Učitel matematiky

Emil Calda

Po delší době opět o Vennových diagramech

*Učitel matematiky*, Vol. 4 (1996), No. 4, 201–204

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151428

**Terms of use:**

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1996

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

# PO DELŠÍ DOBĚ
# OPĚT O VENNOVÝCH DIAGRAMECH

EMIL CALDA

Při nedávném pokusu zavést do knihovny jakýs takýs pořádek padla mi po delší době znovu do ruky kniha O. Zicha a A. Kolmana *Zajímavá logika*, kterou vydalo v roce 1965 nakladatelství Mladá fronta. Je to — jak praví podtitul — sbírka řešených příkladů s úvodem do výrokového a třídového kalkulu. V této sbírce je však celá řada úloh, k jejichž řešení výrokový ani třídový kalkul není zapotřebí a vystačí se jen se znalostí Vennových diagramů. Začal jsem proto u našich studentů učitelství pátrat po tom, zda na střední škole o Vennových diagramech něco slyšeli. Vzpomínám si totiž, že tyto diagramy se ve školské matematice objevily v souvislosti se snahami o její modernizaci, a tak mě zajímalo, jestli jim už také odzvonilo. Naštěstí se zdá, že ne úplně: řada studentů je zná a umí je použít v úlohách známého typu o počtech osob mluvících či nemluvících anglicky, německy, rusky a francouzsky; o jiných možnostech jejich užití však nemají ani tušení. A tak mě napadlo, že bychom v tomto článku mohli pár úloh ze zmíněné *Zajímavé logiky* pomocí Vennových diagramů vyřešit a připomenout si po létech znovu možnosti jejich využití.

Rád bych ještě podotkl, že si uvědomuji, že některé souhrny objektů, o nichž bude dále řeč, lze množinami nazvat jen s jistým sebezapřením; např. „množina všech logických osob“ je pojem značně mlhavý už proto, že není jasný význam slov „logická osoba“. Protože však jde vesměs o úlohy, v nichž se operuje s pojmy chápanými jen intuitivně, a nejde tedy o termíny matematické, je snad možné tyto nepřesnosti tolerovat.

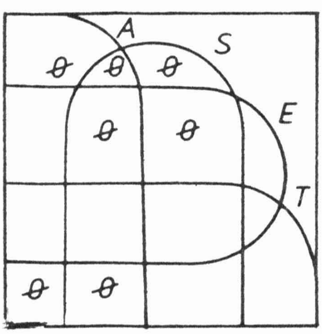
Začneme úlohou, o níž autoři knížky praví, že pochází od A. de Morgana, významného anglického logika 19. století; má se v ní rozhodnout, které z následujících tvrzení je správné:

(1) Všichni Angličané, kteří nešňupají, jsou Evropany, kteří se neoddávají požitku tabáku.

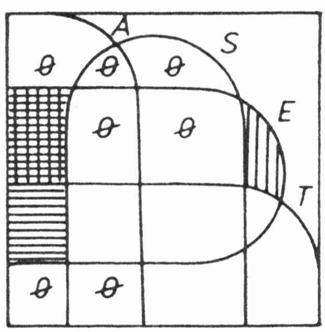
(2) Všichni Angličané, kteří se neoddávají požitku tabáku, jsou Evropany, kteří nešňupou.

Označíme-li $A$ množinu všech Angličanů, $S$ množinu všech šňupajících, $E$ množinu všech Evropanů, $T$ množinu všech osob oddávajících se požitku tabáku a doplňky těchto množin $A'$, $S'$, $E'$, $T'$, můžeme tvrzení (1) zapsat ve tvaru $(A \cap S') \subset (E \cap T')$ a tvrzení (2) ve tvaru $(A \cap T') \subset (E \cap S')$ .

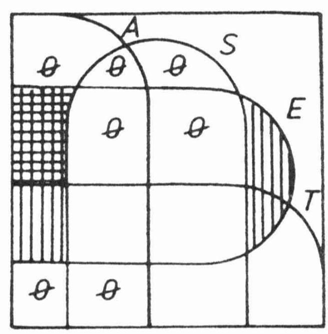
Ve Vennově diagramu pro tyto čtyři množiny pak znakem $\emptyset$ vyznačíme oblasti, které jsou obrazem množiny $A \cap E' = \emptyset$ a množiny $S \cap T' = \emptyset$ (viz obr. 1); vodorovným šrafováním znázorníme oblast odpovídající množině $A \cap S'$ a svislým šrafováním oblast odpovídající množině $E \cap T'$ (viz obr. 2).




Obr. 1




Obr. 2



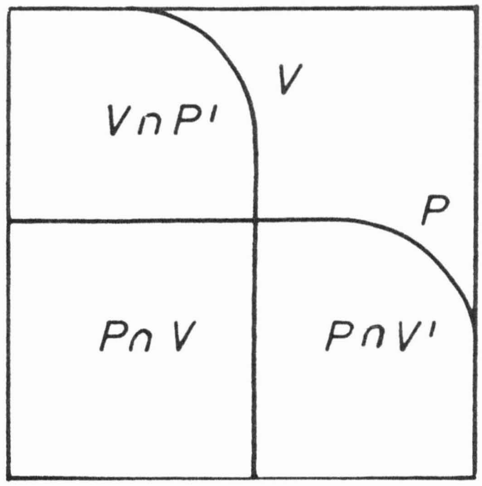

Obr. 3

Je ihned vidět, že množina $A \cap S'$ není podmnožinou množiny $E \cap T'$, takže tvrzení (1) neplatí. Znázorníme-li v diagramu na obr. 3 vodorovným šrafováním oblast odpovídající množině $A \cap T'$ a svislým šrafováním oblast odpovídající množině $E \cap S'$, je z diagramu zřejmé, že vztah $(A \cap T') \subset (E \cap S')$ platí. Tvrzení (2) je tedy správné.

Budeme-li tento příklad řešit se svými studenty, nezapomeneme rovněž pohovořit o škodlivosti „oddávání se požitku tabáku“ a vzpomeneme také blahých dob, kdy jedinou drogou byl tabák.

Druhá úloha nám klade za úkol zdůvodnit toto tvrzení:

Odečteme-li od počtu členů parlamentu počet všech poslanců, kteří nejsou vojáky, dostaneme týž výsledek, jako když od počtu všech vojáků odečteme počet těch vojáků, kteří nejsou členy parlamentu.




Obr. 4

Označíme-li $P$ (resp. $V$) množinu všech členů parlamentu (resp. všech vojáků) a $P'$ (resp. $V'$) její doplněk, vidíme z Vennova diagramu na obr. 4, že platí

$$P - (P \cap V') = P \cap V , \qquad V - (V \cap P') = P \cap V .$$

Odtud dostáváme

$$P - (P \cap V') = V - (V \cap P') ,$$

což znamená (za předpokladu, že množiny $P$, $V$ jsou konečné), že obě tyto množiny mají stejný počet prvků.

Závěrečná úloha, kterou vyřešíme, je autory řazena mezi žertovné a pochází od L. Carrolla, známého autora *Alenky v říši divů.*

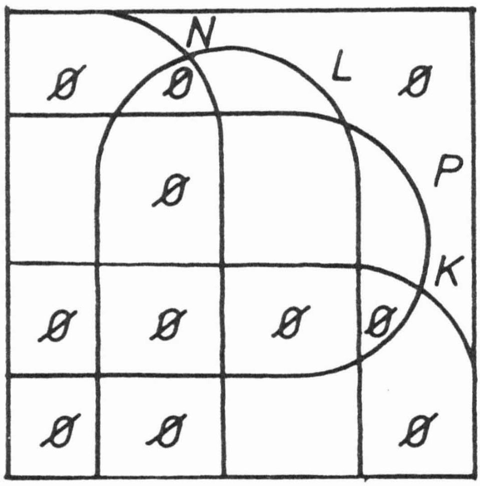
Jsou dána tvrzení:

(1) Nemluvňata jsou nelogická.
(2) Nepohrdáme nikým, kdo dovede ovládnout krokodýla.
(3) Pohrdáme nelogickými osobami.

Máme rozhodnout, zda z těchto tvrzení plyne závěr:

Nemluvňata nedovedou ovládnout krokodýla.

Pomineme opět, že pojmy, o nichž se zde hovoří, jsou poněkud mlhavé a že jednotlivé výroky nejsou kvantifikovány, a označíme $N$ množinu všech nemluvňat, $L$ množinu všech logických osob, $P$ množinu všech osob, kterými pohrdáme, $K$ množinu všech osob, které dovedou ovládnout krokodýla; jejich doplňky jsou $N'$, $L'$, $P'$, $K'$.




Obr. 5

Pomocí těchto množin zapíšeme jednotlivá tvrzení:

$$(1)\ N \cap L = \emptyset\,, \qquad (2)\ K \subset P'\,, \qquad (3)\ L' \subset P\,.$$

Přeneseme je do Vennova diagramu (viz obr. 5) a z něho snadno nahlédneme, že jediná nemluvňata, která existují, jsou ta, která náležejí množině $N \cap L' \cap P \cap K'$. Znamená to, že závěr „Nemluvňata nedovedou ovládnout krokodýla“ vskutku z daných tvrzení vyplývá.

Snad je jasné, že v uvedených příkladech nešlo ani tak o Evropany oddávající se požitku tabáku, o členy parlamentu a nelogická nemluvňata, ale spíše o to, abychom si připomenuli, že znalost Vennových diagramů může být někdy užitečná, a to nejen studentům.