František Kuřina
Matematika v obrazech (1)

Učitel matematiky, Vol. 6 (1998), No. 1, 1–10

MATEMATIKA V OBRAZECH (1)

Aritmetika a algebra

František Kuřina

Svět se mění, my opouštíme Guttenbergovu galaxii, hvězdu knihy, a přecházíme do světa symbolů, čísel, dat, kdy se písemnictví mění v „obraznictví", všechno je vnímáno pomocí obrazů.

Jiří Gruša

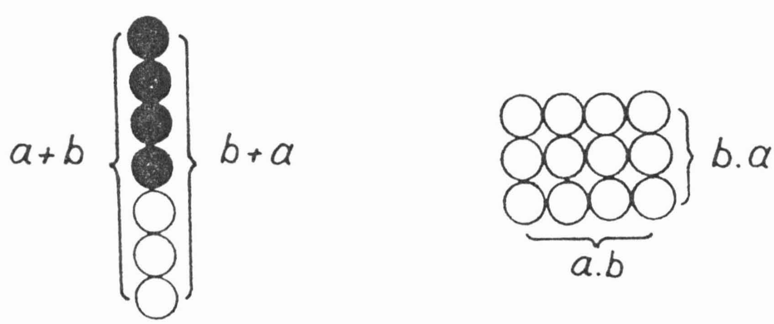
Myšlení je spjato s vyjadřováním, vyučování s komunikací. Jak z hlediska myšlení samotného, tak i z hlediska předávání idejí je významná otázka reprezentace myšlenek. Obvykle bývají myšlenky popisovány slovy či symboly, od samého začátku lidské civilizace se však setkáváme i s vizuální formou jejich reprezentace. Domnívám se, že této formě věnujeme v naší škole menší péči, než by si zasloužila. Proto se zaměříme na tuto problematiku v čtyřdílném seriálu motivovaném mým referátem *Jak učinit myšlenku viditelnou*, který jsem přednesl na konferenci *Vyučování matematice a kultivace myšlení* konané v červnu 1997 v Hradci Králové.

Vizuální vyjadřování není tak univerzální jako vyjádření slovní. Není rovněž lineární, informace v něm nejsou uspořádány. To jsou zároveň jeho výhody i nevýhody. Porozumět obrázku může trvat dost dlouho, souvislosti však můžeme vidět velmi zřetelně a přesvědčivě. Nevýhodou vizuální informace je její konkrétnost: obrázek zpravidla nezachycuje obecný případ, ale pouze některý případ speciální. Výhodou vizuálního vyjadřování je jeho názornost. Důležitá z hlediska vyučování je i skutečnost, že obrázek zpravidla spojuje více oblastí matematiky, např. aritmetiku s geometrií, a tak může přispívat k hlubšímu porozumění pojmům a postižení souvislostí. V některých případech je obrázek konkrétnější než symbolické vyjádření, někdy může spojovat pojem s jeho historickým vývojem.

V tomto příspěvku uvedeme několik příkladů vizuálního vyjadřování v aritmetice a v algebře. Jde zpravidla o podněty, které se vztahují k základní škole nebo k nižším ročníkům školy střední.

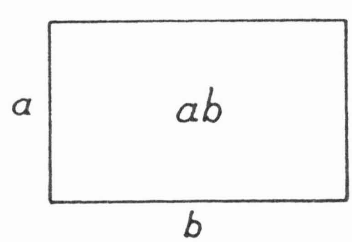
U každého příkladu uvádím zdroj – ten ovšem zpravidla není totožný s prvním výskytem uvažovaného znázornění. Tyto historické aspekty mohou být z různých hledisek zajímavé, nicméně se jimi zde budeme zabývat jen okrajově.

Dobrou vizuální pomůckou jsou různé druhy počitadel. Na klasickém počitadle můžeme dvěma pohledy na touž situaci znázornit komutativitu sčítání a násobení (obr. 1).



Obr. 1

Interpretujeme-li kladné reálné číslo jako délku úsečky, představuje součin dvou takových čísel obsah obdélníku (obr. 2).

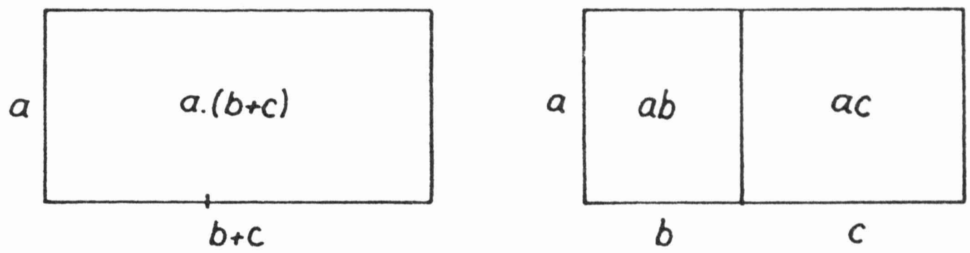


Obr. 2

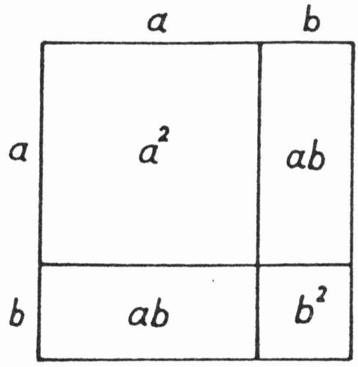
Pak ovšem můžeme znázornit geometricky různé aritmetické zákonitosti, např. distributivitu násobení vzhledem ke sčítání nebo vzorec pro druhou mocninu součtu (obr. 3, 4):

$$a \cdot (b + c) = ab + ac \tag{1}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{2}$$



Obr. 3

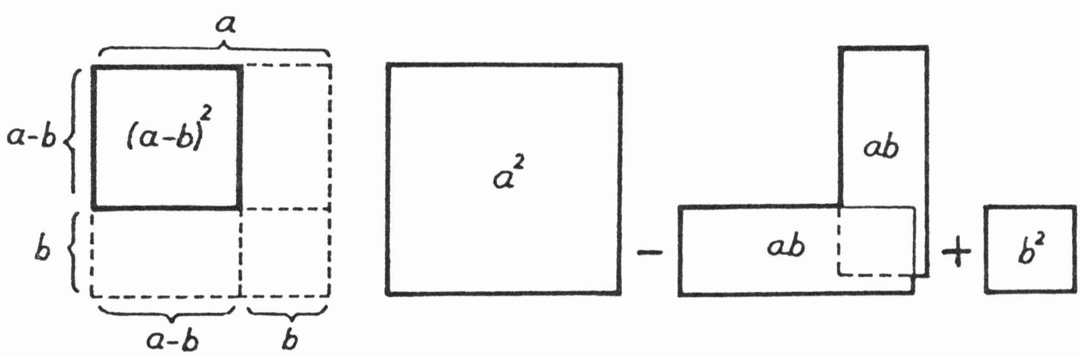


Obr. 4

Znázornit vzorec

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{3}$$

je ovšem poněkud obtížnější. Z několika možností známých z literatury uveďme zde klasický přístup Bradisův (1939) (obr. 5).

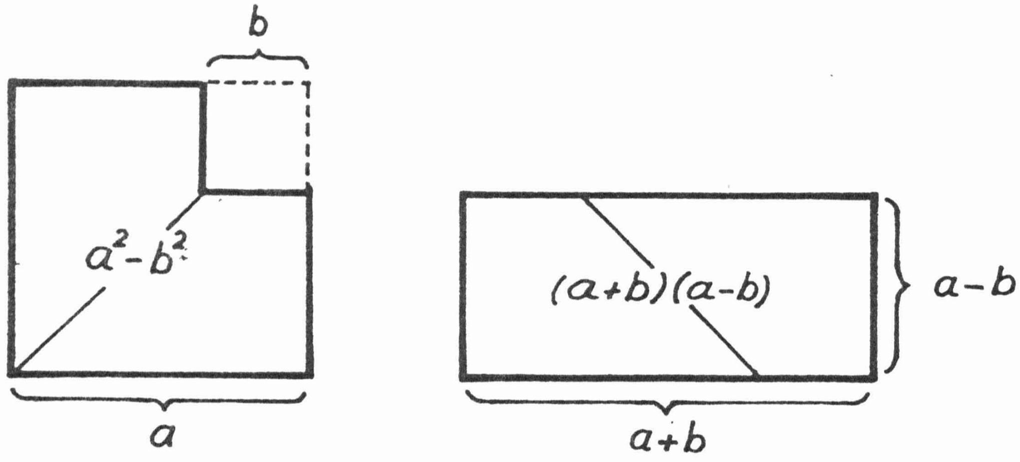


Obr. 5

Velmi názornou ilustraci vzorce

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \tag{4}$$

uvádí M. Hejný ve *Žluté knize* (1989) (obr. 6).



Obr. 6

Ve staré řecké matematice mají původ mnohá geometrická znázornění, která se objevují a někdy i znovu objevují v historii matematiky vícekrát. Tak např. vzorec

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \tag{5}$$

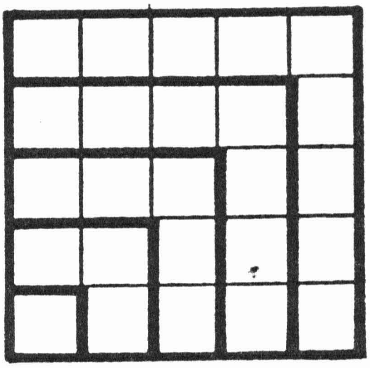
pro součet prvých n lichých čísel zdůvodnil obrázkem 7 v 1. století našeho letopočtu Nikomachos. V roce 1908 objevil tento výsledek znovu pětiletý A. N. Kolmogorov, budoucí významný matematik.

Vzorec pro součet prvých n přirozených čísel

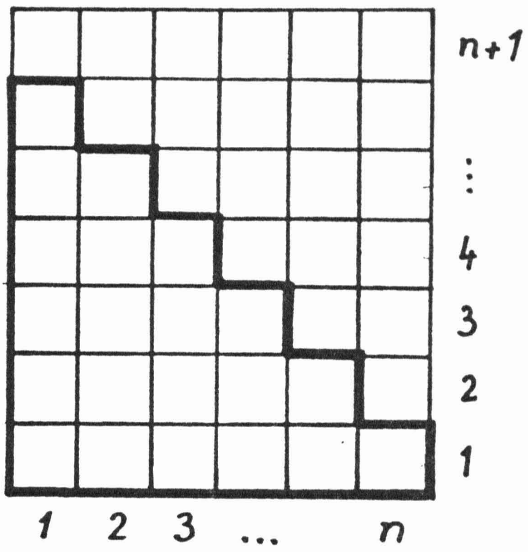
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} n (n + 1) \tag{6}$$

znázorňovali geometricky rovněž staří Řekové (obr. 8).

Není bez zajímavosti, že k tomuto vzorci došel, jak se traduje, školák K. F. Gauss, budoucí matematický génius.



Obr. 7

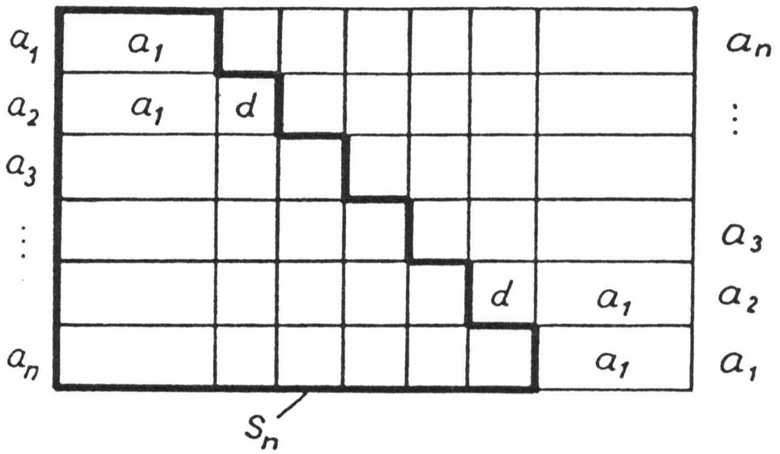


Obr. 8

Vzorec (6) vyjadřuje ovšem součet prvých n členů aritmetické posloupnosti s prvým členem 1 a diferencí rovněž 1. Je přirozené, že analogicky můžeme znázornit i základní vzorce pro n-tý člen a součet prvých n členů aritmetické posloupnosti (obr. 9):

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d \tag{7}$$

$$s_n = \frac{1}{2}\,n\,(a_1 + a_n) \tag{8}$$

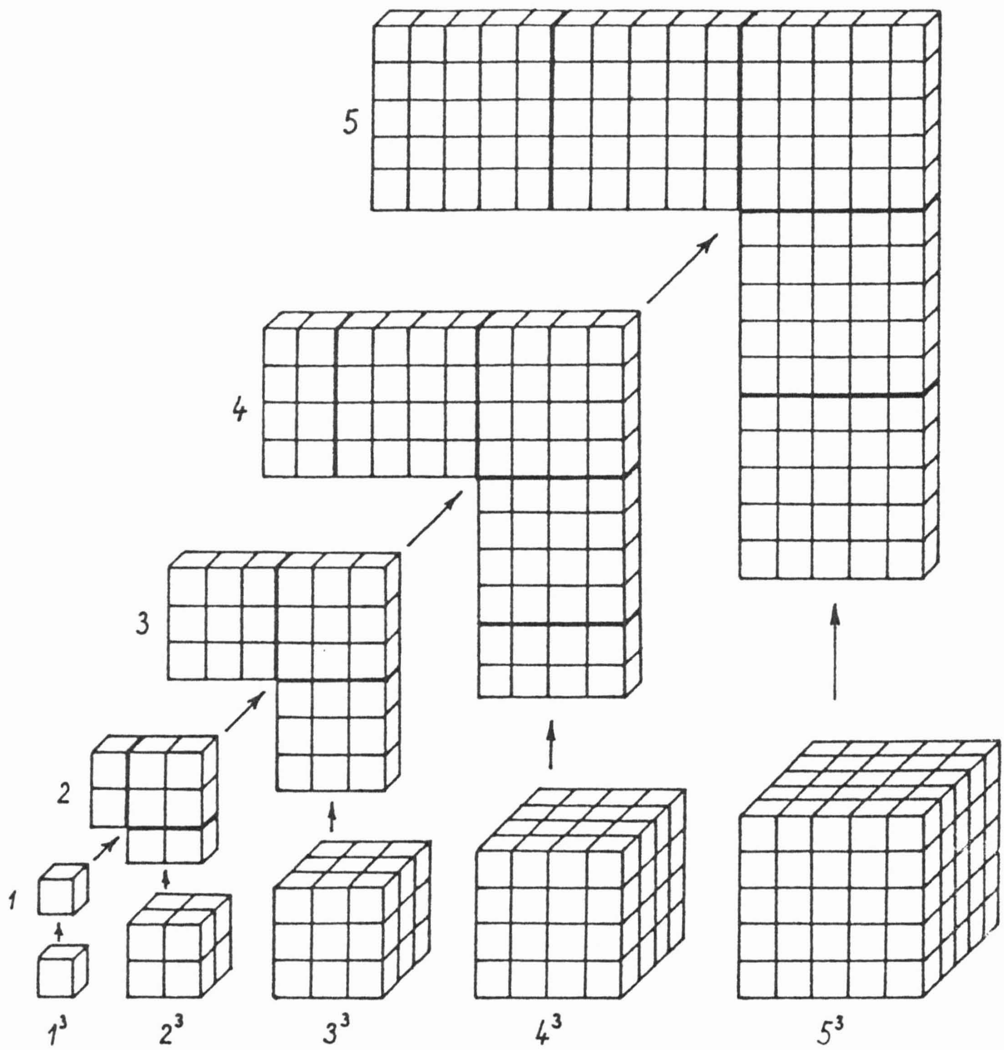


Obr. 9

Zajímavější je přirozeně otázka, jak odvodit další „součtové vzorce“, např. vzorec pro součet třetích mocnin prvých n přirozených čísel

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

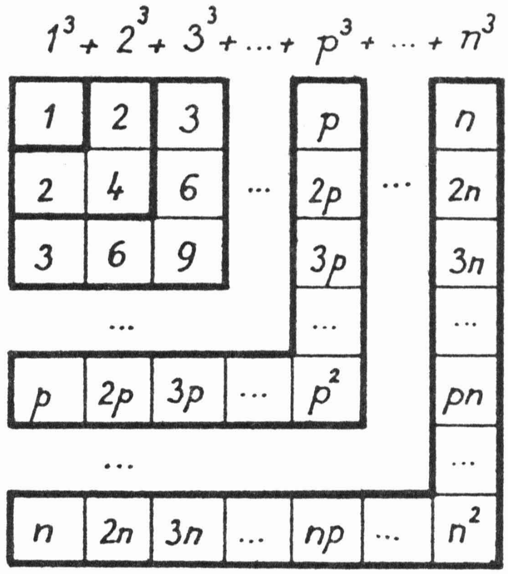
Tato forma napovídá, že bychom mohli vhodným způsobem „přestavět“ n krychlí složených z jednotkových krychlí. Že je to dobře možné, ukázal v roce 1985 A. L. Fry (obr. 10).



Obr. 10

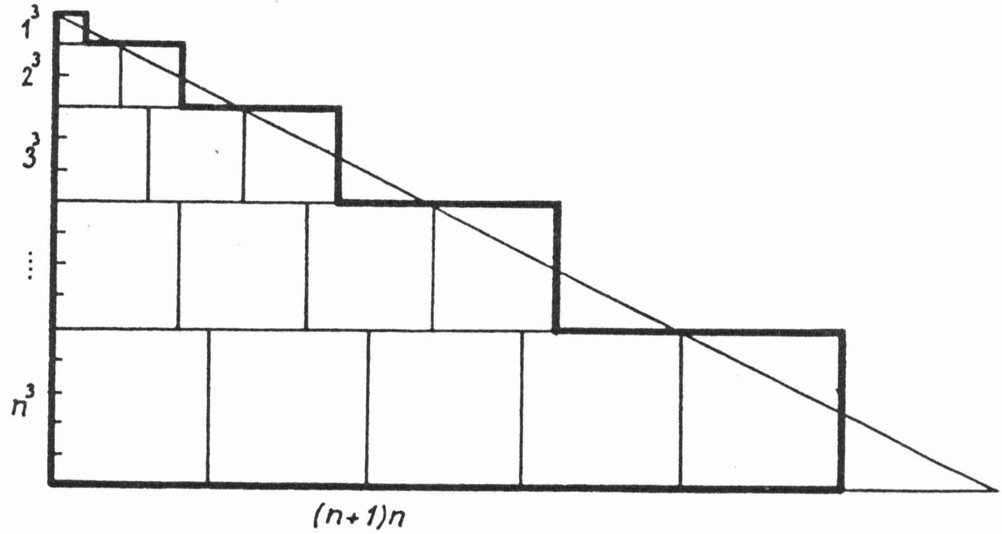
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{1}{2}\, n\,(n+1)\right]^2 \qquad (9)$$

Sečítáme-li čísla ve čtvercové tabulce podle obr. 11 jednak v řádcích, jednak v „gnómonech“, dostaneme rovněž požadovaný výsledek. Tento postup uvádí např. B. A. Korděmskij (1955).



Obr. 11

Snad nejelegantnější odvození našeho součtu pochází od G. Schrageho z roku 1992 (obr. 12).



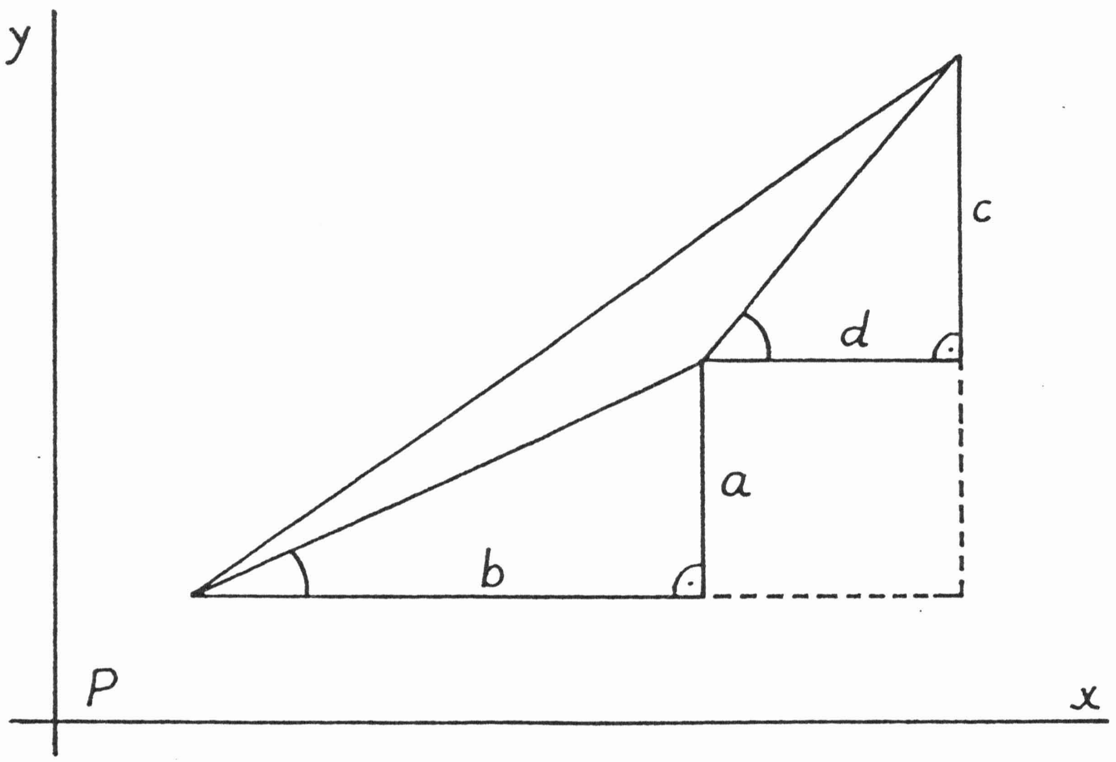
Obr. 12

Dnes je přirozené znázorňovat aritmetické vztahy v kartézské soustavě souřadnic. Tento způsob umožňuje opět „uvidět" některá zdůvodnění.

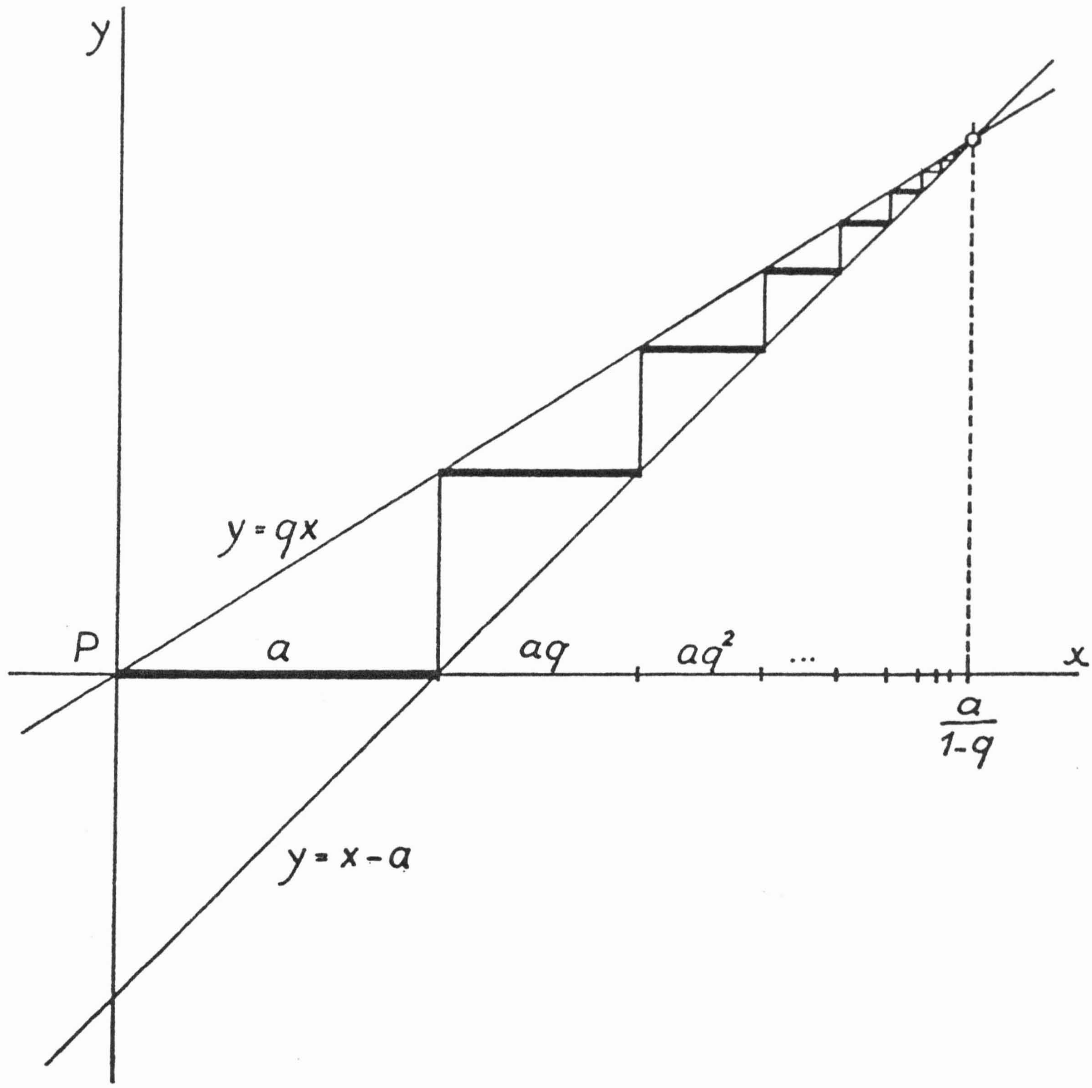
Platnost věty

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d},$$

kde a, b, c, d jsou kladná čísla, je bezprostředně patrná z obr. 13, který pochází od R. A. Gibbse. V kartézské soustavě souřadnic můžeme znázornit i součet nekonečné geometrické řady (Kölling - Löffler, 1941) podle obr. 14.



Obr. 13

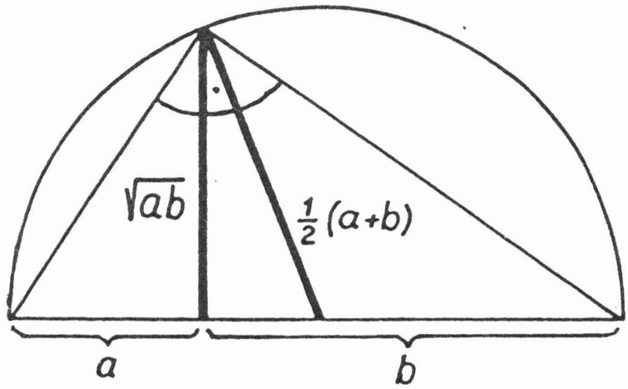


Obr. 14

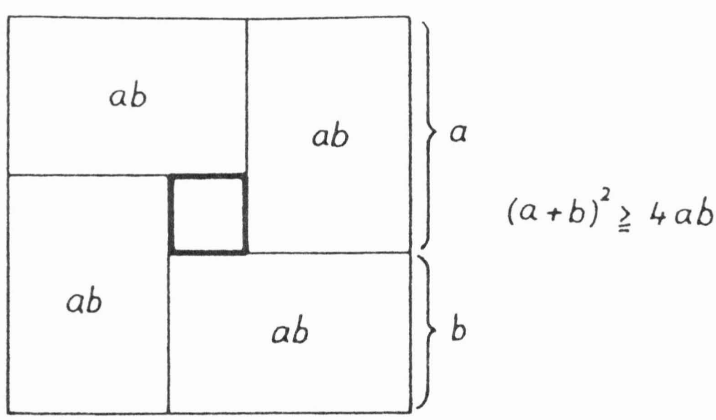
Nakonec uveďme dvě z geometrických znázornění nerovnosti

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b) \qquad (10)$$

mezi kladnými čísly a, b. První vyplývá z Euklidovy věty o výšce podle obr. 15. Druhé pochází od D. Schattschneidera z r. 1986 (obr. 16).



Obr. 15



Obr. 16

Vidění je aktivní, tvořivý proces. Náš mozek tvoří nejlepší výklady, jichž je schopen, a to v souladu s předešlými zkušenostmi a omezeními, mnohoznačnými informacemi dodávanými našima očima. Evoluce přihlédla k tomu, že to náš mozek dokáže obvykle, ale ne vždycky, s pozoruhodným výsledkem.

Francis Crick