Emil Calda

Přihrádkový princip (tradičně i netradičně)

Učitel matematiky, Vol. 5 (1997), No. 4, 220–223

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151380

PŘIHRÁDKOVÝ PRINCIP

(TRADIČNĚ I NETRADIČNĚ)

EMIL CALDA

Ukážeme si nejprve několik jednoduchých úloh založených na přihrádkovém principu, což je — jak známo — toto tvrzení:

Rozmístíme-li $n+1$ předmětů do n přihrádek, pak aspoň v jedné přihrádce jsou aspoň dva předměty.

Obecnější formulace tohoto principu říká:

Rozmístíme-li $kn + 1$ předmětů do n přihrádek, pak aspoň v jedné přihrádce je aspoň $k + 1$ předmětů.

Připomeňme si ještě, že přihrádkový princip bývá také nazýván principem Dirichletovým podle německého matematika P. G. Dirichleta (1805–1859), který ho jako první explicitně formuloval. V anglické literatuře je označován také jako holubníkový (*pigeonhole principle*).

1. Pokladní v samoobsluze si všimla, že každý z padesáti zákazníků, kteří po ránu prošli pokladnou, nakoupil — kromě jiného — nejvýše šest rohlíků. Usoudila z toho, že aspoň osm zákazníků si koupilo stejný počet rohlíků. Má pravdu?

Paní pokladní zřejmě vystudovala MFF UK v Praze,[1] neboť má nejen postřeh, ale i pravdu. Stačí si představit, že jednotliví zákazníci jsou rozmístěni do sedmi přihrádek podle toho, zda si koupili $0, 1, 2, 3, 4, 5$ nebo 6 rohlíků. Počet zákazníků je tedy $50 = 7 \cdot 7 + 1$, takže podle přihrádkového principu je jich aspoň v jedné z těchto sedmi přihrádek aspoň $7 + 1 = 8$.

2. Pan docent[2] má v zásuvce svého psacího stolu schováno 60 kuliček: 15 červených, 15 modrých, 15 žlutých; o zbývajících patnácti víme jen to, že aspoň jedna z nich je zelená a aspoň jedna

---

[1] Učil ji autor tohoto článku. (pozn. redakce)

[2] Jde o autora tohoto článku. (pozn. redakce)

černá. Jaký nejmenší počet kuliček musí pan docent ze zásuvky vytáhnout, aby měl jistotu, že mezi nimi bude deset kuliček téže barvy?

Představme si, že kuličky postupně ze zásuvky vytahujeme a předáváme je — aniž se na ně díváme — svému asistentovi, který je rozmisťuje do čtyř přihrádek: pro kuličky červené, pro modré, pro žluté a pro zelené nebo černé. Protože víme jen to, že mezi posledními patnácti kuličkami je aspoň jedna zelená a aspoň jedna černá, nemáme zaručeno, že po vytažení všech těchto kuliček bude mezi nimi deset téže barvy. K tomu, aby aspoň v jedné ze zbývajících třech přihrádek bylo aspoň deset kuliček, je nutné do nich rozmístit aspoň $9 \cdot 3 + 1 = 28$ kuliček. Nejmenší počet kuliček, které pan docent musí ze zásuvky vytáhnout, aby měl zaručeno, že je mezi nimi deset kuliček téže barvy, je $28 + 15$, tj. 43.

3. V prostoru je libovolně zvoleno devět různých bodů, jejichž souřadnice jsou celá čísla. Dokažte, že platí: Spojíme-li každé dva úsečkou, pak uvnitř aspoň jedné z nich leží bod s celočíselnými souřadnicemi. (V článku [1] je vyřešena rovinná varianta této úlohy.)

Pro trojice celočíselných souřadnic každého bodu nastává jediná z těchto osmi možností: (s,s,s), (s,s,l), (s,l,s), (l,s,s), (s,l,l), (l,s,l), (l,l,s), (l,l,l), kde s, resp. l značí sudé, resp. liché číslo. Rozmístíme-li dané body do osmi přihrádek podle toho, která z uvedených možností pro ně nastává, pak podle přihrádkového principu jsou aspoň v jedné přihrádce aspoň dva body. Označíme-li je $A(a,b,c)$, $B(d,e,f)$, pak čísla $a+d$, $b+e$, $c+f$ jsou sudá, neboť oba sčítanci v každém součtu mají touž paritu. To však znamená, že bod $(a+d, b+e, c+f)$ má celočíselné souřadnice a leží uvnitř úsečky AB, neboť je jejím středem.

4. Ukažte, že v libovolné skupině aspoň šesti osob jsou vždy aspoň tři, které si navzájem tykají, nebo aspoň tři, které si navzájem netykají (tj. navzájem si vykají nebo jedna druhé vyká a druhá první tyká).

Předpokládejme, že máme skupinu šesti osob a že každé dvě, které si tykají, spojíme červeným provázkem, a každé dvě, které si navzájem netykají, spojíme provázkem modrým. Vezmeme-li nyní libovolnou osobu A z těchto šesti, je zřejmé, že z pěti provázků, které od ní vedou ke zbývajícím pěti osobám, jsou aspoň tři téže barvy. Předpokládejme, že jsou červené a že vedou k osobám X, Y, Z. Je-li nyní nějaká strana trojúhelníku XYZ červená, existují tři osoby spojené červeným provázkem, tj. tři osoby, které si navzájem tykají. Není-li žádná strana trojúhelníku XYZ červená, jsou všechny tři osoby X, Y, Z spojeny modrým provázkem, takže si tyto tři osoby navzájem netykají. Mezi šesti osobami — a tím spíše mezi větším počtem osob — existují tedy aspoň tři, které si navzájem tykají nebo navzájem netykají. Čtenář se může přesvědčit o tom, že v případě pěti osob takové tři osoby existovat nemusí.

Přejděme nyní od příkladů k životní realitě. Zatímco v matematice známe pouze jediný přihrádkový princip, v praktickém životě je těchto principů celá řada. O některých z nich jsem poprvé informoval pedagogickou veřejnost dne 21. února 1997 v 16 hodin 17 minut na pardubické konferenci učitelů matematiky čtyřletých gymnázií, kde byli přítomní seznámeni s přihrádkovými principy I, II a III. Zbývajících sedm přihrádkových principů jsem až dosud držel v tajnosti, ale vzhledem k tomu, že by Česká republika mohla být o prvenství tohoto objevu připravena, rozhodl jsem se zveřejnit všechny. Činím tak v naději, že tím přispěji k dalšímu rozvoji české výchovně vzdělávací soustavy.

Přihrádkový princip I: *Rozmístíme-li $n+1$ drahých předmětů do n přihrádek, druhý den v nich nic nenajdeme.*

Přihrádkový princip II: *Nepodaří-li se nám do n přihrádek rozmístit žádný z $n+1$ předmětů, byla největší přihrádka menší než nejmenší předmět, nebo jsme zapomněli, že jsme předměty, které do nich chceme rozmístit, rozmístili už do jiných.*

Přihrádkový princip III: *Rozmístíme-li $n+1$ předmětů do n přihrádek tak, že v každé je nejvýše jeden předmět, rozmístili jsme nejspíše n předmětů do $n+1$ přihrádek.*[3]

[3] V praxi lze zkoumat i rozmisťování spojitého množství. Např. hostinský rozmisťuje 3 litry piva do 8 půllitrů. (pozn. redakce)

Přihrádkový princip IV: *Rozmístíme-li $n + 1$ předmětů do n přihrádek a jsou-li druhý den všechny prázdné, musel někdo alespoň z jedné přihrádky vzít aspoň dva předměty.*[4]

Přihrádkový princip V: *Rozmístíme-li $n + 1$ předmětů do n přihrádek, míra uspořádanosti vesmíru sice vzroste, ale binec na vašem psacím stole se nezmenší.*

Přihrádkový princip VI: *Rozmístíme-li $n + 1$ předmětů do n přihrádek a žádný při tom nerozbijeme, určitě se rozbije aspoň jeden, až je budeme vyndavat.*

Přihrádkový princip VII: *Jste-li mezi $n+1$ osobami, které byly rozmístěny do n přihrádek, určitě budete v jedné přihrádce s tou nejprotivnější ženskou.*

Přihrádkový princip VIII: *Rozmístíme-li $n + 1$ předmětů do n přihrádek a potřebujeme-li pak jeden z nich, v žádné přihrádce ho nenajdeme.*

Přihrádkový princip IX: *Rozmístíme-li $n + 1$ předmětů do n přihrádek jakýmkoliv způsobem, vždycky se najde někdo, kdo bude říkat, že by to udělal mnohem lépe.*

Přihrádkový princip X: *Rozmístíme-li cizích $n + 1$ předmětů do svých n přihrádek, budeme časem sami do nějaké přihrádky umístěni.*

Potěšilo by mě, kdyby čtenáři, kteří byli těmito principy zaujati, mi dali vědět, jak je využívají ve své pedagogické praxi. Doufám také, že nejeden čtenář při četbě výše uvedených principů zaslechl šumění patamatematických perutí nebo alespoň zborcené harfy tón.[5]

LITERATURA

[1] Calda, E., *Dirichletův princip v několika snadných úlohách*, Matematika, fyzika, informatika **5** (1996/97), 521–523.

---

[4] Pokud ovšem předměty nebyly např. ze suchého ledu. (pozn. redakce)

[5] Doslechli jsme se, jak autor tohoto článku užívá při své pedagogické praxi přihrádkový princip: tři z přihrádek jsou označeny přirozenými čísly 1, 2, 3, čtvrtá slovem *nevyhověl*. Z poslední přihrádky prý zaznívá *ztrhané struny zvuk*. (pozn. redakce)