

Rozhledy matematicko-fyzikální

Hledání pokladu

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 98 (2023), No. 3, 34–35

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/151844>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2023

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

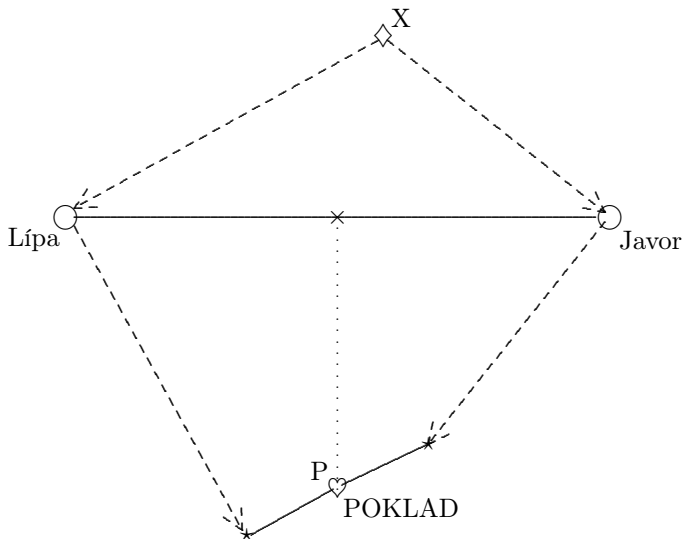
MATEMATICKÉ OŘÍŠKY

Hledání pokladu

Dnes máme pro čtenáře geometrickou hru. Na louce je lípa a javor, vzdálené od sebe 30 metrů. Instrukce jsou následující (viz obrázek níže):

- Zaujmi libovolné místo.
- Z tohoto místa vykroč přímo k lípě.
- Tam se otoč doleva o 90° a přímočaře pokračuj v chůzi, až dosáhneš vzdálenosti rovné vzdálenosti výchozího místa od lípy.
- Toto místo označ kolíkem.
- Vrať se do výchozího místa.
- Odtud vykroč přímo k javoru.
- Tam se otoč doprava o 90° a pokračuj v chůzi, až dosáhneš vzdálenosti rovné vzdálenosti výchozího místa od javoru.
- Toto místo označ kolíkem.
- Poklad nalezněš na půlicím bodě úsečky spojující oba kolíky.

Jeníček a Mařenka si vybrali dva různé výchozí body. Přesto našli poklad oba dva. *Jak je to možné?*



Nyní se vraťme k úloze o bijekci mezi čtvercem a úsečkou a představme elegantní řešení Adama Blažka, studenta 3. ročníku Jaderné fakulty ČVUT. Nejprve připomeňme znění úlohy.

Úloha: Zkonstruujte vlastní co nejjednodušší bijekci: $\langle 0; 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0; 1 \rangle$.

Řešení: Nejprve si uvědomíme, že zápis čísel v desítkové soustavě není jednoznačný. Např. $0,235 = 0,234\ 999\ 999\ 99\dots$. Udělejme tedy úmluvu, že zápisy končící nekonečně mnoha devítkami nepovolujeme. Definujme pomocnou funkci g , jejímž definičním oborem jsou nekonečné posloupnosti čísel z množiny $\{0, 1, \dots, 9\}$, následujícím způsobem:

$$g: \{0, 1, \dots, 9\}^\omega \rightarrow \langle 0; 1 \rangle:$$

$$g(a_1, a_2, \dots) := \begin{cases} 0, & \text{pokud } (\forall i)(a_i = 0), \\ \frac{0, a_1 \dots a_k}{2}, & \text{pokud } a_k \neq 0 \wedge (\forall i > k)(a_i = 0), \\ \frac{1}{2}, & \text{pokud } (\forall i)(a_i = 9), \\ \frac{1, (9-a_1) \dots (9-a_k)}{2}, & \text{pokud } a_k \neq 9 \wedge (\forall i > k)(a_i = 9), \\ 0, a_1 a_2 \dots & \text{jinak.} \end{cases}$$

Snadno ověříme, že g je bijekce: stačí si rozmyslet, že druhý případ pokryje čísla s konečným desetinným rozvojem v intervalu $(0; \frac{1}{2})$, čtvrtý případ čísla s konečným desetinným rozvojem v intervalu $(\frac{1}{2}; 1)$ a pátý případ čísla s nekonečným desetinným rozvojem.

Pomocí g již můžeme snadno definovat bijekci využívající „proplétání cifer“ $f: \langle 0; 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0; 1 \rangle$:

$$f(x, y) := g(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots),$$

kde

$$(a_1, a_2, \dots) := g^{-1}(x), \quad (b_1, b_2, \dots) := g^{-1}(y).$$