Klokan ’95

Učitel matematiky, Vol. 4 (1996), No. 3, 172–177

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151442

KLOKAN '95

Kategorie STUDENT

(odpovídá 3. a 4. ročníku SŠ) *(Dokončení)*

1. Jakého maximálního bodového zisku dosáhl řešitel Matematického KLOKANA, který správně odpověděl na 25 otázek a špatně na 3 otázky?

(A) 123 (B) 131 (C) 133 (D) 135 (E) jiný počet bodů

2. Počet kořenů rovnice

$$\sin 2x = \cos x \qquad 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$$

je

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

3. Rozvineme-li výraz $(2x-1)^{1995}$ vzhledem k proměnné x, dostaneme

$$a_{1995}x^{1995} + a_{1994}x^{1994} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Součet koeficientů $a_{1995} + a_{1994} + \ldots + a_1 + a_0$ je roven

(A) 0 (B) 1 (C) 1995 (D) -1 (E) 2

4. Nechť $x < 0$, pak výraz $|x - \sqrt{(x-1)^2}|$ je roven

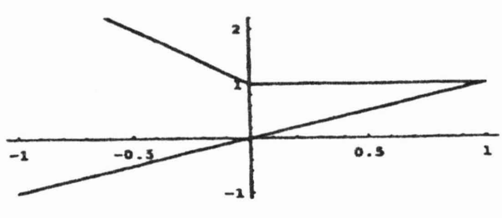
(A) 1 (B) $1-2x$ (C) $-2x-1$ (D) $1+2x$ (E) $2x-1$

5. Součin čísel $\sqrt[3]{4}$ a $\sqrt[4]{8}$ je roven

(A) $\sqrt[7]{12}$ (B) $2\sqrt[7]{12}$ (C) $\sqrt[7]{32}$ (D) $\sqrt[12]{32}$ (E) $2\sqrt[12]{32}$

6. Které 2 funkce určují na intervalu $\langle -1; 1\rangle$ graf ve tvaru „zobáku"?

(A) $f(x) = |1-x| - x$ a $g(x) = 1$
(B) $f(x) = |x| + |1-x|$ a $g(x) = x$
(C) $f(x) = -2x+1$ a $g(x) = x$
(D) $f(x) = x - |2x|$ a $g(x) = 1$
(E) jiná dvojice funkcí



7. Jaké je nejmenší kladné liché číslo ve tvaru $2n+1$, pro které je součin

$$2^{\frac{1}{7}}.2^{\frac{3}{7}}.\ldots.2^{\frac{2n+1}{7}} \text{ větší než } 1000\,?$$

(A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 17 (E) 19

8. Která kladná x jsou kořeny rovnice

$$(\log_3 x)(\log_x 5) = \log_3 5 \qquad ?$$

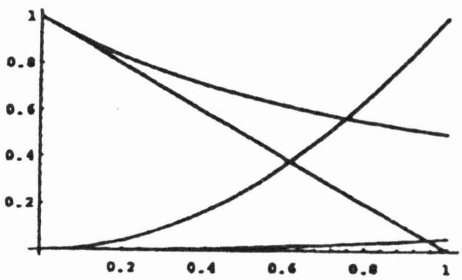
(A) 3; 5 (B) 3; 5; 15 (C) všechna čísla ve tvaru $3^n 5^m$, kde n, m jsou kladná čísla (D) všechna kladná x $(x \neq 1)$ (E) jiná možnost

9. Jakých hodnot může nabývat výraz

$$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$$

(A) $\{0\}$ (B) $\{-4;0;4\}$ (C) $\{-4;-2;0;2;4\}$ (D) $\{-4;-2;2;4\}$ (E) jiné

10. Graf které z uvedených funkcí definovaných na intervalu $\langle 0;1\rangle$ není na obrázku?



(A) $f(x)=1-\cos(\frac{x}{\pi})$ (B) $g(x)=x^2$ (C) $h(x)=1-x$
(D) $j(x)=(x-1)^2$ (E) $k(x)=\frac{1}{x+1}$

11. Vlak je složen z pěti vagónů A, B, C, D, E. Kolika způsoby může být vlak sestaven tak, aby v soupravě byl vagón A před vagónem B?

(A) 120 (B) 30 (C) 60 (D) 48 (E) 10

12. Výraz $\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}$ je roven

(A) $\frac{\sqrt{13}}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $\sqrt{2}$ (E) $2\sqrt[4]{13}$

13. Mnohočlen $(x+y)^9$ je rozložen a uspořádán podle klesajících mocnin x. Druhý a třetí člen mají stejnou hodnotu pro $x=p$ a $y=q$, kde p,q jsou kladná čísla, jejichž součet je 1. Jaká je hodnota p?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{8}{9}$ (D) $\frac{9}{10}$ (E) jiná

14. Nechť $b>1, \sin x>0, \cos x>0$ a $\log_b \sin x = a$. Pak $\log_b \cos x$ je roven

(A) $2\log_b(1-b^{\frac{9}{2}})$ (B) $\sqrt{1-a^2}$ (C) b^{a^2} (D) $\frac{1}{2}\log_b(1-b^{2a})$
(E) jiná hodnota

15. V trojúhelníku s délkami stran a,b,c platí $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$. Velikost úhlu proti straně c je

(A) $15°$ (B) $30°$ (C) $45°$ (D) $60°$ (E) $150°$

16. Nechť α je ostrý úhel, pro nějž platí

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{x-1}{2x}},$$

pak $\operatorname{tg}\alpha$ je roven

(A) x (B) $\frac{1}{x}$ (C) $\frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$ (D) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ (E) $\sqrt{x^2-1}$

17. Uvažujme dvě tvrzení (P) $2+2=4$, (Q) $1=2$. Která z následujících vět je správná?

(A) (P)$\Rightarrow$(Q) (B) (Q)$\Rightarrow$(P) (C) (P)$\Leftrightarrow$(Q) (D) tvrzení (P) i (Q) jsou pravdivá (E) všechny předešlé věty jsou chybné

18. Nechť $S_n = 1-2+3-4+\ldots+(-1)^{n+1}n$, kde n je přirozené číslo. Pak výraz $S_{1994}+S_{1995}$ je roven

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

19. Nejmenším prvočíselným dělitelem čísla $3^{11}+5^{13}$ je

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) $3^{11}+5^{13}$ (E) žádné z předešlých

20. Nechť číslo x je ve trojkové soustavě zapsáno ve tvaru

$$x = 12112211122211112222.$$

Jaká je první číslice (zleva) čísla x v devítkové soustavě

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

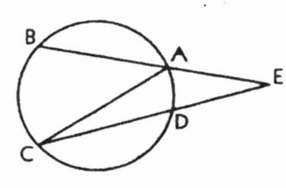
21. Posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ je definována následujícím předpisem

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_{n+1} &= a_n + a_n^2 \qquad n=1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

Jaká je předposlední číslice (v desítkové soustavě) čísla a_{1995}?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

22. Na obrázku je velikost úhlu při vrcholu E 40° a oblouky AB, BC, a CD mají stejnou velikost. Jakou velikost má úhel ACD?



(A) 10° (B) 15° (C) 20° (D) 30° (E) jinou hodnotu

23. Funkce $f(x)$ je definovaná pro libovolné přirozené číslo a vyhovuje pro každá dvě přirozená čísla x, y rovnici

$$f(x+y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1.$$

Určete $f(1995)$, jestliže $f(1) = 2$

(A) 1994 (B) 1994^{1993} (C) 1995 (D) 1994^{1995} (E) 1996

24. Jsou-li a, b, c reálná čísla ($abc \neq 0$) taková, že

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{-a+b+c}{a}$$

a

$$x = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$

Je-li $x < 0$, pak x je rovno

(A) -1 (B) -2 (C) -4 (D) -6 (E) -8

25. Je-li $1+\sqrt{2}$ kořenem rovnice $x^2 + px + q = 0$ s celočíselnými koeficienty p, q, pak $p + q$ je

(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3 (E) 5

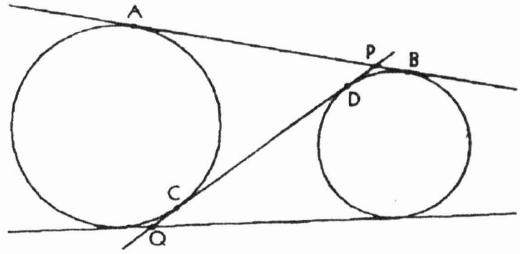
26. Číslo n má v desítkové soustavě tvar

$$n = \underbrace{99\ldots9}_{1995-krát}.$$

Kolik devítek obsahuje číslo n^2 (v desítkové soustavě)?

(A) 0 (B) 1 (C) 1994 (D) 1995 (E) 1996

27. Jsou dány 2 kružnice viz obr. Úsečky AB resp. CD leží na společné vnější resp. vnitřní tečně obou kružnic. Buď P, Q průsečíky vnitřní tečny obou kružnic obsahující CD s oběma vnějšími tečnami těchto kružnic. Délka úsečky PQ je



(A) $\frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$ (B) $|AB|$ (C) $\sqrt{|AB|.|CD|}$ (D) větší než $|AB|$
(E) žádná z předešlých odpovědí neplatí

28. Kolik vzájemně různých řešení může mít soustava rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \\ (x-a)^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

při libovolné volbě reálného parametru a?

(A) $0, 1, 2, 3, 4$ nebo 5 (B) $0, 1, 2$ nebo 4 (C) $0, 2, 3$ nebo 4 (D) $0, 2$ nebo 4
(E) 2 nebo 4

29. Dva z vnitřních úhlů trojúhelníka mají velikosti 15° a 60°. Jaký je obsah tohoto trojúhelníka, je-li vepsán do kružnice o poloměru 6.

(A) $9\sqrt{3}$ (B) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ (C) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ (E) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

30. Určete nejmenší přirozené číslo n tak, aby platilo

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq n(x^4 + y^4 + z^4)$$

pro všechna reálná čísla x, y, z.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) jiné číslo

Zpracoval RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.
Celkový počet řešitelů v ČR: 1297
Nejlepší řešitel: Petr Vodstrčil, Gymnázium Polička (134 bodů)

Výsledky

Správná řešení

otázka	klokánek	benjamin	kadet	junior	student
1.	B	C	C	D	E
2.	E	D	E	C	D
3.	B	E	B	D	B
4.	B	B	D	A	B
5.	B	E	C	A	E
6.	A	D	E	E	B
7.	D	D	C	B	D
8.	D	B	C	A	D
9.	B	D	A	D	B
10.	D	E	C	B	D
11.	A	C	C	A	C
12.	D	A	B	B	D
13.	C	B	D	E	B
14.	B	A	B	B	D
15.	C	C	E	C	D
16.	E	E	C	B	E
17.	A	A	C	A	B
18.	B	C	C	A	D
19.	A	A	B	C	A
20.	D	B	E	A	E
21.	B	E	A	C	C
22.	D	B	E	A	B
23.	E	A	E	B	E
24.	B	D	D	A	A
25.	E	D	A i D	D i B	A
26.	D	C	B	C	C
27.	D	E	D	D	B
28.	B	B	C	D	C
29.	D	E	E	B	A
30.	A	A	E	C	B