových Principiích.

Úvod

Johannes Kepler (1571–1630) byl německý matematik, astrolog a astronom, který několik let působil v Praze na dvoře císaře Rudolfa II. V Praze se také setkal s Tychonem Brahe, přičemž každý z nich měl jiné představy o podobě planetárního modelu: Brahe předpokládal, že Slunce obíhá kolem Země, avšak ostatní planety obíhají kolem Slunce. Kepler byl přesvědčen, že všechny planety obíhají kolem Slunce. Na základě porovnání svých a Brahových pozorování (Kepler mnoho pozorování sám neprováděl, protože měl slabý zrak, a spoléhal zejména na pozorování provedená Brahem) sepsal Kepler dílo *Astronomia nova*, které je považováno za základ nebeské mechaniky a obsahuje většinu důležitých Keplerových objevů.

1. Keplerovy zákony

Během tvorby modelu Sluneční soustavy Kepler dospěl k závěru, že střed oběžných drah nemůže ležet ve středu předpokládané kruhové dráhy. Kružnice tak podle něho musely být excentrické. Objevil také, že i Země obíhá kolem stejného středu jako další planety a i v průběhu oběhu kolem Slunce se chová obdobně jako ostatní planety. Prvním Keplerovým objevem tak bylo, že Země je řadovou planetou.

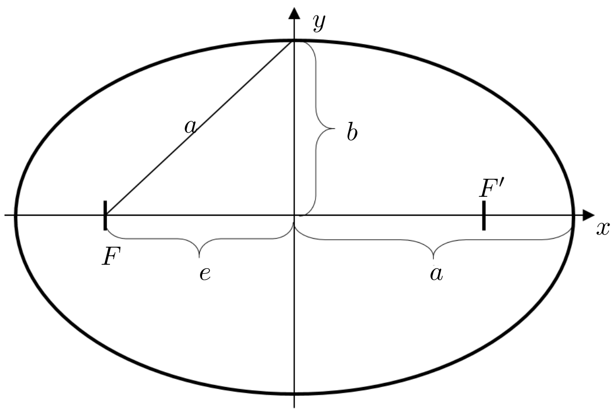
Z výpočtů a z Brahových pozorování také zjistil, že rychlost planet včetně Země se během oběhu kolem Slunce mění. Planety se pohybují rychleji, když jsou Slunci blíže, a pomaleji, pokud se na oběžné dráze nacházejí od Slunce dál. Po množství peripetií Kepler dospěl k závěru, že úsečka spojující planetu a Slunce vždy za stejný čas opíše stejnou plochu. To je znění zákona, který dnes označujeme jako druhý:

Druhý Keplerův zákon: Obsahy ploch opsaných průvodičem[1)] planety za jednotku času jsou konstantní.

Když zkusil toto pravidlo aplikovat na oběžnou dráhu Země, fungovalo. Při použití pravidla na oběžnou dráhu Marsu však zjistil, že v některých částech oběžné dráhy pravidlo funguje, ale v jiných ne. Začal proto pochybovat, zda je dráha planety skutečně kruhová. Uvažoval tedy o dráze oválné a později, s počáteční nelibostí, o dráze eliptické. S eliptickou drahou se spokojil ve chvíli, kdy zjistil, že Slunce leží v jednom z ohnisek elipsy.[2)] Tak vznikl první Keplerův zákon:

První Keplerův zákon: Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

Elipsa se matematicky definuje jako množina všech bodů, které mají od dvou daných bodů F, F' (ohnisek elipsy) stálý součet vzdáleností. Vzdálenost ohniska a středu elipsy se označuje jako lineární excentricita e vzdálenost středu elipsy a nejvzdálenějšího bodu se pak označuje jako velká poloosa a Jejich podíl udává výstřednost elipsy. Vzdálenost středu elipsy a nejbližšího bodu na elipse se označuje malá poloosa b, viz obr. 1.



Obr. 1: Význačné vlastnosti elipsy

[1)] Průvodič je spojnice středu planety se středem Slunce.

[2)] Někteří fyzikové to tak mají. Např. Paul Dirac prohlásil, že „fyzikální zákon by měl být i matematicky krásný“.

Oba tyto zákony byly publikovány v Keplerově díle *Astronomia nova* (*Nová astronomie*). Historicky byl tedy nejdříve objeven druhý zákon a až později první. Kepler se totiž dlouho nechtěl vzdát kruhové trajektorie planety.

I v následných dílech se Kepler zaobíral pohyby planet. Ve svém díle *Harmonices Mundi* (*Harmonie světů*) mimo jiné popsal třetí zákon planetárního pohybu:

Třetí Keplerův zákon: Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich trajektorií:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Po úpravě třetího Keplerova zákona můžeme získat tvar

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}.$$

Platí tedy, že poměr třetí mocniny délky hlavní poloosy a druhé mocniny oběžné doby je pro danou planetu konstantní:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{konst.}$$

Johannes Kepler nebyl posledním vědcem, který se zabýval výzkumem postavení planet ve Sluneční soustavě a silami, které jejich pohyb způsobují. Kepler měl mnoho následovníků, mezi ty nejvýznamnější se řadí například Isaac Newton.

2. Od Keplera k Newtonovi

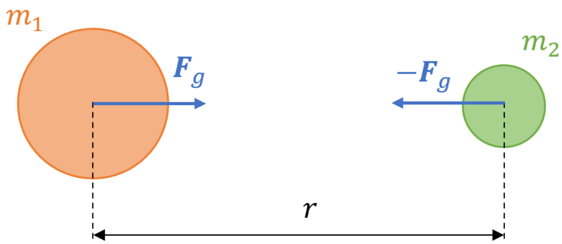
Isaac Newton (1643–1727) byl anglický fyzik, matematik, astronom a alchymista, který přispěl k rozvoji matematiky a mnoha oblastí fyziky. Stejně jako jeho mnozí předchůdci si uvědomil, že musí existovat síla, která způsobuje, že jsou tělesa přitahována k Zemi. Již Johannes Kepler o téměř století dříve předpokládal existenci síly, která způsobuje, že se padající kámen pohybuje k Zemi a Země naopak k němu. Byl však toho názoru, že taková síla je nepřímo úměrná první mocnině vzdálenosti (viz dále). Newton tuto sílu zkoumal, předpokládal však, že je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti těles.

Dnes tuto sílu nazýváme silou gravitační a víme, že působí mezi kterýmikoliv dvěma tělesy a je vždy přitažlivá. Gravitační působení je, stejně jako u jiných sil, vždy vzájemné: Síly, které působí na dvě tělesa, tak mají stejnou velikost, ale opačný směr. Účinky na těleso jsou však různé – můžeme vidět kámen padající k Zemi, ne však Zemi letící ke kameni.

Newtonův gravitační zákon: Každá dvě tělesa na sebe vzájemně působí stejně velkými přitažlivými gravitačními silami opačného směru $\boldsymbol{F}_g$, $-\boldsymbol{F}_g$. Pro dvě tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 ve vzájemné vzdálenosti r platí

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

kde $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$ je gravitační konstanta[3)].



Obr. 2: Znázornění gravitační síly působící mezi dvěma tělesy

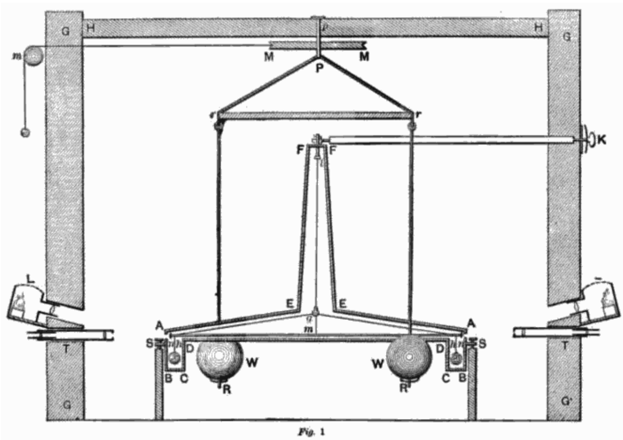
Gravitační konstanta G je jednou ze základních fyzikálních konstant, její přesnost je ze všech těchto základních konstant nejnižší. Je to způsobeno tím, že gravitační působení mezi tělesy je velmi slabé a přesná hodnota gravitační konstanty se tak určuje velmi obtížně.

Pokud chceme, aby se mezi tělesy gravitační působení nějak výrazněji projevilo, musí být alespoň jedno z těles velmi hmotné. To si uvědomovali i fyzikové, kteří se rozhodli hodnotu gravitační konstanty experimentálně určit. Pokud totiž chtěli určit hmotnost a průměrnou hustotu Země, o což se snažili především, bylo nutné, aby znali hodnotu gravitační konstanty. Již Newton navrhoval určit hodnotu gravitační konstanty tak, že se určí gravitační síla mezi malým tělesem a velkým geologickým útvarem, například horou, jejíž hmotnost je možné odhadnout. Tímto způsobem se hodnotu gravitační konstanty pokusil určit francouzský geofyzik Pierre Bouguer v roce 1738. Postupoval tak, že určil úhel, o který se odchýlí olovnice od svislého směru v případě, že se nachází v blízkosti

[3)] Dříve byla gravitační konstanta v českých zemích značena symbolem κ. V novějších učebnicích již nalezneme celosvětově přijímané označení G.

hory. Obdobný, i když mírně zdokonalený, postup experimentu zvolili i Nevil Maskelyne a Charles Hutton roku 1774. Ukázalo se však, že není možné určit hmotnost geologického objektu s dostatečnou přesností, aby šlo hodnotu gravitační konstanty použít k přesnějším výpočtům.

S novým přístupem přišel John Michell, který sestrojil torzní váhy. Tento přístroj využívá poznatku, že čím menší je průměr vlákna, na němž je zavěšena tyč s dvojicí závaží, tím menší síla stačí k zkroucení vlákna o určitý úhel. Sám Michell již nestihl během svého života toto zařízení použít na určení hodnoty gravitační konstanty, využil ho však britský fyzik Henry Cavendish v roce 1798. Jeho torzní váhy se skládaly ze dvou olověných kuliček o hmotnosti 730 g, upevněných na vodorovném dřevěném rameni, které bylo zavěšeno na tenkém vlákně (viz obr. 3).



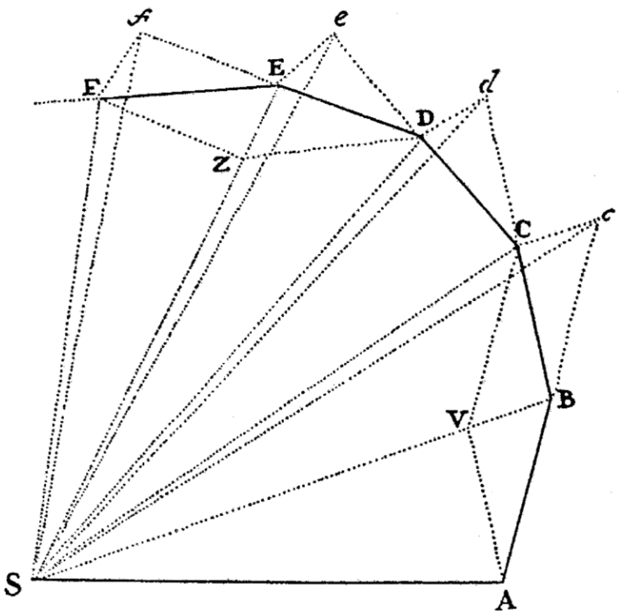
Obr. 3: Cavendishovy torzní váhy

Ke kuličkám Cavendish z obou stran přibližoval dvojice větších olověných koulí o hmotnosti 158 kg. Váhy pak byly opatřeny zrcátkem, od něhož se odrážel paprsek světla, který indikoval výchylku ramene, která byla měřena dalekohledem. Podobně jako jeho předchůdci i Cavendish původně plánoval tímto experimentem určit hmotnost a hustotu Země, jím naměřená hodnota gravitační konstanty, přibližně $6{,}74 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$, se od dnešní hodnoty liší pouze o 1 % a dosáhl tak na dlouhou dobu nejpřesnější hodnoty.

Později byly hodnoty zpřesňovány s použitím podobných experimentů. Za jedno z nejpřesnějších měření je považován výsledek, kterého dosáhli američtí fyzici G. G. Luther a W. R. Towler v roce 1981. Ti hodnotu gravitační konstanty stanovili na $6{,}672 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$. V současnosti je její hodnota

$$G = (6{,}674\,30 \pm 0{,}000\,15) \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}.$$

Newtonův gravitační zákon a také jeho souvislost s Keplerovými zákony poprvé Newton publikoval v krátkém pojednání *De motu corporum in gyrum* (*O pohybu těles po oběžných drahách*). Úplné znění pohybových zákonů a gravitačního zákona je poté obsahem Newtonova slavného díla *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (*Matematické základy přírodní filosofie*), často označovaného jako *Principia.*



Obr. 4: Originální obrázek pohybu planety z Newtonových Principií

Newtonova fyzikálně-geometrická cesta od Keplerových zákonů k zákonu gravitačnímu zaujala v průběhu let mnoho fyziků, včetně významného fyzika 20. století a nositele Nobelovy ceny Richarda Feynmana. Ten na toto téma publikoval přednášku, která byla dlouhou dobu pokládaná za ztracenou, ale později vydána knižně. Mírně upravenou cestu

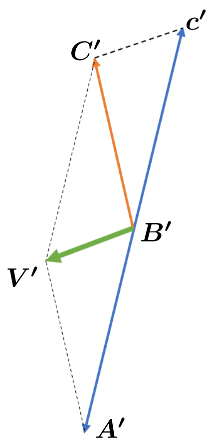
Richarda Feynmana, která se velmi blížila Newtonovu historickému postupu, si nyní představíme.

3. Od druhého Keplerova zákonu k dostřednosti gravitační síly

Nejdříve ukážeme, že z platnosti Newtonových pohybových zákonů a druhého Keplerova zákona plyne skutečnost, že gravitační síla působí vždy směrem ke Slunci.

Na obr. 4 je v bodě S umístěno Slunce a na začátku je planeta v bodě A. Trajektorie planety kolem Slunce je aproximována na sebe navazujícími úsečkami, které planeta opíše za stejné časové intervaly Δt.

V případě, že by planeta nebyla při svém pohybu přitahována ke Slunci, pohybovala by se podle zákona setrvačnosti, tedy podle prvního Newtonova pohybového zákona rovnoměrně přímočaře z bodu A do bodu B a dále pak za stejný čas z bodu B do bodu c. Z výsledků pozorování je však zřejmé, že za čas Δt se planeta nenachází v bodě c, ale v bodě C. Pokud odečteme vzniklé vektory rychlostí $\boldsymbol{B'C'}$ a $\boldsymbol{B'c'}$ (tedy sečteme vektory $\boldsymbol{B'C'}$ a opačný vektor k $\boldsymbol{B'c'}$, tj. vektor $\boldsymbol{B'A'}$) získáme výsledný vektor $\boldsymbol{B'V'}$, viz obr. 5. Vektor změny rychlosti $\boldsymbol{B'V'}$ tedy míří do bodu S, to znamená, že i vektor zrychlení a konečně, podle druhého Newtonova pohybového zákona, i vektor síly míří do bodu S. Dokázali jsme tedy, že je gravitační síla, kterou Slunce přitahuje planetu v bodě B, dostředivá a míří do bodu S.



Obr. 5: Skládání vektorů rychlostí

3.1. Od dostředivosti gravitační síly k druhému Keplerovu zákonu

Nyní se podíváme, jestli je možné naopak z dostředivosti gravitační síly dokázat druhý Keplerův zákon. V případě, že by opět planeta nebyla přitahována ke Slunci, pohybovala by se z bodu A do bodu B a následně za stejný čas z bodu B do bodu c. Gravitační síla však působí směrem ke Slunci, tedy k bodu S. Vzhledem k dostředivosti gravitační síly můžeme podle druhého Newtonova pohybového zákona tvrdit, že i zrychlení planety bude mířit do bodu S, a tedy i změna rychlosti působí do bodu S. Složením rychlostí zjistíme, že se v čase $t + \Delta t$ planeta nebude nacházet v bodě c, ale v bodě C.

Vzhledem k tomu, že úsečka Cc je rovnoběžná s úsečkou SB, můžeme usuzovat, že trojúhelníky ABS a BcS mají stejnou plochu. Trojúhelníky mají totiž stejně dlouhou základnu AB, resp. Bc, a protože mají společný bod S, mají i stejnou výšku. Dále můžeme z rovnoběžnosti úseček SB a Cc usoudit, že i trojúhelníky BSc a BSC mají stejnou plochu, protože mají společnou základnu SB a stejnou výšku. Z toho plyne, že i trojúhelníky ABS a BCS mají stejnou plochu. Tím jsme z dostředivosti gravitační síly dokázali druhý Keplerův zákon.

4. Od třetího Keplerova zákonu k ubývání gravitační síly s r^2

Jak již bylo řečeno výše, Kepler během pozorování zjistil, že planeta při pohybu kolem Slunce mění svou rychlost, resp. mění se velikost i směr okamžité rychlosti planety.

Pro zjednodušení budeme předpokládat, že se planeta pohybuje po kružnici o poloměru r stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$. Dále uvažujeme, že planeta oběhne Slunce právě jednou za čas T. Pro velikost rychlosti rovnoměrného pohybu po kružnici platí:

$$v = \frac{s}{T},$$

kde s je obvod kružnice $s = 2\pi r$. Po dosazení získáme

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

$$a_d = \frac{v^2}{r}.$$

Po dosazení rychlosti do vztahu pro dostředivé zrychlení dostaneme

$$a_d = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r},$$

po zkrácení poloměru kružnice

$$a_d = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Využitím třetího Keplerova zákona

$$T^2 \sim r^3,$$

dostaneme

$$a_d \sim \frac{r}{r^3} = \frac{1}{r^2}.$$

Z druhého Newtonova pohybového zákona víme, že je síla $\boldsymbol{F}$ přímo úměrná zrychlení $\boldsymbol{a}$. Můžeme tak usoudit, že velikost gravitační síly ubývá s druhou mocninou vzdálenosti planety od Slunce, tedy

$$F_g \sim \frac{1}{r^2}.$$

4.1. Od gravitační síly k třetímu Keplerovu zákonu

Opět můžeme zvolit i opačný postup. Budeme vycházet ze vztahu

$$F_g = G\frac{Mm}{r^2},$$

kde G je gravitační konstanta, M je hmotnost Slunce, m je hmotnost planety, která kolem Slunce obíhá a r je vzájemná vzdálenost středů planety a Slunce. Jak již víme, gravitační síla je silou dostředivou a je příčinou kruhového pohybu planety. Svou velikostí a směrem je rovna síle dostředivé

$$F_d = \frac{mv^2}{r},$$

kde m je opět hmotnost planety, v je oběžná rychlost planety a r je vzájemná vzdálenost středů planety a Slunce. Získáme tedy

$$G\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Dosadíme-li za oběžnou rychlost

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

dostaneme

$$G\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}.$$

Rovnici upravíme tak, aby na levé straně rovnice byly pouze konstanty, což je gravitační konstanta G, hmotnost Slunce M a samozřejmě $4\pi^2$ a na pravé straně neznámé r a T:

$$\frac{GM}{4\pi^2} = \frac{r^3}{T^2}.$$

Výsledkem je, že podíl třetí mocniny vzdálenosti středů planety a Slunce a druhé mocniny oběžné doby $\frac{r^3}{T^2}$ je roven konstantě, což je znění třetího Keplerova zákona v případě, že uvažujeme kruhovou oběžnou dráhu, kde je hlavní poloosa rovna poloměru kružnice.

Literatura

[1] Štoll, I.: *Dějiny fyziky.* 2. vyd., Prometheus, Praha, 2009.

[2] Šolcová, A.: *Johannes Kepler: zakladatel nebeské mechaniky.* Velké postavy vědeckého nebe, Prometheus, Praha, 2004.

[3] Ferguson, K.: *Tycho a Kepler: nesourodá dvojice, jež jednou provždy změnila náš pohled na vesmír.* Galileo, Academia, Praha, 2009.

[4] Goodstein, D. L., Goodstein, J. R.: *Feynman's lost lecture: the motion of planets around the sun.* Norton, New York, 1996.