

# Učitel matematiky

---

Pavel Sovič

Metodické materiály typu variované slovní úlohy jako nástroj pro rozvoj schopnosti řešit slovní úlohy

*Učitel matematiky*, Vol. 31 (2023), No. 1, 64–74

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/151734>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2023

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:  
*The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

**METODICKÉ MATERIÁLY TYPU VARIOVANÉ  
SLOVNÍ ÚLOHY JAKO NÁSTROJ PRO ROZVOJ  
SCHOPNOSTI ŘEŠIT SLOVNÍ ÚLOHY**

PAVEL SOVIČ<sup>1</sup>

## Úvod

Soubory úloh, autorem nazvané variované slovní úlohy, slouží podobně jako další typy materiálů v rámci projektu TAČR (viz Havlíčková et al., 2023) k rozvoji schopnosti žáků řešit slovní úlohy. Soubory variovaných slovních úloh (VAU) svojí charakteristikou podněcují žáky k hlubšímu porozumění struktuře matematických slovních úloh, a tím je vedou k rozvoji jejich schopnosti

---

<sup>1</sup>Článek vznikl za podpory projektu TAČR – Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol, č. TL03000469.

řešit slovní úlohy. Metodické materiály typu VAU, které navrhuje, jsou určeny pro 2. stupeň základní školy, eventuálně pro výuku na střední škole. Soubor metodických materiálů zahrnuje souhrnné pokyny a informace pro učitele a pracovní listy pro žáky k jednotlivým VAU. Soubor VAU sestává vždy z jedné základní úlohy a dvou až tří jejích variací. VAU jsou zasazené do stejného kontextu a na první pohled jsou si velmi podobné. Jejich hlavní odlišnost spočívá v matematické struktuře, která mnohdy vede k různým strategiím řešení.

V tomto článku nejprve vymezíme variované slovní úlohy a související pojem variace. Představíme základní principy, strukturu, ale i doporučené způsoby práce s metodickými materiály. Jádrem článku bude ukázka konkrétního připravovaného metodického materiálu určeného pro 9. ročník nebo střední školu doplněná o didaktické komentáře a vybrané zkušenosti získané z pilotáží na školách. Úlohy ve svých hodinách využilo 10 učitelů, od nichž jsme získali zpětnou vazbu.

## Variované slovní úlohy a jejich vymezení

Jedním z možných důvodů neúspěšnosti žáků při řešení slovních úloh může být problém s matematizací zadané situace, která je důsledkem absentujícího nebo chybného situačního modelu vytvořeného jen na základě povrchových aspektů úlohy (podrobněji viz Vondrová, 2020). Pro správné řešení slovní úlohy je nezbytné, aby si žáci vytvořili kvalitní situační model a z něj vycházející model matematický. Na to chceme zacílit pozornost žáků při řešení slovních úloh – předkládáme jim variované úlohy, tedy soubor úloh spojených stejným kontextem, ale lišící se vnitřní strukturou, tedy aktéry a vztahy mezi nimi (Lee & Hwang, 2022). Odlišná struktura vede žáky k tvorbě různých matematických modelů (Kaiser, 2005).

Soubor navrhovaných úloh sestává z jedné úlohy základní a dvou až tří jejích variací. Jako základní volíme takové úlohy, které mají více způsobů řešení, úlohy s delším textem nebo úlohy obsahující nadbytečné údaje, tedy úlohy s parametrem, který některým žákům komplikuje řešení (viz výzkum Vondrové et al.,

2019). První variace z nabízeného souboru úloh (*procvičení*) je podobná úloze základní a slouží zejména k upevnění znalostí získaných při řešení základní úlohy. Základní úlohu nijak zásadně nerozšiřuje, nevyžaduje zpravidla jiný postup řešení, ale mohou se v ní objevit např. jiné jednotky nebo čísla, než která se vyskytují v základní úloze. Druhá z nabízených variací (*výzva*) se svojí strukturou od základní úlohy liší více. Může vyžadovat jiný postup řešení, než byl potřeba v úloze základní, může být náročnější i na tvorbu situačního modelu (např. je formulována komplikovanějším jazykem) nebo může obsahovat více podúloh. Třetí variace základní úlohy (*prémie*) je určena těm žákům, kteří již předchozí úlohy vyřešili, nebo ji může učitel zadat podle svého uvážení. Může jít o úlohu, ve které žáci řeší složitější úkoly, v níž mají dospět jen k přibližnému řešení apod.

## Variované úlohy během výuky

Práce s variovanými slovními úlohami se řídí konstruktivistickým přístupem k učení, který je založen na aktivním poznávání matematiky žáky (Hejný & Kuřina, 2015). Odpovídá také metodě plánování výuky E-U-R respektující mechanismy objevování a postavené na třech stupních aktivního učení: evokace, uvědomění a reflexe (Meredith & Steele, 2010). V neposlední řadě využívá textů slovních úloh samotných jako nástroje pro rozvoj čtení s porozuměním (Vondrová et al., 2022; Havlíčková et al., 2023). Námí navrhovaná implementace VAU do výuky může být rozdělena do několika fází, které vyjadřuje obr. 1.



Obr. 1: Implementace souboru úloh typu VAU

### Část 1 – Evokace

Evokační část probíhá ještě před zadáním úlohy formou skupinové diskuse. Jejím cílem je, aby se žáci seznámili s kontextem úloh, což

jim později umožní vytvořit dobrý situační model úlohy. U každého souboru VAU uvádíme nabídku otázek, které může učitel položit. Evokační část by neměla být příliš dlouhá, na základě podnětů získaných od učitelů ovšem víme, že to bývá problém. Doporučujeme s ohledem na čas nutný pro řešení souboru úloh diskusi včas uzavřít a případně se k ní vrátit později.

## **Část 2 – Společná práce s textem základní úlohy**

Učitel rozdá žákům základní úlohu na samostatném lístečku a vyzve je, aby si nejprve úlohu samostatně přečetli. V následné diskusi vede žáky k tomu, aby úloze dobře porozuměli. Např. je požádá, aby zadání řekli jinými slovy, aby shrnuli, čeho se úloha týká a co mají zjistit apod., a to nejprve ve dvojicích a pak společně, nebo ihned v rámci celé třídy. Učitel může použít také otázky podporující porozumění textu zadání, které jsou uvedeny u každé základní úlohy. Tyto otázky je možné je pro žáky vytisknout nebo promítnout.

Od učitelů, kteří námi vytvořené variované úlohy vyzkoušeli ve svých hodinách, víme, že někteří žáci nemají, i přes náš záměr popsáný v úvodním článku (Havlíčková et al., 2023), potřebu pracovat s textem slovní úlohy a pustí se ihned do samotného řešení. Vzhledem k tomu, že práce s textem je podstatou námi tvořených materiálů, měl by jí učitel opakovaně věnovat pozornost. Pokud se učiteli práce s textem nedaří, měl by reagovat podle situace např. vynecháním otázky ze zadání slovní úlohy, a nechat tak žákům prostor k zamyslení a čas na důkladné seznámení s textem.

## **Část 3 – Individuální řešení základní slovní úlohy**

Učitel vyzve žáky k individuálnímu řešení základní úlohy. Při řešení je může různými způsoby podporovat, např. odpovědět žákovi na jeho otázku nebo mu položit doplňující otázky. Měl by myslet na to, že těžiště práce by mělo být na žácích a samotné řešení by jim nemělo být prozrazeno. Není nutné, aby všichni žáci dořešili úlohu až do konce. Podstatné je, aby se o řešení pokusili a měli pak možnost o něm s ostatními diskutovat.

### Část 4 – Společné sdílení řešitelských strategií

Učitel vyzve žáky, aby sdíleli (resp. ukázali, představili, okomentovali, porovnali atd.) svá dokončená řešení, a dle možností dá prostor i pro sdílení rozpracovaných postupů, které mohou žáci společně dokončit. Dle časových možností by měl dát prostor co největšímu počtu žáků s různými způsoby řešení či rozdílnými reprezentacemi zadání.

### Část 5 – Individuální řešení variace úlohy

Učitel informuje žáky, že si mohou vybrat ze dvou úloh: úlohu A (*procvičení*), která je podobná základní úloze a slouží k ověření, zda dobře porozuměli řešení vyžadovanému u základní úlohy, a úlohu B (*výzva*), která je náročnější.

Následně dá žákům na výběr z těchto dvou úloh (vytištěných na samostatných lístečcích) a vyzve je k individuálnímu řešení. Možnost volby může hrát pro žáky důležitou motivační roli, a pozitivně tak ovlivnit řešení zvolené úlohy. Vybraným žákům může učitel nabídnout i úlohu C (*prémie*). Učitel nebo jeho žáci mohou následně zadání základní úlohy variovat i podle dalších parametrů. Někteří učitelé, kteří použili VAU ve svých hodinách, zadávali prémie jako dobrovolný domácí úkol a věnovali se jí např. na začátku následující hodiny.

### Část 6 – Skupinové řešení variace úlohy

Po uplynutí stanoveného časového limitu vyzve učitel žáky, aby se rozdělili do skupin podle úlohy, kterou řešili, a vyzve je ke sdílení jejich strategií, a to i když řešení ještě nemají zcela dokončená. Úkolem skupiny je řešení dokončit a zhodnotit a porovnat všechny řešitelské strategie, které byly použity.

### Část 7 – Společné sdílení

Učitel vyzve zástupce jednotlivých skupin k prezentaci řešení a řešitelských strategií. Žáci, kteří příslušnou variantu úlohy neřešili, pozorují prezentaci spolužáků a zkoumají, čím se liší oproti úloze,

kteřou řešili. Mají tedy za úkol především porozumět prezentovanému řešení a pokládat spolužákům doplňující otázky. Učitel může žáky vyzvat, aby si v průběhu prezentace spolužáků rozdělily (v úlohách či v řešení) průběžně zaznamenávali a následně je vlastními slovy shrnuli.

### Část 8 – Reflexe

Společnou diskusi se učitel snaží vést tak, aby žáci porovnali všechny zadané varianty slovních úloh a jejich způsoby řešení a aby zhodnotili svou práci v hodině. Diskusi může rozvést např. položením některých z následujících otázek: Jak bys popsal/a svou strategii řešení (úspěšnou i neúspěšnou)? Řešil/a jsi úlohu stejně, nebo jinak než tvoji spolužáci? Čím se lišila základní úloha od varianty úlohy, kterou sis zvolil/a? Co měla základní úloha společného s variantou, kterou sis zvolil/a? Čím se lišila varianta úlohy, kterou sis zvolil/a, od té varianty, kterou jsi nezvolil/a? Co bylo na úloze jednoduché/obtížné? Co ses ty osobně naučil/a? Co ses naučil/a od svých spolužáků? Kdybys řešil/a podobnou úlohu znovu, co bys udělal/a stejně/jinak? Nastal v průběhu řešení nějaký problém? Byla úloha podobná nějaké úloze, kterou jsi již řešil/a?

### Ukázka souboru úloh Sociální síť (9. ročník nebo SŠ)

**Základní úloha.** Úspěšnost nové sociální sítě závisí na rychlém nárůstu počtu uživatelů – viralitě. Tvůrci nové sociální sítě předpokládají, že během prvního roku jejího fungování vzroste každý měsíc počet uživatelů na 1,2násobek. Po prvním měsíci od spuštění měla tato sociální síť 50 000 uživatelů. Určete předpokládaný počet uživatelů po a) druhém měsíci, b) třetím měsíci, c) půlroce, d) roce fungování této sociální sítě.

(Výsledek: a) 60 000 uživatelů, b) 72 000 uživatelů, c) 124 416 uživatelů, d) 371 504 uživatelů.)

**Úloha A.** Tvůrci nové sociální sítě předpokládají, že během prvního roku fungování poroste počet uživatelů každý měsíc o 15%.

Po prvním měsíci od spuštění měla tato sociální síť 60 000 uživatelů. Určete předpokládaný počet uživatelů po půlroce fungování této sociální sítě.

(Úloha je zaměřená na hledání počtu uživatelů sociální sítě po uplynutí určité doby. Výsledek: 120 681 uživatelů.)

**Úloha B.** Tvůrci nové sociální sítě předpokládají, že během prvního roku fungování poroste počet uživatelů každý měsíc o 15 %. Po prvním měsíci od spuštění měla tato sociální síť 60 000 uživatelů. Po čtvrtém měsíci už to bylo 103 680 uživatelů. Potvrdil se po čtvrtém měsíci předpoklad tvůrců? S jakým předpokladem by autoři sociální sítě museli pracovat, aby se jim jejich předpoklad ve čtvrtém měsíci potvrdil?

(Hledání informace o kolik procent roste měsíčně počet nových uživatelů sociální sítě. Výsledek: Předpoklad tvůrců se nepotvrdil; aby se potvrdil, museli by předpokládat nárůst o 20 %.)

**Úloha C.** Tvůrci nové sociální sítě předpokládají, že během prvních dvou let fungování poroste počet uživatelů každý měsíc o 15 %. Po prvním měsíci od spuštění měla sociální síť 60 000 uživatelů. Za jak dlouho od založení překročí sociální síť hranici milionu uživatelů?

(Hledání informace, za jak dlouho bude mít sociální síť určitý počet uživatelů. Výsledek: za 22 měsíců.)

## Popis variovaných úloh

Základní úloha je zaměřená na zobecňování. Na příkladu sociální sítě a počtu jejích uživatelů se žáci postupně seznamují s principem nárůstu. V některých případech se možná poprvé setkají s opakovaným násobením a mohou cítit potřebu zápis nějak zjednodušit. Rozhodně není nutné, aby jim myšlenka mocniny byla předem představena. Na žácích bychom měli nechat celý proces postupného objevování. V případě, že při vzájemném sdílení některý z žáků představí konkrétní vzorec, je dobré ho ověřit na získaných výsledcích ve všech podúlohách formou postupného dosa-



zení. Následně bychom se měli zaměřit na proces, který ke vzniku případného vzorce vedl.

V rámci diskusí nad variovanými úlohami se mohou objevit témata jako zaokrouhlování počtu uživatel, zda se bude zaokrouhlovat nahoru, či dolů a zda vůbec. Je vhodné s žáky konkrétní případy prozkoumat a ověřit, zda získaný výsledek skutečně odpovídá zadání. Žáci se také mohou zcela oprávněně pozastavovat nad tím, proč v úloze pracujeme stále se stejným trendem nárůstu počtu uživatelů. Je vhodné věnovat pozornost jejich argumentům a také případným predikcím v případě, že by se chtěli více přiblížit realitě.

## Doporučení pro konkrétní práci s úlohami Sociální sítě

Ve fázi evokace se může učitel zeptat, jakým způsobem mohou majitelé nově vznikající sociální sítě dosáhnout toho, aby se o ní dozvědělo co nejvíce lidí v co nejkratším čase. Následně rozdává zadání základní úlohy a vede žáky k rozboru textu. Pro něj může využít otázky z tabulky.<sup>2</sup>

Porozumění textu úlohy	Rozvoj jazykové gramotnosti
1. Roste počet uživatelů nové sociální sítě lineárně – tj. vzrůstá každý měsíc o stejný počet uživatelů?	4. Slyšel jsi někdy slova <i>virálita</i> , <i>virál</i> nebo <i>virální</i> ? V jaké souvislosti?
2. Část věty „vzroste každý měsíc počet uživatelů na 1,2násobek <sup>3</sup> “ by mohla být hodnocena jako neúplná. Doplní ji tak, aby byla úplná a jednoznačná.	5. Co podle tebe slova <i>virálita</i> / <i>virální</i> znamenají? Existuje zde nějaká souvislost se slovem <i>virus</i> ?

<sup>2</sup>Na formulaci jazykových úloh se podílel tým z Katedry českého jazyka na Pedf UK, jmenovitě Martina Šmejkalová a Alena Kinclová.

Porozumění textu úlohy	Rozvoj jazykové gramotnosti
3. Přeformuluj tuto část věty tak, aby neobsahovala slovo <i>násobek</i> .	6. Zkus pro slovo <i>virality/virální</i> najít český ekvivalent (nemusí být jednoslovný).

Stručně uvedeme možné odpovědi. Na první otázku je odpověď ne. V tomto případě můžeme hovořit spíše o rovnoměrném růstu. I tak je třeba vést žáky k uvědomění si, že se jedná o zjednodušení reality. V realitě nebude asi počet uživatelů růst rovnoměrně, může dojít i k odlivu uživatelů apod. Možnou formulací odpovědi pro druhou otázku je např. „na 1,2násobek počtu uživatelů v předchozím měsíci“. V rámci třetí otázky mohou žáci přijít na různé formulace, např. „počet uživatelů každý měsíc 1,2násobně vzroste“. V souvislosti s virálitou nebo virálem mohou žáci u čtvrté odpovědi zmínit např. virální video, virální článek, virální reklamu, virální marketing a v odpovědi na otázku pátou mohou pojem virálie vysvětlit jako vlastnost určitého obsahu, který se rychle šíří (podobně jako virus)<sup>4</sup>. Na základě předchozí odpovědi mohou žáci snadno najít český ekvivalent např. šířící se jako virus / rychle se šířící apod.

## Variované slovní úlohy v hodinách matematiky

Výše byla uvedena ukázka jednoho souboru variovaných úloh, v současné době jich máme 7 – po skončení projektu TAČR budou

<sup>3</sup>Učitel či žáci mohou narazit na problém správného psaní a čtení složeného číselného výrazu 1,2násobek. Žáci mohou sami vyhledávat na internetu, vysvětlovat a obhajovat své názory. Správný způsob psaní je dohromady (Ústav pro jazyk český AV ČR, 2008–2023). Problém nastává při snaze přečíst výraz nahlas. V tomto případě lze žáky navést k tomu, aby se učili zjišťovat informace i v jazykové poradně Ústavu pro jazyk český AV ČR. Tím zjistí, že v úvahu připadá varianta jedna celá dvě/dva násobek, variantu jedna celá dvojnásobek zavrhnou. Tento problém lze vyřešit přeformulováním: počet uživatelů vzrostl na 1,2 násobku počtu uživatelů předchozího měsíce (čteno na jedna celá dvě desetiny násobku).

<sup>4</sup>Žáci by měli k hledání významu použít slovník.

dány k dispozici učitelům. Zajímalo nás především, jak se námi navrhovaná metodika využití souborů variovaných úloh osvědčí ve výuce. Podařilo se nám získat 10 spolupracujících učitelů, kteří námi připravené soubory úloh využili ve své výuce matematiky námi navrženým způsobem. V letech 2021 a 2022 proběhlo 26 pilotáží materiálů VAU.<sup>5</sup> Ukázalo se, že soubor variovaných úloh lze využít během jedné vyučovací hodiny matematiky, ale je třeba myslet na to, aby fáze evokace nezabrala neúměrné množství času.

Učitelé zařadili vybrané otázky z jazykových charakteristik (viz část 2) přímo v hodině matematiky, dva učitelé je nepoužili vůbec. Jedna učitelka pro jazykové úkoly s úspěchem využila Mentimeter, aby byla aktivizována většina třídy. Doporučila zpracovat jazykové otázky formou dotazníku pro žáky.

Učitelé zmínili, že vidí v tomto způsobu práce prostor pro trénink komunikačních a prezentačních dovedností, prostor pro zopakování a představení více způsobů řešení a možnost propojení více předmětů. Všichni učitelé by na základě pilotáží vybrané úlohy použili znovu. Téměř ve všech pilotujících třídách žáci tento způsob práce hodnotili kladně. Spolupracující učitelé se s námi podělili o své zkušenosti:

„Většinu třídy úloha zaujala, takže se chtěli dozvědět správný postup k řešení a také ten alternativní spolužákův.“

„Úloha se žákům líbila. Ocenili zejména komplexnost, s jakou se ve striktně oddělených předmětech příliš nesetkávají.“

„Úloha se líbila, vztahuje se k praxi a hodnotě, kterou znají z medií i z rodinného života.“

„Líbí se mi, že je úloha moderní, ze současného běžného života a světa, s vazbou na praxi (úspěšnost podnikatelského záměru).“

Učitelé měli přirozeně i mnohé kritické připomínky k formulacím slovních úloh či jazykových úkolů. Ty jsme průběžně do metodických materiálů zapracovali.

---

<sup>5</sup> Jejich důkladné zpracování bude provedeno v autorově disertační práci. Zde uvádíme jen některé vybrané poznatky, o kterých se domníváme, že mohou být pro učitele, kteří chtějí úlohy typu VAU zařadit, užitečné.

## **Závěr**

Představené materiály budou i nadále upravovány na základě nových pilotáží. Budeme se zaměřovat na upřesnění způsobu implementace souborů variovaných úloh tak, aby se materiály daly implementovat do výuky učiteli bez speciálního zaškolení. Současně budeme tvořit další soubory úloh typu VAU, aby měli učitelé možnost si vybrat takový, který se jim bude hodit přímo do jejich výuky. Připravujeme také rozsáhlejší výzkum, do jaké míry jsou námi vytvářené materiály efektivní při rozvoji schopnosti žáků řešit slovní úlohy.

---