Jiří Hejl

Zlatý řez

Učitel matematiky, Vol. 4 (1996), No. 1, 1–8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151463

ZLATÝ ŘEZ

JIŘÍ HEJL

Podnětem k napsání tohoto článku byl citát z 1. dílu sebraných spisů slavného německého astronoma Johanna Keplera (1571–1630) uvedený v poznámkách Josefa Srovnala za článkem [1]:

Geometrie má dva poklady. Jeden z nich je Pythagorova věta a druhý zlatý řez. První má cenu zlata, druhý připomíná spíše drahocenný kámen.

Zatímco *zlatá* Pythagorova věta byla a je nedílnou součástí geometrického učiva na základní škole i školách středních, o *drahocenném kamenu* — zlatém řezu — se dnes dočteme převážně jen v knihách tzv. rekreační matematiky (viz např. [2], str. 269, nebo [3], str. 136; viz též [7]). Je to škoda, neboť zlatý řez se objevuje nejen v matematice, ale i v řadě dalších oborů lidské činnosti od výtvarného umění přes architekturu, stavbu houslí, zoologii, botaniku, krystalografii a chemii k optice a snad i dalším vědním disciplínám. Myslím si proto, že si zaslouží větší pozornost učitelů matematiky.

Historicky nejstarší a současně nejširší vědomé uplatnění zlatého řezu je zřejmě ve výtvarném umění a architektuře. V učebnici [4] se mj. píše:

Zvláštní osobitostí mezi proporcemi se vyznačuje zlatý řez .... Přeneseme-li jej z matematiky do světa vizuálního, patří mezi nejoblíbenější proporce, užívané již dávno v historii. Proporce zlatého řezu můžeme vystopovat např. v antické stavbě Parthenonu, ale i v gotice, renesanci a jinde. Po optické stránce forma obdélníka zlatého žezu tvoří tvarové rozhraní v řadě mezitvarů od čtverce směrem k pásu.

V knize jsou pak ukázky konkrétního výskytu zlatého řezu, např. v půdorysu aspidy katedrály sv. Víta v Praze, který má tvar poloviny pravidelného desetiúhelníka, v proporcích rozměrů antické vázy (amforky), v osovém řezu ulity mořského živočicha a v dalších, navzájem rozdílných případech.

Také významný (již zesnulý) plzeňský malíř a výtvarný pedagog Mirko Zdeněk se ve své stati [5] zmiňuje o zlatém řezu:

Nejoblíbenějším proporčním vztahem v malířské kompozici je poměr zlatého řezu. Byl prvně vyjádřen Euklidem a je od středověku, kdy se s ním znovu seznamují evropští umělci prostřednictvím arabského překladu Ptolemaiova Almagestu, častokrát používán ve výtvarnictví. Bologneský matematik Fra Luca Pacciolo [v jiných pramenech Pacioli, Paciolli] *se jím zabýval ve slavné rozpravě De divina proportione, jež vyšla v Benátkách r. 1509 s ilustracemi Leonardovými.*

O několik odstavců dále pak uvádí příklad vědomého užití zlatého řezu v moderní architektuře:

Poslední nejzávažnější pokus dopátrat se geometrického řádu vycházejícího z nejlepších proporčních vztahů, provedl Le Corbusier a jeho spolupracovníci v oblasti architektury. Ve snaze "dospět k řadě měr, které uvedou v soulad lidskou postavu se vztyčenou paží a matematikou", vytvořili tzv. Modulor .... Proporční síť Moduloru, opírající se o výměry člověka a zlatého řezu, významná snaha o objevení racionálních základů harmonie v umění, nezůstala bez povšimnutí ani v malířství ....

Typickou ukázkou toho je např. Mondrianův obraz *Černá, bílá a červená* ze sbírek Muzea moderního umění v New Yorku. Dělení plochy obrazů pomocí zlatého řezu použil i významný český malíř Jan Preisler (1872–1918) u své známé olejomalby *Černé jezero* (1904).

Teď však už ke zlatému řezu z pohledu matematika.

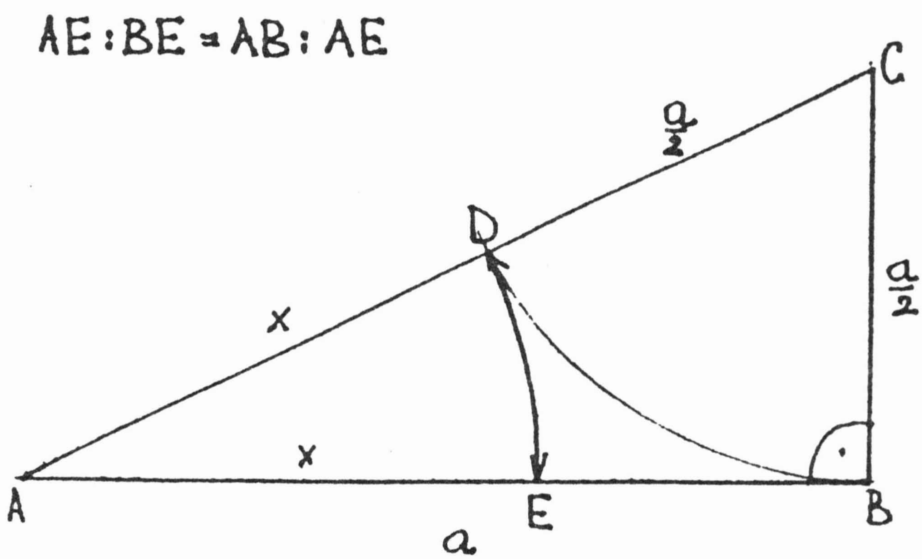
Rozdělit danou úsečku *zlatým řezem* (latinsky *sectio aurea*) znamená rozdělit ji na dva díly tak, že se poměr celé úsečky k většímu dílu rovná poměru většího dílu k menšímu. Jiná definice zlatého řezu hovoří o takovém rozdělení dané úsečky, kdy je délka většího dílu geometrickým průměrem (ve starší literatuře *střední úměrou, střední geometrickou úměrnou*) délek celé úsečky a menšího dílu.

Označíme-li délku původní úsečky a a délku většího dílu x, dostáváme podle první definice úměru

$$a : x = x : (a - x),$$

podle druhé rovnost $x = \sqrt{a(a - x)}$, což je totéž.

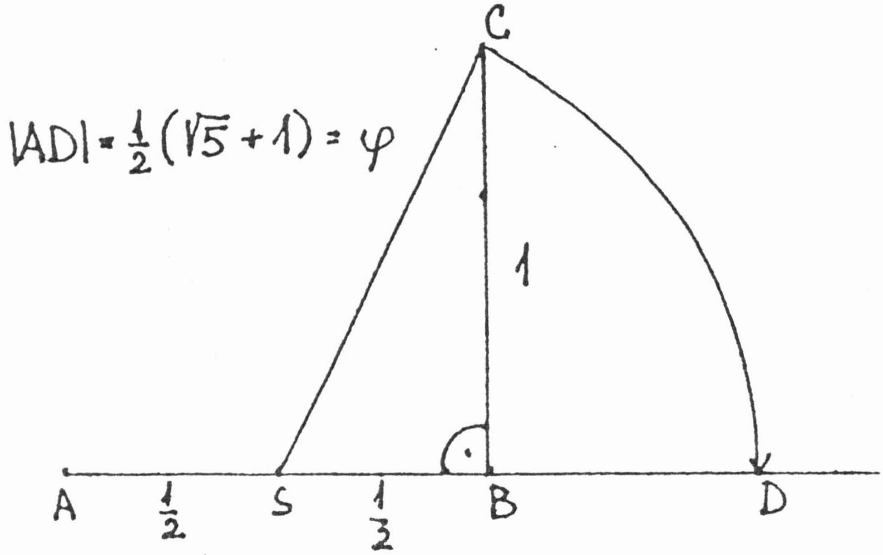
Budeme-li danou úsečku považovat za jednotku délky a užijeme-li některého z právě uvedených vztahů, dostaneme velikost x většího dílu: $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \doteq 0,618034$. Toto iracionální číslo se někdy označuje τ (viz [2], str. 269) a bylo nazváno *božský poměr* (latinsky *proportio divina*). Připomeňme ještě obvyklou konstrukci zlatého řezu založenou na užití Pythagorovy věty:



Obr. 1

(Jiná, méně častá konstrukce využívá vztahů pro mocnost bodu ke kružnici.)

Budeme-li naopak za jednotku délky považovat menší díl úsečky rozdělené zlatým řezem, bude pro velikost x většího dílu platit rovnost $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \doteq 1,618034$. Stejný výsledek dostaneme i pro délku celé úsečky, bude-li jednotkou délky větší díl. Toto iracionální číslo se nazývá *zlatý poměr* a na začátku 20. století je americký matematik Mark Barr označil písmenem φ. Konstrukce úsečky délky φ (při dané jednotce délky) je uvedena např. v poznámkách J. Srovnala za článkem [1] a vypadá takto:



Obr. 2

Božský poměr i zlatý poměr jsou čísla iracionální; byla proto často nahrazována čísly racionálními, tj. zlomky, a přesná konstrukce zlatého řezu pak dělením úsečky v určitém poměru, např. (pro božský poměr) 1:2, 2:3, 3:5, 5:8, 8:13, přičemž každý další poměr v této řadě se (jak se můžeme snadno přesvědčit) stále více přibližuje k číslu $\tau \doteq 0,618034$.

Seřadíme-li zde uvedená přirozená čísla 1,2,3,5,8,13, dostáváme zajímavou souvislost se členy známé Fibonacciho posloupnosti 1,1,2,3,5,8,13,21,23 ... definované pomocí rekurentního vzorce $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$; $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. (Leonardo Pisanský, zvaný Fibonacci, byl italský matematik žijící na přelomu 12. a 13. století). Božský poměr je tedy možno aproximovat zlomkem tvořeným dvěma po sobě jdoucími členy Fibonacciho posloupnosti. Viz např. [6].

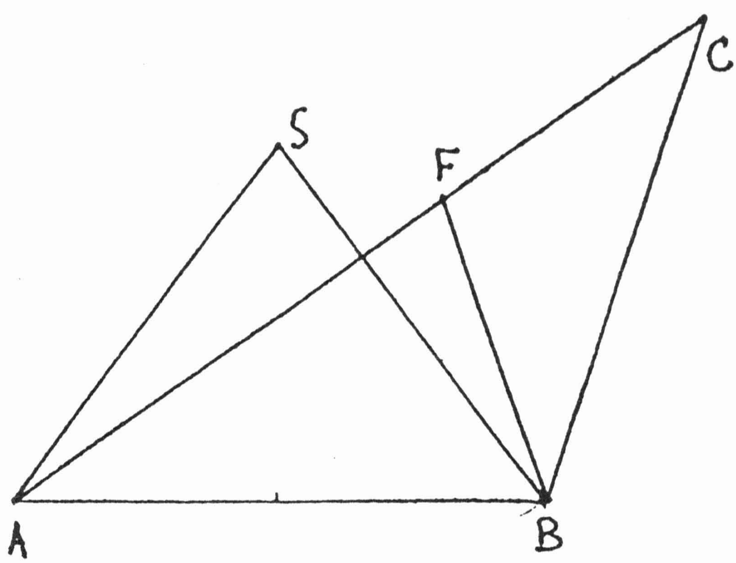
Z různých příkladů výskytu zlatého řezu v geometrii se nejčastěji uvádí vztah mezi stranou a úhlopříčkou pravidelného pětiúhelníka a vztah stranou pravidelného desetiúhelníka a poloměrem kružnice tomuto desetiúhelníku opsané.

Platí totiž věty:

V_1 Strana a_5 pravidelného pětiúhelníka je větším dílem úhlopříčky u tohoto pětiúhelníka rozdělené zlatým řezem; tj. $a_5 : u = (u - a_5) : a_5$.

V_2 Strana a_{10} pravidelného desetiúhelníka je větším dílem poloměru r kružnice opsané tomuto desetiúhelníku rozděleného zlatým řezem tj. $a_{10} : r = (r - a_{10}) : a_{10}$.

K důkazu věty V_1 je možno užít podobnosti trojúhelníků ABC a BFC, kde $\triangle\ ABC$ je částí pravidelného pětiúhelníka $ABCDE$ a bod F je bodem úhlopříčky $u = AC$, pro který platí $AF \cong AB = a_5$ (viz obr. 3, kde S je střed kružnice opsané $ABCDE$).



Obr. 3

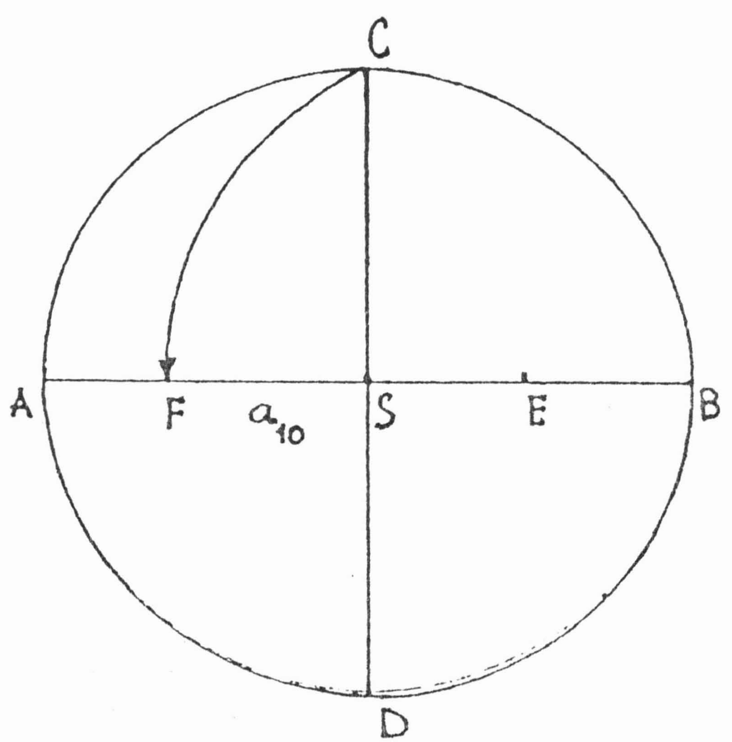
Protože platí $|\measuredangle ABC| = 2|\measuredangle ABS| = 2 \cdot \frac{1}{2}(180° - \frac{360°}{5}) = 108°$ a $\triangle\ ABC$ je rovnoramenný, je $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle BCA| = 36°$. Podle konstrukce je $\triangle\ ABF$ rovnoramenný, tj. $|\measuredangle ABF| = \frac{1}{2}(180° - 36°) = 72°$ a tedy $|\measuredangle FBC| = 180° - 72° = 36°$. To však znamená, že $\measuredangle FBC \cong \measuredangle BCF$ a rovněž $\triangle\ BCF$ je rovnoramenný. Trojúhelníky ABC a BCF jsou podobné podle věty uu a proto platí: $AB : AC = CF : BC$, tj. $a_5 : U = (u - a_5) : a_5$.

Důkaz věty V_2 probíhá podobně.

Věta V_1 umožňuje provést konstrukci pravidelného pětiúhelníka, je-li dána jeho strana AD. Stačí totiž sestrojit podle obr. 2 úsečku $u = \varphi.\mathrm{AB}$, sestrojit $\triangle\ ABC$ ($AB \cong BC, AC \cong u$) a opsat trojúhelníku ABC kružnici. Zbývající vrcholy D, E pravidelného pětiúhelníka leží na této kružnici.

Z věty V_1 rovněž vyplývá, že se každé dvě úhlopříčky pravidelného pětiúhelníka protínají v bodě, který obě dělí zlatým řezem, neboť se dá snadno ukázat, že bod F na obr. 3 je průsečíkem dvou úhlopříček. Pěticípá hvězda vytvořená pomocí úhlopříček pravidelného pětiúhelníka tak úzce souvisí se zlatým řezem. Už od dob Pythagorejců byl pěticípé hvězdě přisuzován až mystický význam, což se mj. projevovalo jejím častým užíváním a tento význam se přenesl i na zlatý řez. Časté užívání pěticípé hvězdy přetrvalo až do současnosti, kdy je (v různém barevném provedení) součástí některých státních vlajek či znaků.

Věty V_2 se užívá ke známé konstrukci strany pravidelného desetiúhelníka, je-li dána kružnice opsaná.



Obr. 4

Jsou-li AB, CD navzájem kolmé průměry kružnice $k(S, r)$, E střed SB, F průsečík AS a kružnice o středu E a poloměru EC, je $FS = a_{10}$ (a $FC = a_5, SC = a_6$). Platí totiž:

$$|FS| = |EE| - |SE| = |CE| - \frac{1}{2}r = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} - \frac{1}{2}r$$
$$= \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1)$$

a je tedy FS větším dílem poloměru r rozděleného zlatým řezem.

Znalosti věty V_2 a zlatého poměru umožňují i konstrukci pravidelného desetiúhelníka, je-li dána jeho strana a_{10}. Pro poloměr r kružnice opsané totiž platí $r = \varphi . a_{10}$ a stačí tedy opět užít konstrukce podle obr. 2, sestrojit střed kružnice opsané a na ní najít zbývající vrcholy desetiúhelníka.

V literatuře týkající se zlatého řezu (např. [3]) se objevuje ještě jeden termín, a to *zlatý obdélník*, tj. obdélník, jehož rozměry jsou ve zlatém poměru. Tvar zlatého obdélníka (též *obdélníka zlatého řezu* podle dříve uvedené citace z učebnice [4]) měly často obrazy nebo jejich rámy. Zlaté obdélníky se však objevují a u pravidelného dvanáctistěnu a desetistěnu (podrobněji viz [3], str. 137). Zlatý řez má tedy uplatnění nejen v planimetrii, ale i ve stereometrii.

Z toho, co bylo o zlatém řezu a pojmech s ním souvisejících uvedeno, vyplývá, že by se učitel matematiky na střední škole mohl (a snad i měl) o něm při vyučování aspoň zmínit, ať už při vhodně zvolené úloze o podobnosti trojúhelníků, při konstrukci pravidelného pětiúhelníka či desetiúhelníka, při uvádění příkladů na nesouměřitelnost úseček nebo jako o ukázce užití určité partie matematiky v mimomatematických disciplínách. Pak by bylo možné studentům zadat i tuto úlohu z Vojtěchovy učebnice geometrie pro V. třídu reálek vydané v r. 1911:

Největší z egyptských pyramid (Cheopsova) je prav. čtyrboká s hranou podstavnou $a = 227$ m, výška její je přibližně větším dílem hrany podstavné, zlatým řezem rozdělené; vypočítati objem její.

LITERATURA

[1] Vacek K., Vacek M., *Zlatý poměr v optice*, Matematika-fyzika-informatika, roč.4, č. 3.
[2] Opava Z., *Matematika kolem nás*, Albatros, Praha 1989.
[3] Kowal S., *Matematika pro volné chvíle*, 2. upravené vydání, SNTL, Praha 1985.
[4] Crhák F., Kostka Z., *Výtvarná geometrie*, SPN, Praha 1985.
[5] Zdenek M., *Problém malířské kompozice*, Sborník PF v Plzni, Umění XII.
[6] Vorobjev N. N., *Fibonacciova čísla*, SNTL, Praha 1953.
[7] Bečvář J., *Hrdinský věk řecké matematiky*, Historie matematiky I, Sborník, JČMF, Brno 1994, 21–107.

⋆ ⋆ ⋆