Matematická olympiáda

Učitel matematiky, Vol. 5 (1997), No. 4, 236–246

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151382

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Ve dnech 20. – 23. 4. 1997 se na Gymnáziu v Jevíčku uskutečnilo celostátní kolo 46. ročníku Matematické olympiády kategorie A. Zveřejňujeme zadání a řešení úloh, seznam vítězů a úspěšných řešitelů. Současně zveřejňujeme úlohy prvního kola příštího ročníku Matematické olympiády, kategorií A, B, C, pro školní rok 1997-1998.

Úlohy celostátního kola 46. ročníku matematické olympiády

Jevíčko, 20.–23. dubna 1997

1. Označme strany a úhly trojúhelníku ABC obvyklým způsobem. Dokažte, že z rovnosti $\alpha = 3\beta$ plyne $(a^2 - b^2)(a - b) = bc^2$. Rozhodněte, jestli také obráceně z rovnosti $(a^2 - b^2)(a - b) = bc^2$ plyne $\alpha = 3\beta$. *(J. Šimša)*

Řešení. Je-li $\alpha = 3\beta$, je $\gamma = \pi - 4\beta$, takže podle sinové věty platí

$$a = K \sin 3\beta, \quad b = K \sin \beta, \quad c = K \sin 4\beta, \tag{1}$$

kde K je kladné číslo. Proto v první části řešení stačí ověřit identitu

$$(\sin^2 3\beta - \sin^2 \beta)(\sin 3\beta - \sin \beta) = \sin \beta \sin^2 4\beta. \tag{2}$$

Podle známých goniometrických vzorců platí

$$(\sin 3\beta - \sin \beta)^2 = (2 \cos 2\beta \sin \beta)^2 = 4 \cos^2 2\beta \sin^2 \beta,$$
$$\sin 3\beta + \sin \beta = 2 \sin 2\beta \cos \beta$$

a odtud pro levou stranu rovnosti (2) plyne

$$(\sin^2 3\beta - \sin^2 \beta)(\sin 3\beta - \sin \beta) =$$
$$= (4 \cos^2 2\beta \sin^2 \beta) \cdot (2 \sin 2\beta \cos \beta) =$$
$$= (2 \sin \beta \cos \beta) \cdot (2 \sin 2\beta \cos 2\beta) \cdot 2 \sin \beta \cos 2\beta =$$
$$= \sin 2\beta \cdot \sin 4\beta \cdot 2 \sin \beta \cos 2\beta = \sin \beta \sin^2 4\beta.$$

Tak jsme dokázali, že (2) platí pro každé β.

Vysvětlíme nyní, proč opačná implikace neplatí. Funkce sinus má periodu 360°, takže strany trojúhelníku ABC jsou tvaru (1) i v případě, kdy platí $\alpha = 3\beta - 360°$ (a $\gamma = 540° - 4\beta$), např. pokud $\alpha = 15°$, $\beta = 125°$ a $\gamma = 40°$. Pro trojúhelník s takovými vnitřními úhly platí (jak jsme dokázali) rovnost $(a^2 - b^2)(a - b) = bc^2$, přestože $\alpha \neq 3\beta$.

2. Každá strana i úhlopříčka pravidelného n-úhelníku, kde $n \geqq 3$ je liché, je obarvena buď modrou, nebo červenou barvou. Je povoleno přebarvovat tyto úsečky pouze tak, že v každém kroku vybereme jeden vrchol a změníme barvy všech úseček, které z něj vycházejí (z modré na červenou a naopak). Dokažte, že každé výchozí obarvení lze tímto postupem změnit tak, aby pak z každého vrcholu vycházel sudý počet modrých úseček. Dokažte rovněž, že takové výsledné obarvení je výchozím obarvením jednoznačně určeno. (*J. Kratochvíl*)

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že výsledek přebarvování nezávisí na pořadí vrcholů, podle kterých přebarvujeme, ale pouze na tom, kolikrát podle kterého vrcholu přebarvujeme. Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vrcholy daného n-úhelníku, označme p_i počet provedených přebarvení vzhledem k vrcholu A_i a $p = \sum_{i=1}^{n} p_i$ jejich celkový součet. Úsečka A_iA_j změní barvu, právě když provedeme přebarvení vzhledem k jednomu z vrcholů A_i nebo A_j. Ve výsledném přebarvení tedy úsečka A_iA_j změní barvu, právě když $p_i + p_j \equiv 1 \pmod 2$. Počet modrých úseček vycházejících z vrcholu A_i má ve výsledném obarvení stejnou paritu jako v počátečním obarvení, právě když

$$\sum_{j\neq i}(p_i + p_j) = (n-1)p_i + \sum_{j\neq i} p_j \equiv p - p_i \equiv 0 \pmod 2$$

(využíváme skutečnost, že n je liché).

Ukážeme, že každé výchozí obarvení lze přebarvit tak, aby z každého vrcholu vycházel sudý počet modrých úseček: Budeme postupně přebarvovat vzhledem k těm vrcholům, z nichž v původním obarvení vycházel lichý počet modrých úseček (bude tedy $p_i = 1$, pokud v původním obarvení vycházel z vrcholu A_i lichý počet modrých úseček, $p_i = 0$ v opačném případě).

Označíme-li a_i počet modrých úseček vycházejících z vrcholu A_i, je $\sum_{i=1}^{n} a_i$ rovno dvojnásobku celkového počtu modrých úseček, a proto je lichých a_i sudý počet. Pro právě popsané přebarvování je tedy $p_i = 1$ pro sudý počet vrcholů A_i a $p = \sum_{i=1}^{n} p_i$ je sudé. Pro vrchol A_i, z něhož v původním obarvení vycházel sudý počet modrých úseček, je $p_i = 0$, takže parita počtu modrých úseček z něj vycházejících se po přebarvení nezmění, a podobně pro vrchol A_i, z něhož v původním obarvení vycházel lichý počet modrých úseček, je $p_i = 1$, takže $p - p_i \equiv 1 \pmod 2$, tj. lichý počet modrých úseček z něj vycházejících se po přebarvení změní na sudý.

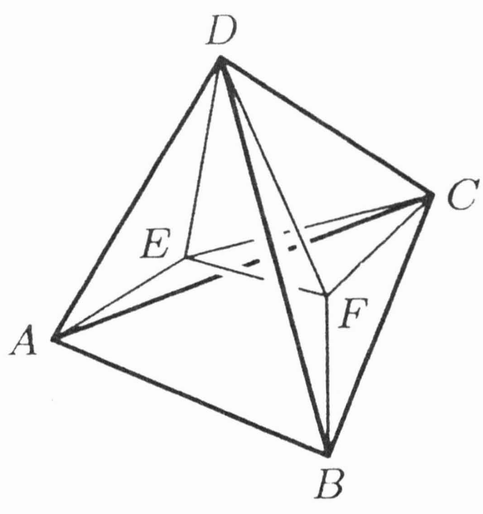
Kdyby se některé výchozí obarvení dalo přebarvit na dvě různá obarvení, v nichž by z každého vrcholu vycházel sudý počet modrých úseček, bylo by také možno jedno z těchto „sudých" obarvení přebarvit na druhé. Ukážeme, že to nejde. Předpokládejme tedy, že máme obarvení φ, v němž z každého vrcholu vychází sudý počet modrých úseček. Předpokládejme dále, že po přebarvení, při němž vůči vrcholu A_i přebarvujeme p_i-krát ($i = 1, 2, \ldots, n$), dostaneme jiné obarvení σ, v němž opět z každého vrcholu vychází sudý počet modrých úseček. Je tedy $p - p_i \equiv 0 \pmod 2$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, a tudíž $p_i \equiv p_j \pmod 2$, neboli $p_i + p_j \equiv 0 \pmod 2$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom ale žádná úsečka po přebarvení nezměnila barvu. Obarvení φ a σ jsou tedy totožná, to znamená, že ke každému obarvení existuje jediné, které z něj lze dostat popsaným způsobem a v němž z každého vrcholu vychází sudý počet modrých úseček.

3. Čtyřstěn $ABCD$ je beze zbytku rozdělen na pět konvexních mnohostěnů tak, že žádná jeho stěna není rozdělena a průnik každých dvou z pěti vzniklých mnohostěnů je buď společný vrchol, nebo společná hrana, nebo společná stěna. Jaký je nejmenší možný součet počtů stěn těchto pěti mnohostěnů? (*P. Hliněný*)

Řešení. Jelikož každý mnohostěn má alespoň čtyři stěny, hledaný nejmenší součet musí být alespoň $5 \cdot 4 = 20$. Pokud by byl právě 20, museli bychom daný čtyřstěn rozdělit na 5 čtyřstěnů (za podmínek zadání). Ukážeme sporem, že to není možné. (V důkaze je možno se odvolat na řešení úlohy letošního domácího kola, je však nutno dát pozor na korektnost.)

Připusťme tedy, že čtyřstěn $ABCD$ je rozdělen za podmínek zadání na 5 čtyřstěnů S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Stěny daného čtyřstěnu dělit nelze, proto každá z nich je zároveň stěnou (právě) jednoho z čtyřstěnů $S_1, \dots, S_5$. Podle Dirichletova principu pak některý z nich, řekněme S_1, nemá s $ABCD$ žádnou stěnu společnou. To však znamená, že S_1 obsahuje nejvýše dva z bodů A, B, C, D — předpokládejme, že S_1 *neobsahuje* vrcholy C, D.

Protože daný čtyřstěn je rozdělen beze zbytku, čtyřstěn S_1 musí mít každou svou stěnu společnou s některým ze zbylých čtyřstěnů S_2, S_3, S_4, S_5 (s žádným samozřejmě nemůže mít společné stěny dvě). Je-li tedy $S_2 = BCDX$ čtyřstěn obsahující stěnu BCD daného čtyřstěnu, musí S_1 bez ohledu na to, kterou stěnu má s S_2 společnou, obsahovat vrchol C nebo D, a to je spor s předpokladem.



Obr. 1

Dalším důležitým poznatkem je, že součet počtů stěn získaných mnohostěnů je sudý. Plyne to z toho, že v součtu každou ze čtyř stěn čtyřstěnu $ABCD$ započítáme právě jednou (nelze ji dělit) a každou z dalších stěn právě dvakrát (za každý ze dvou mnohostěnů, kterým je společná). Proto tento součet musí být tvaru $4 + 2k = 2(k + 2)$, takže se nerovná 21.

Nejmenší možnou hodnotou zkoumaného součtu je 22, příslušné rozdělení (na tři čtyřstěny $ACDE$, $BCDF$ a $EFCD$ a dva čtyřboké jehlany $ABFED$ a $ABFEC$) vidíte na obrázku.

4. Dokažte, že existuje rostoucí posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel taková, že pro každé přirozené číslo $k \geqq 2$ posloupnost $(k + a_n)_{n=1}^{\infty}$ obsahuje jen konečně mnoho prvočísel.

Rozhodněte, zda existuje rostoucí posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel taková, že pro každé celé číslo $k \geqq 0$ posloupnost $(k + a_n)_{n=1}^{\infty}$ obsahuje jen konečně mnoho prvočísel. (*R. Kollár*)

Řešení. Stačí zvolit posloupnost $a_n = (n!)^3$, pro $k \geq 2$ stejně jako pro $k = 0$ tvrzení o posloupnosti $(k + a_n)$ zřejmě platí, pro $k = 1$ stačí využít vztah $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

5. Pro každé přirozené číslo $n \geqq 2$ určete největší hodnotu výrazu

$$V_n = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + \cdots + \sin x_{n-1} \cos x_n + \sin x_n \cos x_1,$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou libovolná reálná čísla.

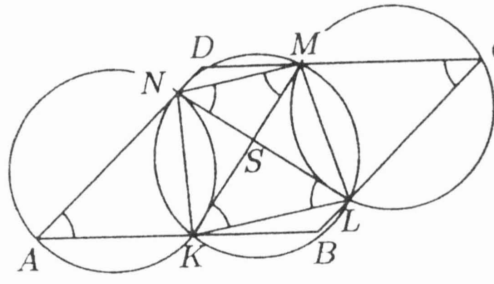
Řešení. Odhadneme-li shora každý sčítanec součtu V_n podle nerovnosti $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, která zřejmě platí pro libovolná reálná čísla a, b, dostaneme odhad

$$V_n \leqq \frac{\sin^2 x_1 + \cos^2 x_2}{2} + \frac{\sin^2 x_2 + \cos^2 x_3}{2} + \cdots + \frac{\sin^2 x_n + \cos^2 x_1}{2} = \frac{n}{2}.$$

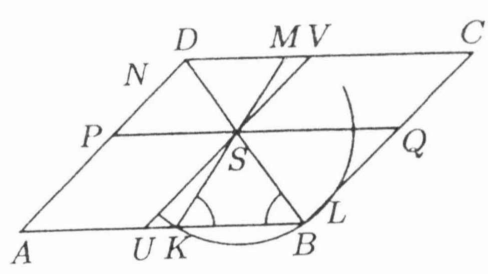
Zkoumaný výraz nabývá největší hodnoty $\frac{1}{2}n$, neboť jak snadno nahlédneme, pro hodnoty $x_1 = x_2 = \cdots = \frac{1}{4}\pi$ vyjde $V_n = \frac{1}{2}n$.

6. Je dán rovnoběžník $ABCD$ takový, že ABD je ostroúhlý trojúhelník a $|\sphericalangle BAD| = 45°$. Uvnitř stran rovnoběžníku lze různými způsoby vybrat body $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$ a $N \in DA$ tak, aby $KLMN$ byl tětivový čtyřúhelník, jehož opsaná kružnice má stejný poloměr jako obě kružnice opsané trojúhelníkům ANK a CLM. Najděte množinu průsečíků úhlopříček všech takových čtyřúhelníků $KLMN$. (*J. Šimša*)

Řešení. Předpokládejme, že body K, L, M, N vyhovují předpokladům úlohy (viz obrázek). Z vlastností obvodových úhlů ve shodných kružnicích opsaných trojúhelníkům AKN a CLM a čtyřúhelníku $KLMN$ plyne, že každý z úhlů KLN, KMN, LKM a LNM má stejnou velikost jako shodné úhly rovnoběžníku při vrcholech A a C, tj. $45°$. Proto jsou trojúhelníky SKL a SMN (S je průsečík úhlopříček KM a LN) rovnoramenné, pravoúhlé a stejnolehlé podle středu S. Ve stejnolehlosti, ve které bodu K odpovídá bod M a bodu L bod N, se přímka AB zobrazí na přímku CD, neboť $K \in AB$, $M \in CD$ a $AB \parallel CD$; stejně tak se přímka BC zobrazí na přímku DA, takže průnik $AB \cap BC$ se zobrazí na průnik $CD \cap DA$, neboli bod B přejde do bodu D. To znamená, že bod S je vnitřním bodem úsečky BD. (Dodejme, že každý uvažovaný čtyřúhelník $KLMN$ je rovnoramenný lichoběžník s navzájem kolmými úhlopříčkami.)



Obr. 2



Obr. 3

Zvolme nyní naopak libovolný vnitřní bod S úsečky BD a ukažme, že je průsečíkem úhlopříček některého z uvažovaných čtyřúhelníků $KLMN$. Proložme zvoleným bodem S „příčky" $PQ \parallel AB$ a $UV \parallel BC$ jako na obrázku. Shodné trojúhelníky UBS a QSB jsou podobné trojúhelníku ABD, takže to jsou ostroúhlé trojúhelníky s nejmenšími vnitřními úhly $45°$ při vrcholech U a Q. Proto je

$|SB| < |UB|$ a $|SB| < |BQ|$, takže kružnice $k(S, |SB|)$ protíná úsečku BU ve vnitřním bodě, který označíme K, a úsečku BQ ve vnitřním bodě, který označíme L. Podle věty o obvodovém a středovém úhlu platí

$$|\sphericalangle KSL| = 360° - 2 \cdot |\sphericalangle KBL| = 360° - 2 \cdot 135° = 90°,$$

takže shodné úhly SKL a SLK mají velikost 45°. Vnitřní body M a N úseček DV a DP určíme jako obrazy bodů K a L ve stejnolehlosti se středem S, ve které $B \mapsto D$ (a $Q \mapsto P$ a $U \mapsto V$). Z vlastností obvodových úhlů plyne, že takto sestrojený čtyřúhelník $KLMN$ má potřebné vlastnosti, neboť každý z úhlů vyznačených na obrázku 2 má podle konstrukce skutečně velikost 45°.

Odpověď: Hledaná množina je úsečka BD bez krajních bodů.

ZADÁNÍ PRO ŠKOLNÍ ROK 1997-98

Kategorie A

A-I-1. Číslo $1997^{2^n} - 1$ je dělitelné číslem 2^{n+2} pro každé přirozené číslo n. Dokažte. (*P. Kaňovský*)

A-I-2. Je dán libovolný trojúhelník ABC. Osa vnitřního úhlu BAC protne stranu BC v bodě, který označíme U. Dokažte rovnost $|AU|^2 = |AB| \cdot |AC| - |BU| \cdot |CU|$. Může tato rovnost platit, nahradíme-li bod U jiným vnitřním bodem strany BC? (*J. Šimša*)

A-I-3. V jistém jazyce jsou pouze dvě písmena A a B. Pro slova tohoto jazyka platí:

1) Jediné slovo délky 1 je A.

2) Libovolná skupina písmen $X_1X_2X_3\dots X_nX_{n+1}$, kde $X_i = A$ nebo $X_i = B$ pro každý index i, tvoří slovo délky $n+1$, právě když obsahuje aspoň jedno písmeno A a přitom není tvaru $X_1X_2\dots X_nA$, kde $X_1X_2\dots X_n$ je slovo délky n.

Najděte

a) všechna slova délky 4,

b) vzorec pro počet p_n všech slov délky n. (*J. Zhouf*)

A-I-4. Daný čtyřstěn $ABCD$ má shodné protější hrany: $|AB| = |CD| = p$, $|AC| = |BD| = q$ a $|AD| = |BC| = r$. Označme K střed hrany AB a L střed hrany CD.

a) Dokažte, že přímka KL je kolmá k oběma hranám AB a CD.

b) Ukažte, že nejmenší možná hodnota součtu $|AE|^2 + |EF|^2 + |FC|^2$, kde E a F jsou libovolné body příčky KL, je rovna $\dfrac{2p^2+q^2+r^2}{6}$. (*P. Leischner*)

A-I-5. Kuličky sedmi různých barev jsou rozděleny do sedmi pytlíků tak, že v každých dvou pytlících najdeme po kuličce téže barvy. Dokažte:

a) Kuličky některé barvy jsou zastoupeny v aspoň třech pytlících.

b) Pokud byly rozděleny od každé barvy jen 3 kuličky, pak v žádném pytlíku nenajdeme dvě kuličky téže barvy.

Rozhodněte rovněž, zda takové rozdělení kuliček je za podmínky z tvrzení b) vůbec možné. (*P. Hliněný*)

A-I-6. Je dán pravoúhlý lichoběžník se základnami a, c $(a > c)$ a delším ramenem b. Sestrojte přímku, která daný lichoběžník rozdělí na dva navzájem podobné čtyřúhelníky. Proveďte diskusi o počtu řešení vzhledem k délkám a, b, c. (*J. Švrček*)

Kategorie B

B-I-1. Magický čtverec je čtvercová tabulka přirozených čísel, v níž je součet všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách stejný. Najděte všechny magické čtverce 3×3, pro které je součin čtyř čísel v rohových polích roven 3 465.
(*P. Černek*)

B-I-2. V rovině je dána přímka q a bod A, který na ní neleží. Určete v této rovině množinu středů S všech čtverců $ABCD$ takových, že bod B leží na přímce q. (*J. Molnár*)

B-I-3. Dokažte, že pro každou trojici x, y, z kladných čísel platí nerovnost

$$\sqrt{xyz}\left(\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\right) \leqq \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\,.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost. (*J. Švrček*)

B-I-4. Je dán čtyřstěn, v němž každé dvě protilehlé hrany jsou shodné. Uvnitř čtyřstěnu existuje bod M, který je stejně vzdálen od všech jeho stěn. Dokažte, že každá výška daného čtyřstěnu je rovna čtyřnásobku vzdálenosti bodu M od jeho stěn.
(*P. Leischner*)

B-I-5. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= x^2-z^2+p \\ y+2z+3x &= y^2-x^2+p \\ z+2x+3y &= z^2-y^2+p \end{aligned}\quad ,$$

kde p je reálný parametr. Proveďte diskusi o počtu řešení vzhledem k parametru p. (*J. Šimša*)

B-I-6. Jaký největší obsah může mít konvexní čtyřúhelník, v němž obě úsečky spojující středy protilehlých stran jsou shodné a mají danou délku d? (*J. Zhouf*)

Kategorie C

C-I-1. Pro libovolné trojciferné číslo určíme jeho zbytky při dělení čísly 2, 3, 4, ..., 10 a získaných devět čísel pak sečteme. Zjistěte nejmenší možnou hodnotu takového součtu. (*J. Šimša*)

C-I-2. Najděte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí $a + v_a = b + v_b$ při obvyklém označení stran a výšek trojúhelníku. (*P. Černek*)

C-I-3. Sto dětí se rozdělilo do tří družstev A, B a C. Poté, co jedno dítě přestoupilo z A do B, jedno z B do C a jedno z C do A, se průměrná hmotnost dětí zvýšila v družstvu A o 120 g, v družstvu B o 130 g, zatímco v družstvu C se snížila o 240 g. Kolik dětí bylo v jednotlivých družstvech? (*P. Černek*)

C-I-4. Uvnitř daného pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s přeponou AB zvolíme libovolně bod X. Sestrojíme přímky p a q, které procházejí bodem X tak, že $p \parallel AB$ a $q \perp AB$. Trojúhelník ABC vytíná na přímce p úsečku KL, na přímce q úsečku MN. Určete všechny body X, pro které platí $|KL| = 2 \cdot |MN|$. (*J. Šimša*)

C-I-5. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 7[x] + 2y &= 117{,}4 \\ 5x + 2[y] &= 91{,}9 \end{aligned} ,$$

kde $[a]$ je tzv. celá část reálného čísla a, tj. celé číslo, pro které platí $[a] \leqq a < [a] + 1$. Například $[3{,}7] = 3$ a $[-3{,}7] = -4$. (*P. Černek*)

C-I-6. Sestrojte deltoid se stranami 12 cm a 13 cm, který je svými úhlopříčkami rozdělen na čtyři trojúhelníky, jež jsou čtyřmi stěnami nějakého čtyřstěnu. Zhotovte papírový model tohoto čtyřstěnu. (*S. Bednářová, P. Černek*)

Výsledková listina celostátního kola 46. ročníku MO kategorie A

Vítězové:

1.	Petr Zima	3	G Kladno	4 7 7 7 7 6	38
2.	Libor Barto	3	G Hellichova, Praha	5 7 5 7 5 4	33
3.-4.	Jan Vybíral	4	GMK Bílovec	4 7 2 7 7 5	32
	Tomáš Brauner	4	G Mor. Krumlov	7 5 7 0 7 6	32
5.-7.	Pavel Podbrdský	3	G kpt. Jaroše, Brno	3 7 5 7 7 1	30
	Martin Viščor	2	G kpt. Jaroše, Brno	4 2 6 7 7 4	30
	Jan Spěvák	4	G Hellichova, Praha	5 4 4 7 6 4	30
8.	Jan Šťovíček	3	G Kladno	4 6 2 7 6 4	29

Úspěšní řešitelé:

9.	Tomáš Hanžl	3	G kpt. Jaroše, Brno	5 4 2 7 4 4	26
10.-13.	Radek Pelánek	3	G kpt. Jaroše, Brno	4 4 4 7 5 1	25
	Jan Štola	4	G Zborovská, Praha	4 3 6 7 5 0	25
	Petr Šimeček	3	G kpt. Jaroše, Brno	4 5 7 7 1 1	25
	Lukáš Vokřínek	2	G kpt. Jaroše, Brno	4 7 6 - 7 1	25
14.-15.	Jan Březina	4	GFXŠ Liberec	3 6 1 7 5 2	24
	Jana Flašková	4	Svob. cheb. š., Cheb	5 0 7 4 6 2	24
16.-17.	Aleš Benda	4	GMK Bílovec	4 4 5 4 4 2	23
	Roman Rožník	3	G kpt. Jaroše, Brno	- 7 6 7 1 2	23
18.-20.	Eva Burešová	2	G kpt. Jaroše, Brno	4 6 7 4 1 0	22
	Libor Inovecký	3	G Zborovská, Praha	1 7 - 7 7 0	22
	Jiří Houška	VII	G Mik. nám., Plzeň	5 4 5 4 1 3	22
21.-23.	Oldřich Stražovský	4	G kpt. Jaroše, Brno	7 5 0 7 0 2	21
	Aleš Návrat	2	G kpt. Jaroše, Brno	5 4 1 4 6 1	21
	Filip Matějka	3	G Zborovská, Praha	4 4 1 4 7 1	21