Petr Eisenmann

O experimentu se spojitostí funkce na střední škole

Učitel matematiky, Vol. 4 (1996), No. 4, 213–219

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151430`

O EXPERIMENTU SE SPOJITOSTÍ FUNKCE NA STŘEDNÍ ŠKOLE

PETR EISENMANN

Otázka zařazení a způsob zavedení pojmu spojitost funkce do výuky matematiky na střední škole vždy byla a je diskutovaným problémem. Ve svém příspěvku chci ukázat, že kromě přínosu pro dále prezentovanou látku (formulace a důkazy nutné a postačující podmínky existence lokálního extrému diferencovatelné funkce, zavedení Riemannova integrálu pro spojité funkce a pod.) lze pojem spojitosti funkce využít i ke zdokonalení funkčního myšlení studentů, k propedeutice limitního procesu a ke správnému vnímání matematických a fyzikálních modelů. Jednou z možností takového využití je diskutovat se studenty o spojitosti funkčních závislostí z okolního světa, technické praxe, ostatních přírodovědných disciplín a pod. Popis následujícího experimentu nechť slouží jako soubor námětů k takové diskusi.

V rámci čtyř ročníků Letní školy mladých matematiků a fyziků v Krupce u Teplic, pořádaných v minulosti řadu let pobočkou JČSMF v Ústí nad Labem a katedrami matematiky a fyziky PF UJEP v Ústí nad Labem, jsem v letech 1987 až 1990 provedl následující experiment. Středoškolským studentům (celkově se jednalo v průběhu čtyř let o přibližně 150 dívek a chlapců ze všech ročníků gymnázií) jsem dal po stručném „zavedení“ pojmu spojitost funkce na intervalu (grafem takové funkce je křivka, kterou jsme schopni nakreslit na papíře bez zvednutí tužky – není nikde na tomto intervalu „přetržená“), vysvětlení pojmu bod nespojitosti funkce a po několika obvyklých příkladech tuto instrukci: „Vymyslete do zítřka co nejvíce příkladů funkcí, které popisují závislost veličin z okolního světa, z praxe, z různých vědních oborů. Vždy rozhodněte, zda je daná funkce spojitá či nikoliv. Zaměřte se na hledání funkcí nespojitých.“

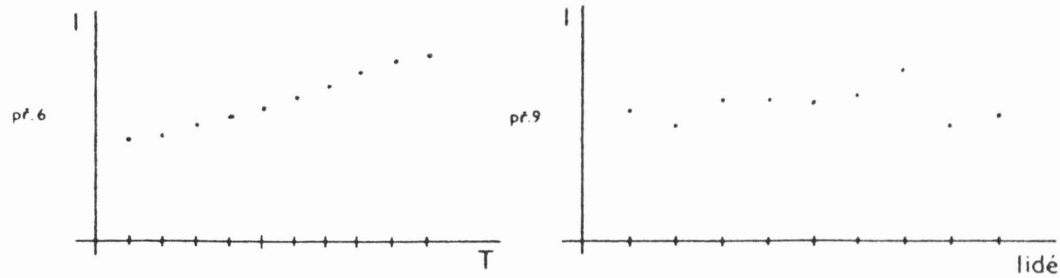
Vynechám zde popis tohoto experimentu, způsob bodování, kterým jsem hodnotil předložené příklady i jejich odůvodnění, atmosféru diskusí i jejich další pokračování. Nechci vzhledem k malému počtu účastníků i vzhledem k tomu, že se jednalo o nadprůměrně talentované studenty (vítězové různých kol matematických a fyzikálních olympiád) dělat žádné závěry o představách spojitosti dějů v myslích středoškolských studentů. Následující řádky uvádím pouze jako námět pro podobné diskuse se studenty.

Z přibližně dvou set kvalitativně různých příkladů funkcí, které studenti udali jako nespojité, jsem vybral deset nejtypičtějších reprezentantů. V mírně upravené podobě je nyní uvádím.

(1) počet vlasů na hlavě v závislosti na čase
(2) počet stromů na území tvaru kruhu s pevným středem v závislosti na zvětšujícím se poloměru
(3) poplatek za přepravu balíku Československou poštou v závislosti na jeho hmotnosti
(4) rychlost jedoucího automobilu v závislosti na čase (bod nespojitosti – okamžik nárazu na kolmou stěnu)
(5) počet lidí v ČSFR v závislosti na čase
(6) délka kovové tyče v závislosti na její zvyšující se teplotě měřená vždy při zvýšení teploty o 1 $°C$
(7) objem vody v nádobě, do které kape, v závislosti na čase
(8) odstředivé zrychlení jedoucí lokomotivy v závislosti na dráze (bod nespojitosti — místo přechodu rovných kolejí do zatáčky)
(9) tělesná výška člověka zaokrouhlená na mm v závislosti na tom, kterého člověka na Zemi máme na mysli
(10) světelný tok záření od žárovky v závislosti na čase (bod nespojitosti — okamžik zhasnutí žárovky)

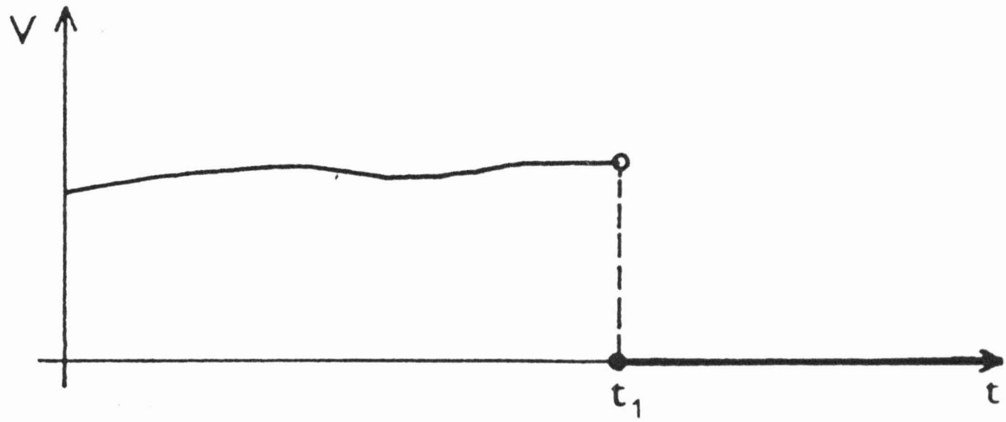
Vyslovím nyní stručně hlavní závěry diskuse k jednotlivým skupinám uvedených příkladů.

U příkladů číslo 9 a 6 jde o omyl. Studenti vycházeli z obrázků grafů těchto funkcí (obr. 1). Uvedení daných závislostí jako funkcí není chybou, neboť funkcí se tehdy v gymnaziálním učivu matematiky rozumělo zobrazení libovolné množiny do $\mathbf{R}$. Chybu studenti udělali v tom, když si neuvědomili, že pojem spojitost funkce jsme zavedli pouze pro funkci definovanou na intervalu.



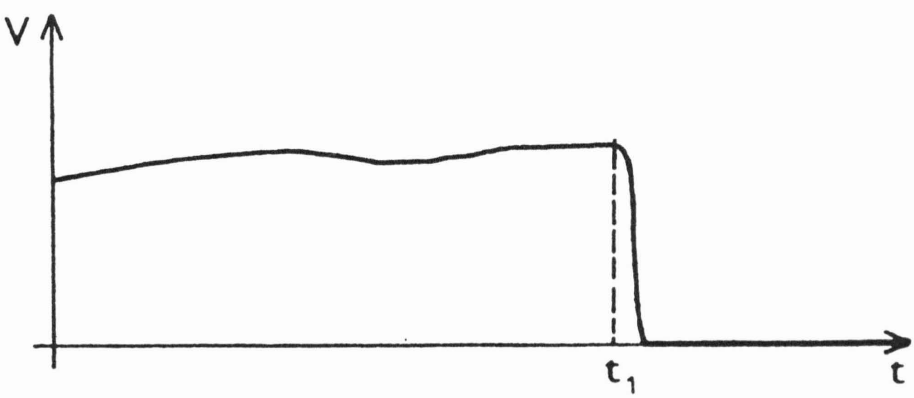
Obr. 1

U příkladů číslo 8 a 4 je nutné si uvědomit rozdíl mezi reálným dějem a jeho fyzikální idealizací. Nespojitost funkce z příkladu 4 zdůvodňovali studenti tímto grafem.



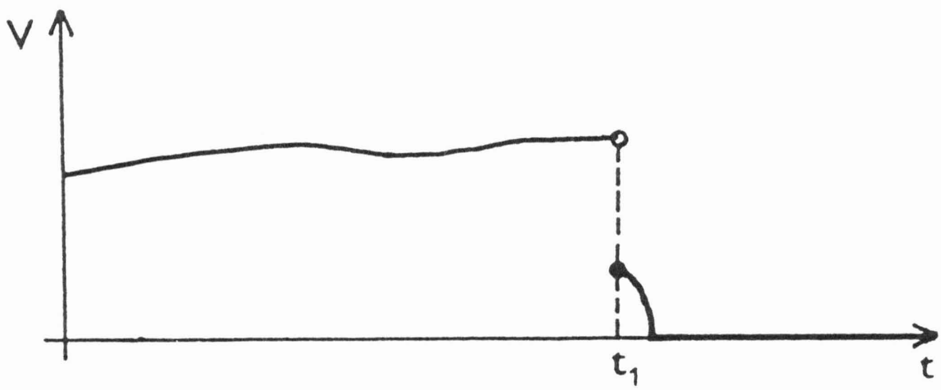
Obr. 2

Námitka proti tomu byla nasnadě: Měříme-li rychlost auta v v jeho těžišti, bude graf vzhledem k deformacím vozu vypadat takto:



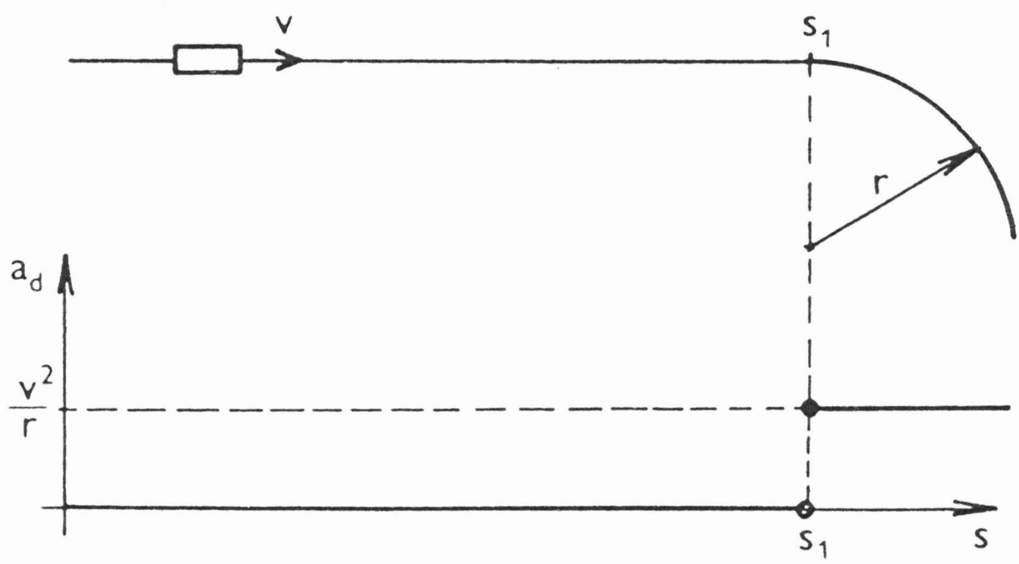
Obr. 3

Dokonalejší interpretaci popsaného děje může poskytnout fyzika, když hovoří o dokonale nepružném nárazu dvou hmotných bodů o hmotnostech m_1 a m_2. Pro naši situaci bude zřejmě $m_1 \ll m_2$. Graf uvažované funkce by pak mohl vypadat takto:



Obr. 4

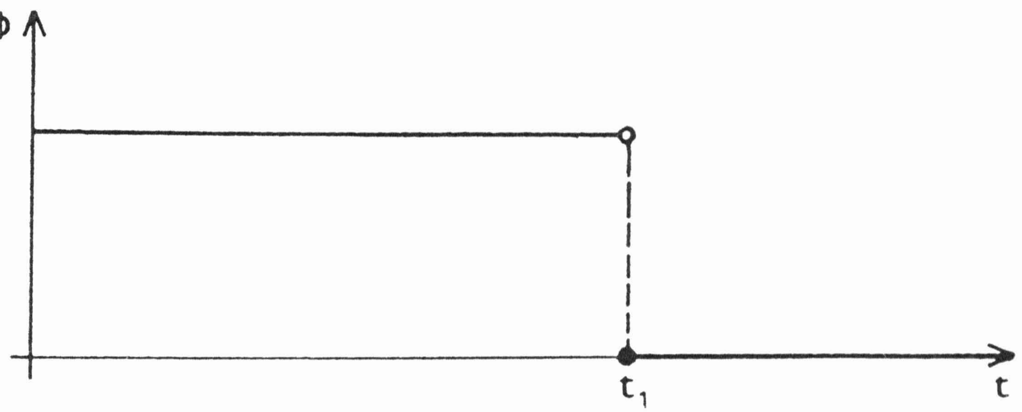
Principiálně stejná je situace u příkladu 8, kde studenti zdůvodňovali nespojitost udané funkce pomocí následujícího schématu a odpovídajícího grafu (pro jednoduchost je rychlost lokomotivy v uvažována jako konstantní).



Obr. 5

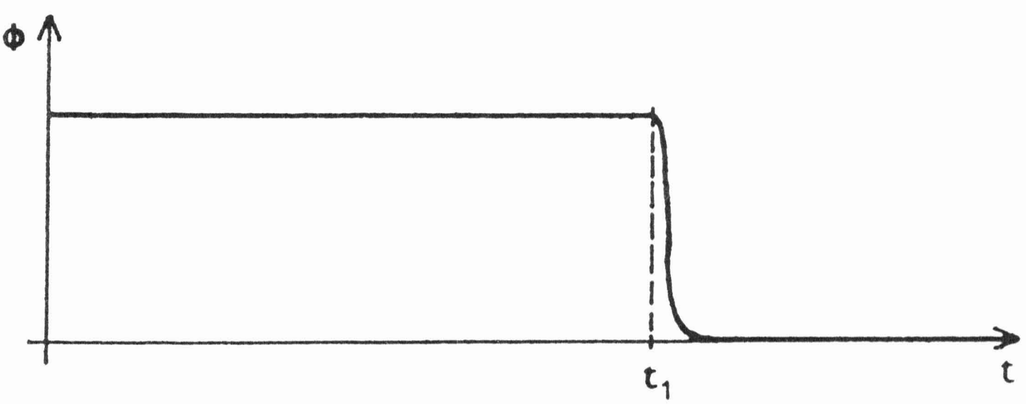
Obrázek grafu funkce odpovídá ale opět pohybu ideálního „bezrozměrného" hmotného bodu.

U příkladu číslo 10 hraje roli fyzikální podstata popisovaného děje. Studenti argumentovali obrázkem grafu, se kterým bude, uvažujeme-li stejnosměrný proud, více méně každý v první chvíli souhlasit:



Obr. 6

Uvědomíme-li si ale, že světelný tok záření od žárovky závisí na teplotě jejího vlákna a že vypnutím proudu vyvoláme vznik indukovaného napětí působícího proti změně, nakreslíme již graf jinak:

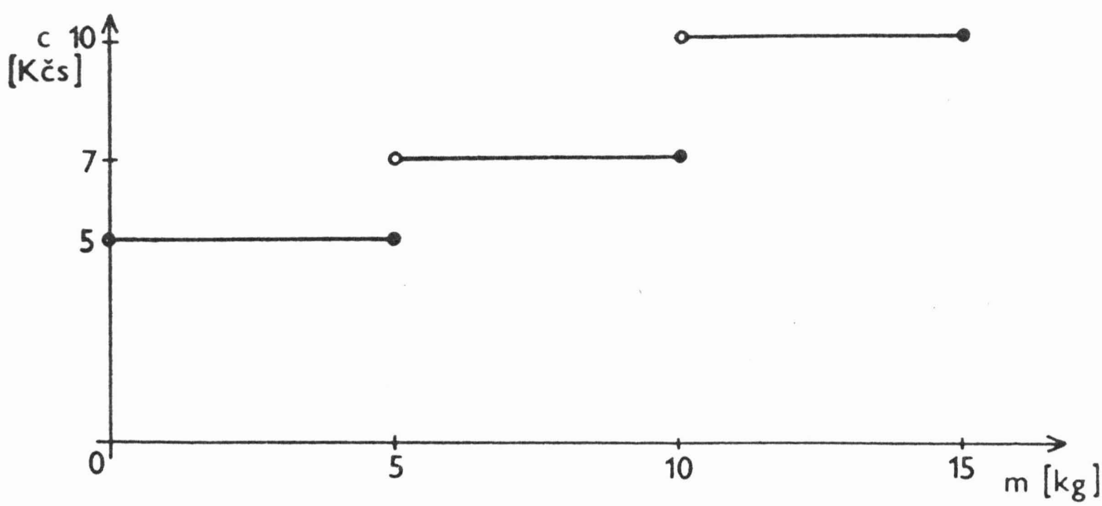


Obr. 7

U příkladů číslo 1, 2 a 5 se nedá s nespojitostí udaných funkcí nesouhlasit. Jedná se vždy o počet nějakých prvků (vlasy na hlavě, stromy, lidé v ČSFR) v závislosti na čase či velikosti území, kde se prvky vyskytují. Příklady tohoto typu byly nejčastější. Diskuse se spíše točila okolo problému, jak funkci jednoznačně zadat. Co to tedy znamená, že člověk X v ČSFR v okamžiku t_1 skutečně je (okamžik příchodu na svět (?) atd.), co lze pokládat za vlas (počet mm nad kořínkem), kdy řekneme, že strom S stojí v nějakém kruhu (těžiště průřezu půl metru nad zemí) a podobně.

Jako velice zajímavou a pro myšlení studentů přínosnou hodnotím diskusi, která se u příkladů tohoto typu vždy objevila a která začala spontánním dotazem studentů, zda musí taková funkce (například ta z příkladu číslo 5) „skočit" vždy jen o jedničku či zda může skočit i o víc. Při diskusi nad tímto problémem jsme tedy například řešili otázku, zda se mohou dva lidé v ČSFR narodit současně (a co to vlastně znamená (!)), zda mohou dva lidé opustit na hranicích naši republiku současně (a co to vlastně znamená (!)) a podobně. Dostali jsme se tedy k problému současnosti dvou událostí. Budeme-li interpretovat čas jako reálnou proměnnou a časový okamžik jako reálné číslo, dostaneme se až k problému rovnosti objektů a tedy i principu identity. Často jsem zde využíval Zichovu knížku [1], z níž jsem v této souvislosti citoval Leibnizovu formulaci principu identity i jeho Wittgensteinovu kritiku.

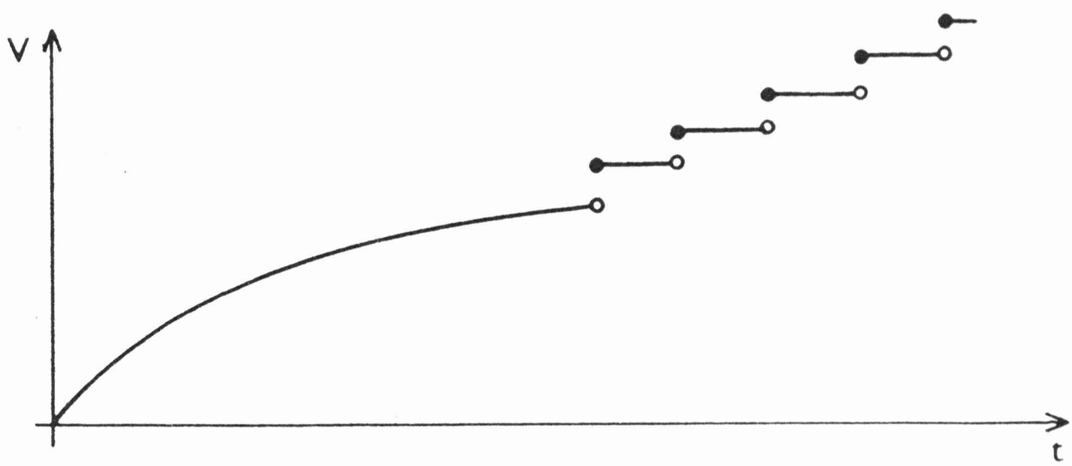
Na konec jsem si nechal **příklady číslo 3 a 7.** S nespojitostí funkce z příkladu 3 lze souhlasit; studenti tehdy udávali následující graf.



Obr. 8

Tento příklad se liší od ostatních (zejména těch fyzikálních) tím, že zde máme zcela jasno v určení funkční hodnoty v bodech nespojitosti (samozřejmě pouze teoreticky – na úrovni poštovního předpisu).

Reprezentantem zcela zvláštní skupiny závislostí byl příklad číslo 7, na němž je hezké to, že nespojitému ději, který popisuje (kapání), mohl předcházet děj spojitý (souvislý přítok vody do nádoby). Studenti kreslili tento graf:



Obr. 9

Autoři tohoto příkladu měli objemem V na mysli objem náplně nádoby bez ohledu na tvar této „náplně“ (nikoli tedy jen s rovnou hladinou).

Závěrem chci už pouze podotknout, že všechny tyto diskuse byly většinou velice spontánní, poutavé a i pro mne velmi poučné a vzrušující. Domnívám se, že jejich prezentace ve výuce může znamenat přínos pro zdokonalení funkčního myšlení studentů, propedeutiku limitního procesu a správné vnímání matematických a fyzikálních modelů.

LITERATURA

[1] Zich, O. V.:, *Úvod do filosofie matematiky*, JČMF, Praha, 1947.