

Růžena Blažková

15 pohledů na školskou matematiku. Jak to vidíme

*Učitel matematiky*, Vol. 30 (2022), No. 4, 244–251

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/151488>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2022

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:  
*The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## Recenze publikace

### 15 POHLEDŮ NA ŠKOLSKOU MATEMATIKU: JAK TO VIDÍME

František Kuřina, Naďa Vondrová

AUTOR RECENZE: RŮŽENA BLAŽKOVÁ

Učitelské i studentské veřejnosti se dostává užitečné publikace, která předkládá mnoho zajímavých pohledů na školskou matematiku. Jak sami autoři uvádějí, kniha není učebnicí didaktiky matematiky, přesto je pro výuku didaktiky matematiky důležitá, neboť, mimo jiné, upozorňuje na mnoho oblastí, které jsou ve školské matematice problematické.

V 15 kapitolách na 278 stranách jsou uvedeny zkušenosti autorů jak z jejich pedagogické praxe na různých typech škol, tak z mnoha výzkumných šetření, která prováděli. Každá kapitola je uvedena vtipným ilustračním obrázkem, následují motivační otázky, vlastní text, řešené příklady, neřešené úlohy, závěrečné myšlenky a seznam literatury. Uvedení seznamu literatury za každou kapitolou je pro práci s jednotlivými tématy velmi praktické.

První kapitola s názvem „Naše pedagogická přesvědčení“ se nad procesem výuky matematiky, jehož centrem pozornosti je žák, ačkoliv role učitele je nezastupitelná, zamýšlí obecněji. Uvádí, mimo jiné, význam úloh ve výuce matematiky („řešení úloh je věda, praxe, umění“ (s. 12)) a význam motivace jako nezbytného předpokladu efektivního učení. Autoři zde poukazují na vliv výuky matematiky na rozvoj mnoha společensky důležitých hodnot pro všechna možná povolání a také uvádějí mnoho různých faktorů, které mají vliv na úspěšnost žáků ve výuce matematiky.

Kapitola druhá „Myšlení a logika“ poukazuje na souvislost myšlení a vyjadřování, uvádí abecedu matematického jazyka a zejména se pak zabývá problematikou implikace a ekvivalence. Vhodně je tento vztah ilustrován na příkladu věty Pýthagorovy

a věty kosinové. Autoři se zde věnují postavení definic a vět v matematice a ve školské matematice:

Cílem školské matematiky nemůže být memorování definic bez porozumění, ale za přínosné bychom považovali úkoly, kdy by žáci měli sami definice jim známých pojmů tvořit a měli by hledat jen ty vlastnosti, které jsou pro ně nutné a postačující. Tím se současně učí argumentaci a rozvíjí matematické uvažování. (s. 27)

Další část této kapitoly je věnována používání kvantifikátorů (mimo jiné známému rozdílu mezi „všichni“ a „každý“) a důkazům. V závěrečných myšlenkách je uvedeno: „Otázka rozvíjení myšlení je kardinální otázkou matematického (a nejen matematického) vzdělávání.“ (s. 35) Hledání cest, jak žáky motivovat, aby chtěli přemýšlet a neutíkali od problémů, které myšlení vyžadují, já sama také považuji za kardinální otázku pedagogického procesu.

Přirozeným číslům je věnována kapitola třetí. Správné vytvoření pojmu přirozeného čísla je nezbytné pro všechna jejich další využívání, ať už v relacích, operacích, slovních úlohách či v běžném životě. Autoři uvádějí několik přístupů z učebnic, všímají si přístupu zavedení přirozených čísel jako čísel kardinálních, ordinálních i jako prvků Peanovy množiny. Pozornost je věnována zápisu velkých čísel pomocí mocnin deseti a zejména také dvěma způsobům jejich čtení – dlouhému evropskému způsobu a krátkému americkému způsobu (jejichž záměna může někdy vést k nedorozumění při prezentování velkých čísel). V pěkném schématu jsou uvedena prvočísla a jejich rozložení v množině přirozených čísel i druhé mocniny přirozených čísel. Kromě desítkové soustavy je zmíněna i soustava dvojková. Velká pozornost je věnována také sčítání a násobení. Uvítala bych ale i zmínku o různých přístupech, které jsou v didaktice i učebnicích uváděny k odčítání a dělení v oboru přirozených čísel. Obě tyto operace jsou pro žáky náročné, a pokud jim žáci správně neporozumí, nejsou schopni je používat v dalším učivu, zejména pak ve slovních úlohách. Uvítala bych, kdyby se autoři vyjádřili k pamětnému odčítání s přechodem přes

základ deset, k algoritmu písemného odčítání i písemného dělení. I když je možné provádět tyto výpočty na kalkulačce, domnívám se, že základ těchto dovedností by žáci měli ovládat. Tak, jak jsou uvedeny historické algoritmy pro násobení, tak by mohly být uvedeny i historické algoritmy pro dělení. K neustálým diskuzím o tzv. drilu a potřebě zvládnutí určité automatizace některých činností k provádění dalších složitějších činností (obecně to platí pro všechny obory lidské činnosti) autoři uvádějí jasné stanovisko (s odkazem na (Rendl & Páchová, 2013)):

Automatizace je žádoucí fází osvojení s porozuměním, při níž je logika přítomna pouze jako podvědomý, avšak zvědomitelný předpoklad činnosti. Aby se žák do této fáze dostal, je třeba, aby vyřešil mnoho pečlivě volených úloh. Setrvání u stále stejné (nízké) úrovně složitosti úloh nijak neprohlubuje míru osvojení konceptu. (s. 58)

Rozšíření číselného oboru je obsahem kapitoly čtvrté s názvem „Číselné obory“. Zde jsou uvedeny přístupy k zavedení zlomků a desetinných čísel a procent a dále také početní operace s čísly racionálními. Na příkladech jsou vysvětleny náročnější případy, které žákům činí problémy, např. dělení zlomkem nebo násobení čísel záporných. Používání uvedených postupů může přispět ke snížení formalismu ve výuce matematiky. Za velmi užitečnou považuji část, která je věnována číslům komplexním, zejména z pohledu studentů učitelství, neboť ne všichni studenti se na střední škole s komplexními čísly setkají.

Další dvě kapitoly jsou věnovány algebraickým tématům, především algebry v nižších ročnících základní školy, algebrogramům, některým algebraickým úpravám i jejich geometrickým interpretacím. V kapitole „Rovnice“ jsou ekvivalentní úpravy ilustrovány na rovnoramenných vahách. Řešení soustavy dvou nebo tří lineárních rovnic je spjato s jejich geometrickým významem, např. se vzájemnou polohou tří rovin v prostoru. Poznámka o řešení kvadratických rovnic se zaměřuje na řešení pomocí doplnění na čtverec, případně pomocí rozkladu na součin dvojčlenů. Za velmi

užitečnou považují zmínku v „Závěrečných poznámkách“ o Diofantovských úlohách a Fermatově problému.

Sedmá kapitola je věnována relacím a funkcím a poukazuje na problémy, které se ve školské matematice v souvislosti s těmito pojmy vyskytují. S relacemi se setkávají žáci již od prvního ročníku základní školy a je třeba se jim důkladně věnovat (i když tematicky uvedeny nejsou). Zejména relace ekvivalence a relace uspořádání mají ve školské matematice své nezastupitelné místo a autoři jim věnují náležitou pozornost. Podobné je to i s pojmem funkce, k jehož nepochopení ve školách dochází poměrně často. V publikaci jsou na vhodných příkladech prezentovány funkce lineární i funkce kvadratická. Uvítala bych, kdyby se pozornost věnovala i definičním oborům funkcí v úlohách, které vycházejí z reality, kdy v mnoha případech nelze uvažovat záporná čísla, a v některých případech lze dokonce uvažovat jen čísla přirozená.

Pojednání o úměrnostech a trojčlence nalezneme v kapitole osmé. Problémy, které mají žáci při rozlišování přímé a nepřímé úměrnosti, navrhuji autoři řešit takto:

Pro žáky je přínosné, pokud nejdříve pouze zařazují úlohy do skupin, aniž by je řešili. Tedy aby si uvědomovali, co musí platit, aby šlo o situace přímé či nepřímé úměrnosti. (s. 132)

Za velmi důležité považují uvedení části „Problém zamlčených předpokladů“, který se zpravidla v běžné školské praxi nestuduje, ač by se o této problematice uvažovat mělo. Část věnovaná trojčlence odpovídá zkušenostem z učitelské praxe – její používání je často formální; žáci zakreslují šipky, aniž by chápali příslušnou závislost.

K doplnění aritmetických a algebraických témat je uvedena devátá kapitola s názvem „Struktury“. „Stěží lze najít pojem, který by „prorůstal“ nejrůznějšími oblastmi lidské kultury tak jako pojem struktura“ (s. 140). I když se na základních ani středních školách žáci a učitelé se strukturami explicitně nesetkávají, je tato problematika přiblížena mnoha ilustrativními příklady. Také je zde vysvětlen postoj matematiků skupiny Bourbaki a předloženy některé konkrétní matematické struktury.

Výuce geometrie a její didaktické struktúře je věnována kapitola desátá. Autoři zde uvádějí myšlenku, že „geometrie nezačíná ve škole, ale v kolébce“ (s. 157) a citaci J. A. Komenského „Základy měřictví mají býti položeny již ve škole mateřské“. Tyto úvahy poukazují na potřebu promyšleného didaktického přístupu k výuce geometrie. Za čtyři základní principy jsou zde považovány:

1. Prostor lze dělit na části.
2. Části prostoru lze vyplňovat.
3. V prostoru se lze pohybovat.
4. V prostoru existují útvary trojdimenzionální, dvojdimenzionální a jednodimenzionální. (s. 157)

Vše je ilustrováno na mnoha názorných obrázcích, zaujme např. pohyb v prostoru od úsečky až k čtyřdimenzionální krychli. Geometrické útvary a jejich vlastnosti mohou žáci poznávat prostřednictvím manipulativních činností, pro které je v publikaci uvedeno mnoho námětů. Stále je totiž třeba mít při výuce geometrie na zřeteli psychologické aspekty, protože dítě si osvojuje geometrické pojmy na základě dlouhodobě budovaných představ a zkušeností. Definice pojmů, i když přesné, ke správnému vytvoření představ obvykle nestačí.

Tato kapitola obsahuje i poznámky ke starším učebnicím geometrie, které byly v historii používány na základních a středních školách (např. E. Čech, gymnaziální učebnice z roku 1951) i ke slovenské učebnici Z. Kubáčka z roku 2009.

„Umění vidět a konstrukční úlohy v geometrii“ je název další kapitoly, která se nejprve věnuje umění vidět a roli obrázků. Jsou zde uvedeny reprodukce obrazů mnoha výtvarníků, kteří ve svých dílech využívají matematických zákonitostí. Zákonitosti jsou ilustrovány i na obrázcích s tematikou přírody nebo techniky či fyziky. Spojení školní geometrie s reálnými aplikacemi vnímám jako silnou motivaci pro výuku geometrie, kreslení a rýsování. I když o nezbytnosti náčrtů v geometrii není pochyb, autoři uvádějí hluboké zamyšlení nad jejich správnou interpretací dítětem a nad

verbální reprezentací pojmů. Část věnující se konstrukční geometrii vychází z obecné potřeby nejrozličnějších konstrukcí v běžném životě, dále se zaměřuje na často diskutovanou otázku symboliky. Některé útvary zapsané symbolikou používanou v současných učebnicích a funkční symbolikou jsou uvedeny v přehledné tabulce. Funkční symbolika mi ale připadá z hlediska školské geometrie poměrně nesrozumitelná. Na příkladech jsou uvedena dále řešení úlohy polohové a nepolohové. V terminologické oblasti obecně je stále problematický přístup k pojmům „množiny bodů s danou vlastností“ a „geometrické místo bodů“. Autoři se přiklánějí k pojmu geometrické místo bodů a logicky to zdůvodňují, což považuji za správné. Kapitola je doplněna mnoha řešeními úlohami.

Dvanáctá kapitola se věnuje míře v geometrii. Vychází z historických poznatků (Rhindův papyrus, Egypt, Babylonie, Archimédés, Eukleidés), vysvětluje podstatu měření a upozorňuje na měření ve školní praxi. Zajímavé je pojednání s názvem „Jak veliký je bod?“. Další části kapitoly se zabývají obsahem rovinných útvarů a objemů těles a možnostmi, jak tyto pojmy žákům zprostředkovat. K odvozování vzorců pak autoři uvádějí názor, se kterým se ztotožňuji:

Ve školní praxi nemůžeme vždy všechny vzorce odvodit, už jen proto, že k odvození je někdy potřeba učivo, které žáci dosud neznají, nebo nemáme dostatek času, abychom mohli vzorec dokázat. Nicméně výuka v oblasti míry v geometrii by se neměla změnit na výklad vzorců, které budou žáci jen aplikovat. (s. 229)

V geometrii nelze opomenout analytickou geometrii, které je věnována kapitola třináctá. Od analytického vyjádření bodu, přímky a roviny přecházejí autoři k řadě zajímavých řešených úloh v rovině i v prostoru.

Čtrnáctá kapitola je věnována metamorfózám neboli proměnám. Metamorfóza slovního vyjádření do jazyka algebry je ilustrována na řešení slovní úlohy, metamorfóza čar a metamorfóza rovinných útvarů na řadě geometrických úloh.

Poslední, patnáctá kapitola se zabývá pojmem nekonečna. „Pojem nekonečna lze studovat z mnoha pohledů, např. z teologického, filozofického, přírodovědného, matematického či didaktického.“ (s. 271) Autoři věnují pozornost zejména pohledu didaktickému a poukazují na dvě podoby nekonečna (aktuální a potenciální). Dále uvádějí nekonečné množiny v aritmetice, v geometrii i v oblasti infinitezimální matematiky. „Jsme toho názoru, že seznámení s aktuálním a potenciálním nekonečnem má být součástí univerzitního studia budoucích učitelů matematiky.“ (s. 271) S tímto názorem lze jen souhlasit, mimo jiné i proto, že pojem nekonečna zajímá děti již na prvním stupni ZŠ.

Celá publikace svědčí o výrazném vědeckém potenciálu obou autorů a o jejich širokém rozhledu v mnoha oblastech i mimo matematiku. Dává odpověď na mnoho otázek školské matematiky, které často učitele trápí. Svědčí též o literární erudici. Kniha je psána kultivovaným jazykem a čte se velmi snadno. Ilustrační obrázky jsou provedeny na profesionální úrovni, i když, domnívám se, nevyužívají plně výhod výpočetní techniky a jsou poctivě rýsovány. V uvedené knize může student i učitel najít řadu námětů ke zvládnání náročnějších témat školské matematiky, která se často uvádějí pouze poučkami typu „mínus krát mínus je plus“. Jedná se o učivo související s dělením zlomku zlomkem, násobením dvou záporných čísel, chápáním funkčních závislostí aj., pro které autoři nabízejí postupy uvedené v různých učebnicích a doplňují je svými zkušenostmi. Podnětná je i nabídka úloh v každé kapitole, neboť řada z nich může učiteli posloužit k diferencované práci s matematicky nadanými žáky. Publikace přináší různá doporučení k některým tématům školské matematiky, uvádí příklady z mnoha učebnic a poskytuje různé pohledy, jak je možné k výuce některých témat matematiky základní i střední školy přistupovat. Při výuce didaktiky matematiky i ve školské praxi se někdy setkáváme s požadavkem studentů či učitelů na uvedení jednoho „správného“ přístupu k výuce matematiky. Otázky typu „Jak to má být?“, „Jak jim to mám říct?“ „Jak to mám všechny naučit?“ nejsou ani v dnešní době výjimkou. Jednu z cest k zodpovězení těchto otázek nabízí tato publikace.



## Literatura

- [1] Kuřina, F., & Vondrová, N. (2022). *15 pohledů na školskou matematiku: jak to vidíme*. Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova.
- [2] Rendl, M., & Páchová, A. (2013). Procesy učení v diskurzu učitelů matematiky na 2. stupni základní školy. In M. Rendl et al., *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 127–182). Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova.

*Růžena Blažková*  
*Katedra matematiky*  
*Pedagogická fakulta MU*  
*Poříčí 31*  
*603 00 Brno*  
*e-mail: blazkova@ped.muni.cz*