# NĚKOLIK METODICKÝCH POZNÁMEK

JAN MAŘÍK

Oblíbeným tématem konverzace mezi učiteli matematiky jsou stížnosti na to, jak jsou jejich studenti slabí, a některé směšné chyby, které žáci příležitostně dělají. Nemyslím si, že je něco špatného na takovéto konverzaci; domnívám se však, že bychom měli jít hlouběji a každou situaci zkoumat důkladněji.

Mnoho učitelů si stěžuje (já také), že si studenti přejí studovat matematiku jen jako kuchařku. To však ještě není to nejhorší. Studenti bohužel často nechápou naše recepty, které jsou někdy neohrabané (užíváme druhou derivaci v souvislosti s lokálními extrémy; používáme Taylorovu větu za účelem zjištění, kolik členů řady $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ bychom měli vzít, abychom obdrželi předepsanou přesnost) nebo neúplné (učíme „integrovat" funkci $1/(2 + \sin x)$, ale nehledáme její integrál na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$), nebo dokonce nesprávné. Jedním z cílů těchto poznámek je právě poukázat na některé „oblíbené" chyby. (Míním chyby dělané autory knih o kalkulu — diferenciálním a integrálním počtu). Není obtížné tyto chyby opravit „teoreticky", ale bude pravděpodobně velmi obtížné opravit je prakticky (v rámci naší každodenní práce se studenty). Rád bych předem řekl, že netvrdím, že jsem nalezl praktická řešení odpovídajících problémů. Mám však pocit, že jsme ještě nezačali klást správné otázky (fráze Sidney Harrise).

---

Profesor Jan Mařík (12. 11. 1920 – 6. 1. 1994) vychoval řadu našich matematiků; mnozí absolventi Matematicko-fyzikální fakulty UK dodnes vzpomínají na jeho originalitu, důkladnost i zásadovost. Seznam jeho prací byl uveřejněn v časopise *Czechoslovak Mathematical Journal* 41(116)(1991), 180–183 (dodatek 44(119)(1994), 192). K jeho pozůstalosti patří ještě řada nepublikovaných pedagogických úvah, metodických pokynů a originálních postřehů, které zasílal svým kolegům a přátelům. Text *Několik metodických poznámek* pochází z doby Maříkova působení na univerzitě v East Lansingu ve Spojených státech. Článek byl zaslán prof. Ivanu Netukovi, DrSc.; otištěn byl v květnu 1995 ve 44. čísle *Informací Matematické vědecké sekce JČMF*. Z angličtiny přeložil Pavel Trojovský.

Jeden z problémů, se kterými se setkáváme u středoškolských studentů, je problém významu vzorců. Někdy zvažujeme, zda bychom měli dokazovat jisté věty. Skutečným problémem však je, jak to udělat, aby studenti našim matematickým větám rozuměli. Mnozí z nich si neuvědomují, že to, co píší, by mělo být srozumitelné. Od začátku by měli být vedeni k tomu, aby tvořili tvrzení a ne pouze psali vzorce. Každý student by měl rozumět a vyjádřit v domácím úkolu rozdíl mezi „přejeme si dokázat, že ..." a „dokazovali jsme, že ...". Studenti jsou zvyklí psát cvičení bez jediného nematematického slova; neměli bychom to tolerovat. Student, který není schopen tvořit výroky o tom, čemu ho učíme, nerozumí obvykle našim tvrzením. Jestliže učitel slovní komentář vyžaduje, pak někteří studenti — ve snaze prokázat mu laskavost — píší něco jako „řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ konverguje pro každé $n$" nebo „poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ je $x/(n+1)$" atd. To by se, myslím, nestávalo tak často, kdyby více učitelů bylo vytrvalých.

Ve svých přednáškách z teorie čísel někdy dávám tento domácí úkol: Nechť $a$ a $b$ jsou sudá čísla. Dokažte, že číslo $\frac{1}{2}ab$ je také sudé. Většina studentů napíše, že $a$, $b$ jsou sudá, $ab$ je sudé, tedy $\frac{1}{2}ab$ je sudé. Na základě individuálních konzultací jsem zjistil, že to není důsledek nedbalosti studentů; vždy musím vydat ohromné množství energie, abych je přesvědčil, že polovina sudého čísla není vždy sudá.

Domnívám se, že bych měl ukončit své stížnosti. Pokusím se analyzovat některé typy chyb, které se v různých situacích objevují.

## Aritmetika

Většina studentů ví, že nula by neměla být ve jmenovateli a že bychom nulou neměli krátit. Málo studentů si však uvědomí, že tato početní pravidla používají, když nula „nevypadá jako nula". Pěknou ukázkou je toto: Nechť $a$ je libovolné číslo různé od nuly; definujeme $b = -a$. Pak $a = -b$, $ab = -b^2$, $a^2 + ab = a^2 - b^2$, $a(a+b) = (a-b)(a+b)$ a po zkrácení výrazu $(a+b)$ obdržíme $a = a - b = 2a$, tedy $1 = 2$.

Tento příklad se nezdá být důležitý; uvědomme si však, že v kapitole o diferenciálních rovnicích nejsou výjimkou vzorce jako $y' = y^2$, $dy/y^2 = dx$ aj. (bez jakýchkoli předpokladů o $y$). Někteří autoři učebnic krátí integrační faktor. Otázka, zda tento faktor nemá nějaké nulové body (nebo zda dokonce není identicky nulový), je ze zřejmých důvodů obvykle vynechávána.

Situace s nerovnicemi je obdobná. Většina studentů zná základní pravidla, ale nedokáže je vždy aplikovat. Obvykle správně hádají, že „smíme sčítat nerovnosti", ale nejsou schopni to dokázat. To by nebylo tak špatné, kdyby nerovnice rovněž nenásobili. Když se ptám studenta, co ho vedlo k přesvědčení, že z nerovností $a < b$, $c < d$ vyplývá $ac < bd$, urazí se, že se ho ptám na něco zcela samozřejmého. Zdůrazňuji, že dokonce absolvent vysoké školy odčítal nerovnice. (Obhajoval se: „Já nejsem profesor matematiky.") Někteří studenti, kteří vědí, že $2 < e$, nejsou schopni rozhodnout, zda nerovnost $-e < -1$ je pravdivá či nepravdivá.

Mnozí studenti nerozumí slovu „zřejmý". Mají představu, že „zřejmé" je něco, co nemusí být dokázáno (ne něco s jednoduchým důkazem). Někteří studenti jsou naprosto neústupní ve „zřejmosti". Dobrou reakcí v takovém případě je otázka: Není zřejmé, že Země je středem vesmíru?

## Rovnice

Již od začátku bychom měli trénovat své studenty v používání výroků tvaru: „Jestliže ..., pak ...". Později bychom měli zdůrazňovat, že „neznámý" není matematický pojem (nemůžeme definovat, co „neznámý" znamená), ale že v jistém kontextu nebo v jistých slovních spojeních může sloužit jako vhodné zkrácení. Když se pokoušíme řešit rovnici (nebo soustavu rovnic), obvykle na začátku předpokládáme, že máme jisté $x$ (nebo dvojici $x$, $y$ atd.), rovnici vyhovující a vyvozujeme jisté důsledky z tohoto předpokladu. Měli bychom také zdůrazňovat, kam dospějeme uskutečněním svého postupu. (Většina studentů by říkala, že jsme „vyřešili rovnici".) Můžeme např. dojít k výsledku: „jestliže $x$ vyhovuje, pak $x = 3$". Musíme trvat na tom, aby to studenti odlišovali od výroku „jestliže x=3, pak je ... splněno".

Za vážnou pedagogickou chybu považuji nechat studenty řešit pouze soustavy rovnic, v nichž všechna řešení získaná na základě algoritmu, který byl vyložen, jsou skutečně řešeními. To nevyhnutelně vytváří dojem, že „každá rovnice má nějaké řešení — když neuděláme numerickou chybu" a že rozdíl mezi „jestliže $x$ je řešením ..., pak $x = 3$" a „jestliže $x = 3$, pak ... platí" je čistě sémantický, který by měl být z praktických důvodů co nejdříve zapomenut. Následující příklady ilustrují tuto situaci:

1. Existuje takové $x$, že platí

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3} + \frac{x-5}{x^2-5x+6} = \frac{2x}{x^2-3x+2}\ ?$$

(Jednoduchý výpočet ukazuje, že pouze $x = 3$ může být řešením, ale pro $x = 3$ jsou první dva jmenovatelé 0).

2. Existuje $x$ takové, že $\sqrt{69-x} + \sqrt{6-x} = 7$ ?
(Po umocnění získáme $\sqrt{414 - 75x + x^2} = x - 13$; dalším umocněním obdržíme $x = 5$, které samozřejmě nevyhovuje zadané rovnici.)

3. Někdy se stane, že při hledání neznámé veličiny sestrojíme soustavu rovnic s jistými „pomocnými proměnnými" (o které nemáme zájem). Předpokládejme např., že si přejeme nalézt čísla $w$, $x$, $y$, $z$ taková, že:

$$w + 2x + y + z = 2\ , \tag{1}$$

$$5w - x + 3y - z = 1\ , \tag{2}$$

$$2w + 5x - y + 3z = 1\ , \tag{3}$$

$$3w - 4x + 5y - 3z = 0\ , \tag{4}$$

ale že nás zajímá pouze $w$; $x$, $y$, $z$ jsou takové „pomocné proměnné". Můžeme zkusit zbavit se $z$. Sečtením (1) a (2) dostaneme

$$6w + x + 4y = 3\ ; \tag{5}$$

sečtením (3) a (4) získáme

$$5w + x + 4y = 1\ . \tag{6}$$

Nyní se zdá, že můžeme vyřešit problém odečtením (6) od (5); tak získáme $w = 2$. Mohli jsme však postupovat i takto: vynásobením rovnice (1) číslem 2 získáme

$$2w + 4x + 2y + 2z = 4\ ; \tag{7}$$

sečtením (2) a (3) dostaneme

$$7w + 4x + 2y + 2z = 2\ ; \tag{8}$$

odečtením (7) od (8) dostaneme $5w = -2$; tedy žádné řešení neexistuje.

Studenti by neměli být překvapeni, že se něco takového může přihodit; měli by být překvapeni, že to, co vypočítají, vyhovuje zadaným vztahům. Jestliže neuvedeme nějaké analogické úlohy, necháváme studenty ve víře v „neomylnost tužky".

Vždy bychom měli klást důraz na význam toho, co sami říkáme. Měli bychom si být vědomi, že slova jako „řešte soustavu ..." nejsou vždy jasná. Mohou znamenat „nalezněte řešení", ale např. též „nalezněte všechna řešení". Zdůrazníme-li pouze technickou část problému, neměli bychom být překvapeni, že studenti rozumí slovům „řešte soustavu ..." jako „předveďte postup, který jsme trénovali".

Jednou jsem zadal následující problém: Nalezněte čísla $a$, $b$, $c$ tak, aby matice $A = \begin{bmatrix} 5, & a \\ b, & c \end{bmatrix}$ vyhovovala vztahu $A^2 = A$. Jeden ze studentů řekl (asi tak po týdnu): „Nemohu vyřešit rovnici $ab = -20$." Samozřejmě — nevzpomněl si na žádný výpočetní postup pro řešení.

Tato situace je mnohem vážnější, než jak na první pohled vypadá. Studenti získají iluzi, že rituál pro všechno musí existovat. Předpokládejme, že $a$ je číslo větší než 1 a že potřebujeme číslo $b$ splňující nerovnici $b^2 - b > a$. Když učitel řekne „vezměme $b = 2a$" a píše pouze $b = 2a$, může uslyšet od posluchačů: „Jak víte, že $b = 2a$ ?" Nebo: Předpokládejme, že učitel formuluje větu o diferenciální rovnici tvaru $y'' + ay' + by = P(x).e^{\alpha x}$ ($a$, $b$, $\alpha$ jsou čísla, $P$ je polynom) a chce ji použít na rovnici $y'' + y' + y = x$. Jestliže řekne „vezmeme $\alpha = 0$“, pak může opět slyšet „Jak víte, že $\alpha = 0$ ?“

Studenti nejsou zvyklí slyšet výroky jako „jestliže zvolíme ..., pak je splněno ...“. Oni pravděpodobně cítí, že volba je něco nedovoleného, nebo alespoň nematematického: postrádají rituál. Proto bychom od začátku měli studenty vést k ověřování vztahů; zvláště k ověřování, zda to, co vypočítali, vyhovuje zadaným vztahům. Situace je tak špatná, že někteří studenti nerozumí slovu „ověřit“. Jiní studenti trpí něčím, co bych nazval „rovnicová nemoc“. Např. při ověřování, že čísla $x = \frac{4}{15}$, $y = \frac{1}{10}$, $z = \frac{1}{6}$ vyhovují rovnici $x - y - z = 0$, většina studentů píše

$$\begin{aligned} \frac{4}{15} - \frac{1}{10} - \frac{1}{6} &= 0 \\ \frac{8-3-5}{30} &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

(Po troše úsilí dostaneme zajímavý výsledek, že $0 = 0$.) Měli bychom vysvětlit, že něco jako je toto, je matoucí, a že znak „=“ by měl být psán jen tam, kam skutečně patří:

$$x - y - z = \frac{4}{15} - \frac{1}{10} - \frac{1}{6} = \frac{8-3-5}{30} = 0.$$

Snad bychom měli také zdůrazňovat souvislost s realitou. Student by se měl domnívat, že dává své nejlepší schopnosti něčemu, co by mělo být řešením konkrétního problému. Jedině pak by se mohl zajímat o to, jak bylo řešení objeveno (zda uhádnutím nebo jinak).

**Má každý symbol význam?**

V domácím úkolu (kde se objevila posloupnost $a_1, a_2, \ldots$) uvedl jeden z mých studentů symbol $a_\infty$. Když jsem se ho ptal, co tím míní, odpověděl: „Cožpak to není limita?" Tedy: *On se ptal mě, co sám míní.* Pravděpodobně každý z nás ví, že oblíbený postup vede k otázkám jako „Co je $1-1+1-1+\cdots$?". Měli bychom klást důraz na to, že symbolické označování je v naší moci; kdybychom si to přáli, pak bychom mohli rozumět symbolem $\frac{1}{0}$ např. číslo $-3/2$. Je pouze otázkou, zda by něco takového sloužilo rozumnému účelu. Měli bychom také lépe vysvětlit situaci s $a^b$. Studenti by měli vědět, že neznají, co $(-1)^{\sqrt{2}}$ je a tedy (na této úrovni) otázka „Co je $(-1)^{\sqrt{2}}$?" je právě tak rozumná jako otázka „Co znamená ${}^{3}2$?" Kdyby tyto věci byly vysvětleny správně, pak bychom (doufám) nemuseli tak často přesvědčovat naše studenty, že není vhodné psát $\frac{1}{A}$, když $A$ je matice typu $2 \times 3$.

**Extrémy funkcí**

Nejprve: Co je extrém funkce? Míníme největší (nejmenší) hodnotu funkce na dané množině? Nebo lokální extrém? Nebo lokální extrém vzhledem k jisté množině? Dříve než začneme řešit tento problém, musíme ho formulovat. My to děláme, samozřejmě, abychom uspokojili naše svědomí. Rozumí však studenti tomuto problému? Každý zná odpověď. Většina studentů si však pamatuje pouze, že by měli určit znaménko $f''(x)$ pro každý bod $x$, pro nějž je $f'(x) = 0$. Když však hovoříme o lokálních extrémech, měli by studenti vědět alespoň intuitivně, co míníme, když řekneme, že funkce má lokální maximum v bodě. My víme, že to znamená existenci jistého $\delta > 0$. Nyní bychom se sami sebe měli ptát: Kde potřebujeme takové $\delta$? Proč učíme studenty dokazovat jeho existenci? Obávám se, že hlavním důvodem je, že to dělali naši dědové. Výsledky našeho úsilí v tomto směru jsou spíše negativní, poněvadž studenti si pletou absolutní maximum s lokálním. Stalo se, že student, zamýšlející nalézt maximum funkce, která na daném kompaktním intervalu roste (např. $\sin x - \cos x$, $x \in \langle 0, \pi/2\rangle$), ji dvakrát zderivuje atd. Také se stává, že student zkoumá funkci diferencovatelnou na $\langle 0, 2\rangle$ takovou, že $f'(x) > 0$

pro $x \in (0,1)$ a $f'(x) < 0$ pro $x \in (1,2)$ a pokouší se dokázat, že $f(1) \geqq f(x)$ pro každé $x \in \langle 0, 2\rangle$ tak, že vypočítá $f''(1)$. (Takové věci se stávají dokonce pokročilejším studentům.)

Potřebujeme tyto věty:

(T$_1$) Nechť $f$ je funkce diferencovatelná na intervalu $I$ a nechť derivace funkce $f$ je kladná (záporná) v každém vnitřním bodě intervalu $I$. Pak $f$ je rostoucí (klesající) na $I$.

(T$_2$) Nechť $f$ je funkce diferencovatelná na $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Nechť $S$ je podmnožina intervalu $\langle a, b\rangle$, $a \in S$, $b \in S$ a $f'(x) \neq 0$ pro každé $x \in (a,b) - S$. Pak

$$\max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = \max_{x\in S} f(x). \qquad \text{(M)}$$

Můžeme vzít, samozřejmě, $S = \{x \in (a,b); f'(x) = 0\} \cup \{a,b\}$. Měli bychom však zdůraznit, že (M) platí nezávisle na tom, zda derivace funkce $f$ v bodech množiny $S \cap (a,b)$ je nulová nebo není. Toto též ukazuje, že si musíme uvědomovat, co znamená „řešit rovnici $f'(x) = 0$“. Potřebujeme množinu obsahující všechny nulové body funkce $f'$ na $(a,b)$; množina $P$ taková, že $f'(x) = 0$ pro každé $x \in P$, by nepomohla. V jednoduchých případech můžeme nalézt konečnou množinu $S$ se zmíněnými vlastnostmi. Nechť $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Z Darbouxovy vlastnosti derivace a z věty (T$_1$) vyplývá, že $f$ je ryze monotonní v intervalech $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$. Tedy, když vypočítáme $f(x_0), \ldots, f(x_n)$, uvidíme lokální extrémy funkce $f$. Druhou derivaci tedy nepotřebujeme.

*Dokončení v dalším čísle*