Dalibor Martišek

Krocení jedné bijekce aneb o zipu a tkaničkách

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 98 (2023), No. 2, 13–27

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151711`

Krocení jedné bijekce aneb o zipu a tkaničkách

Dalibor Martišek, Šlapanice

Abstrakt. Tento text pojednává o jednom pozoruhodném vzájemně jednoznačném zobrazení mezi množinou všech bodů jednotkového čtverce a množinou všech bodů jednotkové úsečky. Existence tohoto zobrazení (bijekce) zaručuje (laicky řečeno) „stejně velká nekonečna“, řečeno matematicky – stejnou mohutnost dvou nekonečných množin.

Člověk uvažující jen v mezích své běžné zkušenosti často nechápe již sám pojem nekonečna, natož většinu bijekcí, které jsou pro současnou matematiku již zcela samozřejmé. Jak by na úsečce mohl být stejný počet bodů jako ve čtverci, když čtverec kromě jedné strany obsahuje ještě další tři a navíc celý vnitřek? To přece odporuje zdravému selskému rozumu! Jenže zdravému selskému rozumu kdysi odporoval i součet dvou čísel, který byl menší než oba sčítanci, a dokonce i fakt, že Země je kulatá.

„Cantorův zip“ Petera Zamarovského

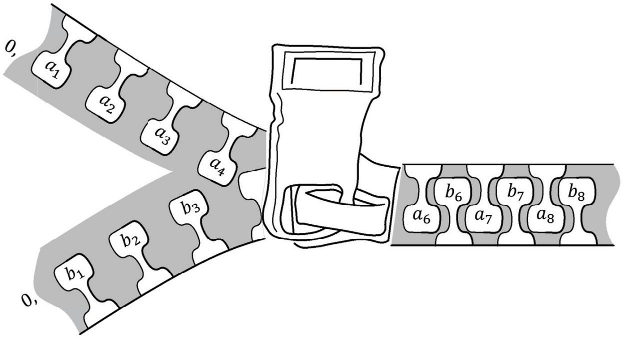
Jednu z bijekcí čtverce a úsečky popisuje P. Zamarovský ve své knize [7] a uvádí ji i na svých přednáškách [8, 9]. Lze se o ní dočíst i v článku F. Kuřiny a N. Vondrové [4], kde se píše: „Přirozeně se naskýtá otázka, zda mají stejnou mohutnost množiny J a kartézský součin $J \times J$. I zde je odpověď kladná“ ([4, s. 119]).

Dodejme, že tato věta platí jen pro nekonečné množiny, a podívejme se nejdříve na argumenty, kterými toto tvrzení konkrétně pro interval $(0; 1)$ podepřel Zamarovský.

Každý bod čtverce $\mathcal{C} = (0; 1) \times (0; 1)$ lze zapsat jako uspořádanou dvojici $[a; b]$ reálných čísel $a = 0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$, resp. $b = 0{,}b_1b_2b_3b_4\ldots$, kde $a_i, b_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ jsou cifry dekadického rozvoje čísel a, b. Tento bod zobrazil Zamarovský do bodu x na úsečce $\mathcal{U} = (0; 1)$ jednoduchým trikem: v desetinném zápise čísla x se pravidelně střídaly desetinné cifry čísel a, b, tj.

$$x = 0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4\ldots$$

Toto zobrazení, které objevil Georg Cantor, připomnělo Zamarovskému zip, proto ho nazval Cantorovým zipem ([7, s. 148], [4, s. 119, 120], [8, 9]), viz obr. 1.



Obr. 1: „Cantorův zip" Petera Zamarovského

Příklad 1. Ve svých přednáškách [8, 9] uvádí Zamarovský následující příklady fungování zipu:

a) $\left.\begin{aligned} a &= 0{,}3 \\ b &= 0{,}7 \end{aligned}\right\} \leftrightarrow x = 0{,}37$

b) $\left.\begin{aligned} a &= 0{,}34 \\ b &= 0{,}72 \end{aligned}\right\} \leftrightarrow x = 0{,}3742$

c) $\left.\begin{aligned} a &= 0{,}345 \\ b &= 0{,}721 \end{aligned}\right\} \leftrightarrow x = 0{,}374251$

Tvrdí, že tímto způsobem je každému bodu ve čtverci přiřazen právě jeden bod úsečky a naopak každý bod úsečky lze jednoznačně „rozkódovat" do původních dvou souřadnic bodu čtverce. Řečeno matematicky, množina všech takových zipů je hledanou bijekcí.

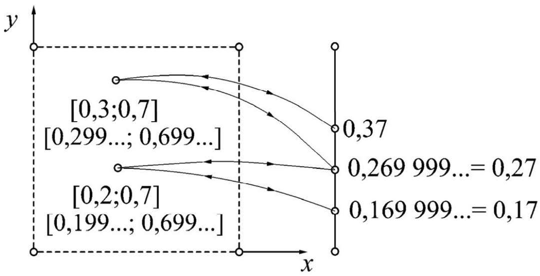
Bohužel tomu tak není. Množina všech takových zipů nejenže není bijekcí, ale dokonce není ani zobrazením. Je pouhou relací mezi množinou všech bodů čtverce a množinou všech bodů úsečky. Důvod, který byl naznačen již v [5], zde rozeberme poněkud podrobněji.

Je známo, že každé číslo s konečným dekadickým rozvojem lze chápat jako číslo s rozvojem nekonečným, a to buď s nekonečnou posloupností nul, anebo devítek, např.

$$0{,}3 = 0{,}300\,000\cdots = 0{,}299999\ldots; \quad 0{,}7 = 0{,}700\,000\cdots = 0{,}699\,999\ldots$$

Takže zápis $[a; b] = [0{,}3; 0{,}7]$ zazipujeme do čísla $x = 0{,}37$, ale zápis $[a; b] = [0{,}299\,99\ldots; 0{,}699\,999\ldots]$ téhož bodu do čísla $y = 0,269\,999\ldots$

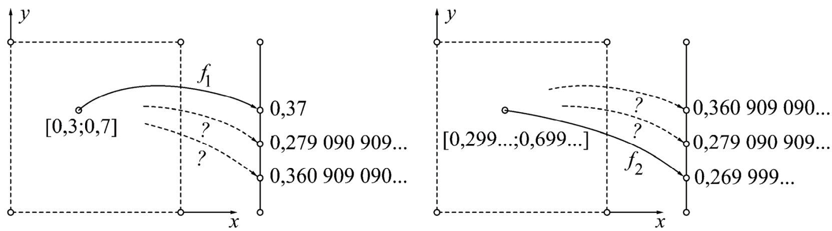
Evidentně $x \neq y$, takže Zamarovského zipy přiřazujeme jednomu a témuž bodu ve čtverci dva různé body úsečky. Navíc $y = 0,269\,999\cdots = 0{,}27$ dostaneme rovněž zazipováním bodu $[0{,}2; 0{,}7] \neq [0{,}3; 0{,}7]$ (viz obr. 2).



Obr. 2: Zipování Petera Zamarovského není bijekce a dokonce ani zobrazení

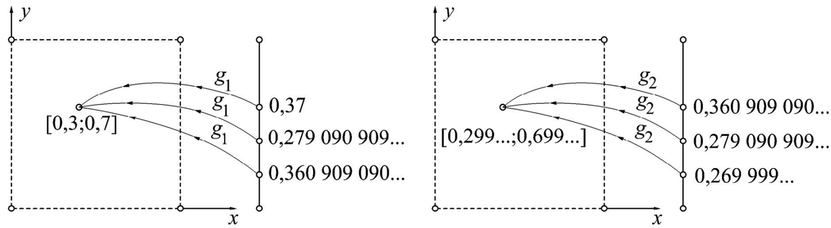
Oprava takového zipování je na první pohled jednoduchá. „Přebytečné“ šipky zřejmě generují nejednoznačné zápisy čísel. Jestliže zakážeme zápisy s periodickou devítkou, tyto šipky zmizí. Takto problém řešili Kuřina s Vondrovou v článku ([4, s. 119, 120]). Bod $[0{,}3; 0{,}7]$ je pak jednoznačně spojen do čísla 0,37, bod $[0{,}2; 0{,}7]$ do 0,27.

To je sice pravda, problém tím však bohužel vyřešen není. Nyní sice skutečně dostáváme zobrazení, dokonce zobrazení prosté, ale není to zobrazení *na* (celou) *úsečku*, ale pouze *do úsečky*. Není to *bijekce*, ale pouze *injekce*. Například body 0,279 090 909…; 0,360 909 090… na úsečce mají povolený zápis (neobsahují periodu $\overline{9}$), pokus o jejich „rozepnutí“ však vede do nepovolených zápisů bodu $[0{,}3; 0{,}7]$, který má již jiný obraz (obr. 3 vlevo). Tyto body tak nejsou obrazem žádného bodu čtverce. Problém neřeší ani opačná volba, tj. povolení periodické devítky a zákaz periodické nuly (obr. 3 vpravo).



Obr. 3: „Zapínání zipu“ Petera Zamarovského není bijektivní, ale pouze injektivní

Kdybychom podobným způsobem chtěli definovat „rozepínání zipu", tj. $g\colon (0;1) \to (0;1)^2$, opět bychom samozřejmě nedostali bijekci. Tímto způsobem by sice bylo možné dostat zobrazení *úsečky* $(0;1)$ *na (celý) čtverec* $(0;1)^2$, ovšem *nebylo by prosté*, byla by to pouze *surjekce*. Zákaz periodické devítky vede k surjekci g_1 ilustrované na obr. 4 vlevo, zákazem periodické nuly obdržíme surjekci zobrazení g_2 na obr. 4 vpravo.



Obr. 4: „Rozepínání zipu" není bijektivní, ale pouze surjektivní

Problém ilustrovaný na obr. 3 a 4 nastane vždy, když se v desetinném rozvoji čísla $x = 0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4\ldots$ nachází nekonečná posloupnost cifer $a_k9a_{k+1}9a_{k+2}9\ldots$, resp. posloupnost cifer $9b_k9b_{k+1}9b_{k+2}\ldots$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Takových posloupností je nespočetně mnoho, jak lze dokázat mírnou modifikací Cantorovy diagonální metody, viz např. [5].

Konstrukce zobrazení pomocí prostého „míchání cifer", které je ilustrováno na obr. 1 jako spínání zipu, se poprvé objevila v dopisu Georga Cantora Richardu Dedekindovi ze dne 20. června 1877. Dedekind však obratem odpověděl, že toto zobrazení nefunguje a důvodem jsou právě nejednoznačné zápisy racionálních čísel (viz např. [2]).

Cantor v odpovědi Dedekindovi sice navrhl důmyslné řešení, avšak že je to řešení korektní, bylo dokázáno až mnohem později. Zobecnění tohoto problému je dnes známo jako **Cantorova–Schröderova–Bernsteinova věta**: *Nechť $f\colon A \to B$, $g\colon B \to A$ jsou injektivní zobrazení. Pak existuje bijektivní zobrazení $b\colon A \leftrightarrow B$.*

Původní Zamarovského zip není ani zobrazením. S vyloučením duplicitních zápisů dle [4] je pak pouze injekcí f.

Cantorovu–Schröderovu–Bernsteinovu větu lze dokázat mnoha způsoby. Některé z důkazů lze nalézt např. v [6], zajímavý důkaz je uveden v [1]. Zde se na konkrétním příkladu pokusíme přiblížit originální myšlenku Gyuly (Julia) Königa. Zatímco první důkaz evokoval opravu zipu, Königův nápad [3] připomíná podstatně starší lidský vynález, a sice šněrovací boty.

Zpátky ke tkaničkám

Budeme pracovat s množinami uzavřenými, tj. $\langle 0;1\rangle$, resp. $\langle 0;1\rangle^2$, v souřadnicích tedy připustíme i hodnoty nula resp. jedna (jedničku budeme zásadně zapisovat ve tvaru 0,999...). Pro otevřené množiny (0;1), resp. $(0;1)^2$, by tato konstrukce vyžadovala ještě dodatečné modifikace.

Naše dvě množiny nebudeme spojovat zipem, ale budeme je sešněrovávat tkaničkami. Jedna část boty bude představovat čtverec $\mathcal{C} = \langle 0;1\rangle^2$ (na obr. 5, 6 vlevo), ta druhá úsečku $\mathcal{U} = \langle 0;1\rangle$ (na obr. 5, 6 vpravo).

Zobrazení nebude jen jedno, ale budou dvě. První z nich, označme ho f, bude zobrazení čtverce do úsečky, tedy $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{U}$, a bude nasazeno, když navlékáme tkaničku ze čtverce do úsečky (na obr. 5 zleva doprava). Bude to původní Cantorovo

$$f([0{,}x_1x_2\dots x_n\dots; 0, y_1y_2\dots y_n\dots]) = 0{,}x_1y_1x_2y_2\dots x_ny_n\dots,$$

kde $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou cifry desetinného rozvoje.

Druhé zobrazení bude zobrazení úsečky do čtverce, označme toto zobrazení g, $g\colon \mathcal{U} \to \mathcal{C}$, a budeme ho modelovat navlékáním tkaničky zprava doleva. Definujeme ho takto:

$$g(0{,}x_1x_2\dots x_n\dots) = [0{,}x_1x_2\dots x_n\dots; 0].$$

Tkanička začíná

Příklad 2. Uvažujme bod čtverce o souřadnicích

$$\left[\pi - 3; \frac{1}{3}\right] = [0{,}14\,15\,92\dots; 0, 33\,33\,33\dots]$$

a začněme navlékat tkaničku (sledujte obr. 5).

Tuto tkaničku můžeme schematicky zapsat jako řadu zobrazení

$$[0{,}14\,15\,92\dots; 0{,}33\,33\,33\dots] \xrightarrow{f} 0{,}13\,43\,13\,53\,93\,23\dots \xrightarrow{g}$$

$$\xrightarrow{g} [0{,}13\,43\,13\,53\,93\,23\dots; 0] \xrightarrow{f} 0{,}10\,30\,40\,30\,10\,30\,50\,30\,90\,30\,20\,30\dots \xrightarrow{g}$$

$$\xrightarrow{g} [0{,}10\,30\,40\,30\,10\,30\,50\,30\dots; 0]\dots$$

Toto navlékání může zřejmě pokračovat do nekonečna. Ale v botě jen nahoru a v řadě jen doprava. Nelze jít od bodu $[0{,}141592\dots; 0, 333333\dots]$ doleva

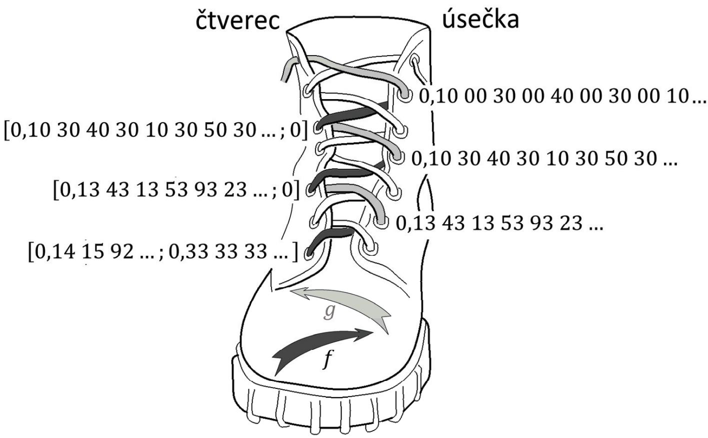
$$?? \xrightarrow{g} [0{,}14\,15\,92\dots; 0{,}33\,33\,33\dots] \xrightarrow{f} 0{,}13\,43\,13\,53\,93\,23\dots \xrightarrow{g} \dots$$

ani v botě na obr. 5 dolů.

Každé číslo v této řadě má jednoznačný desetinný zápis, každý předcházející člen jednoznačně určuje člen následující a naopak – každý následovník má jednoznačného předchůdce (každý „kousek“ tkaničky spojuje právě jednu dírku na levé a právě jednu dírku na pravé straně boty). Do hledané bijekce použijeme jen šněrování zleva doprava tmavou částí tkaničky, ve výše uvedené řadě tedy jen zobrazení f. Bod $[\pi - 3; \frac{1}{3}]$ tak vygeneruje vzájemně jednoznačná přiřazení

$$[0{,}14\,15\,92\ldots; 0{,}33\,33\,33\ldots] \leftrightarrow 0{,}13\,43\,13\,53\,93\,23\ldots$$
$$[0{,}13\,43\,13\,53\,93\,23\ldots; 0] \leftrightarrow 0{,}10\,30\,40\,30\,10\,30\,50\,30\,90\,30\,20\,30\ldots$$
$$[0{,}1030403010305030\ldots; 0] \leftrightarrow 0{,}10003000400030001000300050000\ldots$$

Množina $\mathcal{L}_1$ všech přiřazení, kterou tkanička takto vygeneruje, je nekonečná a je podmnožinou hledané bijekce.



Obr. 5: Šněrování bodu $[\pi - 3; \frac{1}{3}]$

Poznámka 1. Termín „tkanička“ se nám může zdát poněkud nepřesný. Z obr. 5 je zřejmé, že k „zašněrování“ řady stačila jen polovina „běžné tkaničky“, její bílá část se šněrování neúčastnila. Můžeme si ovšem představit, že do vysoké boty nemáme originální tkaničku, ale pouze dvě tkaničky kratší. Na jednom konci každé z nich můžeme udělat uzel tak, aby neprošel spodní dírkou boty. Místo jedné „běžné“ tkaničky tak máme dvě tkaničky kratší a každá z nich obstará polovinu obvyklého šněrování.

Příklad 3. Najděme tkaničku bodu

$$[0{,}6; 0{,}44\,44\ldots] = [0{,}60\,00\ldots; 0{,}44\,44\ldots].$$

Tato tkanička zapsaná jako řada zobrazení f, g (říkejme jí stručně $f - g$ řada) tentokrát vypadá takto:

$$?? \xrightarrow{g} [0{,}60\,00\ldots; 0{,}44\,44\ldots] \xrightarrow{f} 0{,}64\,04\,04\ldots \xrightarrow{g}$$
$$\xrightarrow{g} [0{,}64\,04\,04\ldots; 0] \xrightarrow{f} 0{,}60\,40\,00\,40\,00\,40\ldots \xrightarrow{g}$$
$$\xrightarrow{g} [0{,}60\,40\,00\,40\,00\,40\ldots; 0] \xrightarrow{f} 0{,}60\,00\,40\,00\,00\,00\,40\,00\,00\,00\,40\,00\ldots \xrightarrow{g} \ldots$$

Ani zde nemůžeme od zadaného bodu v posloupnosti doleva, ani v botě dolů. Zobrazení f i tentokrát generuje vzájemně jednoznačná přiřazení (další podmnožinu hledané bijekce), a to

$$[0{,}6; 0{,}44\,44\ldots] \leftrightarrow 0{,}64\,04\,04\ldots$$
$$[0{,}64\,04\,04\ldots; 0] \leftrightarrow 0{,}60\,40\,00\,40\,00\,40\ldots$$
$$[0{,}60\,40\,00\,40\,00\,40\ldots; 0] \leftrightarrow 0{,}60\,00\,40\,00\,00\,00\,40\,00\,00\,00\,40\,00\ldots$$

Bod $[0{,}6; 0{,}4444\ldots]$ ovšem nemá jednoznačný zápis. Jeho druhý reprezentant $[0{,}5999\ldots; 0{,}4444\ldots]$ vygeneruje jinou $f - g$ řadu

$$?? \xrightarrow{g} [0{,}59\,99\ldots; 0{,}44\,44\ldots] \xrightarrow{f} 0{,}54\,94\,94\ldots \xrightarrow{g} [0{,}54\,94\,94\ldots; 0] \xrightarrow{f}$$
$$\xrightarrow{f} 0{,}50\,40\,90\,40\,90\,40\ldots \xrightarrow{g} \ldots$$

a tím také jinou tkaničku. Do naší bijekce však nemůžeme připsat začátek této $f - g$ řady

$$[0{,}59\,99\ldots; 0{,}44\,44\ldots] \leftrightarrow 0{,}54\,94\,94\ldots,$$

protože bod

$$[0{,}59\,99\ldots; 0{,}44\,44\ldots] = [0{,}6; 0{,}44\,44\ldots]$$

má již jiný obraz (viz první přiřazení výše v tomto příkladu). Tento problém vyřeší následující (důležitá) úmluva.

Úmluva. Tkanička nesmí obsahovat zápisy s periodickou devítkou. Jedinou výjimku tvoří zápis $0{,}999\,999\ldots$, který tkanička obsahovat může.

$f-g$ řada bodu $[0{,}59\,99\ldots; 0{,}44\,44\ldots]$ začíná zápisem obsahujícím periodickou devítku, ale tkanička dle úmluvy tímto bodem začínat nemůže. Bude začínat až prvním členem $f-g$ řady, který periodu $\overline{9}$ neobsahuje, tedy číslem $0{,}54\,94\,94\ldots$ Tkaničku tedy „startujeme“ až na úsečce (v botě začínáme ve spodní dírce vpravo), do naší bijekce bude tentokrát přispívat zobrazení g těmito dvojicemi:

$$[0{,}54\,94\,94\ldots; 0] \leftrightarrow 0{,}54\,94\,94\ldots$$
$$[0{,}50\,40\,90\,00\,90\ldots; 0] \leftrightarrow 0{,}50\,40\,90\,00\,90\ldots$$
$$[0{,}50\,00\,40\,00\,90\,00\,40\,00\,90\,00\ldots; 0] \leftrightarrow 0{,}50\,00\,40\,00\,90\,00\,40\,00\,90\,00\ldots$$

Technická poznámka. V příkladu 2 do naší bijekce přispělo pouze zobrazení $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{U}$, tedy zobrazení čtverce do úsečky, nyní přispívá i zobrazení $g\colon \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ úsečky do čtverce. Sestrojovaná bijekce je zobrazení vzájemně jednoznačné. Není tedy podstatné, zda ji budeme chápat jako zobrazení $\mathcal{C} \to \mathcal{U}$, anebo $\mathcal{U} \to \mathcal{C}$, proto dvojšipky ve výše uvedených zápisech jednoznačného přiřazení. V zájmu zachování pořadí, se kterým jsme začali v příkladu 2, budeme i příspěvky zobrazení g zapisovat v pořadí [čtverec] $\leftrightarrow$ úsečka.

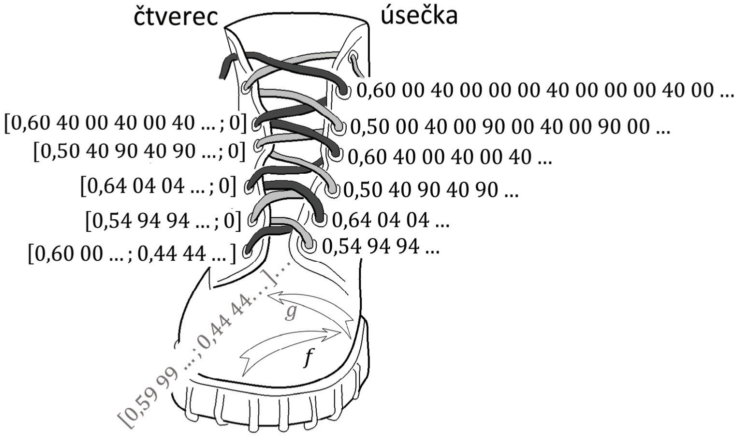
Tkanička reprezentanta $[0{,}59\,99\ldots; 0{,}44\,44\ldots]$ (který podle úmluvy v tkaničce samotné být nesmí) tedy do naší bijekce vygeneruje tato (rovněž vzájemně jednoznačná) přiřazení:

$$[0{,}54\,94\,94\ldots; 0] \leftrightarrow 0{,}54\,94\,94\ldots$$
$$[0{,}50\,40\,90\,00\,90\ldots; 0] \leftrightarrow 0{,}50\,40\,90\,00\,90\ldots$$
$$[0{,}50\,00\,40\,00\,90\,00\,40\,00\,90\,00\ldots; 0] \leftrightarrow 0{,}50\,00\,40\,00\,90\,00\,40\,00\,90\,00\ldots$$

Všimněte si: bod čtverce, jehož obě souřadnice mají jednoznačný desetinný rozvoj (viz př. 2), potřebuje jen jednu naši tkaničku a obstará tak jenom polovinu šněrování boty (viz obr. 6). Bod, jehož první souřadnice nemá jednoznačný desetinný rozvoj a druhá ano, „sestrojí“ dvě tkaničky. Zobrazení f modeluje tmavá tkanička, je-li provlékána zleva doprava. Začíná stejně jako tkanička z př. 2 vlevo. Zobrazení g modeluje světlá tkanička při provlékání zprava doleva (viz obr. 6), která začíná vpravo. Šněrování naší modelové boty je tak kompletní.

Příklad 4. Najděme tkaničku bodu

$$[0{,}44\,44\ldots; 0{,}6] = [0{,}44\,44\ldots; 0{,}60\,00\ldots].$$



Obr. 6: Šněrování bodu s nejednoznačným zápisem první souřadnice (viz příklad 3)

Zcela analogicky předchozímu příkladu $f-g$ řada vypadá následovně:

$$?? \xrightarrow{g} [0{,}44\,44\ldots; 0{,}60\,00\ldots] \xrightarrow{f} 0{,}46\,40\,40\ldots \xrightarrow{g}$$

$$\xrightarrow{g} [0{,}46\,40\,40\ldots; 0] \xrightarrow{f} 0{,}40\,60\,40\,00\,40\,00\ldots \xrightarrow{g}$$

$$\xrightarrow{g} [0{,}40\,60\,40\,00\,40\,00\ldots; 0] \xrightarrow{f}$$

$$\xrightarrow{f} 0{,}40\,00\,60\,00\,40\,00\,00\,00\,40\,00\,00\,00\ldots \xrightarrow{g} \ldots$$

Tkanička začíná hned prvním bodem.

$f-g$ řada duplicitního reprezentanta $[0{,}44\,44\ldots; 0{,}59\,99\ldots]$ je tvaru

$$?? \xrightarrow{g} [0{,}44\,44\ldots; 0{,}59\,99\ldots] \xrightarrow{f} \mathbf{0{,}45\,49\,49}\ldots \xrightarrow{g}$$

$$\xrightarrow{g} [0{,}45\,49\,49\ldots; 0] \xrightarrow{f} 0{,}40\,50\,40\,90\,40\,90\ldots \xrightarrow{g} \ldots$$

První zápis v tkaničce duplicitního reprezentanta být nesmí, takže tato tkanička začíná až v tučném $\mathbf{0{,}45\,\overline{49}}$ (v botě ve spodní dírce vpravo) a šněruje ji až zobrazení g.

Kde je začátek?

V minulé kapitole začínala tkanička vždy od začátku – od nejspodnější dírky. Ale co když zvolíme bod, který na začátku tkaničky není? A jak to vůbec poznáme?

V předchozích příkladech jsme poznali začátek tak, že jsme od daného bodu nemohli jít v $f-g$ řadě doleva. V případě jiných bodů ale doleva jít můžeme.

Příklad 5. Sestrojme tkaničky
bodů čtverce a) $[0{,}604;0]$ b) $[0{,}50\,40\,90\,00\,90\,00\dots;0]$
a bodů úsečky c) $0{,}60\,30\,90\,00\,90\,00\dots$ d) $0{,}50\,30\,90\,90\,90\,90\dots$.

Příslušné $f-g$ řady jsou:
a)

$$\overbrace{\mathbf{[0{,}6;0{,}4]}}^{\text{začátek tkaničky}} \xrightarrow{f} 0{,}64 \xrightarrow{g} [0{,}64;0] \xrightarrow{f} 0{,}604 \xrightarrow{g} \overbrace{\mathbf{[0{,}604;0]}}^{\text{zadaný bod}} \xrightarrow{f}$$
$$\xrightarrow{f} 0{,}60004 \xrightarrow{g} [0{,}60004;0] \xrightarrow{f} \dots$$

b)

$$\overbrace{[0{,}5\overline{9};0{,}4]}^{\text{zakázáno}} \xrightarrow{f} \overbrace{\mathbf{0{,}54\overline{90}}}^{\text{začátek}} \xrightarrow{g} [0{,}54\overline{90};0] \xrightarrow{f} 0{,}50\,40\,90\,00\,90\,00\dots \xrightarrow{g}$$
$$\xrightarrow{g} \overbrace{\mathbf{[0{,}50\,40\,90\,00\,90\dots;0]}}^{\text{zadaný bod}} \xrightarrow{f}$$
$$\xrightarrow{f} 0{,}50\,00\,40\,00\,90\,00\,00\,00\,90\,00\,00\,00\dots \xrightarrow{g} \dots$$

c)

$$\overbrace{[0{,}6\overline{9};0{,}3]}^{\text{zakázáno}} \xrightarrow{f} \overbrace{\mathbf{0{,}63\overline{90}}}^{\text{začátek}} \xrightarrow{g} [0{,}63\overline{90};0] \xrightarrow{f} \overbrace{\mathbf{0{,}60\,30\,90\,00\,90\,00\dots}}^{\text{zadaný bod}} \xrightarrow{g}$$
$$\xrightarrow{g} [0{,}60\,30\,90\,00\,90\dots;0] \xrightarrow{f} \dots$$

d)

$$\overbrace{[0{,}5\overline{9};0{,}3\overline{9}]}^{\text{zakázáno}} \xrightarrow{f} \overbrace{0{,}53\overline{9}}^{\text{zakázáno}} \xrightarrow{g} \overbrace{[0{,}53\overline{9};0]}^{\text{zakázáno}} \xrightarrow{f} \overbrace{\mathbf{0{,}50\,30\,90\,90\,90\,90\dots}}^{\text{začátek tkaničky, zadaný bod}} \xrightarrow{g}$$
$$\xrightarrow{g} [0{,}50\,30\,90\,90\,90\,90\dots;0] \xrightarrow{f}$$
$$\xrightarrow{f} 0{,}50\,00\,30\,00\,90\,00\,90\,00\,90\,00\,90\,00\dots \xrightarrow{g} \dots$$

Tkaničky k těmto řadám, tedy i další dvojice [vzor; obraz] hledané bijekce, si čtenář podle předchozích příkladů již jistě sestrojí sám.

Obecný postup konstrukce tkaniček

Předcházející text vede k tomuto obecnému postupu:

1. Pro daný zápis bodu (nezáleží na tom, zda jde o bod čtverce či úsečky, ani na tom, zda je zápis povolený či zakázaný úmluvou) najdeme začátek jeho $f - g$ řady dle příkladů 4, 5.
2. Každý možný zápis začátku $f - g$ řady (včetně zakázaných) bude mít vlastní tkaničku.
3. Pro každý možný zápis (včetně zakázaných) sestrojíme $f - g$ řadu s počátkem v tomto zápisu.
4. Každá $f - g$ řada má svoji vlastní tkaničku, která začíná vždy v prvním povoleném zápisu.

Příklad 6. Sestrojme tkaničky bodu [0;0,89].

Zadaný bod je na začátku svojí $f - g$ řady (bod 1 obecného postupu) a má dva možné zápisy, takže dle bodu 2 budou tkaničky dvě. Dle bodu 3 sestrojíme jejich $f - g$ řady:

$$[\mathbf{0{,}00\,00\ldots;0{,}89\,00\ldots}] \xrightarrow{f} 0{,}08\,09\,00\ldots \xrightarrow{g} [0{,}08\,09\,00\ldots;0] \xrightarrow{f}$$
$$\xrightarrow{f} 0{,}00\,80\,00\,90\,00\,00\ldots \xrightarrow{g} \ldots$$

Dle bodu 4 začíná tkanička prvním bodem $f - g$ řady, tedy ve čtverci, šněruje ji zobrazení f.

$$[0{,}00\,00\ldots;0{,}88\,99\ldots] \xrightarrow{f} \mathbf{0{,}08\,08\,09\,09\ldots} \xrightarrow{g} [0{,}08\,08\,09\,09\ldots;0] \xrightarrow{f}$$
$$\xrightarrow{f} 0{,}00\,80\,00\,80\ldots \xrightarrow{g} \ldots$$

Tato tkanička dle 4 začíná bodem $0{,}08\,08\,09\,09\ldots$, tedy v úsečce, šněruje ji zobrazení g.

Všimněte si: Bod $[a;b] \in \mathcal{C}$, kde $b = 0$ (viz př. 5 a, b), leží na spodní straně čtverce. Je-li $a = 0$, leží bod na levé straně čtverce. Je nyní otázkou, zda jsme postupem uvedeným v příkladu 5 zobrazili celou spodní stranu čtverce a postupem v příkladu 6 celou stranu levou. Bohužel tomu tak zatím není.

Příklad 7. Sestrojme tkaničku bodu [0;0].

Příslušná $f-g$ řada vypadá následovně:

$$\ldots \xrightarrow{g} [0;0] \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} [0;0] \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} [0;0] \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} [0;0] \xrightarrow{f} \ldots$$

Tato řada nemá začátek, ani žádný zápis s periodickou devítkou. S touto tkaničkou bychom si botu příliš nezavázali (spojujeme stále jen dvě spodní dírky boty), pro naši bijekci je však velmi důležitá, neboť zobrazí levý spodní vrchol čtverce na jeden z krajních bodů úsečky:

$$[0;0] \leftrightarrow 0.$$

Zcela analogicky dopadnou $f-g$ řady bodů tvaru $[a;0]$, kde souřadnice a má jedno desetinné místo. Každý tento bod má však alternativní zápis, a tak sestrojí ještě jednu tkaničku (viz př. 3, 4).

Výjimka potvrzuje pravidlo

Příklad 8. Sestrojme tkaničku bodu $[0{,}60\,\overline{90\,00};0]$.

Tento bod leží na spodní straně čtverce a z příkladu 5 víme, že není na začátku své $f-g$ řady. Tu sestrojíme již známým postupem:

$$?? \xrightarrow{g} \overbrace{\mathbf{[0{,}6;0{,}\overline{9}]}}^{\text{začátek tkaničky}} \xrightarrow{f} 0{,}69\,\overline{09} \xrightarrow{g} [0{,}69\,\overline{09};0] \xrightarrow{f}$$
$$\xrightarrow{f} 0{,}60\,\overline{90\,00} \xrightarrow{g} \overbrace{\mathbf{[0{,}60\,\overline{90\,00};0]}}^{\text{zadaný bod}} \xrightarrow{f} \ldots$$

$f-g$ řada začíná zápisem obsahujícím periodu $\overline{9}$, tímto zápisem však tentokrát začíná i tkanička, a to díky naší smluvené výjimce.

I když to zadání příkladu 8 přímo nevyžaduje, dodejme pro úplnost, že první bod $f-g$ řady má alternativního reprezentanta $[0{,}5\overline{9};0{,}\overline{9}]$. Jeho $f-g$ řada a tkanička vypadá následovně:

$$?? \xrightarrow{g} [0{,}59\,99\ldots;0{,}99\,99\ldots] \xrightarrow{f} 0{,}59\,99\ldots \xrightarrow{g} [0{,}59\,99\ldots;0] \xrightarrow{f}$$
$$\xrightarrow{f} \overbrace{\mathbf{0{,}50\,90\,90\,90}}^{\text{začátek tkaničky}} \xrightarrow{g} [0{,}50\,90\,90\,90\ldots;0] \xrightarrow{f}$$
$$\xrightarrow{f} 0{,}50\,00\,90\,00\,90\,00\,90\,00\ldots \xrightarrow{f} \ldots$$

Tkanička tentokrát nemůže začínat prvním bodem této řady. Zápis $0{,}59\,99\ldots$ totiž výjimku nemá. Tkanička tak musí přeskočit první tři členy a začít až v bodě $0{,}50\,\overline{90}$.

Všimněte si: Bod $[0{,}6; 0{,}\overline{9}]$ leží na horní straně čtverce. Jeho dvě tkaničky vygenerují obraz nejen tomuto bodu (převlečením tkaničky ze spodní levé dírky doprava nahoru dle obr. 6), ale i nekonečně mnoha bodům spodní strany (převlečením tkaničky z vyšších dírek vždy zleva doprava nahoru opět dle obr. 6).

Podobně bychom sestrojili tkaničky zbývajících vrcholů čtverce, tj. bodů $[0; 0{,}\overline{9}]$, $[0{,}\overline{9}; 0{,}\overline{9}]$, $[0{,}\overline{9}; 0]$ (připomeňme, že levý spodní vrchol jsme již zobrazili na nulu úsečky – viz příklad 7). Všechny body v těchto třech $f-g$ řadách mají povolený zápis, každá tkanička tedy začíná prvním členem své $f-g$ řady. Zápisy všech tří zadaných bodů jsou díky naší výjimce jednoznačné, takže každý bod vygeneruje jen jednu tkaničku. Konstrukci těchto tkaniček opět přenecháme čtenáři. Napovězme, že dvojice [vzor-obraz] bude ve všech těchto případech generovat zobrazení f.

Trocha terminologie a formalismu

Každý bod čtverce $\mathcal{C}$ je jednoznačně určen uspořádanou dvojicí reálných čísel. Každé reálné číslo buď má, anebo nemá jednoznačný desetinný rozvoj. Třetí možnost neexistuje. To znamená, že každý bod čtverce patří do jedné z množin $\mathcal{M}_{jj}$ (obě složky mají jednoznačný rozvoj), $\mathcal{M}_{jn}$ (první složka má jednoznačný rozvoj, druhá ne), podobně $\mathcal{M}_{nj}$, $\mathcal{M}_{nn}$. Pátá možnost neexistuje. Konstrukci obrazů bodů množin $\mathcal{M}_{jj}, \mathcal{M}_{jn}, \mathcal{M}_{nj}, \mathcal{M}_{nn}$ jsme popsali v obecném postupu a demonstrovali na konkrétních příkladech: obraz bodu $A \in \mathcal{M}_{nj}$ – viz první přiřazení v př. 3, obraz bodu $B \in \mathcal{M}_{jn}$ – viz první přiřazení v př. 4, obraz bodu $D \in \mathcal{M}_{nn}$ – viz první přiřazení v příkladu 5a, obrazy bodů množiny $\mathcal{M}_{jj}$ – viz všechna ostatní přiřazení.

Platí

$$\mathcal{C} = \mathcal{M}_{jj} \cup \mathcal{M}_{jn} \cup \mathcal{M}_{nj} \cup \mathcal{M}_{nn},$$

přičemž tyto čtyři množiny jsou neprázdné a po dvou disjunktní (tvoří tzv. rozklad čtverce). Zobrazení $\mathcal{C} \to \mathcal{U}$ je tedy zobrazení *celého* čtverce *do* množiny $\mathcal{U}$. Každý bod čtverce je do úsečky zobrazován zobrazením f, které je prosté. Každý bod čtverce i každý bod úsečky leží na jediné tkaničce a v jediné dírce boty, takže i zobrazení $\mathcal{C} \to \mathcal{U}$ je *prosté.* Každému bodu na úsečce (číslu z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$) lze najít jeho vzor ve čtverci viz příklady 5c), d), 7 a 8. Zobrazení $\mathcal{C} \to \mathcal{U}$ tedy není pouze prostým zobrazením (celého) čtverce *do* úsečky, ale *prostým zobrazením* (celého) *čtverce na úsečku.* Je tedy *bijekcí mezi čtvercem a úsečkou.*

K nalezení této bijekce (označme ji b) jsme použili dvě zobrazení: zobrazení f zobrazuje jistou podmnožinu bodů čtverce (označme ji $\mathcal{C}_f$) na jistou podmnožinu bodů úsečky (označme ji $\mathcal{U}_f$). Je tedy $f\colon \mathcal{C}_f \to \mathcal{U}_f$. Zobrazení g zobrazuje jistou podmnožinu bodů úsečky (označme ji $\mathcal{U}_g$)) na jistou podmnožinu bodů čtverce (označme ji $\mathcal{C}_g$). Je tedy $g\colon \mathcal{U}_g \to \mathcal{C}_g$.

Bijekce je zobrazením celého čtverce na celou úsečku. Musí tedy platit

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_f \cup \mathcal{C}_g, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}_f \cup \mathcal{U}_g.$$

Každé zobrazení je množinou – množinou uspořádaných dvojic [vzor; obraz], takže zobrazení lze sjednocovat. Je-li

$$f\colon \mathcal{C}_f \to \mathcal{U}_f, \quad g\colon \mathcal{U}_g \to \mathcal{C}_g \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_f \cup \mathcal{C}_g, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}_f \cup \mathcal{U}_g,$$

lze naší bijekci b zapsat pomocí sjednocení zobrazení f, g. Ovšem pozor, nelze psát $b = f \cup g$, protože zobrazení g zobrazuje v „opačném směru“ než zobrazení f. Upozornili jsme na to technickou poznámkou v př. 3 a situaci vyřešili „přehozením pořadí dvojic [vzor; obraz]“ u zobrazení g. Tyto sice názorné, ale značně nematematické formulace nyní přeložíme do jazyka matematiky: do bijekce b nepřispívá zobrazení g, ale zobrazení g^{-1} k němu inverzní. Bijekci lze tedy zapsat jako sjednocení

$$b = f \cup g^{-1}.$$

Takto byla zobrazení f, g použita k důkazu Cantorovy–Schröderovy–Bernsteinovy věty v [1, str. 25].

Zobrazení b je zobrazení čtverce na úsečku, zobrazení úsečky na čtverec je zobrazení inverzní k b, tedy $b^{-1} = f^{-1} \cup g$.

Tkaničku z příkladu 2 jsme označili $\mathcal{L}_1$ („první tkanička začínající vlevo“), podobně můžeme první tkaničku v našem textu, která začíná vpravo, označit $\mathcal{P}_1$, všechny další začínající vlevo pak postupně $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, … Další tkaničky začínající vpravo podobně $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, … Zobrazení f je pak sjednocení všech množin $\mathcal{L}_i$ uspořádaných dvojic [vzor; obraz], které vygenerují všechny tkaničky začínající v botě vlevo, podobně zobrazení g^{-1} je sjednocení všech množin $\mathcal{P}_j$ uspořádaných dvojic [vzor; obraz], které vygenerují všechny tkaničky začínající v botě vpravo. Je tedy

$$f = \bigcup_{i\in I} \mathcal{L}_i, \quad g^{-1} = \bigcup_{j\in J} \mathcal{P}_j \quad \text{a} \quad b = \bigcup_{i\in I} \mathcal{L}_i \cup \bigcup_{j\in J} \mathcal{P}_j.$$

Závěr

Na konkrétním a snad i zajímavém případě jsme demonstrovali myšlenku, jejíž matematické zpracování a formální zápis je méně známým důkazem jedné z nejdůležitějších vět teorie množin, jehož autorem je maďarský matematik Gyula (Julius) König. Tento článek tak může být cenným materiálem pro všechny zájemce o studium matematiky, ale nejen pro ně. Pochopení prezentované myšlenky totiž vyžaduje jistou úroveň logického myšlení, kterou potřebují nejen budoucí matematici, ale které by měli dosáhnout i uchazeči o vysokoškolské studium jiných oborů, a to nejen přírodovědných, ale i technických.

Literatura

[1] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře.* 2. vyd., ČVUT, Praha, 2022.

[2] Gouvea, F. Q.: Was Cantor Surprised? *Amer. Math. Monthly*, 118 (2011), č. 3, s. 198–209.

[3] *Julius König's proof of Schröder–Bernstein theorem.* `https://math.stackexchange.com/questions/2749527/julius-k'onigs-proof-of-schröder-bernstein-theorem`

[4] Kuřina, F., Vondrová, N.: Jak to vlastně je? Nekonečno. *Učitel matematiky*, 29 (2021), č. 2, s. 111–127.

[5] Martišek, D.: Několik poznámek k mohutnosti množin. *Učitel matematiky*, 30 (2022), č. 2, s. 92–103.

[6] Sieg, W.: *The Cantor–Bernstein theorem: how many proofs?* `https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.2018.0031`.

[7] Zamarovský, P.: *Mýtus nekonečno.* 2. vyd., Karolinum, Praha, 2018.

[8] Zamarovský, P.: *Mýtus nekonečno.* Přednáška na Fakultě elektrotechnické ČVUT, 8. 11. 2018, ČVUT, Praha, 2018, `https://www.youtube.com/watch?v=dVh0-wuVQZs`.

[9] Zamarovský, P.: *Mýtus nekonečno.* Přednáška na Fakultě elektrotechnické ČVUT, 10. 11. 2022, ČVUT, Praha, 2022, `https://www.youtube.com/watch?v=KPk5YWhc-6Y`.