Rozhledy matematicko-fyzikální

Dalibor Martišek

Jak to vlastně je? Fraktály

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 98 (2023), No. 3, 15–33

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151843

Jak to vlastně je? Fraktály

Dalibor Martišek, Šlapanice

Fraktály jsou geometrické útvary objevené již před více než sto lety. Jméno těmto útvarům však dal až Benoit Mandelbrot v šedesátých letech minulého století. Dnes se tyto útvary těší velké oblibě a zabývá se jimi široké spektrum prací – od popularizačních textů určených pro širokou veřejnost až po špičkové matematické články určené jen velmi úzkému okruhu specialistů.

Již samotné vymezení pojmu fraktál je značně problematické a ani mezi matematiky nepanuje naprostá shoda v názoru, co to fraktál vlastně je. Nejuznávanější definice pochází od výše zmíněného Mandelbrota, který definoval fraktál jako množinu, jejíž Hausdorffova dimenze je ostře větší než dimenze topologická. Hausdorffova dimenze je však pojem značně obtížný a zabývají se jím až některé specializované vysokoškolské kurzy teorie míry. Na opačné straně širokého spektra nejrůznějších charakteristik stojí popularizační tvrzení, že fraktál je synonymem pro složitou či členitou množinu.

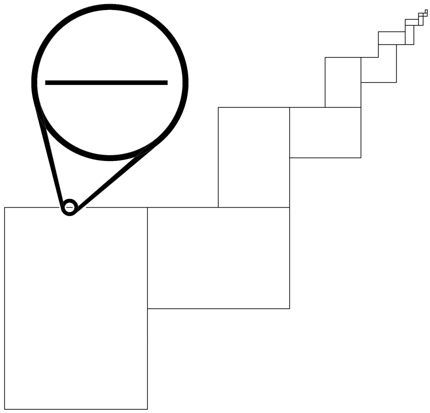
Fraktály mají celou řadu zajímavých vlastností, které lze využít mimo jiné i ve středoškolské matematice. Objevují se tedy i didaktické články s touto problematikou, ať již texty pojednávající speciálně o fraktálech a jejich přesné definici (viz např. Panešová, 2020), anebo práce zmiňující fraktály jen okrajově a velmi intuitivně, někdy ovšem bohužel špatně (viz např. [7, 8]).

Fraktál. Jak je to špatně

Na obr. 1 vidíme „schodiště papírů formátů řady A“. Toto schodiště je v některých článcích vydáváno za fraktál (např. [7, s. 166], [8, s. 124]).

Tito autoři svůj názor podepírají citací zakladatele fraktální geometrie B. Mandelbrota, který píše, že fraktály jsou tvary, u nichž „detail reprodukuje část a část reprodukuje celek“ [11, s. 7].

Nejen matematik, ale asi každý poznal, že tato slova nejsou definicí fraktálu. Jsou pouhou jeho elegantní zjednodušenou konturou. Návnadou, která má nalákat čtenáře k dalšímu čtení (jsou to slova z úvodu dvousetstránkové populárně naučné knihy). Ovšem ani tuto zjednodušenou charakteristiku schodiště na obr. 1 nesplňuje – jak by zakroužkovaná a zvětšená část měla „reprodukovat celek"?



Obr. 1: Schodiště papírů formátů řady A

Budeme-li chtít fraktály využít ve výuce na střední škole, máme několik možností, jak je studentům přiblížit. Od přístupu zcela intuitivního, až po jejich přesnou definici. Ovšem intuitivní přístup na jedné straně nesmí vést k chybným závěrům, snaha o přesnou definici na straně druhé by měla zůstat v možnostech středoškolské matematiky. V dalším textu se pokusíme přesvědčit čtenáře o tom, že obojího lze dosáhnout.

Fraktál. Jak je to intuitivně

Co asi myslel Benoit Mandelbrot slovy „detail reprodukuje část a část reprodukuje celek"? Jak již bylo řečeno, není to matematická definice, takže i k vysvětlení lze použít prostředek zcela nematematický, didakticky však velmi účinný – totiž vhodný obrázek. Domníváme se, že k intuitivnímu pochopení pojmu fraktál naprosto stačí například obr. 2.

V následujícím textu pojem fraktál vysvětlíme matematicky zcela korektně, pouze s ohledem na středoškolskou přiměřenost matematického formalismu.

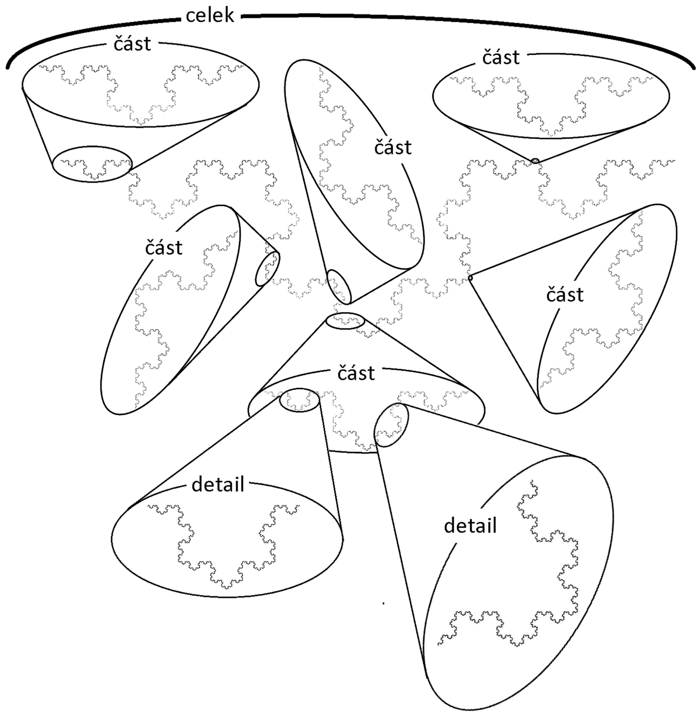
Délka, obsah, objem a míra

Délka, obsah a objem jsou na střední škole definovány jako kladná reálná čísla, která přiřazujeme jednotlivým útvarům tak, že

a) délka, obsah resp. objem shodných útvarů jsou stejné

b) délka, obsah resp. objem útvaru složeného z nepřekrývajících se útvarů je roven součtu délek, obsahů, objemů těchto útvarů

(viz např. [18, s. 451, 487]).

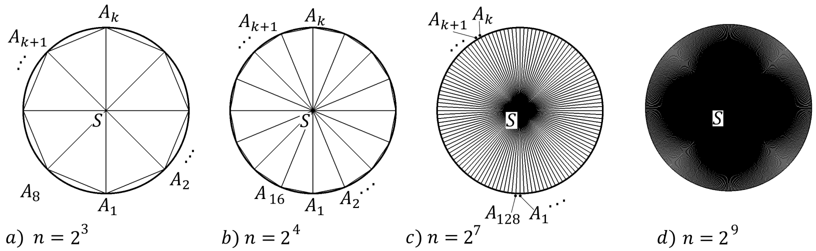


Obr. 2: Ilustrace fraktálu – útvaru, jehož „detail reprodukuje část a část reprodukuje celek“: v každé (sebemenší) části lze najít detail, který je (geometricky) podobný celému útvaru

Základem tohoto přiřazení je volba jednotkové úsečky, čtverce resp. krychle. V nejjednodušších případech pak můžeme obvod, obsah či objem daného útvaru přímo složit z těchto úseček, čtverců či krychlí. Obvody, obsahy resp. objemy mnohých dalších útvarů určíme dalším použitím pravidel a) a b). Délku určujeme jako součet délek úseček, na který lze studovaný útvar rozdělit. Podobně určíme obsah útvaru tak, že ho rozdělíme na nepřekrývající se útvary se známým obsahem (například trojúhelníky), a pak sečteme obsahy těchto útvarů. Tyto postupy lze chápat také tak, že najdeme množinu úseček resp. rovinných či prostorových útvarů se známou délkou resp. obsahem či objemem, které se nepřekrývají a zkoumaný útvar přesně pokryjí.

V Polákově definici se ovšem skrývá problém. Již ze základní školy známe například vzoreček pro délku kružnice. Jak k němu dospějeme? Kružnici lze rozdělit jen na kruhové oblouky a určení délky kruhového oblouku není o nic jednodušší než určení délky celé kružnice. Bod b) lze v tomto případě splnit pouze tak, že sestrojíme n-tice nepřekrývajících se úseček (například obvody vepsaných či opsaných n-úhelníků), které přesně pokryjí kružnici až ve své limitě pro $n \to \infty$. Obsah kruhu dostaneme analogicky jako limitu obsahů těchto n-úhelníků.

Na obr. 3 je ilustrována přibližná délka kružnice a přibližný obsah kruhu jako obvod a obsah pravidelného n-úhelníku pro $n = 2^m$, kde $m = 3$ (obr. 3a), $m = 4$ (obr. 3b), $m = 7$ (obr. 3c) a $m = 9$ (obr. 3d). Pro $m \to \infty$ přejde n-úhelník v kružnici a množina trojúhelníků v kruh. Přesnou délku kružnice můžeme tedy určit jako limitu součtů velikostí úseček A_kA_{k+1} a obsah kruhu jako limitu součtů obsahů trojúhelníků A_kSA_{k+1}.



Obr. 3: K délce kružnice, obsahu kruhu a „délce kruhu“

V bodě b) Polákovy definice je tedy třeba výslovně připustit nekonečný počet útvarů a součet nekonečně mnoha délek, obsahů či objemů. V tom případě můžeme ovšem kruh dostat nejen jako limitu obsahů, ale i jako limitu délek vhodných křivek, či objemů vhodných těles. Podobně lze sestrojit posloupnost obsahů či objemů, jejichž limitou je kružnice (nikoliv kruh či koule). Můžeme tedy hovořit o „délce“ či „objemu“ kruhu a o „obsahu“ či „objemu“ kružnice?

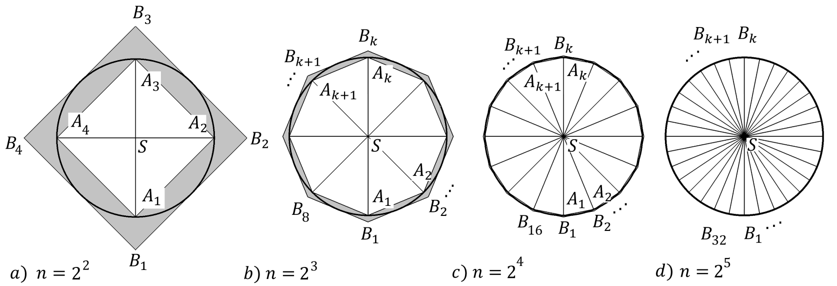
Abychom zjistili „délku kruhu“, musíme (stejně jako v případě délky kružnice) sestrojit posloupnost množin úseček, které v limitě pokryjí celý kruh (nikoliv jen jeho hraniční kružnici). Sjednoťme postupně obvody trojúhelníků A_kSA_{k+1} na obr. 3 a) b) c) d). Dostaneme množiny úseček, které se nepřekrývají a jejich celková délka je

$$d = 2^m \cdot |A_k A_{k+1}| + 2^m \cdot r,$$

kde r je poloměr kružnice. Pro $m \to \infty$ tato množina úseček vyplní přesně celý kruh a délka všech jejich úseček je

$$d = \lim_{m\to\infty} (2^m \cdot |A_k A_{k+1}| + 2^m \cdot r) = \infty.$$

Abychom naopak zjistili „obsah kružnice“, sestrojíme (stejně jako v případě obsahu kruhu) posloupnost rovinných útvarů, které v limitě přesně pokryjí kružnici. Obsah pak zjistíme jako limitu posloupnosti obsahů těchto útvarů. Takovou posloupností může být např. posloupnost útvarů ohraničených obvody $A_1 \dots A_k A_{k+1} \dots A_n$, $B_1 \dots B_k B_{k+1} \dots B_n$ pravidelných n-úhelníků kružnici vepsaných a opsaných. Na obr. 4 vidíme tyto útvary pro $n = 2^m$, $m = 2, 3, 4, 5$ vyznačené šedě. Pro $m \to \infty$ splyne tento útvar s kružnicí a limita posloupnosti příslušných obsahů je rovna nule (výpočet přenecháme čtenáři).



Obr. 4: K „obsahu kružnice“

Pojmy „délka kruhu“ a „obsah kružnice“ tedy smysl jistě mají. K tomu, aby byly zcela korektní, zbývá ještě maličkost. Musíme připustit, že délka, obsah a objem, které mohou být určovány jako limity, mohou stejně jako limity nabývat i nulových a nekonečných hodnot. Takto zobecněnou délku, obsah a objem budeme nazývat *míra*. Délka, obsah a objem jsou tedy speciální jedno-, dvoj- a trojrozměrné míry útvaru. Anebo naopak: jedno-, dvoj- a trojrozměrná míra je zobecněním délky, obsahu a objemu.[1)] Tím jsme ovšem otevřeli další problém.

[1)] V dalším textu budeme místo pojmu „dvojrozměrná míra“ či „zobecněný obsah“ často hovořit stručně jen o obsahu, podobně o délce resp. objemu. U délky, obsahu i objemu budeme tedy v dalším textu připouštět nulové a nekonečné hodnoty.

Dimenze. Jak je to špatně

Pojem dimenze skrytě používáme úplně všichni. Běžně říkáme, že úsečka je jednorozměrná, čtverec dvojrozměrný, krychle trojrozměrná. Většinou si myslíme, že počet rozměrů je zcela jasný a že ho není potřeba vůbec vysvětlovat. Jakmile se však o nějaké vysvětlení pokusíme, dostaneme se nejspíš do velkých problémů.

Jak vysvětlíme „počet rozměrů“ či „dimenze“? V historii matematiky jsou známy dva neúspěšné pokusy o definici pojmu dimenze geometrického útvaru:

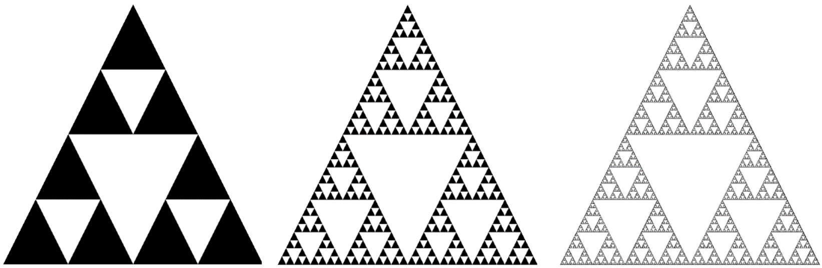
1) Je to počet údajů (čísel, souřadnic, parametrů), které jsou potřeba k určení polohy konkrétního bodu v daném útvaru. Kružnice je jednorozměrná, protože polohu jejího každého bodu určí jeden parametr v jejich parametrických rovnicích. Čtverec je dvojrozměrný, protože k určení polohy bodu ve čtverci jsou potřeba dvě souřadnice, krychle je z analogického důvodu trojrozměrná.

Tuto definici postavili na hlavu Georg Cantor, Ernst Schröder a Felix Bernstein, když sestrojili vzájemně jednoznačné zobrazení úsečky a čtverce (viz např. [12]). Tím mimo jiné ukázali, že k určení přesné polohy bodu ve čtverci stačí jedno jediné číslo. To znamená, že čtverec, který je přímo prototypem dvojrozměrnosti a podle kterého jsou pojmenovány dokonce jednotky obsahu, by měl být podle této definice jednorozměrný.

2) Dimenze (ohraničeného) útvaru se určí podle jeho délky, obsahu či objemu. Každý „běžný“ ohraničený geometrický útvar má totiž nenulovou a konečnou právě jednu z těchto měr. Kruh je dvojrozměrný, protože má nenulový a konečný právě jen obsah. Jeho délka je nekonečná, jeho objem je nulový. Kružnice je jednorozměrná, protože má nenulovou a konečnou právě jen délku. Její obsah a objem je roven nule. Kužel je z analogického důvodu trojrozměrný.

Takto zavedený počet rozměrů (dimenzi) však poslala do historie řada útvarů, které se postupně objevily na přelomu 19. a 20. století. Jako příklad uveďme konstrukci Wacława Franciszka Sierpińského ([21, s. 302–305]): sestroj libovolný trojúhelník a vyjmi z něho vnitřek trojúhelníku určeného jeho středními příčkami. Na tři zbývající trojúhelníky aplikuj tutéž konstrukci, s devíti následujícími trojúhelníky proveď totéž a takto pokračuj do nekonečna. Na obr. 5 jsme takto postupně odstraňovali bílé trojúhelníky z trojúhelníku černého).

Otázkou je, jaká je dimenze výsledného útvaru ve výše uvedeném smyslu. Je-li tato dimenze dvě, musí být jeho obsah nenulový a konečný, jeho délka nekonečná. Je-li dimenze jedna, musí být nenulová a konečná délka a nulový obsah. Jestliže však délku a obsah spočítáme, zjistíme, že neplatí ani jedno, ani druhé. Jsou to jednoduchá cvičení na geometrickou řadu (u délky napovězme, že útvar obsahuje obvody všech vyjímaných trojúhelníků). Zájemce o výpočet můžeme odkázat na text Vlastimila Dlaba [1]. Délka je nekonečná, ale obsah už je nulový. Jako kdyby dimenze jedna byla málo a dimenze dvě už moc.



Obr. 5: Druhý, pátý a sedmý krok konstrukce rovnoramenného Sierpińského trojúhelníku

Dimenze. Jak je to správně

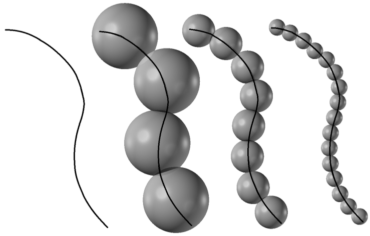
Počet rozměrů, dimenzi, je tedy třeba určovat jinak. Útvar na obr. 6 vlevo bychom rádi považovali za jednorozměrný, útvar na obr. 7 vlevo za dvojrozměrný. V zájmu jednotného postupu pro všechny tři možné dimenze umístěme tyto útvary do trojrozměrného prostoru[2)] a pokrývejme je „co nejúsporněji“ otevřenými koulemi o poloměru r, který se neustále zmenšuje. Od jisté velikosti poloměru r se nám pokrytí nepodaří lépe než tak, že na obr. 6 se musejí překrývat vždy minimálně dvě koule, na obr. 7 minimálně koule tři. Kdybychom totéž provedli s útvarem, který běžně považujeme za trojrozměrný, musely by se překrývat minimálně koule čtyři. Dimenzí útvaru, počtem rozměrů tak, jak tyto pojmy běžně chápeme, bude tedy minimální počet překrývajících se koulí zmenšený o jedničku.

Při pokrývání hranice papírového schodiště z obr. 1 se překrývají vždy dvě koule – tato hranice je jednorozměrná (viz obr. 8).

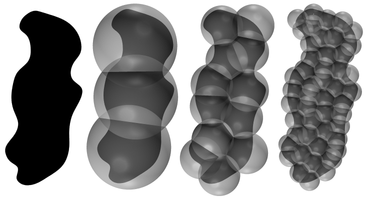
Otázkou zůstává, jaká je dimenze Sierpińského trojúhelníku, kterou jsme nedokázali určit v předchozím textu. Odpověď poskytne obr. 9. Od

[2)] Poznamenejme, že s dimenzí celé roviny a celého prostoru problémy nejsou. Dimenze je v tomto případě určena počtem navzájem kolmých přímek, které zde existují.

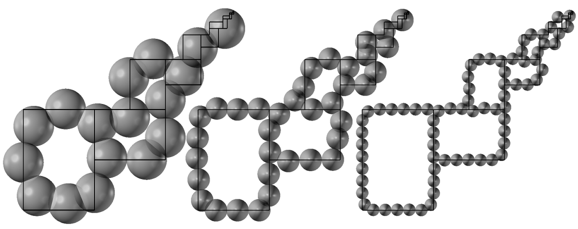
jistého poloměru r pokrývajících koulí se musejí překrývat vždy jen dvě. Tento útvar je jednorozměrný. Má dimenzi jedna – je to křivka.



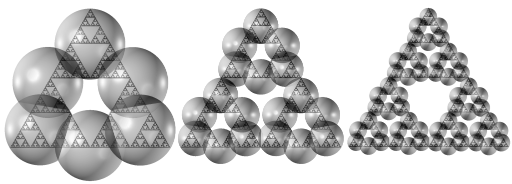
Obr. 6: Pokrývání jednorozměrného útvaru (vlevo) zmenšujícími se otevřenými koulemi



Obr. 7: Pokrývání dvojrozměrného útvaru (vlevo) zmenšujícími se otevřenými koulemi

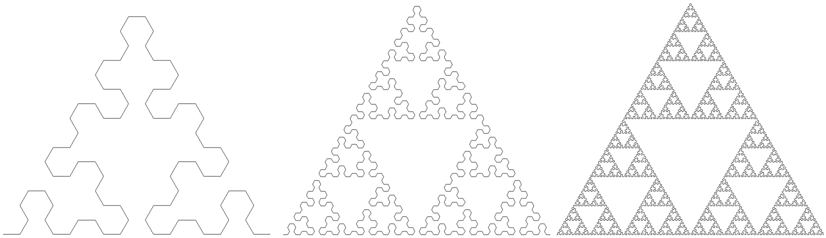


Obr. 8: Pokrývání schodiště papírů z obr. 1 zmenšujícími se otevřenými koulemi



Obr. 9: Pokrývání Sierpińského trojúhelníku zmenšujícími se otevřenými koulemi

Ten, kdo tomu nevěří, se snad nechá přesvědčit konstrukcí, kterou objevil v šedesátých letech minulého století Aristid Lindenmayer [10] a která je naznačena na obr. 10.



Obr. 10: Čtvrtý, šestý a osmý člen posloupnosti křivek, jejíž limitou je Sierpińského trojúhelník

Kam se poděla velikost?

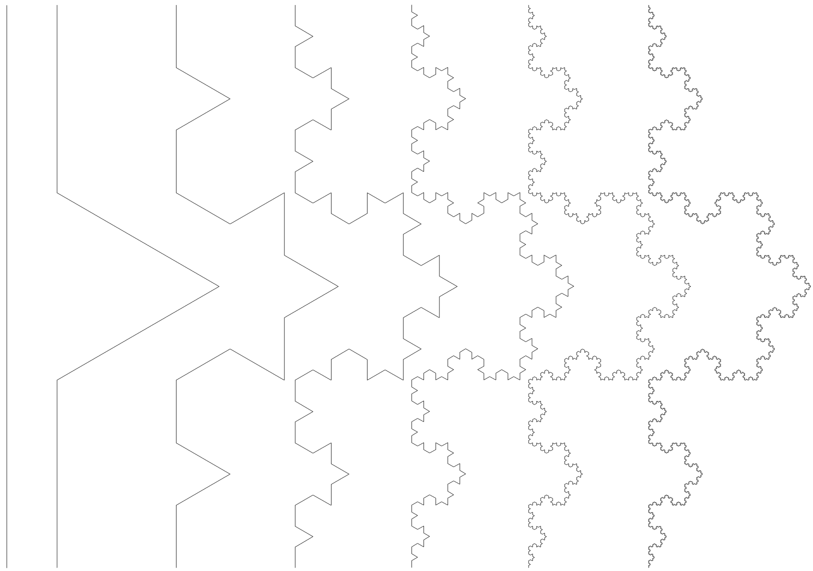
Dimenze tak, jak jsme ji zavedli v minulém oddílu, však nevyřešila jeden zásadní problém. U ohraničených geometrických útvarů jsme zvyklí měřit jejich „velikost". Číslo opatřené jednotkou délky, obsahu či objemu podle toho, zda se jedná o útvar jedno-, dvoj- či trojrozměrný. To nám umožňuje mimo jiné porovnávat útvary podle velikosti.

Takto můžeme určit například „velikost" papírového schodiště, a to jak jeho hraniční křivky (tj. délku), tak „velikost" plochy, která je touto křivkou ohraničena (tedy obsah). Ale „velikost" Sierpińského trojúhelníku takto určit nemůžeme. Útvar je ohraničený, jednorozměrný, ale jeho délka je nekonečná. Křivka na obr. 2 nazvaná podle Nielse Fabiana Helge von Kocha, který ji sestrojil v roce 1904, je na tom stejně. Je ohraničená, jednorozměrná, ale její délka je nekonečná. Snadno to plyne z její konstrukce (viz obr. 11): danou úsečku rozdělíme na třetiny, nad prostřední třetinou sestrojíme rovnostranný trojúhelník a původní třetinu vyjmeme. Na každé ze čtyř takto vzniklých úseček zopakujeme tutéž konstrukci a takto pokračujeme do nekonečna (von Koch, 1904). Každá následující aproximace je o třetinu delší než aproximace předcházející.

Který útvar je větší? Sierpińského trojúhelník, anebo Kochova křivka? Tuto otázku nelze zodpovědět ani měřením délky (ta je nekonečná), ani měřením obsahu (ten je u obou útvarů nulový).

Otázku srovnávání „velikostí" těchto útvarů vyřešil Felix Hausdorff [4, 5] tím, že zobecnil pojem dimenze. Dimenze, o které jsme dosud mluvili, připouští jen celočíselné hodnoty a budeme ji dále nazývat *di-*

menzí topologickou. Za příčinu neporovnatelnosti některých geometrických útvarů označil Hausdorff nedostatečnou „jemnost“ této dimenze. Nekonečná délka úvaru je dána tím, že útvar měříme v dimenzi, která je příliš nízká, nulový obsah naopak tím, že dimenze dvě je už příliš vysoká. Abychom mohli vyjádřit „velikost“ (míru) takového útvaru nenulovým a konečným číslem, je třeba měřit „správným metrem“. Měřit v dimenzi s neceločíselnou hodnotu v intervalu $(1,2)$. Otázkou je, jak takovou dimenzi zavést.



Obr. 11: Prvních sedm aproximací Kochovy křivky

Mřížková dimenze a mřížková míra

Dimenzi, která připouští neceločíselné hodnoty, lze definovat mnoha způsoby. Známe dimenzi soběpodobnostní, dimenzi informační, dimenzi box-counting atd. Každou takovou dimenzi dnes nazýváme dimenzí fraktální. Nejstarší a nejobecnější z nich, *dimenze Hausdorffova*, není v silách středoškolské matematiky. Zájemce o tuto konstrukci lze odkázat na článek Kateřiny Panešové [17]. Zde uvedeme dimenzi poněkud speciálnější. Zaplatíme za to tím, že některé útvary, které Hausdorffova dimenze a míra měřit umí, zůstanou pro nás neměřitelné. I s naší užší definicí dimenze však paletu měřitelných útvarů velmi významně rozšíříme.

Měřené útvary budeme rovněž pokrývat koulemi stejného poloměru, ale tentokrát nás bude zajímat, jak se mění počet koulí nutných k pokrytí, jestliže společný poloměr těchto koulí zmenšujeme.

Označme r_1 poloměr největších koulí na obr. 6 a jejich počet potřebný k pokrytí útvaru nechť je p_1. Poloměr menších koulí analogicky r_2, jejich počet p_2 a konečně pro poslední zobrazený případ r_3, resp. p_3. Pro zjednodušení můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $r_1 = 1$. Prozraďme (a doufáme, že nám bude čtenář věřit), že v tom případě je $r_2 = 1/2$ a $r_3 = 1/4$. Snadno spočítáme, že počty koulí potřebných k příslušnému pokrytí jsou $p_1 = 4$, $p_2 = 8$, $p_3 = 16$. Jistě si všimneme, že v tomto případě je

$$p_1 \cdot r_1 = p_2 \cdot r_2 = p_3 \cdot r_3 = 4.$$

Na obr. 7 máme analogicky $r_1 = 1$, $r_2 = 1/2$, $r_3 = 1/4$, příslušné počty jsou $p_1 = 3$, $p_2 = 12$, $p_3 = 48$. Zde je tedy

$$p_1 \cdot r_1^2 = p_2 \cdot r_2^2 = p_3 \cdot r_3^2 = 3.$$

Není jistě těžké odhadnout, jak by něco podobného vypadalo pro topologicky trojrozměrný útvar.

Pro jiné „běžné útvary“ si tyto součiny nemusejí být vždy přesně rovny. Na obr. 8 je např. $r_1 = 1$, $r_2 = 1/2$, $r_3 = 1/4$ a $p_1 = 17$, $p_2 = 36$, $p_3 = 72$. V každém případě lze zvlášť pro dostatečně velká n psát

$$0 < p_n \cdot r_n^D \approx M < \infty, \tag{1}$$

kde M a D jsou konstanty. S rostoucím n jsou navíc aproximace konstant M, D stále přesnější, takže můžeme psát

$$M = \lim_{n\to\infty} p^n \cdot r_n^D. \tag{2}$$

Navíc snadno nahlédneme, že pro každé $d < D$ je

$$M = \lim_{n\to\infty} p_n \cdot r_n^d = \infty \tag{3}$$

a pro každé $d > D$ je

$$M = \lim_{n\to\infty} p_n \cdot r_n^d = 0. \tag{4}$$

Shrnuto: exponent D v limitě (2) je pro dosud známé útvary roven topologické dimenzi a konstanta M se chová stejně jako „velikost“ (míra) útvaru měřená v této dimenzi. V dimenzi D je tato míra nenulová a konečná, viz (1), v dimenzi nižší je nekonečná, viz (3), a v dimenzi vyšší nulová, viz (4). Míra M se tedy skutečně chová tak, jak očekáváme od délky, obsahu i objemu. Dimenzi D a míru M v limitě (2) nazýváme *mřížkovou dimenzí*, resp. *mřížkovou mírou* útvaru.

Na závěr tohoto oddílu několik poznámek. Jestliže čtenář očekává, že mřížková míra v příslušné dimenzi je přímo rovna délce, obsahu či objemu útvaru tak, jak to známe z mnoha vzorečků, musíme ho zklamat. Mřížková míra je totožná pouze s délkou. Mřížkové míry dvoj- resp. trojrozměrných útvarů v dimenzi dvě resp. tři jsou sice nenulové a konečné, ale nejsou přímo rovny obsahu resp. objemu, jsou jen jejich jistými nenulovými násobky. Rovnosti lze sice dosáhnout zobecněním naší definice, to však opět značně překračuje možnosti středoškolské matematiky. Zájemce o bližší informace je možné opět odkázat na článek [17], pro naše účely toto zobecnění není nutné.

Poslední poznámka v tomto oddílu se týká měřitelnosti útvarů mřížkovou mírou. Jak uvidíme dále, mřížkovou mírou resp. dimenzí budeme schopni změřit Sierpińského trojúhelník, Kochovu křivku i mnohé další útvary, které „odolávají“ délce, obsahu i objemu. Přesto existují „útvary“ (řekněme raději množiny bodů), které Felix Hausdorff změřit uměl a mřížková míra to neumí. Takovou množinou je například racionální interval, tedy např. množina $\langle 0,1\rangle \cap \mathbb{Q}$. Neměřitelnost takových množin naším postupem je daní, kterou musíme zaplatit za naše zjednodušení.

Hledá se správný metr

Již dva oddíly slibujeme dimenzi, která může nabývat i neceločíselných hodnot, a zatím jsme s žádnou takovou hodnotou nepřišli. V příkladech z předchozího oddílu byla naopak mřížková dimenze vždy rovna celočíselné dimenzi topologické. Podívejme se však na mřížkovou dimenzi Sierpińského trojúhelníku.

Na obr. 9 máme pro $r_1 = 1$, $r_2 = 1/2$, $r_3 = 1/4$ postupně tyto počty pokrývajících koulí: $p_1 = 6$, $p_2 = 18$, $p_3 = 54$, obecně zřejmě $r_n = 2^{1-n}$, $p_n = 2 \cdot 3^n$ takže dle (2) je míra v dimenzi jedna

$$M = \lim_{n\to\infty} p^n \cdot r_n^1 = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot 3^n \cdot (2^{1-n})^1 = 4 \cdot \lim_{n\to\infty} 3^n \cdot 2^{-n} = \infty$$

a míra v dimenzi dvě

$$M = \lim_{n\to\infty} p^n \cdot r_n^2 = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot 3^n \cdot (2^{1-n})^2 = 8 \cdot \lim_{n\to\infty} 3^n \cdot 4^{-n} = 0.$$

To jen potvrzuje již dříve konstatovanou nekonečnou délku a nulový obsah. Nyní však již můžeme hledat neceločíselnou dimenzi D, ve které bude míra tohoto útvaru nenulová a konečná.

Označme D_n, M_n přibližné hodnoty hledané dimenze a míry zjištěné v n-tém kroku, tedy

$$M_n = p_n \cdot r_n^{D_n} = 2 \cdot 3^n \cdot (2^{1-n})^{D_n}. \tag{5}$$

Logaritmováním obdržíme

$$\ln M_n = \ln 2 + n \cdot \ln 3 + (1-n) \cdot D_n \cdot \ln 2$$
$$D_n = -\frac{\ln 2}{(1-n)\cdot \ln 2} + \frac{\ln M_n}{(1-n)\cdot \ln 2} + \frac{n}{(n-1)} \cdot \frac{\ln 3}{\ln 2}. \tag{6}$$

Hledanou dimenzi pak dostaneme jako limitu pro $n \to \infty$

$$D = \lim D_n = \lim \left(\frac{1}{n-1} + \frac{\ln M_n}{(1-n)\cdot \ln 2} + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\ln 3}{\ln 2} \right). \tag{7}$$

Za předpokladu, že limity všech tří zlomků jsou vlastní, můžeme psát:

$$D = \lim D_n = \lim \frac{1}{n-1} + \lim \frac{\ln M_n}{(1-n)\cdot \ln 2} + \lim \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\ln 3}{\ln 2}. \tag{8}$$

První limita na pravé straně je zřejmě rovna nule. Dimenzi hledáme tak, aby $0 < \lim M_n < \infty$. Snadno tedy nahlédneme, že i druhá limita je nulová. Pak již jednoduše dostáváme

$$D = \lim D_n = \lim \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2}. \tag{9}$$

Úprava (7) ⇒ (8) je tedy korektní a hodnota (9) je hledanou mřížkovou dimenzí.

Mřížková dimenze Sierpińského trojúhelníku je tedy neceločíselná, dokonce iracionální. Pro Kochovu křivku bychom stejným postupem dostali dimenzi $D = \ln 4 / \ln 3$.

Kromě toho, že mřížková dimenze těchto útvarů je neceločíselná, je podstatná i skutečnost, že tato dimenze je vyšší než dimenze topologická. Právě takové útvary totiž nazýváme fraktály.

Kromě dimenze je možné určit i „velikost“ (míru) fraktálu v jeho dimenzi. Například mřížkovou míru Sierpińského trojúhelníku z obr. 5 či 9 v dimenzi (9) obdržíme jako limitu výrazu (5), resp. (6) pro $D_n = D$, tedy:

$$\begin{aligned}
\lim \ln M_n &= \lim\left(\ln 2 + n \cdot \ln 3 + (1-n) \cdot D \cdot \ln 2\right)\\
\ln M &= \lim\left(\ln 2 + n \cdot \ln 3 + (1-n) \cdot \frac{\ln 3}{\ln 2} \cdot \ln 2\right)\\
\ln M &= \lim\left(\ln 2 + n \cdot \ln 3 + (1-n) \cdot \ln 3\right)\\
\ln M &= \lim\left(\ln 2 + \ln 3\right) = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6\\
M &= 6.
\end{aligned}$$

Míra našeho trojúhelníku je tedy rovna šesti.

Jak tomuto výsledku rozumět? Především je třeba si uvědomit, že celý výpočet jsme provedli dle obr. 9, kde jsme předpokládali, že poloměr největších koulí je roven jedné, dejme tomu jednomu metru. Pak strana rovnostranného trojúhelníku, ze kterého byla Sierpińského konstrukce provedena (tzv. inicializačního trojúhelníku), je zhruba pět metrů (lze samozřejmě zadat přesnou polohu koulí a provést přesný výpočet, pro naši představu to však není nutné). Míra Sierpińského trojúhelníku je pak šest. Ale šest čeho?

Kdybychom měřili obvod (resp. míru v dimenzi jedna), byl by jednotkou „délkový“ metr – metr umocněný na první ($m = m^1$). Kdybychom měřili obsah (resp. míru v dimenzi dva), museli bychom připsat metr umocněný na druhou (m^2). My jsme ovšem měřili míru v dimenzi $D = \ln 3/\ln 2$. Míra Sierpińského trojúhelníku na obr. 9 je tedy

$$6m^{\ln 3/\ln 2} = 6m^{1{,}584\,962\ldots}.$$

Míra fraktálů se ovšem většinou hledat nemusí. U různých útvarů s neceločíselnou dimenzí se totiž většinou liší už tato dimenze, takže za větší můžeme vždy prohlásit útvar s větší dimenzí. Tedy například Sierpińského trojúhelník s jakkoli malým inicializačním trojúhelníkem je vždycky větší než Kochova křivka s jakkoliv dlouhou inicializační úsečkou. Jednoduše proto, že Sierpińského trojúhelník má větší mřížkovou dimenzi než Kochova křivka.

Poznámka: Jak jsme konstatovali výše, topologická dimenze hranice papírového schodiště z obr. 1 je rovna jedné. Konstatovali jsme rovněž, že pro dostatečně velká n platí

$$0 < p_n \cdot r_n^1 \approx M < \infty.$$

Výpočtem můžeme snadno ověřit, že pro délku této hranice d (míru v dimenzi jedna) platí $0 < d < \infty$. To vše svědčí o tom, že i libovolná fraktální dimenze je rovna jedné a že tento útvar fraktálem není.

Když detail reprodukuje část a část reprodukuje celek

Pokusme se nyní dát Mandelbrotovu bonmotu, kterým jsme tento článek uváděli, matematický kabát. Tím kabátem jsou pojmy *soběpodobnost* a *soběpříbuznost*.

Geometrický útvar $\mathcal{U}$ je soběpodobný právě tehdy, když existuje konečný počet podobných zobrazení (například stejnolehlostí) $f_1, f_2, \ldots, f_n$ takových, že útvar je sjednocením svých vlastních obrazů v těchto zobrazeních, tedy

$$\mathcal{U} = f_1(\mathcal{U}) \cup f_2(\mathcal{U}) \cup \cdots \cup f_n(\mathcal{U}), \tag{10}$$

a soběpříbuzný právě tehdy, když zobrazení $f_1, f_2, \ldots, f_n$ nejsou podobnosti, ale afinity.

Připomeňme, že zobrazení je podobnost právě tehdy, když zachovává měřítko, tj. když každou úsečku AB zobrazí na úsečku $A'B'$ tak, že $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$, kde k je konstanta (měřítko nebo lépe koeficient podobnosti). Stejnolehlost je speciální případ podobnosti, kdy bod A, jeho obraz A' a tzv. střed stejnolehlosti S leží na téže přímce, přičemž $k < 0$ právě tehdy, když S je vnitřním bodem úsečky AA'. Zobrazení f je afinita právě tehdy, když zachovává dělicí poměr bodů, tj. když každou úsečku AB zobrazí na úsečku $A'B'$ a každý vnitřní bod C úsečky AB na vnitřní bod C' úsečky $A'B'$ tak, že $|A'C'| : |C'B'| = |AC| : |CB|$.

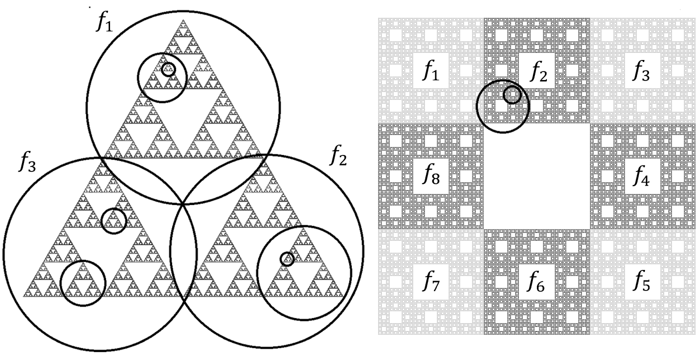
Fraktály, o kterých jsme se dosud zmiňovali, jsou soběpodobné. Sierpińského trojúhelník je sjednocením tří svých obrazů ve stejnolehlostech se středy ve vrcholech inicializačního trojúhelníku a koeficientem $k = 1/2$ (viz obr. 12 vlevo). Stručně se říká, že je sjednocením tří svých kopií zmenšených na polovinu. Podobně Kochova křivka je sjednocením čtyř svých kopií zmenšených na třetinu. Sierpińského čtverec (obr. 12 vpravo) je sjednocením osmi svých kopií zmenšených na třetinu.

Právě tato vlastnost umožňuje „části útvaru reprodukovat jeho celek“ a „detailu reprodukovat část“. V každém kruhu, který obsahuje více než jeden bod soběpodobného útvaru, lze najít jeho část, která je (geometricky) podobná celému útvaru tak, jak je naznačeno na obr. 12.

Mezi soběpodobností a dimenzí je navíc zajímavý vztah. Jestliže koeficienty k, $0 < |k| < 1$, všech n podobností ve vztahu (10) jsou stejné, je dimenze útvaru rovna

$$D = \frac{\ln n}{\ln(1/|k|)}. \tag{11}$$

Dimenze Sierpińského trojúhelníku je tedy skutečně $\ln 3/\ln 2$ a Kochovy křivky $\ln 4/\ln 3$, jak jsme konstatovali v předchozím oddílu, dimenze Sierpińského čtverce je $\ln 8/\ln 3$.

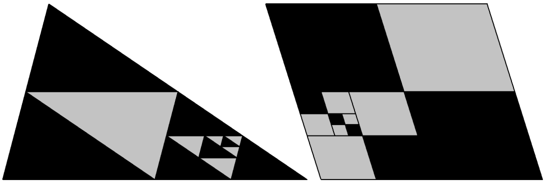


Obr. 12: V soběpodobných fraktálech detaily reprodukují části a části reprodukují celek

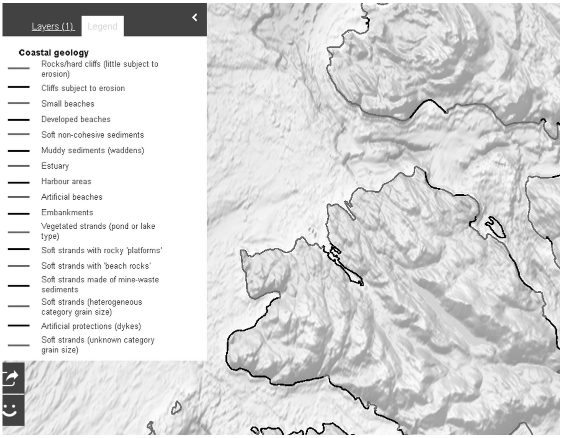
Na tomto místě je třeba vyvrátit rozšířený mýtus, že soběpodobnost a soběpříbuznost jsou vlastnosti, které fraktál definují, tj. že útvar je fraktálem právě tehdy, když je soběpodobný nebo soběpříbuzný. Není to pravda. Existují fraktály, které nejsou ani soběpodobné, ani soběpříbuzné (viz např. obr. 14 a [15]). Naopak existují soběpodobné útvary, které nejsou fraktály. Například „obyčejný" trojúhelník či „obyčejný" rovnoběžník. Ty jsou sjednocením čtyř svých kopií zmenšených na polovinu (nebo šestnácti kopií zmenšených na čtvrtinu atd.), viz obr. 13. I jejich část reprodukuje celek a jejich detail část. I pro jejich mřížkovou dimenzi platí vztah (11), neboť

$$\frac{\ln 4}{\ln 2} = \left(\frac{\ln 16}{\ln 4} \text{ atd.}\right) = \frac{\ln 2^2}{\ln 2} = \frac{2\ln 2}{\ln 2} = 2.$$

Mřížková dimenze je však rovna dimenzi topologické, takže tyto útvary fraktály nejsou.



Obr. 13: I některé „běžné“ útvary jsou soběpodobné, i jejich detaily reprodukují části a části reprodukují celek – fraktály to však nejsou



Obr. 14: Část pobřežní linie Velké Británie v měřítku 1 : 100 000 (`Ec.europa.eu`)

Obr. 15: Fraktální kapradina sestrojená kombinací soběpříbuznosti a náhodných procesů

Fraktály jsou velmi zajímavé útvary, které poskytují řadu příležitostí k zamyšlení, zobecňování a rozvoji abstraktního myšlení. Umožňují uplatnit a prohloubit znalosti mnohých partií středoškolské matematiky, zejména geometrických řad, vlastností logaritmů a limit. Díky možnostem současné výpočetní techniky mohou být hezkou ukázkou toho, že matematika může být nejen užitečná, ale i krásná (viz např. [15, 16, 18]).

Závěr

Útvary s neceločíselnou dimenzí byly v době svého vzniku na začátku minulého století považovány za matematická monstra, která nemají nic společného s realitou. O půl století později vyšlo najevo, že matematika vedla Sierpińského, Kocha, Hausdorffa a mnohé další k realitě blíž, než oni sami tušili.

Řadou měření a experimentů bylo zjištěno, že některé přírodní útvary mají fraktální charakter a že neceločíselná dimenze je velmi vhodným měřítkem jejich členitosti. Jako příklad uveďme pobřežní linie kontinentů a ostrovů. Ty jsou velmi podrobně definovány v Úmluvě OSN o mořském právu z roku 1982 (`Wikipedia.org`, `Psp.cz`). Geodetové a kartografové je dnes vytyčují pomocí kombinace GPS, pozemních monitorovacích stanic a speciálních metod zpracování dat, z nichž některé dosahují polohové přesnosti plus mínus několik milimetrů ([6, s. 18]). Na obr. 14 vidíme část geodeticky vytyčené pobřežní linie Velké Británie. „Téměř rovná“ pobřežní linie severní Afriky má dimenzi 1,05, linie Bretaně či Velké Británie 1,25 – to je téměř přesně dimenze Kochovy křivky, hranice pobřeží Norska, plného hlubokých a klikatých fjordů, se pyšní hodnotou 1,52, což je téměř dimenze Sierpińského trojúhelníku (`Fractalfoundation.org`).

Přírodní útvary samozřejmě nemohou reprodukovat své části a detaily do nekonečna. Přesto jsou fraktály k popisu jejich morfologie daleko vhodnější než krychle, jehlany a koule. Platí to zvláště pro fraktály soběpříbuzné a tzv. statisticky soběpříbuzné, jejichž části a detaily jsou „mírně deformovány“ afinitami a náhodou (viz obr. 15 a Martišek 2022d). Právě to je totiž na přírodních útvarech krásné.

L i t e r a t u r a

[1] Dlab, V.: Kouzlo Sierpińského trojúhelníku. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 97 (2022), č. 2, s. 1–5.

[2] https://ec.europa.eu/maritimeaffairs/atlas/maritime_atlas/#lang=EN;p=w;bkgd=1;theme=18:1.00;c=-661722.1482667197,7684861.447349561;z=11

[3] https://fractalfoundation.org/OFC/OFC-10-4.html

[4] Hausdorff, F.: *Grundzüge der Mangenlehre.* Veit & Comp., Lipsko, 1914.

[5] Hausdorff, F.: Dimension und äußeres Maß. *Math. Ann.*, 79 (1919), s. 157–179.

[6] Kratochvíl, V.: *Geodézie III.* FAST VUT, Brno, 2012.

[7] Kuřina, F.: *Elementární matematika a kultura.* Gaudeamus, Hradec Králové, 2012.

[8] Kuřina, F., Vondrová, N.: Jak to vlastně je? Nekonečno. *Učitel matematiky*, 29 (2021), č. 2, s. 111–127.

[9] von Koch, H.: *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire.* P.A. Norstedt & Soner, Stockholm, 1904.

[10] Lindenmayer, A.: Mathematical models for cellular interaction in development. I and II. *Journal of Theoretical Biology*, 18 (1968), č. 3, s. 280–315.

[11] Mandelbrot, B.: *Fraktály, tvar, náhoda a dimenze.* Mladá fronta, Praha, 2003.

[12] Martišek, D.: Krocení jedné bijekce aneb o zipu a tkaničkách. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 98 (2023), č. 2, s. 13–27.

[13] Martišek, D.: *Journey around the Mandelbrot Set.* https://dmartisek.cz/Veda/Journey_around_the_Mandelbrot_Set.m4v, 2022.

[14] Martišek, D.: *RayTracing.* https://dmartisek.cz/Veda/Ray_Tracing.m4v, 2022.

[15] Martišek, D.: *Barnsley–Martisek Fern.* https://dmartisek.cz/Veda/Fern.m4v, 2022.

[16] Martišek, D.: *Journey into the Mandelbrot Set.* https://dmartisek.cz/Veda/Mandelbrot_Short.m4v, 2022.

[17] Panešová, K.: Hausdorffova dimenze fraktálních množin. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 95 (2020), č. 3, s. 1–7.

[18] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky.* Prometheus, Praha, 1998.

[19] https://www.psp.cz/sqw/sbirka.sqw?cz=240&r=1996

[20] https://www.zakonyprolidi.cz/cs/1996-240

[21] Sierpiński, W.: Sur une courbe dont tout point est un point de ramification. *Compt. Rend. Acad. Sci.*, 160 (1915), s. 302–305.

[22] https://cs.wikipedia.org/wiki/Úmluva_Organizace_spojených_národů_o_mořském_právu