Hledání pokladu

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 98 (2023), No. 3, 34–35

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151844`

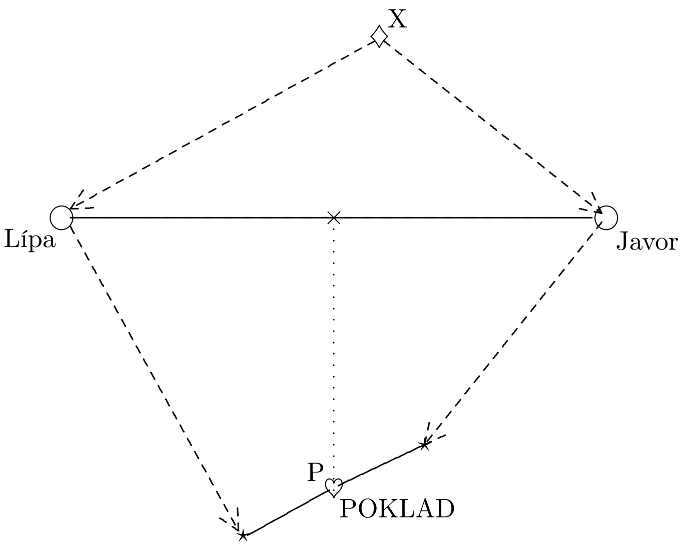
MATEMATICKÉ OŘÍŠKY

Hledání pokladu

Dnes máme pro čtenáře geometrickou hru. Na louce je lípa a javor, vzdálené od sebe 30 metrů. Instrukce jsou následující (viz obrázek níže):

- Zaujmi libovolné místo.
- Z tohoto místa vykroč přímo k lípě.
- Tam se otoč doleva o 90° a přímočaře pokračuj v chůzi, až dosáhneš vzdálenosti rovné vzdálenosti výchozího místa od lípy.
- Toto místo označ kolíkem.
- Vrať se do výchozího místa.
- Odtud vykroč přímo k javoru.
- Tam se otoč doprava o 90° a pokračuj v chůzi, až dosáhneš vzdálenosti rovné vzdálenosti výchozího místa od javoru.
- Toto místo označ kolíkem.
- Poklad nalezneš na půlicím bodě úsečky spojující oba kolíky.

Jeníček a Mařenka si vybrali dva různé výchozí body. Přesto našli poklad oba dva. *Jak je to možné?*



Nyní se vraťme k úloze o bijekci mezi čtvercem a úsečkou a představme elegantní řešení Adama Blažka, studenta 3. ročníku Jaderné fakulty ČVUT. Nejprve připomeňme znění úlohy.

Úloha: Zkonstruujte vlastní co nejjednodušší bijekci: $\langle 0;1)^2 \to \langle 0;1)$.

Řešení: Nejprve si uvědomíme, že zápis čísel v desítkové soustavě není jednoznačný. Např. $0{,}235 = 0{,}234\,999\,999\,99\ldots$ Udělejme tedy úmluvu, že zápisy končící nekonečně mnoha devítkami nepovolujeme. Definujme pomocnou funkci g, jejímž definičním oborem jsou nekonečné posloupnosti čísel z množiny $\{0,1,\ldots,9\}$, následujícím způsobem:

$g\colon \{0,1,\ldots,9\}^\omega \to \langle 0;1)$:

$$g(a_1,a_2,\ldots) \coloneqq \begin{cases} 0, & \text{pokud } (\forall i)(a_i = 0),\\ \frac{0{,}a_1\ldots a_k}{2}, & \text{pokud } a_k \neq 0 \wedge (\forall i > k)(a_i = 0),\\ \frac{1}{2}, & \text{pokud } (\forall i)(a_i = 9),\\ \frac{1{,}(9-a_1)\ldots(9-a_k)}{2}, & \text{pokud } a_k \neq 9 \wedge (\forall i > k)(a_i = 9),\\ 0{,}a_1a_2\ldots & \text{jinak.} \end{cases}$$

Snadno ověříme, že g je bijekce: stačí si rozmyslet, že druhý případ pokryje čísla s konečným desetinným rozvojem v intervalu $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, čtvrtý případ čísla s konečným desetinným rozvojem v intervalu $\left(\frac{1}{2};1\right)$ a pátý případ čísla s nekonečným desetinným rozvojem.

Pomocí g již můžeme snadno definovat bijekci využívající „proplétání cifer“ $f\colon \langle 0;1)^2 \to \langle 0;1)$:

$$f(x,y) \coloneqq g(a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots),$$

kde

$$(a_1,a_2,\ldots) \coloneqq g^{-1}(x)\,, \quad (b_1,b_2,\ldots) \coloneqq g^{-1}(y)\,.$$